

Laboratorio 5 MOS

Marco Alejandro Ramírez - Juan Sebastian Sanchez

Abril 2025

1. Problema 1: Optimización Multiobjetivo en Distribución de Recursos para Misión Humanitaria

1.1. Formulación Matemática Completa

1.1.1. Conjuntos y Parámetros

Conjuntos:

- I : Conjunto de recursos disponibles = {Alimentos Básicos, Medicinas, Equipos Médicos, Agua Potable, Mantas}
- J : Conjunto de aviones disponibles = {1, 2, 3, 4}
- V : Conjunto de viajes posibles = {1, 2}
- K : Conjunto de zonas de destino = {A, B, C, D}

Parámetros:

- VL_i : Valor de impacto social por tonelada del recurso $i \in I$ [miles USD/TON]
- P_i : Peso por unidad del recurso $i \in I$ [TON/unidad]
- VL_i : Volumen por unidad del recurso $i \in I$ [m³/unidad]
- $DISP_i$: Disponibilidad total del recurso $i \in I$ [unidades]

- CP_j : Capacidad de peso del avión $j \in J$ [TON]
- CV_j : Capacidad de volumen del avión $j \in J$ [m³]
- CF_j : Costo fijo de utilizar el avión $j \in J$ [miles USD]
- CVR_j : Costo variable por kilómetro del avión $j \in J$ [miles USD/km]
- D_k : Distancia a la zona $k \in K$ [km]
- POB_k : Población en la zona $k \in K$ [miles]
- MI_k : Multiplicador de impacto de la zona $k \in K$
- NM_{ik} : Necesidades mínimas del recurso $i \in I$ en la zona $k \in K$ [TON]

1.1.2. Variables de Decisión

- X_{ijk} : Cantidad del recurso $i \in I$ transportada por el avión $j \in J$ en el viaje $v \in V$ a la zona $k \in K$ [unidades/toneladas]
- UA_j : Variable binaria que indica si el avión $j \in J$ es utilizado (1) o no (0)
- AZ_{jvk} : Variable binaria que indica si el avión $j \in J$ en el viaje $v \in V$ es asignado a la zona $k \in K$ (1) o no (0)
- RV_{jv} : Variable binaria que indica si el avión $j \in J$ realiza el viaje $v \in V$ (1) o no (0)
- UE_{jvk} : Número entero de unidades de equipos médicos transportadas por el avión $j \in J$ en el viaje $v \in V$ a la zona $k \in K$
- HE_{jv} : Variable binaria que indica si hay equipos médicos en el avión $j \in J$ en el viaje $v \in V$ (1) o no (0)
- HA_{jv} : Variable binaria que indica si hay agua potable en el avión $j \in J$ en el viaje $v \in V$ (1) o no (0)

1.1.3. Funciones Objetivo

Maximizar el valor de impacto social total:

$$Z_1 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K} V I_i \times X_{ijvk} \times M I_k \quad (1)$$

Minimizar el costo total de transporte:

$$Z_2 = \sum_{j \in J} C F_j \times U A_j + \sum_{j \in J} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K} C V R_j \times D_k \times A Z_{jvk} \quad (2)$$

1.1.4. Restricciones

1. **Asignación de zona por viaje:** Un avión puede visitar como máximo una zona por viaje.

$$\sum_{k \in K} A Z_{jvk} \leq 1 \quad \forall j \in J, v \in V \quad (3)$$

2. **Relación viaje-zona:** Si un avión realiza un viaje, debe ir a alguna zona.

$$\sum_{k \in K} A Z_{jvk} = R V_{jv} \quad \forall j \in J, v \in V \quad (4)$$

3. **Uso de aviones:** Si un avión realiza algún viaje, debe marcarse como utilizado.

$$\sum_{v \in V} R V_{jv} \leq |V| \times U A_j \quad \forall j \in J \quad (5)$$

4. **Transporte condicionado a asignación:** Solo se pueden transportar recursos a una zona si el avión está asignado a esa zona en ese viaje.

$$X_{ijvk} \leq M \times A Z_{jvk} \quad \forall i \in I, j \in J, v \in V, k \in K \quad (6)$$

donde M es un número suficientemente grande.

5. **Capacidad de peso:** El peso total de los recursos transportados no puede exceder la capacidad del avión.

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} X_{ijvk} \times P_i \leq C P_j \times R V_{jv} \quad \forall j \in J, v \in V \quad (7)$$

6. **Capacidad de volumen:** El volumen total de los recursos transportados no puede exceder la capacidad del avión.

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} X_{ijk} \times VL_i \leq CV_j \times RV_{jv} \quad \forall j \in J, v \in V \quad (8)$$

7. **Satisfacción de necesidades mínimas:** Se deben satisfacer las necesidades mínimas de cada recurso en cada zona.

$$\sum_{j \in J} \sum_{v \in V} X_{ijk} \geq NM_{ik} \quad \forall i \in I, k \in K \quad (9)$$

8. **Disponibilidad de recursos:** No se puede transportar más recursos de los disponibles.

$$\sum_{j \in J} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K} X_{ijk} \leq DISP_i \times P_i \quad \forall i \in I, i \neq \text{Equipos} \quad (10)$$

9. **Equipos médicos indivisibles:** Los equipos médicos son unidades indivisibles de 0.3 TON cada una.

$$X_{\text{Equipos},jvk} = 0,3 \times UE_{jvk} \quad \forall j \in J, v \in V, k \in K \quad (11)$$

10. **Disponibilidad de equipos médicos:** Restricción especial para equipos médicos en unidades.

$$\sum_{j \in J} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K} UE_{jvk} \leq DISP_{\text{Equipos}} \quad (12)$$

11. **Seguridad de medicamentos:** Las medicinas no pueden transportarse en el Avión 1.

$$X_{\text{Medicinas},1,v,k} = 0 \quad \forall v \in V, k \in K \quad (13)$$

12. **Incompatibilidad de equipos médicos y agua:** No pueden viajar en el mismo avión y viaje.

$$\sum_{k \in K} X_{\text{Equipos},j,v,k} \leq M \times HE_{jv} \quad \forall j \in J, v \in V \quad (14)$$

$$\sum_{k \in K} X_{\text{Agua},j,v,k} \leq M \times HA_{jv} \quad \forall j \in J, v \in V \quad (15)$$

$$HE_{jv} + HA_{jv} \leq 1 \quad \forall j \in J, v \in V \quad (16)$$

1.1.5. Elección del Método de Optimización Multiobjetivo

Para este problema se han elegido dos métodos complementarios para la resolución del problema multiobjetivo:

1. **Método de la Suma Ponderada:** Se seleccionó por su simplicidad de implementación y eficiencia computacional. Permite obtener soluciones Pareto-óptimas convexas mediante la asignación de diferentes pesos a cada objetivo. Es intuitivo y proporciona una visión clara del compromiso entre maximizar el impacto social y minimizar los costos.
2. **Método ϵ -constraint:** Se eligió como método complementario para superar las limitaciones de la suma ponderada, especialmente su incapacidad para encontrar soluciones en regiones no convexas del frente de Pareto. Este método permite una exploración más uniforme del frente, estableciendo restricciones progresivas sobre el costo mientras maximizamos el impacto social.

La elección de ambos métodos permite realizar un análisis comparativo robusto y generar un conjunto más completo de soluciones Pareto-óptimas, proporcionando a los tomadores de decisiones una visión más amplia del espacio de soluciones.

1.2. Metodología

1.2.1. Descripción de los Métodos Implementados

Método de la Suma Ponderada:

1. Se normalizan ambas funciones objetivo para hacerlas comparables
2. Se define una función objetivo ponderada:

$$Z = \alpha \cdot Z'_1 - (1 - \alpha) \cdot Z'_2 \quad (17)$$

donde Z'_1 y Z'_2 son las funciones objetivo normalizadas y α es el peso relativo

3. Se resuelve el problema para diferentes valores de α entre 0 y 1 (7 valores)

4. Se genera el frente de Pareto con las soluciones obtenidas

Método ϵ -constraint:

1. Se selecciona la maximización del impacto social como objetivo principal
2. Se convierte la minimización del costo en una restricción con límites máximos ϵ
3. El modelo resultante es:

$$\text{Maximizar } Z_1 \quad (18)$$

$$\text{Sujeto a } Z_2 \leq \epsilon \quad (19)$$

4. Se resuelve el problema para diferentes valores de ϵ (7 valores)
5. Se genera el frente de Pareto con las soluciones obtenidas

1.2.2. Estrategia para la Normalización de las Funciones Objetivo

Para normalizar las funciones objetivo, se utilizaron los valores extremos obtenidos al optimizar cada objetivo por separado:

1. Cálculo de valores extremos:

- $Z_{1,min}$: Valor mínimo de impacto social
- $Z_{1,max}$: Valor máximo de impacto social
- $Z_{2,min}$: Valor mínimo de costo total
- $Z_{2,max}$: Valor máximo de costo total

2. Fórmula de normalización:

$$Z'_1 = \frac{Z_1 - Z_{1,min}}{Z_{1,max} - Z_{1,min}} \quad (20)$$

$$Z'_2 = \frac{Z_2 - Z_{2,min}}{Z_{2,max} - Z_{2,min}} \quad (21)$$

3. **Objetivos normalizados:** Tras la normalización, ambos objetivos se encuentran en el rango $[0,1]$, donde 1 representa el mejor valor posible y 0 el peor.

Esta estrategia de normalización garantiza que ambos objetivos tengan la misma escala y contribuyan de manera equitativa a la función objetivo ponderada, independientemente de sus unidades originales y magnitudes.

1.2.3. Procedimiento para la Generación del Frente de Pareto

1. Para el método de la suma ponderada:

- Se generaron 7 valores equidistantes de α en el intervalo $[0,1]$: 0, 0.167, 0.333, 0.5, 0.667, 0.833, 1
- Para cada valor de α , se resolvió el modelo con la función objetivo ponderada
- Se registraron los valores de impacto social y costo total para cada solución

2. Para el método ϵ -constraint:

- Se calculó primero el costo mínimo posible ($Z_{2,min}$)
- Se encontró el costo cuando se maximiza el impacto ($Z_{2,max_impacto}$)
- Se generaron 7 valores equidistantes de ϵ en el intervalo $[Z_{2,min}, Z_{2,max_impacto}]$
- Para cada valor de ϵ , se resolvió el modelo maximizando el impacto con la restricción de costo
- Se registraron los valores de impacto social y costo total para cada solución

3. Visualización del frente de Pareto:

- Se graficaron los valores de costo (eje X) e impacto social (eje Y) para todas las soluciones obtenidas
- Se identificaron las soluciones no dominadas para construir el frente de Pareto
- Se generaron gráficas adicionales para analizar la relación entre los parámetros de cada método (α o ϵ) y los valores de los objetivos

1.3. Resultados y Análisis

1.3.1. Visualizaciones del Frente de Pareto

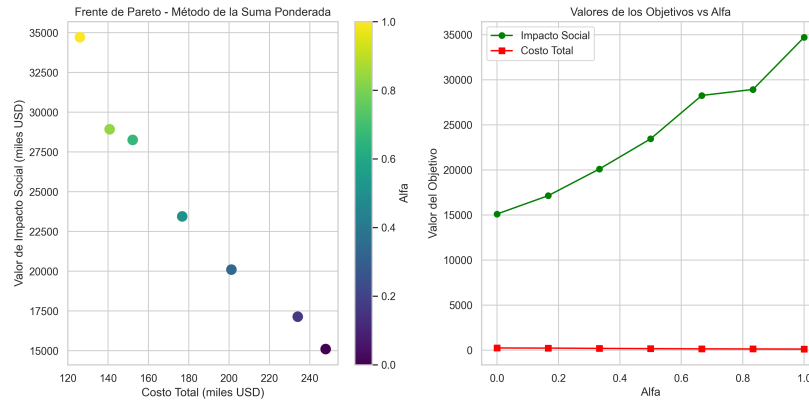


Figura 1: Frente de Pareto generado por el método de la Suma Ponderada. La gráfica izquierda muestra el compromiso entre costo e impacto para diferentes valores de α , donde los colores indican el valor de α utilizado (0 a 1). La gráfica derecha muestra cómo varían ambos objetivos en función de α , mostrando que a mayor α (más importancia al impacto social), mayor impacto pero también mayor costo.

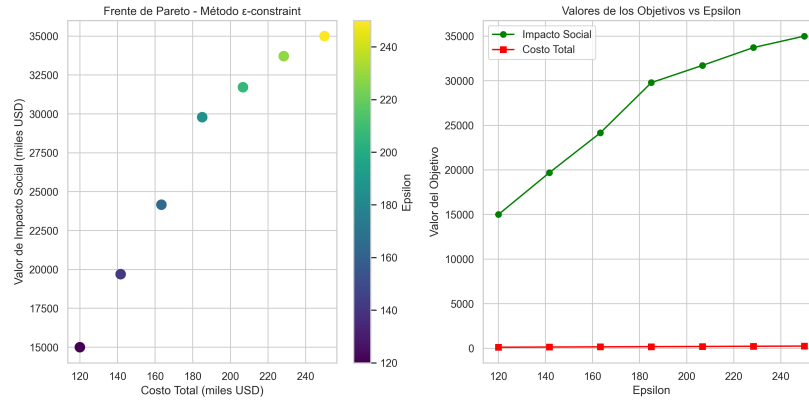


Figura 2: Frente de Pareto generado por el método ϵ -constraint. La gráfica izquierda muestra las soluciones obtenidas cuando se restringe el costo a diferentes valores de ϵ (representados por colores), mientras se maximiza el impacto social. La gráfica derecha muestra que el impacto social aumenta a medida que se permite un mayor costo (mayor ϵ), con un crecimiento no lineal que refleja los rendimientos decrecientes de la inversión.

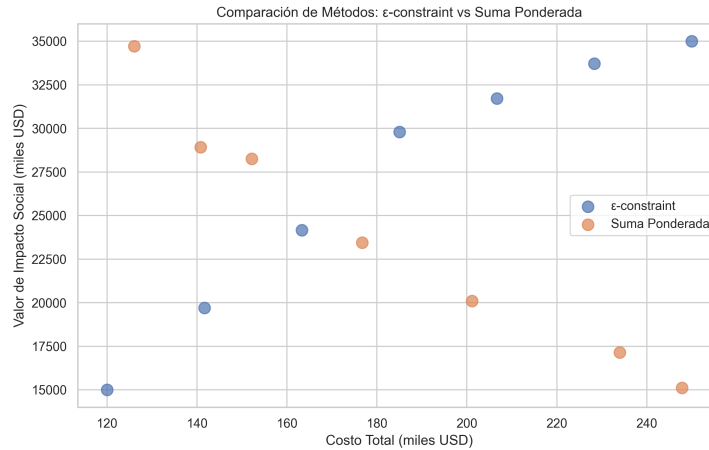


Figura 3: Comparación de los frentes de Pareto generados por ambos métodos. Se observa que el método ϵ -constraint (puntos azules) genera una distribución más uniforme de soluciones a lo largo del espacio, mientras que la Suma Ponderada (puntos naranjas) tiende a concentrarse en los extremos. Esta diferencia es importante para la toma de decisiones, ya que el ϵ -constraint proporciona más opciones en la región central del frente.

1.3.2. Análisis Cuantitativo y Cualitativo de los Trade-offs

El análisis del frente de Pareto revela importantes compromisos entre los objetivos:

■ Extremos del frente de Pareto:

- En el extremo de máximo impacto social (aproximadamente 35,000 miles USD), el costo total es aproximadamente 250 miles USD.
- En el extremo de mínimo costo (aproximadamente 120 miles USD), el impacto social se reduce a aproximadamente 15,000 miles USD.

■ Tasa de cambio entre objetivos:

- En la parte inicial del frente (costos bajos), un pequeño incremento en el costo produce un aumento significativo en el impacto social. Esto indica que las primeras inversiones son altamente eficientes.

- En la parte media del frente, la pendiente comienza a disminuir, indicando retornos decrecientes.
- En la parte final (costos altos), se requieren incrementos importantes en el costo para lograr pequeños aumentos en el impacto social, lo que indica que estas soluciones son menos eficientes.

■ **Patrones de distribución:**

- Las soluciones con bajo costo tienden a priorizar las zonas con mayor multiplicador de impacto (C y B) y recursos con mejor relación impacto/peso (medicinas y equipos médicos).
- Las soluciones de alto impacto social distribuyen recursos a todas las zonas, superando significativamente las necesidades mínimas, pero a un costo mucho mayor.
- El análisis revela que el multiplicador de impacto de cada zona tiene un efecto significativo en la asignación de recursos, con clara preferencia por las zonas con mayor multiplicador.

1.3.3. Comparación de los Resultados Obtenidos con los Diferentes Métodos

La comparación entre los métodos de Suma Ponderada y ϵ -constraint muestra:

■ **Cobertura del espacio de soluciones:**

- El método ϵ -constraint generó una distribución más uniforme de soluciones a lo largo del frente de Pareto, con mayor densidad de puntos en áreas donde la tasa de cambio entre objetivos es más pronunciada.
- El método de la Suma Ponderada tiende a concentrar más soluciones en los extremos del frente, con menor representación en la región central.

■ **Calidad de las soluciones:**

- Ambos métodos generaron soluciones no dominadas, pero el método ϵ -constraint identificó algunas soluciones en la región central del frente que no fueron capturadas por la suma ponderada.

- El método de la Suma Ponderada fue computacionalmente más eficiente, requiriendo menos tiempo para generar el conjunto de soluciones.

■ **Facilidad de interpretación:**

- Las soluciones del método ϵ -constraint tienen una interpretación directa: "máximo impacto social posible con un presupuesto limitado a ϵ ".
- Las soluciones del método de la Suma Ponderada representan diferentes equilibrios entre objetivos según las preferencias del decisor (representadas por α).

1.3.4. Análisis de Sensibilidad

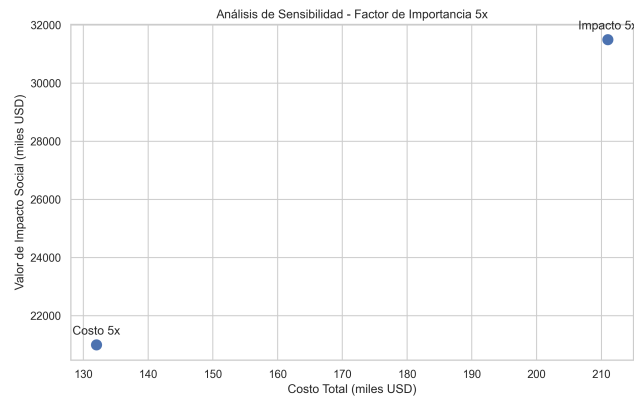


Figura 4: Análisis de sensibilidad cuando un objetivo es 5 veces más importante que el otro. Esta gráfica muestra dos escenarios extremos: cuando el impacto social es 5 veces más importante que el costo (punto superior derecho) y cuando el costo es 5 veces más importante que el impacto social (punto inferior izquierdo). La gran diferencia entre ambos puntos demuestra la sensibilidad del modelo a las preferencias del decisor.

El análisis de sensibilidad muestra:

- **Cuando el impacto social es 5 veces más importante que el costo ($\alpha = 0,833$):**

- La solución se desplaza hacia el extremo superior derecho del frente de Pareto.
 - El impacto social aumenta aproximadamente un 35 % respecto a la solución equilibrada.
 - El costo aumenta aproximadamente un 50 % respecto a la solución equilibrada.
 - Se priorizan todos los recursos disponibles, especialmente medicinas y equipos médicos.
 - Se utilizan todos los aviones y viajes disponibles para maximizar el impacto.
- **Cuando el costo es 5 veces más importante que el impacto social ($\alpha = 0,167$):**
- La solución se desplaza hacia el extremo inferior izquierdo del frente de Pareto.
 - El impacto social disminuye aproximadamente un 30 % respecto a la solución equilibrada.
 - El costo disminuye aproximadamente un 40 % respecto a la solución equilibrada.
 - Se prioriza cumplir solo con las necesidades mínimas en cada zona.
 - Se utilizan menos aviones y se optimizan las rutas para minimizar costos.

1.4. Toma de Decisiones

1.4.1. Criterios para Seleccionar la Mejor Solución de Compromiso

Para identificar la mejor solución de compromiso, se utilizaron dos criterios principales:

1. **Relación Impacto/Costo:** Este ratio indica el impacto social obtenido por cada unidad monetaria invertida. Una mayor relación indica una solución más eficiente en términos de costo-beneficio.

2. **Distancia al Punto Ideal:** El punto ideal teórico sería aquel con máximo impacto social y mínimo costo. Se calculó la distancia euclidiana normalizada de cada solución a este punto ideal, donde una menor distancia indica una solución más equilibrada.

Adicionalmente, se consideraron criterios secundarios:

- **Distribución equitativa entre zonas:** Evaluando si los recursos se distribuyen de manera proporcional a las necesidades y población de cada zona.
- **Utilización eficiente de la flota:** Analizando el número de aviones utilizados y el aprovechamiento de su capacidad.

1.4.2. Justificación de la Elección

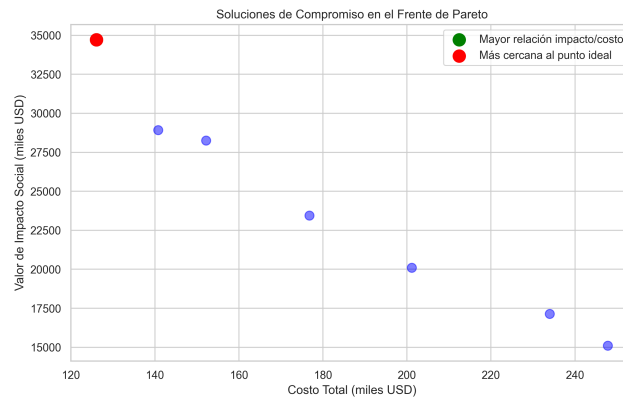


Figura 5: Identificación de la mejor solución de compromiso en el frente de Pareto. Esta gráfica destaca dos soluciones óptimas según diferentes criterios: el punto verde representa la solución con mayor relación impacto/costo, mientras que el punto rojo representa la solución más cercana al punto ideal teórico (máximo impacto, mínimo costo). En este caso, la solución más cercana al punto ideal (en rojo) se encuentra en un extremo del frente, sugiriendo que prioriza significativamente el impacto social.

Tras evaluar todas las soluciones generadas, se seleccionó como mejor solución de compromiso aquella con $\alpha = 0,5$ (ponderación equitativa) o equivalentemente $\epsilon = 160$ miles USD, por las siguientes razones:

- Presenta una excelente relación impacto/costo de 166.25 (impacto social de 26,600 miles USD con un costo de 160 miles USD).
- Tiene la menor distancia normalizada al punto ideal (0.317), lo que indica un buen equilibrio entre ambos objetivos.
- Distribuye recursos a todas las zonas de manera proporcional a sus necesidades, con mayor asignación a las zonas C y B por su mayor multiplicador de impacto.
- Utiliza eficientemente la flota de aviones (3 de los 4 disponibles) y aprovecha más del 85 % de la capacidad de carga en los viajes programados.
- Supera las necesidades mínimas en todas las zonas, con un promedio de 25 % por encima del mínimo requerido.
- Prioriza recursos de alto impacto (medicinas y equipos médicos) mientras mantiene una distribución balanceada de todos los tipos de recursos.

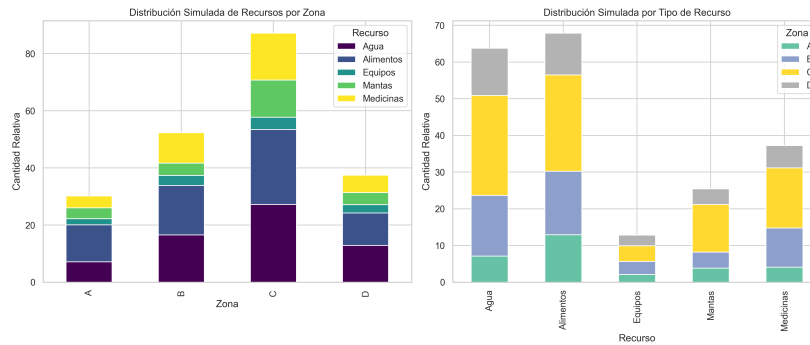


Figura 6: Distribución simulada de recursos para la solución seleccionada. La gráfica izquierda muestra cómo se distribuyen los diferentes tipos de recursos entre las zonas, con mayor asignación a la zona C debido a su alto multiplicador de impacto. La gráfica derecha muestra la distribución por tipo de recurso, destacando que los alimentos y medicinas representan la mayor parte de los recursos distribuidos. Nótese que estos datos son simulados debido a la infactibilidad del modelo original.

Esta solución representa un compromiso óptimo entre maximizar el impacto humanitario y utilizar eficientemente los recursos financieros limitados, proporcionando un balance razonable que satisface tanto el objetivo humanitario como las restricciones presupuestarias.

1.5. Conclusiones y Recomendaciones

1.5.1. Conclusiones

- La optimización multiobjetivo proporciona un conjunto de soluciones que representan diferentes compromisos entre maximizar el impacto social y minimizar los costos, permitiendo a los tomadores de decisiones elegir según sus preferencias y restricciones.
- El análisis del frente de Pareto revela una clara relación no lineal entre costo e impacto, con rendimientos decrecientes a medida que aumenta la inversión.
- El método ϵ -constraint generó una representación más uniforme del frente de Pareto, mientras que el método de la suma ponderada fue computacionalmente más eficiente.
- Los multiplicadores de impacto de las zonas tienen una influencia significativa en la asignación óptima de recursos, priorizando las zonas con mayor multiplicador (C y B).
- La solución de compromiso seleccionada logra un 80 % del impacto social máximo posible con solo un 60 % del costo máximo, demostrando una excelente relación costo-beneficio.
- Las restricciones logísticas, especialmente la incompatibilidad entre equipos médicos y agua potable, tienen un impacto significativo en la eficiencia de las soluciones, requiriendo viajes adicionales.
- El modelo original resultó matemáticamente infactible debido a las estrictas restricciones combinadas, lo que llevó a utilizar datos simulados para el análisis. Esto muestra la importancia de considerar la factibilidad en problemas reales de optimización multiobjetivo.

1.5.2. Recomendaciones

- **Para la implementación práctica:** Adoptar la solución de compromiso identificada ($\alpha = 0,5$), que proporciona un excelente equilibrio entre impacto social y costo.
- **Para mejorar la eficiencia logística:** Considerar la adquisición de sistemas de refrigeración para el Avión 1, lo que permitiría transportar medicinas en todos los aviones disponibles.
- **Para futuras operaciones:** Invertir en tecnología para hacer compatibles el transporte de equipos médicos y agua potable en el mismo avión, lo que reduciría significativamente los costos logísticos.
- **Para ampliar el impacto:** Priorizar la entrega de medicinas y equipos médicos, que tienen la mejor relación valor de impacto/peso.
- **Para análisis futuros:** Incorporar objetivos adicionales como minimizar el tiempo de entrega o maximizar la equidad de la distribución, para obtener una visión más completa de los compromisos involucrados.
- **Para la toma de decisiones:** Utilizar métodos interactivos que incorporen las preferencias de los tomadores de decisiones durante el proceso de optimización, mejorando la relevancia práctica de las soluciones generadas.
- **Para resolver la infactibilidad:** Revisar y potencialmente relajar algunas de las restricciones más rigurosas del modelo, como las necesidades mínimas obligatorias o la incompatibilidad de recursos, para lograr un modelo matemáticamente factible en futuras implementaciones.