Laboratorio 5: Optimización Multiobjetivo

Profesores:
Carlos Andrés Lozano,
Germán Adolfo Montoya,

Profesor de Laboratorio:
Juan Andrés Mendez

19 de abril de 2025

1 Objetivo

El propósito de este laboratorio es introducir a los estudiantes en la optimización multiobjetivo, un campo fundamental para resolver problemas complejos del mundo real donde se deben considerar múltiples criterios de decisión simultáneamente. A través de ejercicios prácticos, los estudiantes aprenderán a formular modelos matemáticos con múltiples funciones objetivo, implementar técnicas como el método de la suma ponderada, el método ϵ-constraint y el método lexicográfico, y analizar el conjunto de soluciones óptimas de Pareto resultantes. Este laboratorio permitirá a los estudiantes entender las compensaciones (trade-offs) inherentes en la toma de decisiones con objetivos en conflicto y desarrollar habilidades para abordar problemas de optimización más realistas.

2 Fundamentación Matemática

2.1 Optimización Multiobjetivo

La optimización multiobjetivo aborda problemas donde se deben optimizar simultáneamente múltiples funciones objetivo, generalmente en conflicto entre sí. Formalmente, un problema de optimización multiobjetivo puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x}))^T && (1) \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{x} \in S && (2) \end{aligned}$$

Donde:

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables de decisión.
- $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es el vector de funciones objetivo.
- $S \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto factible, determinado por restricciones de igualdad y desigualdad.

A diferencia de la optimización con un solo objetivo, en la optimización multiobjetivo generalmente no existe una única solución que optimice simultáneamente todas las funciones objetivo. En cambio, se busca obtener un conjunto de soluciones que representen diferentes compromisos entre los objetivos.

2.2 Dominancia de Pareto y Optimalidad

Dominancia de Pareto

Se dice que una solución $\mathbf{x}^1$ domina a otra solución $\mathbf{x}^2$ (denotado como $\mathbf{x}^1 \prec \mathbf{x}^2$) si y solo si:

- $f_i(\mathbf{x}^1) \leq f_i(\mathbf{x}^2)$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, y
- Existe al menos un $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $f_j(\mathbf{x}^1) < f_j(\mathbf{x}^2)$

En otras palabras, $\mathbf{x}^1$ es al menos tan buena como $\mathbf{x}^2$ en todos los objetivos, y estrictamente mejor en al menos uno.

Optimalidad de Pareto

Una solución $\mathbf{x}^* \in S$ es Pareto-óptima (o eficiente) si no existe otra solución $\mathbf{x} \in S$ que la domine. El conjunto de todas las soluciones Pareto-óptimas se denomina conjunto de Pareto, y su imagen en el espacio de objetivos se conoce como frente de Pareto.

El frente de Pareto representa el conjunto de soluciones donde la mejora en un objetivo solo puede lograrse a expensas de al menos uno de los otros objetivos.

2.3 Métodos de Resolución para Optimización Multiobjetivo

2.3.1 Método de la Suma Ponderada

El método de la suma ponderada (Weighted Sum Method) transforma el problema multiobjetivo en un problema mono-objetivo mediante la asignación de pesos a cada función objetivo.

Método de la Suma Ponderada

Entrada: Problema de optimización multiobjetivo con k funciones objetivo.
Salida: Una solución Pareto-óptima.

1. Asignar un peso no negativo w_i a cada función objetivo, tal que $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$.
2. Formular el problema mono-objetivo:

$$\text{Minimizar} \quad F_w(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} w_i \cdot f_i(\mathbf{x}) \tag{3}$$

$$\text{sujeto a} \quad \mathbf{x} \in S \tag{4}$$

3. Resolver el problema mono-objetivo para obtener una solución $\mathbf{x}^*$.
4. Variar los pesos y repetir para obtener diferentes soluciones Pareto-óptimas.

Propiedad del Método de la Suma Ponderada

Si todos los pesos $w_i > 0$, entonces la solución óptima del problema ponderado es Pareto-óptima. Sin embargo, no todas las soluciones Pareto-óptimas pueden ser obtenidas mediante este método, especialmente en problemas con frentes de Pareto no convexos.

La normalización de las funciones objetivo es crucial cuando estas tienen diferentes escalas o unidades de medida:

$$\hat{f}_i(\mathbf{x}) = \frac{f_i(\mathbf{x}) - f_i^{\text{mín}}}{f_i^{\text{máx}} - f_i^{\text{mín}}} \tag{5}$$

Donde $f_i^{\text{mín}}$ y $f_i^{\text{máx}}$ son los valores mínimo y máximo de la función objetivo f_i dentro del conjunto factible.

2.3.2 Método ϵ-constraint

El método ϵ-constraint optimiza una función objetivo mientras las demás se convierten en restricciones con límites máximos (ϵ).

Método ϵ-constraint

Entrada: Problema de optimización multiobjetivo con k funciones objetivo.
Salida: Una solución Pareto-óptima.

1. Seleccionar una función objetivo f_j para ser optimizada.
2. Establecer límites superiores ε_i para las demás funciones objetivo.
3. Formular el problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f_j(\mathbf{x}) && (6) \\ \text{sujeto a} \quad & f_i(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_i, \quad \forall i \neq j && (7) \\ & \mathbf{x} \in S && (8) \end{aligned}$$

4. Resolver el problema para obtener una solución $\mathbf{x}^*$.
5. Variar los valores de ε_i y repetir para obtener diferentes soluciones Pareto-óptimas.

Propiedad del Método ϵ-constraint

Para cualquier conjunto de valores ε_i, si el problema tiene solución factible, dicha solución es Pareto-óptima o débilmente Pareto-óptima. Además, este método puede generar soluciones en frentes de Pareto no convexos, a diferencia del método de la suma ponderada.

Una variante mejorada del método ϵ-constraint es el método ϵ-constraint aumentado (AUGMECON), que aumenta la función objetivo con un término de suma ponderada de las desviaciones de las restricciones, para garantizar la eficiencia de las soluciones.

2.4 Análisis del Frente de Pareto

2.4.1 Construcción del Frente de Pareto

Para visualizar y analizar el espacio de soluciones, es crucial construir una aproximación del frente de Pareto. Existen varios enfoques para lograr esto:

- **Generación por pesos:** Utilizar el método de la suma ponderada con diferentes combinaciones de pesos.
- **Generación por restricciones:** Emplear el método ϵ-constraint variando sistemáticamente los límites ε_i.

2.4.2 Métricas para Evaluación de Soluciones

Para comparar diferentes soluciones y aproximaciones del frente de Pareto, se utilizan diversas métricas:

- **Hipervolumen (HV):** Mide el volumen en el espacio de objetivos dominado por un conjunto de soluciones y limitado por un punto de referencia.

- **Distancia generacional (GD):** Evalúa qué tan cercano está un conjunto de soluciones al frente de Pareto verdadero.
- **Spread o dispersión:** Mide la distribución de las soluciones a lo largo del frente de Pareto.
- **Ratio de cobertura de conjuntos (CR):** Compara dos conjuntos de soluciones basándose en su dominancia mutua.

2.5 Problema 1: Optimización Multiobjetivo en Distribución de Recursos para Misión Humanitaria

2.5.1 Descripción del Problema

Este ejercicio plantea la distribución óptima de recursos esenciales para una misión humanitaria en Zambia. Se dispone de una flota de aviones para transportar diversos recursos a diferentes zonas afectadas. El problema tiene dos objetivos: maximizar el valor de impacto social de los recursos transportados y minimizar el costo total de las operaciones logísticas.

$$\text{Maximizar} \quad Z_1 = \text{Valor de impacto social de recursos transportados (miles USD)} \tag{9}$$
$$\text{Minimizar} \quad Z_2 = \text{Costo total de transporte (miles USD)} \tag{10}$$

2.5.2 Datos del Problema

Recursos: Valor de impacto social, Peso, Volumen y Disponibilidad

Recurso	**Valor de Impacto (miles USD/TON)**	**Peso (TON/unidad)**	**Volumen (m^3/unidad)**	**Disponibilidad (unidades)**
Alimentos Básicos	50	5	3	12
Medicinas	100	2	1	15
Equipos Médicos	120	0.3	0.5	40
Agua Potable	60	6	4	15
Mantas	40	3	2	20

Cuadro 1: Características y disponibilidad de cada recurso.

Aviones: Capacidad, Costos Fijos y Variables

Avión	**Capacidad Peso (TON)**	**Capacidad Volumen (m^3)**	**Costo Fijo (miles USD)**	**Costo Variable (miles USD/km)**
1	40	35	15	0.020
2	50	40	20	0.025
3	60	45	25	0.030
4	45	38	18	0.022

Cuadro 2: Capacidades y costos de operación de cada avión.

Zonas de Destino: Características

Necesidades Mínimas: Por zona y tipo de recurso

Zona	Distancia (km)	Población (miles)	Multiplicador de Impacto
A	800	50	1.2
B	1200	70	1.5
C	1500	100	1.8
D	900	80	1.4

Cuadro 3: Características de las zonas de destino.

Zona	Alimentos (TON)	Agua (TON)	Medicinas (TON)	Equipos (TON)	Mantas (TON)
A	8	6	2	0.6	3
B	12	9	3	0.9	5
C	16	12	4	1.2	7
D	10	8	2	0.6	4

Cuadro 4: Necesidades mínimas por zona y tipo de recurso.

Aclaraciones importantes sobre el problema:

- **Necesidades mínimas obligatorias:** A diferencia de ejercicios anteriores, en este problema se DEBE cumplir al 100
- **Entrega de recursos por encima del mínimo:** Se permite y se fomenta la entrega de cantidades que excedan las necesidades mínimas, especialmente en zonas con mayor multiplicador de impacto, lo que aumentará el valor del impacto social total.
- **Equipos Médicos:** Son dispositivos indivisibles que pesan 300 kg (0.3 TON) cada uno. Deben transportarse en unidades completas.
- **Disponibilidad:** Indica el número máximo de unidades disponibles para transportar. Los valores de la tabla representan la disponibilidad total, no por zona.
- **Multiplicador de Impacto:** Factor que multiplica el valor de impacto social de los recursos cuando se entregan en una zona específica, reflejando la gravedad de la situación humanitaria. Zonas con mayor multiplicador tienen mayor prioridad desde la perspectiva del impacto social.

Cálculo del Valor de Impacto Social: El valor de impacto social total se calcula como:

$$Z_1 = \sum_{i \in \text{Recursos}} \sum_{j \in \text{Aviones}} \sum_{v \in \text{Viajes}} \sum_{k \in \text{Zonas}} \text{Valor\_Impacto}_i \times \text{Cantidad}_{ijvk} \times \text{Multiplicador\_Impacto}_k \tag{11}$$

Donde:

- Valor_Impacto_i es el valor de impacto por tonelada del recurso i.

- Cantidad_{ijvk} es la cantidad del recurso i transportada por el avión j en el viaje v a la zona k.
- $\text{Multiplicador\_Impacto}_k$ es el multiplicador de impacto de la zona k.

Cálculo del Costo Total de Transporte: El costo total de transporte incluye los costos fijos de los aviones utilizados y los costos variables basados en la distancia recorrida:

$$\begin{aligned} Z_2 = & \sum_{j \in \text{Aviones}} \text{Costo\_Fijo}_j \times \text{UsaAvión}_j \\ & + \sum_{j \in \text{Aviones}} \sum_{v \in \text{Viajes}} \sum_{k \in \text{Zonas}} \text{Costo\_Variable}_j \times \text{Distancia}_k \times \text{AsignaciónZona}_{jvk} \end{aligned} \tag{12}$$

Donde:

- UsaAvión_j es una variable binaria que indica si el avión j es utilizado (1) o no (0).
- $\text{AsignaciónZona}_{jvk}$ es una variable binaria que indica si el avión j en el viaje v es asignado a la zona k (1) o no (0).
- Costo_Fijo_j es el costo fijo de utilizar el avión j.
- Costo_Variable_j es el costo variable por kilómetro del avión j.
- Distancia_k es la distancia en kilómetros a la zona k.

Limitaciones logísticas:

- **Asignación de aviones:** Se dispone de 4 aviones para asegurar que todas las zonas puedan ser atendidas adecuadamente.
- **Capacidad de vuelos:** Cada avión puede realizar hasta 2 viajes a diferentes zonas, permitiendo flexibilidad en la distribución.
- **Seguridad de Medicamentos:** Las medicinas no podrán transportarse en el Avión 1 debido a la falta de sistemas de refrigeración adecuados.
- **Compatibilidad de recursos:** Los equipos médicos y el agua potable no pueden viajar en el mismo avión durante el mismo viaje para evitar contaminación cruzada. Esta incompatibilidad se aplica por viaje, no por avión, por lo que un avión podría transportar equipos médicos en un viaje y agua potable en otro.
- **División de recursos:** Todos los recursos pueden dividirse y transportarse en fracciones, excepto los equipos médicos que son dispositivos indivisibles de 300 kg cada uno (deben enviarse como unidades completas).
- **Zona por viaje:** Un avión solo puede visitar una zona por viaje.

2.5.3 Instrucciones para el Problema 1

1. **Formulación del Modelo Multiobjetivo:** Defina claramente los siguientes elementos:
   - Los **conjuntos** (recursos, aviones, zonas de destino, viajes).
   - Los **parámetros** relevantes (valor de impacto, peso, volumen de recursos; capacidad y costos de aviones; distancia, población y multiplicador de impacto de zonas).
   - Las **variables de decisión** (cantidad de recursos asignados a cada avión, viaje y zona; asignación de aviones a zonas por viaje; uso de aviones y viajes).
   - Las dos **funciones objetivo** (valor de impacto social y costo total de transporte).
   - Las **restricciones** (capacidad de peso y volumen de aviones por viaje, seguridad de medicamentos, compatibilidad de recursos por viaje, indivisibilidad de equipos médicos, asignación de zonas por avión y viaje, satisfacción de necesidades mínimas).
   - **Elección del método de optimización multi-objetivo**: Con base en la información presentada y la formulación de las dos funciones objetivo, evalúe y elija el método más adecuado para resolver este problema multiobjetivo.
2. **Implementación del Método de la Suma Ponderada** (si se elige este método):
   - Normalice adecuadamente las funciones objetivo para que sean comparables.
   - Formule la función objetivo ponderada: $Z = \alpha \times Z_1' - (1-\alpha) \times Z_2'$ donde Z_1' y Z_2' son las funciones objetivo normalizadas y α es el peso relativo.
   - Implemente el modelo en Pyomo para diferentes valores de α (al menos 7 valores entre 0 y 1).
   - Genere y visualice el frente de Pareto aproximado.
3. **Implementación del Método ϵ-constraint** (si se elige este método):
   - Seleccione como función objetivo principal la maximización del valor de impacto social.
   - Convierta la minimización del costo en una restricción con diferentes límites máximos.
   - Implemente el modelo en Pyomo y resuelva para diferentes valores de ϵ (al menos 7 valores).
   - Compare los resultados con el método de suma ponderada (si también lo implementó) y discuta las diferencias.
4. **Análisis y Discusión Adicional:**
   - Evalúe cómo cambiaría la distribución óptima si uno de los objetivos fuera cinco veces más importante que el otro.
   - Identifique claramente la solución de compromiso que considera más equilibrada, justificando su elección con base en criterios específicos como:

- Relación costo-beneficio (valor de impacto por unidad de costo)
- Distribución equitativa entre zonas

- Analice la sensibilidad de las soluciones óptimas ante variaciones en los multiplicadores de impacto de las zonas.
- Incluya visualizaciones que muestren la distribución de recursos por avión, viaje y zona para diferentes soluciones del frente de Pareto.

Notas para la Implementación:

- Para la normalización de objetivos, calcule los valores extremos (mínimo y máximo) de cada objetivo optimizándolos de manera independiente.
- En el método de suma ponderada, ambas funciones objetivo deben tener el mismo sentido (maximización), por lo que se recomienda usar el negativo del costo.
- Para el método ϵ-constraint, se sugiere establecer restricciones incrementales sobre el costo total, empezando desde el costo óptimo cuando solo se minimiza este objetivo.
- Analice el efecto de la posibilidad de múltiples viajes por avión en la calidad de las soluciones obtenidas.
- Recuerde que el objetivo de este problema no es solo determinar cuánto enviar a cada zona, sino también cómo distribuir los recursos entre los aviones y viajes disponibles de manera óptima.

2.6 Problema 2: Optimización Multiobjetivo en Planificación de Rutas de Inspección

2.6.1 Descripción del Problema

Este problema es una extensión multiobjetivo del Problema 5 del Laboratorio 2, sobre rutas óptimas para equipos de inspección de infraestructura en Colombia. En esta versión, además de minimizar la distancia total recorrida, se busca maximizar la calidad de las inspecciones y minimizar el riesgo asociado a las rutas.

$$\text{Minimizar} \quad Z_1 = \text{Distancia total recorrida} \tag{13}$$
$$\text{Maximizar} \quad Z_2 = \text{Calidad de inspección acumulada} \tag{14}$$
$$\text{Minimizar} \quad Z_3 = \text{Nivel de riesgo de la ruta} \tag{15}$$

El problema mantiene la estructura del TSP (Traveling Salesman Problem) para múltiples equipos, donde cada equipo debe visitar un conjunto de localidades partiendo y regresando a un depósito central (localidad 0).

2.6.2 Datos del Problema

Matriz de Distancias: Se utilizará la misma matriz de distancias del Problema 5 del Laboratorio 2 con tamaño de **10 nodos**, que contiene las distancias entre cada par de localidades.

Localidad	**Calidad de Inspección (puntos)**
1	85
2	92
3	78
4	90
5	82
6	88
7	95
8	75
9	84

Cuadro 5: Nivel de calidad de inspección que se puede lograr en cada localidad.

Calidad de Inspección:

Nivel de Riesgo: El nivel de riesgo de la ruta completa se calcula como la suma de los riesgos de todos los tramos recorridos. Para localidades no incluidas en la tabla, se asume un riesgo medio de 5.

Tramo	**Origen-Destino**	**Nivel de Riesgo (1-10)**
1	0-1	3
2	0-2	2
3	0-3	4
4	0-4	5
5	0-5	6
6	0-6	3
7	0-7	2
8	0-8	4
9	0-9	5
...	...	...
23	2-8	9
24	2-9	8
25	3-4	5
...	...	...
35	4-9	7
36	5-6	7
...	...	...
45	8-9	7

Cuadro 6: Nivel de riesgo asociado a cada tramo de ruta (ejemplos seleccionados).

2.6.3 Instrucciones

1. **Formulación del Modelo Multiobjetivo:** Defina claramente los siguientes elementos:
   - Los **conjuntos** (ciudades, centros potenciales).
   - Los **parámetros** relevantes (costos, capacidades, tiempos de entrega, poblaciones, demandas).
   - Las **variables de decisión** (ubicación de centros, asignación de ciudades).
   - Las tres **funciones objetivo**.
   - Las **restricciones** (capacidad de los centros, atención a demanda, asignación única, tiempos de entrega).
2. **Selección y Justificación del Método de Resolución:**
   - Elija un método multiobjetivo (Suma ponderada, ϵ-constraint o lexicográfico) para resolver el problema planteado.
   - Justifique claramente la elección del método seleccionado según las características del problema y los objetivos considerados.
3. **Implementación y Análisis:**

- Normalice adecuadamente las funciones objetivo.
- Utilice Pyomo para implementar el modelo y obtener al menos 7 soluciones diferentes.
- Genere y visualice gráficamente el frente de Pareto aproximado (por ejemplo, usando gráficas 3D o proyecciones bidimensionales).
- Discuta las compensaciones (trade-offs) observadas entre los objetivos.

4. **Análisis y Discusión Adicional:**

   - Evalúe cómo afectaría al diseño de la red logística el cambio de importancia relativa entre los objetivos (por ejemplo, si el costo total fuera significativamente más importante que la cobertura o el tiempo de entrega).
   - Identifique claramente la solución de compromiso que considera más equilibrada, justificando su elección con base en criterios específicos.

3 Entregables y Criterios de Calificación

3.1 Entregables

Para cada problema, se deberá entregar un archivo Python (*.py) que contenga:

1. Implementación del modelo matemático en Pyomo.
2. Implementación de los métodos de optimización multiobjetivo solicitados.
3. Código para la generación y visualización del frente de Pareto.
4. Comentarios explicativos detallando la lógica de la implementación.

Adicionalmente, se deberá incluir un informe en formato PDF que contenga:

1. Formulación matemática completa de cada problema, incluyendo definición clara de:
   - Conjuntos y parámetros
   - Variables de decisión
   - Funciones objetivo
   - Restricciones
2. Metodología:
   - Descripción de los métodos implementados (suma ponderada, ϵ-constraint, lexicográfico)
   - Estrategia para la normalización de las funciones objetivo
   - Procedimiento para la generación del frente de Pareto
3. Resultados y Análisis:
   - Visualizaciones del frente de Pareto para cada problema y método
   - Análisis cuantitativo y cualitativo de los trade-offs entre objetivos
   - Comparación de los resultados obtenidos con los diferentes métodos
   - Análisis de sensibilidad respecto a variaciones en los parámetros clave
4. Toma de Decisiones:
   - Criterios utilizados para seleccionar la "mejor solución de compromiso"
   - Justificación de la elección basada en métricas como distancia al punto ideal, preferencias específicas, etc.
5. Conclusiones y recomendaciones.

Criterio (Para cada punto)	**Puntuación**
Formulación correcta de los modelos multiobjetivo	25 %
Implementación adecuada de los métodos de resolución	25 %
Generación y análisis del frente de Pareto	20 %
Análisis crítico de los trade-offs y toma de decisiones	15 %
Calidad del código y comentarios	5 %
Visualización de resultados	10 %

Cuadro 7: Criterios de calificación del laboratorio

3.2 Criterios de Calificación

Ajuste de ponderación de entregables: Originalmente ambos puntos valían 50 % cada uno. Para compensar las inconsistencias detectadas en la formulación inicial, se redefine su peso de la siguiente manera:

- **Informe en PDF** (punto 2): pasa a tener un peso de 66 % sobre la nota final del laboratorio.
- **Implementación en Python** (punto 1): si se entrega correctamente, podrá otorgar hasta un 33 % adicional como bono a la calificación final.

4 Referencias

- Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria Optimization*. Springer.
- Coello Coello, C.A., Lamont, G.B., & Van Veldhuizen, D.A. (2007). *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. Springer.
- Miettinen, K. (1999). *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Springer.
- Mavrotas, G. (2009). Effective implementation of the e-constraint method in Multi-Objective Mathematical Programming problems. *Applied Mathematics and Computation*, 213(2), 455-465.
- Hwang, C.L., & Masud, A.S.M. (1979). *Multiple Objective Decision Making—Methods and Applications: A State-of-the-Art Survey*. Springer.
- Haimes, Y.Y., Lasdon, L.S., & Wismer, D.A. (1971). On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1(3), 296-297.
- Documentación de **Pyomo**: `https://pyomo.readthedocs.io/`
- Documentación de **Matplotlib**: `https://matplotlib.org/stable/contents.html`
- Documentación de **plotly**: `https://plotly.com/python/`