Laboratorio 4: Método Simplex y sus Variaciones

Profesores:
Carlos Andrés Lozano,
Germán Adolfo Montoya,

Profesor de Laboratorio:
Juan Andrés Mendez

3 de abril de 2025

1 Objetivo

El propósito de este laboratorio es introducir a los estudiantes en la programación lineal y el método Simplex, implementando desde cero tanto el algoritmo Simplex estándar como su variante Dual Phase. A través de ejercicios prácticos, los estudiantes desarrollarán una comprensión profunda de estos métodos fundamentales para la optimización lineal, y compararán su eficiencia con solvers profesionales utilizados a través de Pyomo. Este laboratorio permitirá a los estudiantes entender las fortalezas y limitaciones de los diferentes enfoques para resolver problemas de programación lineal.

2 Fundamentación Matemática

2.1 Programación Lineal

La programación lineal es una técnica de optimización matemática que busca maximizar o minimizar una función lineal objetivo sujeta a restricciones lineales. Formalmente, un problema de programación lineal puede expresarse como:

$$\text{Maximizar (o Minimizar)} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{1}$$
$$\text{sujeto a} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \tag{2}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{3}$$

Donde:

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables de decisión
- $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coeficientes de la función objetivo
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz de coeficientes de las restricciones
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de términos independientes de las restricciones

2.2 Forma Estándar de un Problema de Programación Lineal

Para aplicar el método Simplex, es necesario convertir el problema a su forma estándar:

$$\text{Maximizar} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{4}$$
$$\text{sujeto a} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{5}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{6}$$

Esta transformación implica:

- Convertir un problema de minimización en uno de maximización mediante $\min f(\mathbf{x}) = -\max(-f(\mathbf{x}))$
- Convertir restricciones de desigualdad en restricciones de igualdad introduciendo variables de holgura
- Asegurar que los términos independientes sean no negativos ($b_i \geq 0$)

2.3 Método Simplex

2.3.1 Fundamento Teórico

El método Simplex, desarrollado por George Dantzig en 1947, es un algoritmo para encontrar la solución óptima de un problema de programación lineal. Se basa en dos principios fundamentales:

Teorema Fundamental de la Programación Lineal

Si un problema de programación lineal tiene una solución óptima finita, entonces al menos una solución óptima corresponde a un punto extremo (vértice) del poliedro que define la región factible.
Formalmente, si existe $\mathbf{x}^*$ tal que $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, entonces existe un punto extremo $\mathbf{x}'$ tal que $\mathbf{c}^T\mathbf{x}' = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$.

Teorema de Mejora del Simplex

Si un punto extremo no es óptimo, entonces existe un punto extremo adyacente que proporciona un mejor valor para la función objetivo.
Matemáticamente, si $\mathbf{x}^k$ es un punto extremo no óptimo, entonces existe un punto extremo adyacente $\mathbf{x}^{k+1}$ tal que $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^{k+1} > \mathbf{c}^T\mathbf{x}^k$ (en un problema de maximización).

Teorema de Convergencia Finita

Si el problema de programación lineal tiene una solución óptima finita y no hay degeneración (cada solución básica tiene exactamente m variables básicas positivas), entonces el método Simplex converge a una solución óptima en un número finito de iteraciones.

2.3.2 Solución Básica Factible

Una solución básica se corresponde con un punto extremo del poliedro de soluciones factibles. Una base es un conjunto de m columnas linealmente independientes de la matriz $\mathbf{A}$. Una solución básica se obtiene asignando valor cero a las variables no básicas y resolviendo para las variables básicas.

Caracterización de Puntos Extremos

Un punto factible $\mathbf{x}$ es un punto extremo del poliedro factible si y solo si las columnas de $\mathbf{A}$ correspondientes a las variables positivas en $\mathbf{x}$ son linealmente independientes.

Una solución básica factible (SBF) es una solución básica en la que todas las variables son no negativas.

2.3.3 Algoritmo Simplex Estándar

El método Simplex opera iterativamente, moviéndose de un punto extremo a otro adyacente que mejore la función objetivo, hasta alcanzar el óptimo o determinar que el problema es ilimitado.

Método Simplex Estándar

Entrada: Problema de programación lineal en forma estándar con una SBF inicial.
Salida: Solución óptima o indicación de que el problema es ilimitado.

1. **Inicialización:**
   a) Identificar una solución básica factible inicial (típicamente usando variables de holgura como variables básicas).
   b) Construir la tabla Simplex inicial:
      - Primera fila: coeficientes de la función objetivo (negados para problemas de maximización).
      - Cuerpo de la tabla: coeficientes de las restricciones.
      - Última columna: términos independientes (valores $\mathbf{b}$).
      - Identificar las variables básicas actuales.
2. **Verificar optimalidad:**
   a) Calcular los costos reducidos $\bar{c}_j$ para cada variable no básica.
   b) Si todos los costos reducidos son no negativos (para maximización), la solución actual es óptima. Terminar.
3. **Seleccionar variable de entrada:**
   a) Elegir una variable no básica con costo reducido negativo (para maximización) para ingresar a la base.
   b) Regla de Dantzig: seleccionar la variable con el costo reducido más negativo.
4. **Calcular razones:**
   a) Para cada restricción i donde el coeficiente a_{ij} de la variable de entrada j es positivo, calcular la razón $\theta_i = \frac{b_i}{a_{ij}}$.
   b) Si todos los coeficientes $a_{ij} \leq 0$, el problema es ilimitado. Terminar.
5. **Seleccionar variable de salida:**
   a) La variable básica asociada a la restricción con la menor razón θ_i sale de la base (regla del mínimo cociente).
   b) Este paso determina el elemento pivote a_{rs} en la fila r y columna s.
6. **Actualizar la tabla (operación de pivoteo):**
   a) Dividir la fila del pivote r por el valor del pivote a_{rs}.
   b) Para cada fila $i \neq r$:
      - Restar de la fila i la fila pivote multiplicada por a_{is}.
   c) Actualizar la lista de variables básicas (reemplazar la variable que sale por la que entra).
7. **Iteración:** Volver al paso 2.

2.3.4 Limitaciones del Simplex Estándar

El método Simplex estándar requiere una solución básica factible inicial, que no siempre es fácil de obtener. Además, puede tener dificultades en problemas donde:

- Las restricciones no se ajustan naturalmente a la forma estándar
- No se dispone de una SBF inicial obvia
- Existen restricciones de igualdad con términos independientes negativos

2.4 Método Simplex Dual Phase (Dos Fases)

2.4.1 Fundamento Teórico

El método Simplex Dual Phase (o Simplex de Dos Fases) aborda la limitación del Simplex estándar respecto a la necesidad de una SBF inicial. Divide el proceso de solución en dos fases:

Teorema de Factibilidad mediante Variables Artificiales

Para cualquier problema de programación lineal en forma estándar, es posible construir un problema auxiliar añadiendo variables artificiales de tal manera que:

- El problema auxiliar tiene una SBF inicial obvia.
- Si el problema original es factible, la solución óptima del problema auxiliar tendrá todas las variables artificiales iguales a cero.
- Si el problema original no es factible, alguna variable artificial será estrictamente positiva en la solución óptima del problema auxiliar.

- **Fase I:** Encuentra una solución básica factible inicial introduciendo variables artificiales.
- **Fase II:** Aplica el método Simplex estándar desde la SBF encontrada en la Fase I.

2.4.2 Fase I: Encontrar una SBF Inicial

Para encontrar una solución básica factible inicial:

Fase I del Método Simplex Dual Phase

Entrada: Problema de programación lineal en forma estándar.
Salida: Una SBF inicial o indicación de que el problema es infactible.

1. **Convertir todas las restricciones a igualdades:**
   a) Para cada restricción de tipo "$\leq$", añadir una variable de holgura con coeficiente positivo.
   b) Para cada restricción de tipo "$\geq$", añadir una variable de exceso con coeficiente negativo.
   c) Asegurar que todos los términos independientes b_i sean no negativos (multiplicar por -1 la restricción si es necesario).
2. **Introducir variables artificiales:**
   a) Para cada restricción de igualdad que no tenga una variable de holgura con coeficiente 1, añadir una variable artificial con coeficiente 1.
   b) Las variables artificiales formarán la base inicial.
3. **Formular el problema auxiliar:**
   a) Crear una nueva función objetivo que minimice la suma de todas las variables artificiales:
   $$w = \sum_{i \in I} a_i$$
   donde I es el conjunto de índices de las variables artificiales.
4. **Resolver el problema auxiliar:**
   a) Aplicar el método Simplex estándar al problema auxiliar.
   b) Si el valor óptimo es cero, se ha encontrado una SBF para el problema original.
   c) Si el valor óptimo es mayor que cero, el problema original es infactible.
5. **Preparar para la Fase II:**
   a) Si alguna variable artificial permanece en la base con valor cero, realizar pivoteos adicionales para reemplazarla por una variable original.
   b) Eliminar las columnas correspondientes a variables artificiales de la tabla.

2.4.3 Fase II: Resolver el Problema Original

Una vez encontrada una SBF:

Fase II del Método Simplex Dual Phase

Entrada: Tabla Simplex con una SBF inicial para el problema original.
Salida: Solución óptima o indicación de que el problema es ilimitado.

1. **Preparar la tabla Simplex:**
   a) Eliminar todas las variables artificiales.
   b) Restablecer la función objetivo original.
   c) Calcular la fila de costos reducidos para la función objetivo original.
2. **Aplicar el método Simplex estándar:**
   a) Continuar con el método Simplex estándar desde la SBF encontrada en la Fase I.
   b) Retornar la solución óptima o indicar que el problema es ilimitado.

Método Simplex Dual Phase Completo

Entrada: Problema de programación lineal en forma estándar.
Salida: Solución óptima, indicación de que el problema es infactible o ilimitado.

1. **Fase I: Encontrar una SBF inicial**
   a) Introducir variables artificiales para formar una base inicial.
   b) Formular el problema auxiliar que minimiza la suma de variables artificiales.
   c) Aplicar el método Simplex estándar al problema auxiliar.
   d) Si el valor óptimo es cero, proceder a la Fase II.
   e) Si el valor óptimo es mayor que cero, el problema original es infactible. Terminar.
2. **Fase II: Resolver el problema original**
   a) Eliminar las variables artificiales.
   b) Restablecer la función objetivo original.
   c) Aplicar el método Simplex estándar con la SBF de la Fase I.
   d) Retornar la solución óptima o indicar que el problema es ilimitado.

2.5 Comparación entre Simplex Estándar y Simplex Dual Phase

El Cuadro 1 muestra una comparación rapida de las principales características de los dos métodos presentados.

Característica	Simplex Estándar	Simplex Dual Phase
Requisito de SBF inicial	Requiere una SBF para iniciar	Encuentra una SBF como parte del algoritmo
Aplicabilidad	Problemas con SBF obvia o fácil de encontrar	Problemas generales de programación lineal
Complejidad	Menor	Mayor (requiere resolver un problema auxiliar)
Detección de infactibilidad	No garantizada	Capaz de determinar si el problema es infactible
Eficiencia computacional	Mayor cuando se dispone de SBF inicial	Menor debido a la fase auxiliar

Cuadro 1: Comparación de los métodos Simplex Estándar y Simplex Dual Phase

2.6 Análisis de Sensibilidad en el Método Simplex

2.6.1 Fundamento Teórico

El análisis de sensibilidad es una técnica que examina cómo los cambios en los parámetros de un problema de programación lineal afectan la solución óptima. Esta herramienta es crucial para la toma de decisiones en entornos dinámicos donde los parámetros pueden variar con el tiempo.

Teorema de Dualidad en Programación Lineal

Para cada problema de programación lineal (primal), existe un problema dual asociado tal que:

- Si el problema primal tiene una solución óptima finita, el problema dual también tiene una solución óptima finita, y los valores óptimos de ambas funciones objetivo coinciden.
- Si el problema primal es ilimitado, el problema dual es infactible.
- Si el problema primal es infactible, el problema dual puede ser ilimitado o infactible.

Formalmente, si el problema primal es:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} && (7) \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} && (8) \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} && (9) \end{aligned}$$

El problema dual es:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \mathbf{b}^T\mathbf{y} && (10) \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c} && (11) \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} && (12) \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{y}$ es el vector de variables duales.

Teorema de Holgura Complementaria

Si $\mathbf{x}^*$ es una solución óptima del problema primal y $\mathbf{y}^*$ es una solución óptima del problema dual, entonces:

- Si una variable primal $x_j^* > 0$, entonces la correspondiente restricción dual se satisface con igualdad: $[\mathbf{A}^T\mathbf{y}^*]_j = c_j$.
- Si una variable dual $y_i^* > 0$, entonces la correspondiente restricción primal se satisface con igualdad: $[\mathbf{A}\mathbf{x}^*]_i = b_i$.

En otras palabras, $x_j^* \cdot ([\mathbf{A}^T\mathbf{y}^*]_j - c_j) = 0$ para toda j y $y_i^* \cdot (b_i - [\mathbf{A}\mathbf{x}^*]_i) = 0$ para toda i.

2.6.2 Shadow Prices (Precios Sombra)

Las variables duales óptimas $\mathbf{y}^*$ se conocen como *shadow prices* o precios sombra. Tienen una interpretación económica importante:

Interpretación de los Shadow Prices

El shadow price y_i^* asociado a la i-ésima restricción representa el cambio incremental en el valor óptimo de la función objetivo cuando el término independiente b_i se incrementa en una unidad.

Matemáticamente, si denotamos por Z^* al valor óptimo de la función objetivo, entonces:

$$y_i^* = \frac{\partial Z^*}{\partial b_i}$$

Este resultado es válido siempre que el incremento en b_i sea lo suficientemente pequeño para no cambiar la base óptima.

2.6.3 Algoritmo para el Análisis de Sensibilidad

El análisis de sensibilidad puede realizarse a partir de la tabla Simplex final, lo que lo convierte en una extensión natural del método Simplex.

Análisis de Sensibilidad para Coeficientes de la Función Objetivo

Entrada: Tabla Simplex final con la solución óptima.
Salida: Rangos de estabilidad para los coeficientes de la función objetivo.

1. **Identificar variables básicas y no básicas:**
   a) Variables básicas: aquellas con valor positivo en la solución óptima.
   b) Variables no básicas: aquellas con valor cero en la solución óptima.
2. **Para cada variable no básica x_j:**
   a) Obtener el costo reducido $\bar{c}_j$.
   b) Calcular el rango de variación para el coeficiente c_j que mantiene la base óptima:
   $$c_j \leq c_j^{actual} + \bar{c}_j$$
   c) Si $\bar{c}_j > 0$, el coeficiente c_j puede aumentar indefinidamente sin afectar la optimalidad.
3. **Para cada variable básica x_i:**
   a) Identificar los coeficientes a_{ij} en la fila i de la inversa de la base.
   b) Calcular los valores críticos:
   $$\Delta c_i^- = \min_{j:a_{ij}>0} \frac{\bar{c}_j}{a_{ij}}, \quad \Delta c_i^+ = \max_{j:a_{ij}<0} \frac{\bar{c}_j}{a_{ij}}$$
   c) El rango de estabilidad para c_i es:
   $$c_i^{actual} - \Delta c_i^- \leq c_i \leq c_i^{actual} + \Delta c_i^+$$

Análisis de Sensibilidad para Términos Independientes

Entrada: Tabla Simplex final con la solución óptima.
Salida: Rangos de estabilidad para los términos independientes y shadow prices.

1. **Obtener los shadow prices:**
   a) Los shadow prices y_i^* son los coeficientes de las variables de holgura en la función objetivo expresada en términos de las variables no básicas.
2. **Para cada restricción i:**
   a) Si la restricción está activa (la variable de holgura es cero), identificar los coeficientes β_{ij} que relacionan la variable de holgura con las variables no básicas.
   b) Calcular los valores críticos:
   $$\Delta b_i^- = \min_{j:\beta_{ij}<0} \frac{x_B^*}{\beta_{ij}}, \quad \Delta b_i^+ = \min_{j:\beta_{ij}>0} \frac{x_B^*}{\beta_{ij}}$$
   donde x_B^* es el valor óptimo de la variable básica correspondiente.
   c) El rango de estabilidad para b_i es:
   $$b_i^{actual} - \Delta b_i^- \leq b_i \leq b_i^{actual} + \Delta b_i^+$$
3. **Interpretación de los shadow prices:**
   a) Si $y_i^* > 0$, un aumento en b_i dentro del rango de estabilidad resultará en un incremento proporcional del valor óptimo de la función objetivo.
   b) Si $y_i^* = 0$, la restricción no es limitante y su término independiente puede aumentar sin afectar el valor óptimo.

2.6.4 Interpretación del Análisis de Sensibilidad

Rangos de Estabilidad Los rangos de estabilidad indican los intervalos dentro de los cuales los parámetros pueden variar sin cambiar la base óptima. Esto significa que la misma solución seguirá siendo óptima, aunque los valores específicos pueden cambiar.

Shadow Prices Los shadow prices proporcionan información valiosa sobre el impacto marginal de las restricciones:

- Un shadow price positivo ($y_i^* > 0$) indica que la restricción está activa y que un aumento en el recurso correspondiente mejoraría la función objetivo.
- Un shadow price igual a cero ($y_i^* = 0$) indica que la restricción no está activa, y un pequeño aumento en el recurso no afectaría la función objetivo.
- El valor numérico del shadow price representa la tasa de cambio en la función objetivo por unidad de cambio en el recurso.

Relación entre Análisis de Sensibilidad y Programación Paramétrica

El análisis de sensibilidad puede verse como un caso especial de programación paramétrica, donde se estudia cómo cambia la solución óptima cuando los parámetros varían continuamente.
Formalmente, si consideramos el problema paramétrico:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & Z(t) = \mathbf{c}(t)^T\mathbf{x} && (13) \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}(t) && (14) \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} && (15) \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{c}(t)$ y $\mathbf{b}(t)$ son funciones del parámetro t, el análisis de sensibilidad proporciona resultados para valores de t próximos al valor nominal.

3 Problemas

3.1 Problema 1: Implementación del Método Simplex Estándar

3.1.1 Descripción del Problema

Implementar el método Simplex estándar para resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 && (16)\\
\text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 && (17)\\
& 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 150 && (18)\\
& x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 80 && (19)\\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 && (20)
\end{aligned}
$$

3.1.2 Instrucciones

1. Convertir el problema a la forma estándar introduciendo variables de holgura.
2. Implementar el algoritmo del método Simplex desde cero en Python.
3. Inicializar la solución básica factible utilizando las variables de holgura.
4. Elaborar la tabla Simplex inicial y mostrar cada iteración del algoritmo.
5. Identificar la solución óptima y el valor de la función objetivo.
6. Interpretar geométricamente la solución en el espacio de variables originales.
7. Incluir un análisis de sensibilidad básico para entender cómo pequeños cambios en los coeficientes de la función objetivo o en los términos independientes afectan la solución.

3.2 Problema 2: Implementación del Método Simplex Dual Phase

3.2.1 Descripción del Problema

Implementar el método Simplex de Dos Fases (Dual Phase) para resolver el siguiente problema de programación lineal que no tiene una solución básica factible inicial obvia:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & Z = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 && (21)\\
\text{sujeto a} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 = 10 && (22)\\
& x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 5 && (23)\\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq 15 && (24)\\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 && (25)
\end{aligned}$$

3.2.2 Instrucciones

1. Convertir el problema a la forma estándar, transformando la minimización en maximización, convirtiendo las desigualdades en igualdades mediante variables de holgura y/o exceso, y asegurando que los términos independientes sean no negativos.
2. Implementar el algoritmo del método Simplex de Dos Fases desde cero en Python.
3. Para la Fase I:
   a) Introducir las variables artificiales necesarias.
   b) Formular el problema auxiliar que minimiza la suma de variables artificiales.
   c) Resolver este problema auxiliar utilizando el método Simplex estándar.
   d) Verificar si se encontró una solución básica factible para el problema original.
4. Para la Fase II:
   a) Eliminar las variables artificiales y restablecer la función objetivo original.
   b) Aplicar el método Simplex estándar desde la SBF encontrada en la Fase I.
5. Documentar cada iteración del algoritmo, tanto para la Fase I como para la Fase II.
6. Identificar la solución óptima y el valor de la función objetivo.

3.3 Problema 3: Comparación de Rendimiento con GLPK/Pyomo

3.3.1 Descripción del Problema

Compare el rendimiento computacional de sus implementaciones del método Simplex (estándar y dual phase) con el solver GLPK a través de Pyomo, resolviendo el siguiente problema de programación lineal de mayor escala:

$$\text{Maximizar} \quad Z = \sum_{i=1}^{10} c_i x_i \tag{26}$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{i=1}^{10} a_{ji} x_i \leq b_j \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, 8 \tag{27}$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, 10 \tag{28}$$

3.3.2 Variables del Problema

Se utilizarán los siguientes valores:

- **Coeficientes de la función objetivo:**
  $\mathbf{c} = [5,\ 8,\ 3,\ 7,\ 6,\ 9,\ 4,\ 10,\ 2,\ 11]$
- **Coeficientes de las restricciones (matriz A):**

$$\begin{aligned}
a_1 &= [1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 3,\ 1,\ 2,\ 1] \\
a_2 &= [2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 3,\ 1,\ 2] \\
a_3 &= [1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 3,\ 1] \\
a_4 &= [0,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1] \\
a_5 &= [2,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 2] \\
a_6 &= [1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1] \\
a_7 &= [0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0] \\
a_8 &= [1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1]
\end{aligned}$$

- **Términos independientes:**
  $\mathbf{b} = [50,\ 60,\ 55,\ 40,\ 45,\ 70,\ 65,\ 50]$

3.3.3 Instrucciones

1. Modele el problema en Pyomo utilizando el solver GLPK.
2. Resuelva el mismo problema empleando sus implementaciones del método Simplex estándar y del método Simplex Dual Phase.
3. Compare los resultados obtenidos en términos de:
   - Tiempo de ejecución
   - Número de iteraciones

4. Analice las diferencias en rendimiento y precisión entre las implementaciones propias y el solver profesional.

5. Investigue y discuta qué técnicas de optimización (por ejemplo, preprocesamiento, estrategias de pivoteo avanzado, etc.) podrían estar implementadas en GLPK para mejorar su rendimiento.

6. Genere gráficas comparativas que ilustren las diferencias de rendimiento para distintos tamaños de problema.

3.4 Problema 4: Análisis de Sensibilidad en Programación Lineal

3.4.1 Descripción del Problema

Realice un análisis de sensibilidad sobre la solución óptima obtenida mediante el método Simplex para el siguiente problema:

$$\text{Maximizar} \quad Z = 4x_1 + 3x_2 \tag{29}$$
$$\text{sujeto a} \quad x_1 + 2x_2 \leq 8 \tag{30}$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 12 \tag{31}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{32}$$

3.4.2 Instrucciones

1. Resuelva el problema utilizando su implementación del método Simplex y documente la solución óptima, incluyendo:
   - Valor óptimo de la función objetivo.
   - Variables básicas y no básicas.
   - Multiplicadores duales (precios sombra) asociados a cada restricción.

2. Realice un análisis de sensibilidad variando:
   a) Los coeficientes de la función objetivo: determine el rango de variación permitido para cada coeficiente sin que cambie la base óptima.
   b) Los términos independientes de las restricciones: interprete los precios sombra y determine el impacto en el valor óptimo por unidad de incremento o decremento en dichos términos.

3. Explique detalladamente cómo llevar a cabo el análisis de sensibilidad:
   - Describa el concepto de rango óptimo y cómo se relaciona con la estabilidad de la solución.
   - Explique la interpretación de los precios sombra y su relevancia en la toma de decisiones.
   - Indique los pasos para modificar los parámetros y volver a ejecutar el algoritmo Simplex.

4 Entregables y Criterios de Calificación

4.1 Entregables

Para cada ejercicio, se deberá entregar un archivo Python (*.py) que contenga:

1. Implementación del algoritmo correspondiente.
2. Comentarios explicativos detallando la lógica del código.
3. Visualizaciones gráficas de los resultados donde sea aplicable.
4. Análisis breve de los resultados obtenidos.

Adicionalmente, se deberá incluir un informe en formato PDF que contenga:

1. Formulación matemática de los problemas.
2. Descripción de la implementación.
3. Análisis de resultados, incluyendo tablas y gráficas comparativas.
4. Análisis de rendimiento en comparación con solvers profesionales.
5. Conclusiones y observaciones.

Tener en cuenta:

- **No es permitido** usar paquetes o funciones que implementen directamente el método Simplex. Las soluciones solicitadas **deben implementar los pseudocódigos suministrados por el laboratorio o la clase magistral**.
- Para la comparación con solvers profesionales, sí se permite el uso de Pyomo y GLPK.
- No se reciben entregas por fuera del plazo máximo y tampoco por correo. Las entregas solo se reciben por **Bloque Neón**.
- Este laboratorio se puede entregar en parejas.
- **IMPORTANTE!!!** Junto a los archivos de la entrega adjuntar los nombres de los integrantes del equipo.

4.2 Criterios de Calificación

Criterio	**Puntuación**
Implementación correcta del algoritmo Simplex Primal	25 %
Implementación correcta del algoritmo Simplex Dual Phase	25 %
Implementación correcta del analisis de sensiblidad	25 %
Calidad del código y comentarios	5 %
Análisis comparativo con GLPK/Pyomo	15 %
Originalidad y propuestas adicionales	5 %

Cuadro 2: Criterios de calificación del laboratorio

5 Referencias

- Dantzig, G. B., & Thapa, M. N. (1997). *Linear Programming 1: Introduction.* Springer.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2015). *Introduction to Operations Research.* McGraw-Hill.
- Bertsimas, D., & Tsitsiklis, J. N. (1997). *Introduction to Linear Optimization.* Athena Scientific.
- Documentación de **Pyomo**: `https://pyomo.readthedocs.io/`
- Documentación de **GLPK**: `https://www.gnu.org/software/glpk/`
- Documentación de **NumPy**: `https://numpy.org/doc/`
- Documentación de **Matplotlib**: `https://matplotlib.org/stable/contents.html`