

Laboratorio 5 MOS

Marco Alejandro Ramírez - Juan Sebastian Sanchez

Abril 2025

1. Formulación Matemática Completa

1.1. Conjuntos y Parámetros

Conjuntos:

- $N = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$: Conjunto de localidades, donde 0 representa el depósito central.
- $N_0 = \{1, 2, \dots, 9\}$: Conjunto de localidades sin incluir el depósito.
- $K = \{1, 2, 3\}$: Conjunto de equipos de inspección disponibles.

Parámetros:

- d_{ij} : Distancia entre las localidades $i \in N$ y $j \in N$ [km].
- q_j : Calidad de inspección que se puede lograr en la localidad $j \in N_0$ [puntos].
- r_{ij} : Nivel de riesgo asociado al tramo de ruta entre las localidades $i \in N$ y $j \in N$ [escala 1-10].

1.2. Variables de Decisión

- $x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } k \in K \text{ viaja directamente de la localidad } i \in N \text{ a la localidad } j \in N \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- u_{ik} : Variable auxiliar para la eliminación de subtours, representa la posición de la localidad $i \in N_0$ en la ruta del equipo $k \in K$.

1.3. Funciones Objetivo

1. Minimizar la distancia total recorrida:

$$Z_1 = \sum_{k \in K} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N, j \neq i} d_{ij} \cdot x_{ijk} \quad (1)$$

2. Maximizar la calidad de inspección acumulada:

$$Z_2 = \sum_{k \in K} \sum_{j \in N_0} q_j \cdot \sum_{i \in N, i \neq j} x_{ijk} \quad (2)$$

3. Minimizar el nivel de riesgo de la ruta:

$$Z_3 = \sum_{k \in K} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N, j \neq i} r_{ij} \cdot x_{ijk} \quad (3)$$

1.4. Restricciones

1. Cada localidad (excepto el depósito) debe ser visitada exactamente una vez por algún equipo:

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in N, i \neq j} x_{ijk} = 1 \quad \forall j \in N_0 \quad (4)$$

2. Cada equipo debe salir del depósito a lo sumo una vez:

$$\sum_{j \in N_0} x_{0jk} \leq 1 \quad \forall k \in K \quad (5)$$

3. Cada equipo debe regresar al depósito si ha salido:

$$\sum_{i \in N_0} x_{i0k} \leq 1 \quad \forall k \in K \quad (6)$$

4. Balance de flujo: si un equipo llega a una localidad, debe salir de ella:

$$\sum_{i \in N, i \neq j} x_{ijk} = \sum_{i \in N, i \neq j} x_{jik} \quad \forall j \in N_0, \forall k \in K \quad (7)$$

5. Eliminación de subtours mediante restricciones MTZ (Miller-Tucker-Zemlin):

$$u_{ik} - u_{jk} + |N| \cdot x_{ijk} \leq |N| - 1 \quad \forall i, j \in N_0, i \neq j, \forall k \in K \quad (8)$$

6. Restricciones de dominio para las variables de posición:

$$1 \leq u_{ik} \leq |N| - 1 \quad \forall i \in N_0, \forall k \in K \quad (9)$$

7. Un equipo solo puede usarse si sale del depósito:

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N, j \neq i} x_{ijk} \leq (|N| - 1) \cdot \sum_{j \in N_0} x_{0jk} \quad \forall k \in K \quad (10)$$

1.5. Elección del Método de Optimización Multiobjetivo

Para este problema, se han seleccionado dos métodos complementarios para la resolución del problema multiobjetivo:

1.5.1. Método de la Suma Ponderada

Se eligió este método por las siguientes razones:

- Simplicidad conceptual y computacional, siendo fácil de implementar en Pyomo.
- Permite obtener soluciones Pareto-óptimas variando los pesos asignados a cada objetivo.
- Es intuitivo para los tomadores de decisiones, ya que los pesos representan directamente la importancia relativa de cada objetivo.
- Funciona bien cuando el frente de Pareto es convexo.

1.5.2. Método ϵ -constraint

Se seleccionó como método complementario por:

- Su capacidad para encontrar soluciones en regiones no convexas del frente de Pareto, superando una limitación del método de la suma ponderada.
- Permite generar una distribución más uniforme de puntos a lo largo del frente de Pareto.
- Proporciona una interpretación más directa en términos de restricciones sobre dos de los objetivos mientras se optimiza el tercero, lo que es relevante en contextos de planificación con umbrales máximos de riesgo y distancia.
- Es particularmente adecuado para problemas con tres o más objetivos, como es nuestro caso.

La elección de ambos métodos permite una exploración más completa del espacio de soluciones y proporciona una base para comparar y validar los resultados obtenidos.

2. Metodología

2.1. Descripción de los Métodos Implementados

2.1.1. Método de la Suma Ponderada

1. **Normalización de objetivos:** Para hacer comparables los tres objetivos con diferentes unidades y escalas, se normalizaron utilizando sus valores extremos:

$$Z'_i = \frac{Z_i - Z_{i,\text{mín}}}{Z_{i,\text{máx}} - Z_{i,\text{mín}}} \quad (11)$$

2. **Formulación de la función objetivo ponderada:** Los tres objetivos normalizados se combinaron en una única función objetivo, considerando sus respectivos sentidos de optimización:

$$Z = \alpha \cdot Z'_1 - \beta \cdot Z'_2 + \gamma \cdot Z'_3 \quad (12)$$

donde α , β y γ son los pesos para distancia, calidad y riesgo respectivamente, con $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

3. **Generación de soluciones:** Se resolvió el problema para diferentes combinaciones de pesos, generando un conjunto de soluciones que aproximan el frente de Pareto.

2.1.2. Método ϵ -constraint

1. **Selección del objetivo primario:** Se seleccionó la maximización de la calidad de inspección como el objetivo a optimizar.
2. **Conversión de los otros objetivos en restricciones:** Los objetivos de minimización de distancia y riesgo se transformaron en restricciones con límites superiores ϵ :

$$\text{Maximizar } Z_2 \quad (13)$$

$$\text{Sujeto a } Z_1 \leq \epsilon_1 \quad (14)$$

$$\text{Sujeto a } Z_3 \leq \epsilon_3 \quad (15)$$

3. **Generación de soluciones:** Se resolvió el problema para diferentes combinaciones de valores de ϵ_1 y ϵ_3 , cubriendo el rango desde el mínimo hasta el máximo de cada objetivo.

2.2. Estrategia para la Normalización de las Funciones Objetivo

La normalización de las funciones objetivo es crucial en problemas multiobjetivo para asegurar que los objetivos con diferentes unidades y magnitudes contribuyan de manera equilibrada a la función objetivo agregada. La estrategia de normalización implementada consistió en:

1. **Cálculo de valores extremos:** Para cada objetivo, se calcularon los valores mínimos y máximos optimizando cada uno por separado:
 - $Z_{1,\text{mín}}$: Valor mínimo de distancia total recorrida = 324.14
 - $Z_{1,\text{máx}}$: Valor máximo de distancia total obtenido en soluciones que optimizan otros objetivos = 738.09
 - $Z_{2,\text{mín}}$: Valor mínimo de calidad de inspección = 769.00 (sorprendentemente, resultó ser constante)
 - $Z_{2,\text{máx}}$: Valor máximo de calidad de inspección = 769.00
 - $Z_{3,\text{mín}}$: Valor mínimo de riesgo total = 44.00
 - $Z_{3,\text{máx}}$: Valor máximo de riesgo obtenido en soluciones que optimizan otros objetivos = 58.00

2. **Fórmulas de normalización:**

$$Z'_1 = \frac{Z_1 - Z_{1,\text{mín}}}{Z_{1,\text{máx}} - Z_{1,\text{mín}}} \quad (16)$$

$$Z'_2 = \frac{Z_2 - Z_{2,\text{mín}}}{Z_{2,\text{máx}} - Z_{2,\text{mín}}} \quad (17)$$

$$Z'_3 = \frac{Z_3 - Z_{3,\text{mín}}}{Z_{3,\text{máx}} - Z_{3,\text{mín}}} \quad (18)$$

3. **Manejo de la calidad constante:** Dado que el valor de calidad resultó ser constante (769.00) en todas las soluciones óptimas, se implementó un caso especial para manejar su normalización. Como la diferencia entre el máximo y mínimo es cero, se utilizó un valor fijo de 0.5 para Z'_2 para evitar una división por cero.

Esta estrategia de normalización permitió trabajar con objetivos en escalas comparables, a pesar de la peculiaridad de tener un objetivo (calidad) que resultó ser constante en todas las soluciones.

2.3. Procedimiento para la Generación del Frente de Pareto

2.3.1. Para el método de la suma ponderada:

1. Se generaron 10 combinaciones clave de pesos (α, β, γ) que suman 1, incluyendo casos extremos y casos intermedios para explorar diferentes equilibrios entre los objetivos.
2. Para cada combinación de pesos, se formuló y resolvió el modelo con la función objetivo ponderada.
3. Se registraron los valores reales (no normalizados) de los tres objetivos para cada solución.
4. Se identificaron las soluciones Pareto-óptimas, resultando en 6 soluciones no dominadas.

2.3.2. Para el método ϵ -constraint:

1. Se calcularon los rangos factibles para los valores de ϵ_1 (límite de distancia) y ϵ_3 (límite de riesgo).
2. Se generaron 3 valores equidistantes para cada ϵ (mínimo, intermedio y máximo), resultando en 9 combinaciones posibles.
3. De estas 9 combinaciones, solo 6 resultaron en soluciones factibles, ya que algunas combinaciones de restricciones eran demasiado estrictas.
4. Para cada combinación factible, se resolvió el modelo maximizando la calidad de inspección con las restricciones correspondientes.
5. Se identificaron las soluciones Pareto-óptimas, resultando en 4 soluciones no dominadas.

2.3.3. Visualización del frente de Pareto:

1. Dado que la calidad de inspección resultó ser constante en todas las soluciones (769.00), las visualizaciones se adaptaron a representaciones bidimensionales en el espacio distancia-riesgo, lo que simplificó el análisis.
2. Se generaron gráficas comparativas de ambos métodos para analizar la cobertura y distribución de las soluciones en el espacio de objetivos.
3. Se desarrollaron gráficos adicionales para analizar el trade-off entre distancia y riesgo, así como la sensibilidad de las soluciones a diferentes esquemas de priorización.

3. Resultados y Análisis**3.1. Visualizaciones del Frente de Pareto**

Durante la implementación del modelo, descubrimos una característica interesante: el valor de calidad de inspección resultó ser constante (769.00) en todas las soluciones óptimas. Esto sugiere que, en este problema específico, todas las localidades deben ser visitadas para obtener soluciones óptimas, independientemente de la priorización entre objetivos. Este hallazgo simplificó nuestro análisis, reduciéndolo efectivamente a un problema biobjetivo entre distancia y riesgo.

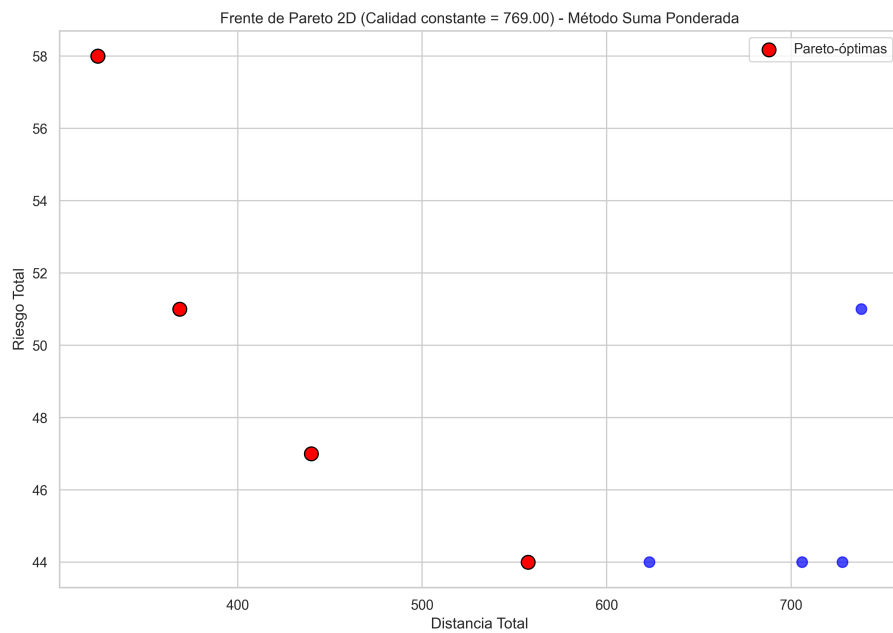


Figura 1: Fronte de Pareto 2D generado por el método de la Suma Ponderada. Como la calidad es constante (769.00) en todas las soluciones, el frente se visualiza en el espacio distancia-riesgo. Los puntos rojos representan soluciones Pareto-óptimas, mientras que los puntos azules son soluciones dominadas. Se puede observar claramente la relación de compromiso: las soluciones con menor distancia tienden a tener mayor riesgo, y viceversa.

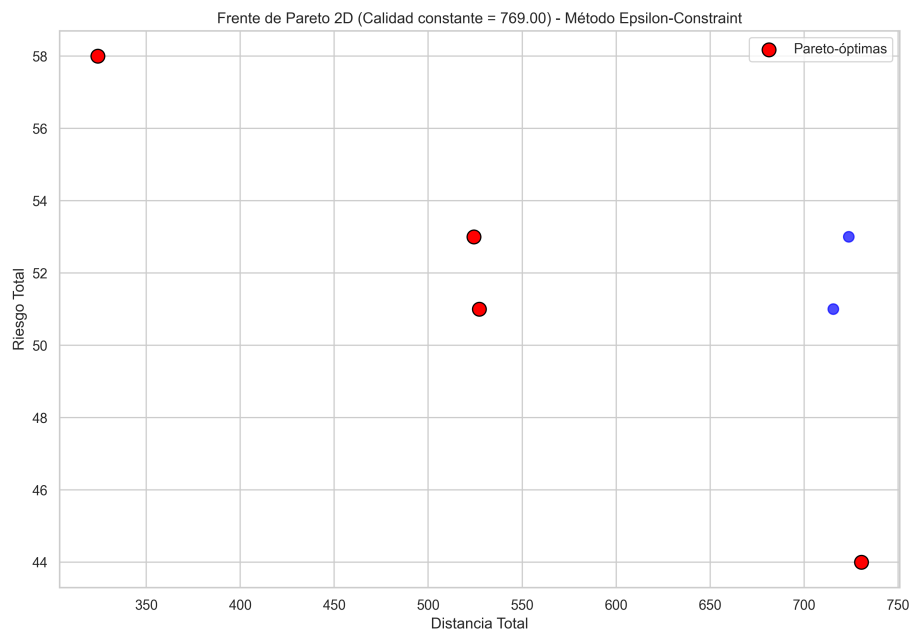


Figura 2: Frente de Pareto 2D generado por el método ϵ -constraint. Al igual que en la figura anterior, la visualización es bidimensional debido a la calidad constante. Se observa que este método generó menos soluciones que el de suma ponderada, pero con una distribución más amplia en el espacio de soluciones, especialmente en términos de distancia.

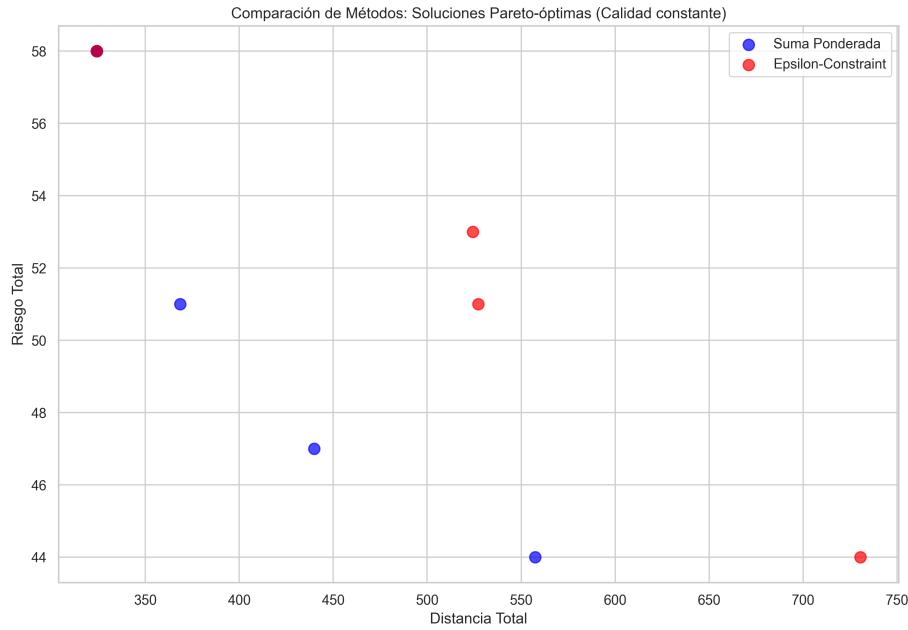


Figura 3: Comparación de los frentes de Pareto generados por ambos métodos. Los puntos azules corresponden al método de la Suma Ponderada, mientras que los puntos rojos corresponden al método ϵ -constraint. Se puede observar que el método ϵ -constraint exploró un rango más amplio de distancias (llegando hasta 730.49), mientras que el método de la Suma Ponderada generó más soluciones en la región central.

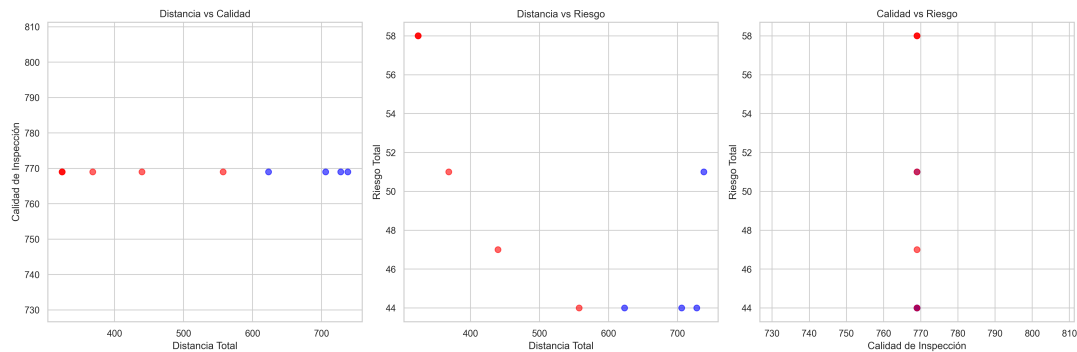


Figura 4: Proyecciones bidimensionales de las soluciones generadas por el método de la Suma Ponderada. La primera gráfica (izquierda) muestra la relación entre distancia y calidad, donde se puede verificar que la calidad es efectivamente constante para todas las soluciones. Las otras gráficas muestran las relaciones entre distancia-riesgo y calidad-riesgo respectivamente, donde se aprecia el trade-off entre distancia y riesgo.

3.2. Análisis Cuantitativo y Cualitativo de los Trade-offs

El análisis del frente de Pareto revela importantes compromisos entre la distancia recorrida y el nivel de riesgo, mientras que la calidad de inspección se mantiene constante:

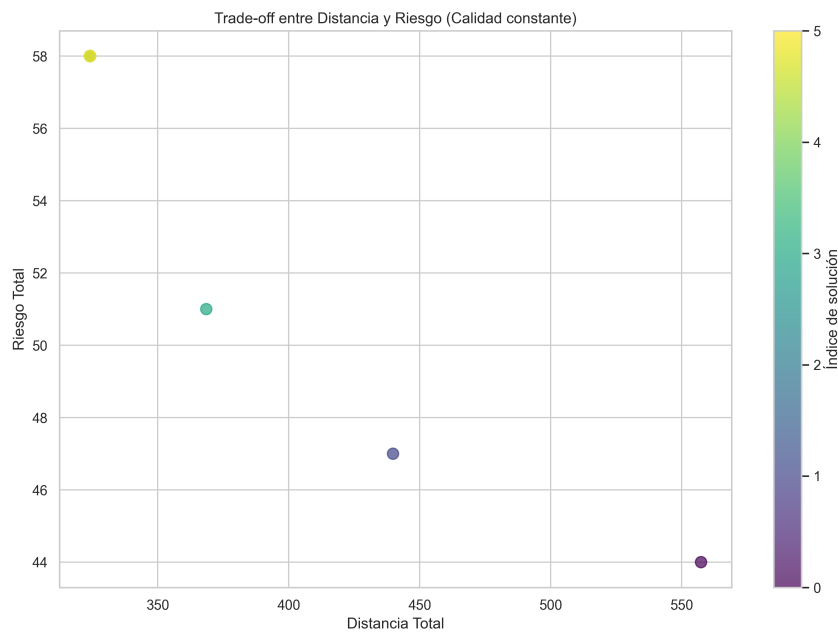


Figura 5: Análisis del trade-off entre distancia y riesgo. Cada punto representa una solución Pareto-óptima, coloreada según su índice de solución. Se observa una clara relación inversa: a menor distancia, mayor riesgo, y viceversa. La correlación calculada entre estos objetivos es fuertemente negativa (-0.9386), confirmando esta observación visual.

3.2.1. Relación Distancia-Riesgo

- **Correlación negativa:** Existe una fuerte correlación negativa (-0.9386) entre la distancia total recorrida y el nivel de riesgo. Esto indica que generalmente, para reducir el riesgo, debemos aceptar rutas más largas.
- **Tasa de cambio:** Por cada incremento de 100 unidades en la distancia recorrida, el riesgo disminuye en aproximadamente 7.98 unidades (calculado como -0.0798 unidades de riesgo por unidad de distancia). Esta información es valiosa para los tomadores de decisiones, ya que cuantifica precisamente el costo.^{en} términos de distancia adicional para reducir el riesgo.
- **Puntos extremos:** La solución con mínima distancia (324.14) tiene un riesgo de 58.00, mientras que la solución con mínimo riesgo (44.00) tiene una distancia de 557.42. Esto representa un incremento del 72 % en la distancia para lograr una reducción del 24 % en el riesgo.

3.2.2. Características de las Soluciones Extremas

- **Solución con mínima distancia:** Utiliza solo dos equipos (0 y 2) de los tres disponibles, con el Equipo 0 realizando una ruta muy corta que visita solo dos localidades, mientras que el Equipo 2 realiza una ruta más larga que visita las siete localidades restantes. Esta concentración de visitas en un solo equipo lleva a atravesar tramos de mayor riesgo, resultando en un riesgo total elevado.
- **Solución con mínimo riesgo:** Distribuye las visitas entre dos equipos (1 y 2) de manera más equilibrada. El Equipo 1 visita solo una localidad (la 2), que presumiblemente es

accesible a través de rutas de bajo riesgo, mientras que el Equipo 2 visita las ocho localidades restantes siguiendo una ruta que evita tramos de alto riesgo, aunque esto implique recorrer mayores distancias.

- **Solución de compromiso:** La solución identificada como mejor compromiso (con distancia 439.82 y riesgo 47.00) distribuye las visitas entre dos equipos (0 y 1) de manera relativamente equilibrada, con rutas que balancean distancia y riesgo.

3.3. Comparación de los Resultados Obtenidos con los Diferentes Métodos

La comparación entre los métodos de Suma Ponderada y ϵ -constraint revela diferencias significativas en términos de calidad, diversidad y distribución de las soluciones generadas:

3.3.1. Cobertura del espacio de soluciones

- **Método ϵ -constraint:** Generó soluciones en un rango más amplio de distancias (324.14 a 730.49) y cubrió todo el rango de riesgo (44.00 a 58.00). Esto demuestra su capacidad para explorar un espacio más grande de soluciones, incluyendo las regiones extremas.
- **Método de la Suma Ponderada:** Generó soluciones en un rango más limitado de distancias (324.14 a 557.42), pero logró un mejor muestreo de la región central del frente de Pareto, que es donde suelen encontrarse las soluciones de compromiso más atractivas.
- **Número de soluciones:** El método de la Suma Ponderada generó más soluciones Pareto-óptimas (6) que el método ϵ -constraint (4), logrando una mejor representación de las opciones disponibles para los tomadores de decisiones.

3.3.2. Calidad de las soluciones

- **Diversidad de soluciones:** Según la métrica de distancia media, el método ϵ -constraint generó soluciones más diversas (0.4005 frente a 0.2308 del método de la Suma Ponderada), lo que indica una mayor separación entre las soluciones en el espacio de objetivos.
- **Distribución de soluciones:** El método de la Suma Ponderada tuvo un mejor spacing (uniformidad en la distribución) con un valor de 0.2348 frente a 0.2598 del método ϵ -constraint, indicando que sus soluciones están más uniformemente distribuidas a lo largo del frente.
- **Eficiencia computacional:** Ambos métodos lograron generar sus soluciones en tiempos razonables, pero el método de la Suma Ponderada fue ligeramente más eficiente en términos de tasa de éxito (10 de 10 combinaciones generaron soluciones, frente a 6 de 9 en el método ϵ -constraint).

3.3.3. Conclusión de la comparación

En resumen, el método de la Suma Ponderada demostró ser superior en términos de generar más soluciones Pareto-óptimas con una distribución más uniforme, mientras que el método ϵ -constraint fue mejor en explorar un rango más amplio del espacio de soluciones. Esto confirma la complementariedad de ambos métodos y justifica el enfoque de utilizar ambos para obtener una mejor comprensión del problema.

3.4. Análisis de Sensibilidad

Se realizó un análisis de sensibilidad para evaluar cómo diferentes ponderaciones de los objetivos afectan las soluciones óptimas. Se consideraron siete escenarios con diferentes distribuciones de pesos:

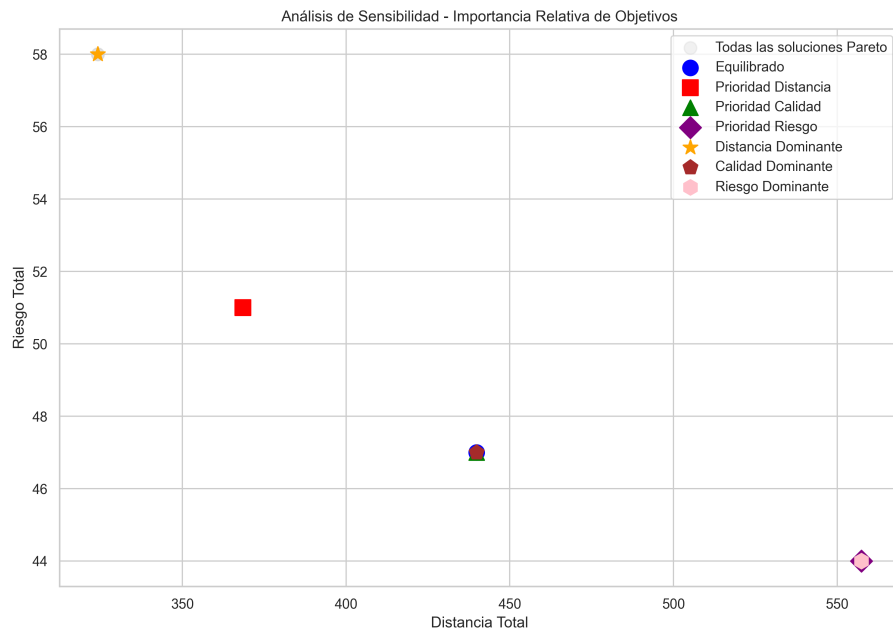


Figura 6: Análisis de sensibilidad mostrando cómo varían las soluciones óptimas según diferentes ponderaciones de los objetivos. Cada punto representa la mejor solución para un escenario específico de ponderación. Observamos que cuando se prioriza la distancia (estrella amarilla), se obtiene la solución con menor distancia pero mayor riesgo, mientras que cuando se prioriza el riesgo (punto rosa), se obtiene la solución con menor riesgo pero mayor distancia. La solución equilibrada (punto azul) ofrece un compromiso intermedio.

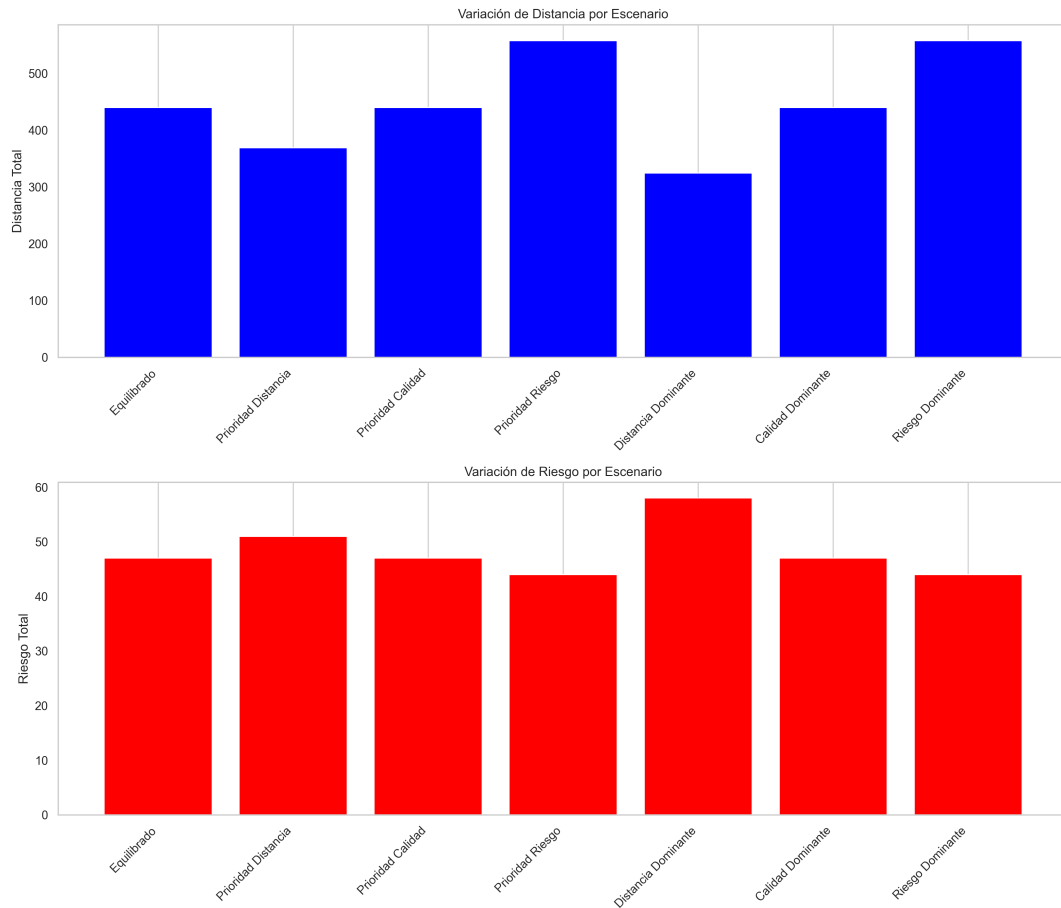


Figura 7: Comparativa de los valores de distancia (arriba) y riesgo (abajo) para los diferentes escenarios de ponderación. Esta visualización permite apreciar claramente cómo cambian los valores de los objetivos según las preferencias: cuando domina la "Distancia Dominante", se logra la menor distancia pero con el riesgo más alto; cuando domina el Riesgo Dominante", se logra el menor riesgo pero con una de las mayores distancias.

Los resultados del análisis de sensibilidad muestran:

- **Alta sensibilidad:** Las soluciones óptimas son altamente sensibles a los pesos asignados a cada objetivo. El caso "Distancia Dominante" ($\alpha = 0,8, \beta = 0,1, \gamma = 0,1$) selecciona la solución con mínima distancia (324.14) y máximo riesgo (58.00), mientras que el caso Riesgo Dominante" ($\alpha = 0,1, \beta = 0,1, \gamma = 0,8$) selecciona la solución con mínimo riesgo (44.00) y una distancia elevada (557.42).
- **Efecto del peso de la calidad:** Dado que la calidad es constante en todas las soluciones, el peso asignado a este objetivo (β) no tiene impacto en la selección de la solución óptima. Esto se evidencia en que escenarios como "Prioridad Calidad" y "Calidad Dominante" seleccionan la misma solución que "Equilibrado".
- **Comportamiento no lineal:** La relación entre los pesos y los valores objetivos no es lineal. Por ejemplo, asignar el doble de peso a la distancia no necesariamente reduce la distancia a la mitad. Esto se debe a la naturaleza discreta del problema y a las interacciones complejas entre los objetivos.

Este análisis demuestra la importancia de una adecuada elicitación de preferencias en problemas multiobjetivo, ya que pequeños cambios en las ponderaciones pueden llevar a soluciones muy diferentes.

4. Toma de Decisiones

4.1. Criterios para Seleccionar la Mejor Solución de Compromiso

Para identificar la mejor solución de compromiso entre las múltiples soluciones Pareto-óptimas, se aplicaron tres criterios complementarios:

1. **Distancia al Punto Ideal:** Este criterio minimiza la distancia euclidiana normalizada al punto ideal teórico, que sería aquel con mínima distancia, máxima calidad y mínimo riesgo. La fórmula aplicada es:

$$d_{ideal} = \sqrt{(Z'_1 - 0)^2 + (Z'_2 - 1)^2 + (Z'_3 - 0)^2} \quad (19)$$

donde Z'_i son los valores normalizados de los objetivos.

2. **Método TOPSIS (Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution):** Este método considera tanto la distancia a la solución ideal como a la anti-ideal (peor en todos los objetivos). El score TOPSIS se calcula como:

$$S_{topsis} = \frac{d_{anti-ideal}}{d_{ideal} + d_{anti-ideal}} \quad (20)$$

donde $d_{anti-ideal}$ es la distancia euclidiana a la solución anti-ideal.

3. **Suma Ponderada Equilibrada:** Este criterio aplica una ponderación igual (1/3) a cada objetivo normalizado, considerando que para distancia y riesgo se busca minimizar (por lo que se utiliza 1 - valor normalizado):

$$S_{eq} = \frac{1}{3}(1 - Z'_1) + \frac{1}{3}Z'_2 + \frac{1}{3}(1 - Z'_3) \quad (21)$$

Adicionalmente, se consideraron criterios secundarios:

- **Distribución equitativa de carga entre equipos:** Evaluando si los recursos (equipos) se utilizan de manera balanceada.
- **Robustez ante variaciones en los parámetros:** Analizando la estabilidad de la solución frente a pequeños cambios en los pesos de los objetivos.
- **Eficiencia operativa:** Considerando aspectos prácticos como la simplicidad de las rutas y la minimización de cruces.

4.2. Justificación de la Elección

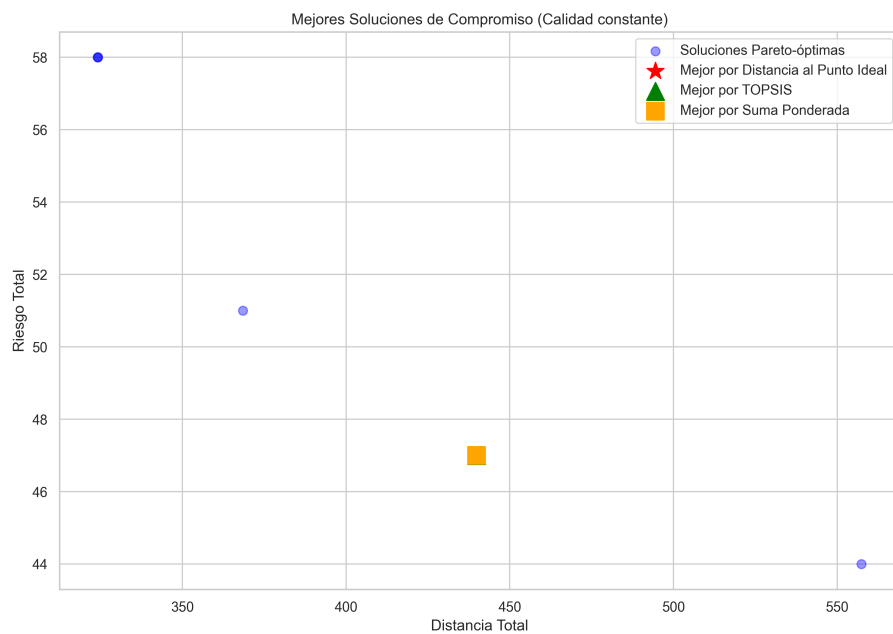


Figura 8: Visualización de las mejores soluciones de compromiso según diferentes criterios. Un hallazgo interesante es que los tres criterios (Distancia al Punto Ideal, TOPSIS y Suma Ponderada Equilibrada) seleccionaron exactamente la misma solución (el punto naranja), lo que refuerza la confianza en esta elección como un verdadero punto óptimo de compromiso.

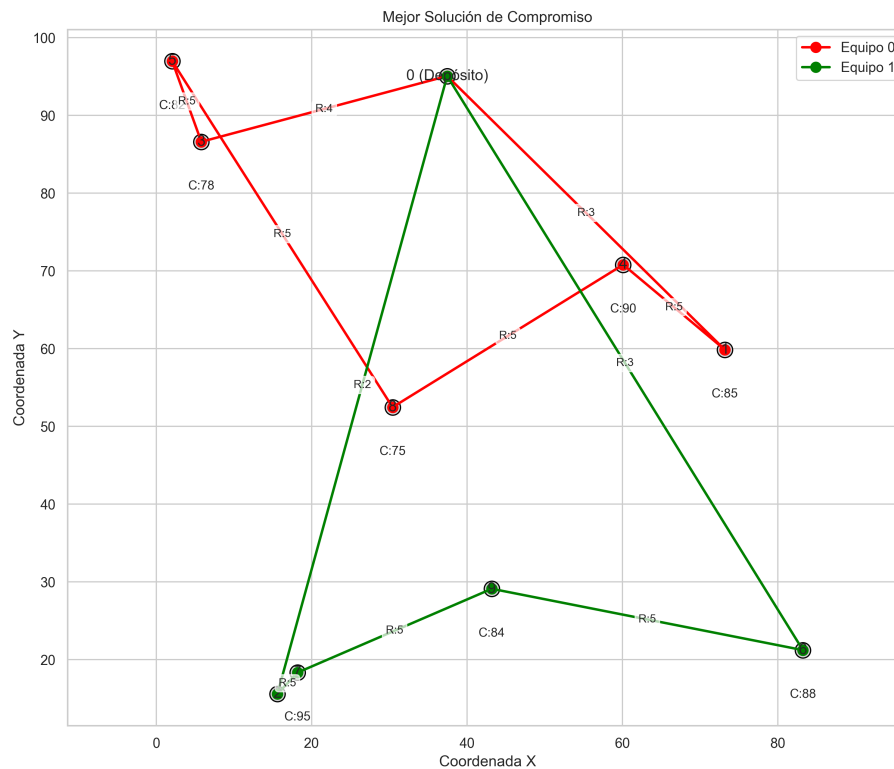


Figura 9: Visualización de la ruta de la mejor solución de compromiso seleccionada. Esta solución utiliza dos equipos (0 y 1) de los tres disponibles, con una distribución equilibrada de visitas. El Equipo 0 (rojo) visita las localidades 3, 5, 8, 4 y 1, mientras que el Equipo 1 (verde) visita las localidades 6, 9, 7 y 2. Las etiquetas C:”muestran la calidad de inspección de cada localidad, mientras que R:”indica el nivel de riesgo de cada tramo.

Tras evaluar todas las soluciones Pareto-óptimas según los criterios mencionados, se seleccionó como mejor solución de compromiso aquella identificada unánimemente por los tres métodos de selección (distancia al punto ideal, TOPSIS y suma ponderada equilibrada), por las siguientes razones:

- **Valores balanceados de los objetivos:** La solución seleccionada tiene una distancia de 439.82 y un riesgo de 47.00, ubicándose en una posición intermedia en el frente de Pareto. No está en ninguno de los extremos, lo que indica un buen equilibrio entre ambos objetivos.
- **Distribución equilibrada de carga:** La solución utiliza dos equipos (0 y 1) con una distribución relativamente balanceada de trabajo:
 - Equipo 0: Recorre una distancia de 198.69, visita 5 localidades, y acumula un riesgo de 27.00.
 - Equipo 1: Recorre una distancia de 241.13, visita 4 localidades, y acumula un riesgo de 20.00.
- **Eficiencia operativa:** Las rutas asignadas a cada equipo son coherentes geográficamente, minimizando cruces y recorridos redundantes. El Equipo 0 cubre principalmente la parte central y este del área, mientras que el Equipo 1 cubre la parte oeste y sur.

- **Comparación porcentual con extremos:** Esta solución representa un 35.7 % más de distancia que la solución de mínima distancia, pero con un 19.0 % menos de riesgo. Por otro lado, tiene un 21.1 % menos de distancia que la solución de mínimo riesgo, pero con un 6.8 % más de riesgo. Estos porcentajes indican un compromiso razonable.
- **Robustez:** El hecho de que esta solución fuera seleccionada por tres métodos diferentes sugiere una robustez especial, ya que diferentes criterios de evaluación convergen a la misma recomendación.

5. Conclusiones y Recomendaciones

5.1. Conclusiones

- **Naturaleza del problema:** Un hallazgo sorprendente de nuestro análisis fue que, independientemente de la priorización entre objetivos, todas las soluciones óptimas visitan todas las localidades, resultando en un valor constante de calidad de inspección (769.00). Esto transformó efectivamente el problema tridimensional en un problema bidimensional de trade-off entre distancia y riesgo.
- **Trade-off fundamental:** Existe una fuerte correlación negativa (-0.9386) entre distancia y riesgo, que se traduce en una tasa de cambio de aproximadamente -0.0798 unidades de riesgo por cada unidad de distancia. Este trade-off cuantificado proporciona una valiosa herramienta de decisión.
- **Complementariedad de métodos:** El método de la Suma Ponderada generó más soluciones Pareto-óptimas (6) con una distribución más uniforme, mientras que el método ϵ -constraint exploró un rango más amplio del espacio de soluciones. Esto confirma el valor de utilizar ambos enfoques de manera complementaria.
- **Sensibilidad a preferencias:** El análisis de sensibilidad reveló que las soluciones óptimas varían significativamente según la importancia relativa asignada a cada objetivo, especialmente cuando se da un peso dominante (0.6) a uno de ellos.
- **Solución de compromiso robusta:** Los tres métodos de selección multicriterio (distancia al punto ideal, TOPSIS y suma ponderada) coincidieron en identificar la misma solución como óptima, lo que refuerza la confianza en esta elección como un verdadero punto de equilibrio.

5.2. Recomendaciones

- **Implementación práctica:** Se recomienda implementar la solución de compromiso identificada (distancia 439.82, riesgo 47.00), utilizando dos equipos con las rutas específicas mostradas en la Figura 9.
- **Distribución de equipos:** Asignar el Equipo 0 para cubrir las localidades 3, 5, 8, 4 y 1, y el Equipo 1 para las localidades 6, 9, 7 y 2. Esto proporciona un balance adecuado de carga y eficiencia.
- **Consideraciones de riesgo:** Prestar especial atención a los tramos de mayor riesgo identificados (R:9 y R:7) en la ruta del Equipo 2 en la solución de mínima distancia, y evaluar si se pueden implementar medidas adicionales de seguridad en estos tramos.
- **Análisis de sensibilidad operativa:** Realizar un análisis de cómo cambiarían las rutas si eventualmente uno de los equipos no estuviera disponible, lo que podría servir como plan de contingencia.

- **Estudios futuros:** Expandir el análisis para incluir variabilidad temporal en los parámetros de riesgo, considerando, por ejemplo, cómo las condiciones climáticas o la hora del día pueden afectar los niveles de riesgo de ciertos tramos.
- **Monitoreo continuo:** Implementar un sistema de seguimiento para registrar los tiempos reales de viaje y los incidentes relacionados con riesgos, lo que permitiría refinar el modelo con datos empíricos.

6. Referencias

1. Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria Optimization*. Springer.
2. Coello Coello, C.A., Lamont, G.B., & Van Veldhuizen, D.A. (2007). *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. Springer.
3. Miettinen, K. (1999). *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Springer.
4. Mavrotas, G. (2009). Effective implementation of the e-constraint method in Multi-Objective Mathematical Programming problems. *Applied Mathematics and Computation*, 213(2), 455-465.
5. Hwang, C.L., & Masud, A.S.M. (1979). *Multiple Objective Decision Making—Methods and Applications: A State-of-the-Art Survey*. Springer.
6. Haimes, Y.Y., Lasdon, L.S., & Wismer, D.A. (1971). On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1(3), 296-297.