

매사추세츠 공과 대학
기계 공학부
2.14 피드백 제어 시스템의 분석 및 설계

극과 0의 이해

1 시스템 극과 0

전달 함수는 완전한 미분 방정식을 풀지 않고도 중요한 시스템 응답 특성을 결정할 수 있는 기초를 제공합니다. 정의된 바와 같이 전달 함수는 복소수 변수 $s = \sigma + j\omega$ 에서 다음과 같은 합리적인 함수입니다.

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1)$$

분자와 분모의 다항식을 인수분해하고 해당 인수로 전달 함수를 작성하는 것이 편리할 때가 많습니다:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_{m-1})(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-1})(s - p_n)}, \quad (2)$$

여기서 분자와 분모 다항식인 $N(s)$ 및 $D(s)$ 는 시스템의 미분 방정식에 의해 정의된 실수 계수를 가지며 $K = b/a_m$ 입니다. 방정식 (2)에 쓰여진 것처럼 z_i 는 방정식의 근입니다.

$$N(s) = 0 \text{입니다}, \quad (3)$$

는 시스템 0으로 정의되며, p_i 는 방정식의 근입니다.

$$D(s) = 0 \text{입니다}, \quad (4)$$

를 시스템 극으로 정의합니다. 방정식 (2)에서 분자와 분모의 인자는 $s = z_i$ 일 때 분자 $N(s) = 0$ 이 되고 전달 함수가 사라지도록 다음과 같이 작성됩니다.

$$\lim_{s \rightarrow z_i} H(s) = 0.$$

와 유사하게 $s = p_i$ 일 때 분모 다항식 $D(s) = 0$ 이 되고 전달 함수의 값은 무한대가 됩니다,

$$\lim_{s \rightarrow p_i} H(s) = \infty.$$

다항식 $N(s)$ 및 $D(s)$ 의 모든 계수는 실수이므로 극과 0은 순수 실수이거나 복잡한 공액 쌍으로 나타나야 합니다. 일반적으로 극의 경우 $p_i = \sigma_i$, 또는 $p_i, p_{i+1} = \sigma_i \pm j\omega_i$ 입니다. 해당 공액 없이 단일 복소 극이 존재하는 경우[†] 극은 다항식 $D(s)$ 에서 복소 계수를 생성합니다. 마찬가지로 시스템 0은 다음과 같습니다.는 실제이거나 복잡한 활용 쌍으로 나타납니다.

■ 예

선형 시스템은 미분 방정식으로 설명됩니다.

$$\frac{D^2 Y}{dt^2} + 5 \frac{DY}{dt} + 6Y = 2 \frac{du}{dt} + 1.$$

시스템 극과 0을 구합니다.

솔루션: 미분 방정식에서 전달 함수는 다음과 같습니다.

$$H(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 5s + 6}. \quad (5)$$

인수분해 형식으로 작성될 수 있습니다.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{2} \frac{s + 1/2}{(s + 3)(s + 2)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{s - (-1/2)}{(s - (-3))(s - (-2))}. \end{aligned} \quad (6)$$

따라서 시스템은 $s = -1/2$ 에서 하나의 실수 영점을 가지며, 다음 위치에서 한 쌍의 실수 극을 갖습니다.

$s = -3$ 및 $s = -2$.

극과 0은 전달 함수의 특성이며, 따라서 입력-출력 시스템 역학을 설명하는 미분 방정식의 특성입니다. 극과 영점은 이득 상수 K 와 함께 미분 방정식을 완전히 특성화하며 시스템에 대한 완전한 설명을 제공합니다.

■ 예

시스템에는 한 쌍의 복소 공액 극 $p_1, p_2 = 1 \pm j2$, 단일 실수 영점 $z_1 = 4$, 이득 계수 $K = 3$ 이 있습니다. 시스템을 나타내는 미분 방정식을 구합니다.

솔루션: 전송 함수는 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} H(s) &= K \frac{s - z}{(s - p_1)(s - p_2)} \\ &= 3 \frac{s - (-4)}{(s - (-1 + j2))(s - (-1 - j2))} \\ &= 3 \frac{(s + 4)}{s^2 + 2s + 5} \end{aligned}$$

3

(7)

로 설정하면 미분 방정식은 다음과 같습니다.

$$\frac{D^2 Y}{dt^2} + 2 \frac{DY}{dt} + 5y = 3 \frac{du}{dt} + 12u \quad (8)$$

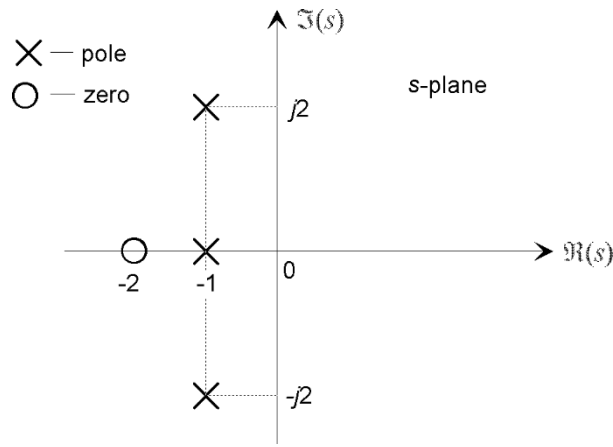


그림 1: 하나의 실수 극과 복소 공액 극 쌍, 그리고 하나의 실수 영점이 있는 일반적인 3차 시스템의 극-영점 플롯입니다.

1.1 극-제로 플롯

시스템은 입력/출력 미분 방정식의 재구성을 허용한다는 점에서 극과 0으로 특징지어집니다. 일반적으로 전달 함수의 극과 영점은 복소할 수 있으며, 시스템 동역학은 복소 변수 s 의 실수 부분과 허수 부분을 축으로 하는 복소 s -평면에 그 위치를 표시하여 그래픽으로 나타낼 수 있습니다. 이러한 플롯을 **극-영점 플롯**이라고 합니다. 영점 위치는 원(○)으로, 극 위치는 십자(×)로 표시하는 것이 일반적입니다. 극과 영점의 위치는 시스템의 응답 특성에 대한 질적 통찰력을 제공합니다. 전달 함수 또는 시스템 상태 방정식[8]에서 시스템의 극과 영점을 결정하는 데 사용할 수 있는 컴퓨터 프로그램이 많이 있습니다. 그림 1은 단일 실수 영점, 실수 극, 복소 공액 극 쌍이 있는 3차 시스템의 극-영점 플롯의 예입니다;

$$H(s) = \frac{(3s + 6)}{(s^3 + 3s^2 + 7s + 5)} = 3 \frac{(s - (-2))}{(s - (-1))(s - (-1 - 2j))(s - (-1 + 2j))}$$

1.2 시스템 극과 균질 응답

전달 함수는 시스템 미분 방정식을 완전히 나타내므로 극과 0이 시스템 응답을 효과적으로 정의합니다. 특히 시스템 극은 균질 응답의 구성 요소를 직접 정의합니다. 일련의 초기 조건에 대한 선형 SISO 시스템의 비강제 응답은 다음과 같습니다.

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \quad (9)$$

여기서 상수 C_i 는 주어진 초기 조건 집합에서 결정되고 지수 λ_i 는 **특성 방정식**의 근 또는 시스템 **고유**

값입니다. 특성 방정식은 다음과 같습니다.

$$D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad (10)$$

이며 그 뿌리는 시스템 극, 즉 $\lambda_i = p_i$ 이며 다음과 같은 중요한 관계가 성립합니다:

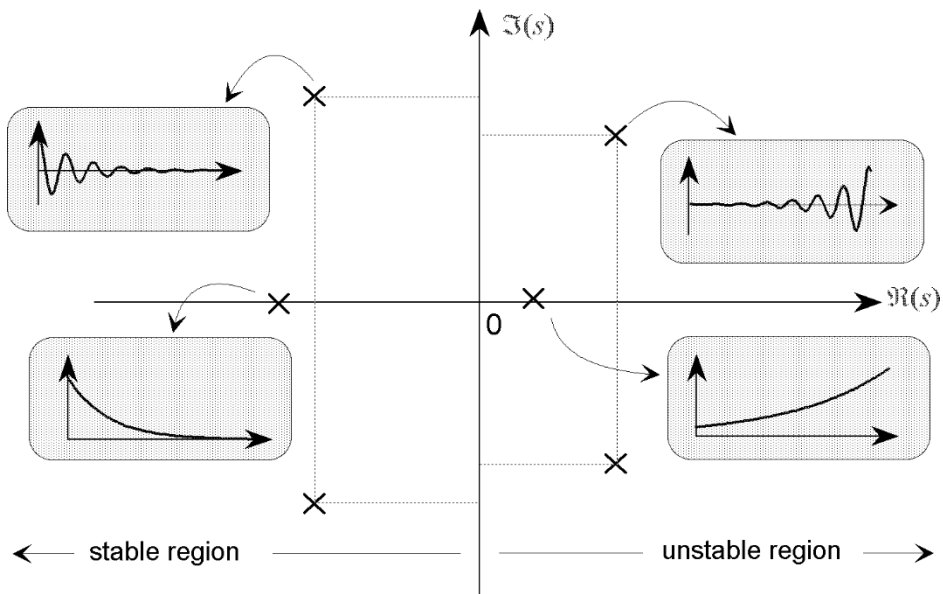


그림 2: 극-제로 플롯의 시스템 극 위치에서 균질 응답의 구성 요소 형태 지정.

전달 함수 극은 특성 방정식의 근이며 시스템 **A** 행렬의 고유값이기도 합니다.

따라서 균질 응답은 다음과 같이 작성할 수 있습니다.

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^n C e^{p_i t}. \quad (11)$$

따라서 s 평면에서 극의 위치는 아래에 설명된 대로 균질 응답의 n 구성 요소를 정의합니다:

1. s -평면의 왼쪽 절반에 있는 실수 극 $p_i = \sigma$ 는 기하급수적으로 감쇠하는 구성 요소를 정의합니다.
 $Ce^{-\sigma t}$, 균질 응답에서. 감쇠 속도는 극 위치에 따라 결정되며, 왼쪽 절반 평면에서 원점에서 멀리 떨어진 극은 빠르게 감쇠하는 성분에 해당하고 원점에 가까운 극은 천천히 감쇠하는 성분에 해당합니다.
2. 원점 $p_i = 0$ 의 극은 진폭이 일정하고 초기 조건에 의해 정의되는 성분을 정의합니다.
3. 오른쪽 절반 평면의 실극은 기하급수적으로 증가하는 성분 $Ce^{\sigma t}$ 에 해당합니다.
 에 대한 균질한 응답이 없으므로 시스템이 불안정한 것으로 정의됩니다.
4. s -평면의 왼쪽 절반에 있는 복소 공액 극 쌍 $\sigma \pm j\omega$ 가 결합하여 $Ae^{-\sigma t} \sin(\omega t + \phi)$ 형태의 감쇠 사인 곡선인 응답 성분을 생성하며, 여기서 A 와 ϕ 는 초기 조건에 의해 결정됩니다. 감쇠 속도는 σ 로 지정되며 진동 주파수는 ω 로 결정됩니다.

5. 가상의 극 쌍, 즉 가상의 축에 놓인 극 쌍인 $j\omega$ 는 초기 조건에 의해 결정된 일정한 진폭을 가진 진동 성분을 생성합니다.

6. 오른쪽 절반 평면의 복잡한 극 쌍은 기하급수적으로 증가하는 성분을 생성합니다. 이러한 결과는 그림 2에 요약되어 있습니다.

■ 예

그림 3에 표시된 극-제로 플롯을 가진 시스템의 임의의 초기 조건 집합에 대한 응답의 예상 형태에 대해 설명합니다.

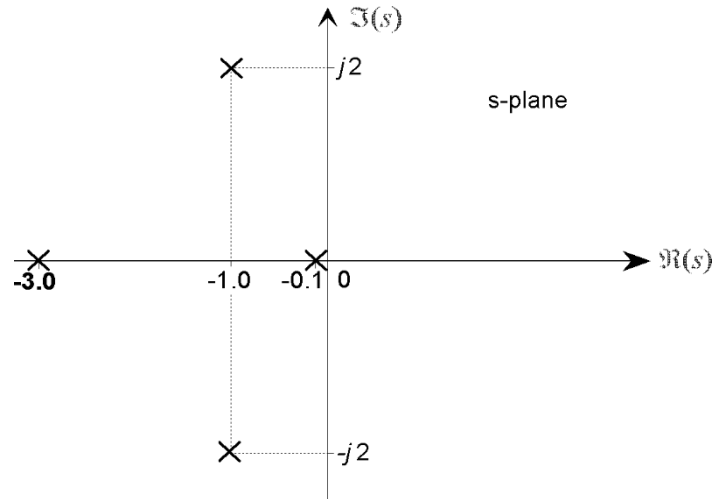


그림 3: 2개의 실수 극과 2개의 복소 공액 극이 있는 4차 시스템의 극-제로 플롯.

솔루션: 이 시스템에는 4개의 극과 0이 없습니다. 두 개의 실극은 감쇠 지수 항 $C e_1^{-3t}$ 및 $C e_2^{-0.1t}$ 에 해당하며, 복소 공액 극 쌍은 진동 성분 $Ae^{-t} \sin(2t + \varphi)$ 을 도입하여 총 균일성을 갖습니다.

응답은

$$y_h(t) = C e_1^{-3t} + C e_2^{-0.1t} + Ae^{-t} \sin(2t + \varphi) \quad (12)$$

특정 상황에서 이러한 구성 요소의 상대적 강도는 일련의 초기 조건에 따라 결정되지만 다음과 같은 일반적인 관찰을 할 수 있습니다:

1. 시간 상수 τ 가 0.33초인 용어 e^{-3t} 는 빠르게 감쇠하며 약 4τ 또는 1.33초 동안만 유의 미합니다.
2. 응답은 콤플렉스 공액 쌍에 의해 정의된 진동 성분 $Ae^{-t} \sin(2t + \varphi)$ 를 가지며 약간의 오버슈트를 나타냅니다. 진동은 e^{-t} 감쇠 항으로 인해 약 4초 후에 감쇠합니다.

3. 시간 상수 $\tau = 10$ 초인 용어 $e^{-0.1t}$ 는 약 40초 동안 지속됩니다. 따라서 이 항은 전체 균질 반응에서 *지배적인* 장기 반응 구성 요소입니다.
-

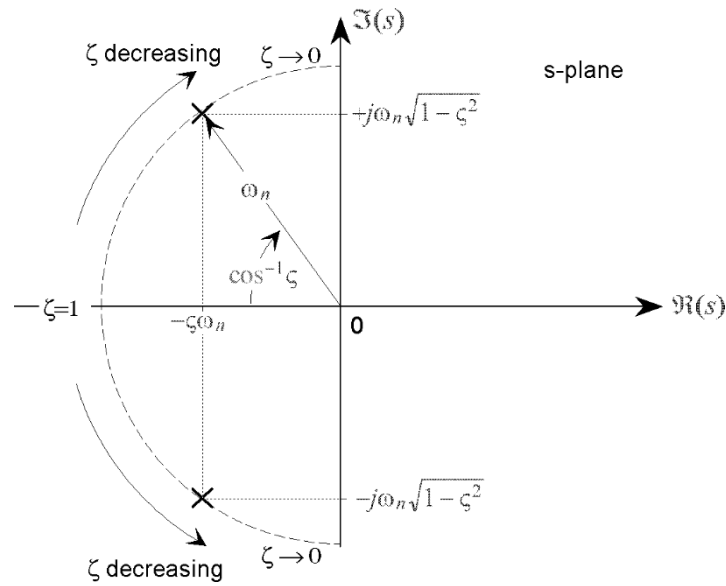


그림 4: 복잡한 공액 극 위치에서 감쇠된 2차 시스템에 대한 파라미터 ω_n 및 ζ 의 정의.

고전적인 2차 균질 시스템의 극 위치

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = 0, \quad (13)$$

섹션 9.3에 설명된

$$p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (14)$$

과댐핑 시스템에 해당하는 $\zeta \geq 1$ 이면 두 극은 실수이며 왼쪽 절반 평면에 위치합니다. $0 \leq \zeta < 1$ 인 과댐핑 시스템의 경우 극은 복소 공액 쌍을 형성합니다,

$$p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (15)$$

그림 4와 같이 왼쪽 절반 평면에 위치합니다. 이 그림에서 극은 원점으로부터 ω_n 의 거리에 있고 음의 실수 축으로부터 $\cos^{-1}(\zeta)$ 의 각도로 놓여 있음을 알 수 있습니다. 따라서 감쇠된 2차 시스템의 극은 ω_n 로 정의된 반지름을 가진 반원 위에 감쇠비 ζ 의 값으로 정의된 각도로 놓여 있습니다.

1.3 시스템 안정성

선형 시스템의 안정성은 전달 함수에서 직접 결정할 수 있습니다. n 차 선형 시스템은 유한한 초기 조건 집합에서 균질 응답의 모든 구성 요소가 시간이 증가함에 따라 0으로 붕괴하는 경우에만 점근적으로 안정적이거나 다음과 같은 경우에만 점근적으로 안정적입니다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n C e^{p_i t} = 0. \quad (16)$$

여기서 p_i 는 시스템 극입니다. 안정된 시스템에서 균질 응답의 모든 구성 요소는 시간이 증가함에 따라 0

으로 붕괴해야 합니다. 어떤 극이 양의 실수 부분을 갖는 경우 출력에 한계 없이 증가하는 구성 요소가 있어 시스템이 불안정해집니다.

선형 시스템이 안정적이려면 모든 극이 음의 실수 부분을 가져야 합니다. 즉, 모든 극이 s -평면의 왼쪽 절반에 위치해야 합니다. s -평면의 오른쪽 절반에 있는 "불안정한" 극은 유한한 초기 조건에서 제한 없이 증가하는 시스템 균질 응답의 구성 요소를 생성합니다. s -평면의 가상 축에 하나 이상의 극이 있는 시스템은 균질 응답에서 비감쇠 진동 성분을 가지며, 약간 안정적이라고 정의됩니다.

2 전달 함수의 기하학적 평가

전달 함수는 $s = \sigma + j\omega$ 의 모든 값에 대해 평가할 수 있으며, 일반적으로 s 가 복소수일 때 함수 $H(s)$ 자체도 복소수입니다. 전달 함수의 복소수 값을 극좌표 형식으로 크기와 각도로 표현하는 것이 일반적입니다:

$$H(s) = |H(s)| e^{j\varphi(s)}, \quad (17)$$

의 크기 $|H(s)|$ 와 각도 $\varphi(s)$ 는 다음과 같이 주어집니다.

$$|H(s)| = \sqrt{\{ \Re\{H(s)\} \}^2 + \{ \Im\{H(s)\} \}^2}, \quad (18)$$

$$\varphi(s) = \tan^{-1} \frac{\Im\{H(s)\}}{\Re\{H(s)\}} \quad (19)$$

여기서 $\Re\{\}$ 는 실수 연산자이고 $\Im\{\}$ 는 허수 연산자입니다. 방정식 (2)에서와 같이 분자와 분모 다항식을 $(s - p_i)$ 와 $(s - z_i)$ 로 인수분해하면 다음과 같습니다,

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_{m-1})(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-1})(s - p_n)} \quad (20)$$

분자와 분모의 각 요인은 복소수이며, 점 z_i 또는 p_i 에서 시작하여 함수를 평가할 점 s 로 향하는 s -평면의 벡터로 해석할 수 있습니다. 이러한 각 벡터는 크기와 각도로 극 형식으로 작성할 수 있습니다(예: 극 $p_i = \sigma_i + j\omega_i$, 점 $s = \sigma + j\omega$ 에 대한 벡터의 크기와 각도는 다음과 같습니다).

$$|s - p_i| = \sqrt{(\sigma - \sigma_i)^2 + (\omega - \omega_i)^2}, \quad (21)$$

$$\angle(s - p_i) = \tan^{-1} \frac{\omega - \omega_i}{\sigma - \sigma_i} \quad (22)$$

그림 5a와 같이, 두 복소량의 곱의 크기는 개별 크기의 곱이고 곱의 각도는 구성 요소 각도의 합이므로 (부록 B), 완전한 전달 함수의 크기와 각도는 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$|H(s)| = K \prod_{i=1}^m \frac{|s - z_i|}{|s - p_i|} \quad (23)$$

$$\angle H(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i). \quad (24)$$

$$i=1$$

$$i=1$$

분자와 분모에 있는 각 구성 벡터의 크기는 극에서 점 s 까지의 거리 또는 s -평면에서의 0입니다. 따라서 극 p_i 에서 극 0 플롯의 점 s 까지의 벡터가 길이 q_i 와 수평으로부터의 각도 ϑ_i 를 갖는다면 다음과 같은 벡터가 됩니다.

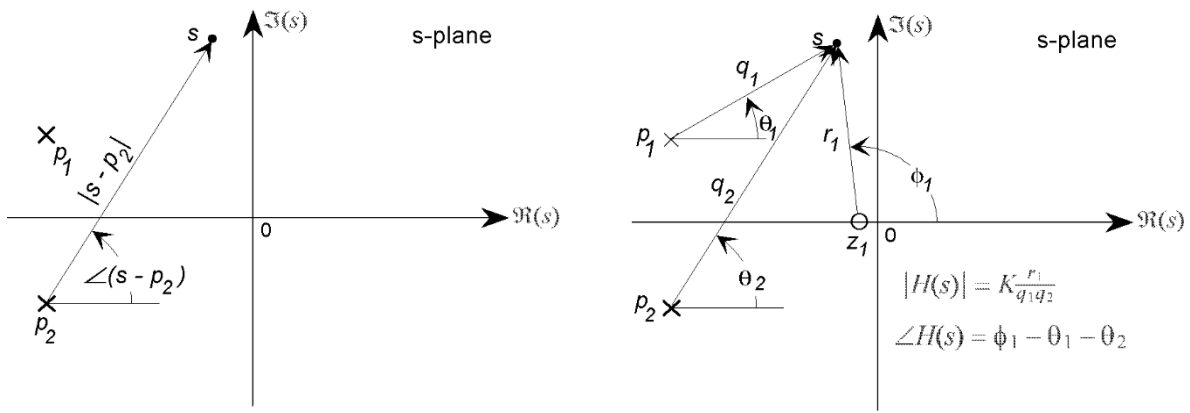


그림 5: (a) 극좌표 형태의 s -평면 기하학적 관계 정의, (b) 극-영점 플롯에서 전달 함수의 기하학적 평가.

그림 5b에 표시된 것처럼 점 s 에 대한 제로 z_i 는 길이 r_i 와 각도 ϕ_i 를 가지며, 점 s 에서의 전달 함수 값은 다음과 같습니다.

$$|H(s)| = K \frac{r_1 \dots r_m}{q_1 \dots q_n} \quad (25)$$

$$\angle H(s) = (\phi_1 + \dots + \phi_m) - (\vartheta_1 + \dots + \vartheta_n) \quad (26)$$

따라서 모든 값의 s 에서의 전달 함수는 전체 "이득" 계수 K 를 제외하고 극-영점 플롯에서 기하학적으로 결정할 수 있습니다. 전달 함수의 크기는 각 영점에서 점 s 까지의 기하학적 거리를 각 극에서 점까지의 거리의 곱으로 나눈 값에 비례합니다. 전달 함수의 각도는 영점과 관련된 벡터의 각도의 합에서 극과 관련된 벡터의 각도의 합을 뺀 값입니다.

■ 예

2차 시스템은 한 쌍의 복소 공액 극 $a = 2 \pm j3$ 과 s -평면의 원점에 하나의 0을 갖습니다. 전달 함수를 구하고 극-영점 플롯을 사용하여 $s = 0 + j5$ 에서의 전달 함수를 평가합니다.

해결 방법: 문제 설명에서

$$H(s) = K \frac{s}{(s - (-2 + j3))(s - (-2 - j3))} \quad \begin{matrix} / \\ H \\ (\\ s \\) \end{matrix}$$

$$= K \frac{s}{s^2 + 4s + 13}$$

극-제로 플롯은 그림 6에 나와 있습니다. 그림에서 전달 함수는 다음과 같습니다.

$$\sqrt{(0 - 5)^2}$$

$$I = K \sqrt{(0 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} \sqrt{(0 - (-2))^2 + (5 - (-3))^2}$$

(27)

$$= K \sqrt{4 + 4} \sqrt{4 + 64}$$

(28)

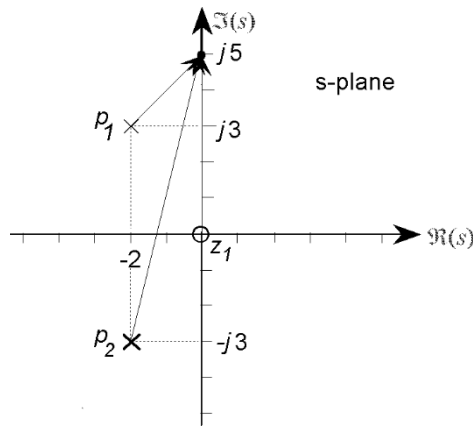


그림 6: 원점에 0이 있는 2차 시스템의 극-제로 플롯.

그리고

$$\begin{aligned} \angle H(s) &= \tan^{-1} (5/0) - \tan^{-1} (2/2) - \tan^{-1} (8/2) \\ &= -31^\circ \end{aligned} \quad (29)$$

3 주파수 응답 및 극-제로 플롯

주파수 응답은 $j\omega$ 를 대입하여 시스템 극과 0의 관점에서 작성할 수 있습니다.

를 인수 분해한 형태의 전달 함수에 직접 입력합니다:

$$H(j\omega) = K \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_{m-1})(j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_{n-1})(j\omega - p_n)} \quad (30)$$

주파수 응답은 s -평면의 가상 축, 즉 $s = j\omega$ 일 때 평가되는 전달 함수이므로 위에서 설명한 전달 함수를 평가하는 그래픽 방법을 주파수 응답에 직접 적용할 수 있습니다. n 개의 시스템 극에서 테스트 포인트 $s = j\omega$ 까지의 각 벡터는 크기와 각도를 갖습니다:

$$|j\omega - p_i| = \sqrt{\sigma_i^2 + (\omega - \omega_i)^2} \quad (31)$$

$$\angle(s - p)_i = \tan^{-1} \frac{\omega - \omega_i}{-\sigma_i} \quad (32)$$

를 그림 7a에 표시한 것과 같이 0의 벡터에 대해 유사한 식을 사용합니다. 그런 다음 전체 주파수 응답의 크기와 위상각은 다음 구성 요소 벡터의 크기와 각도로 작성할 수 있습니다.

$$|H(j\omega)| = K \frac{\prod_{i=1}^m |j\omega - z_i|}{\prod_{i=1}^n |j\omega - p_i|} \quad (33)$$

$$\angle H(j\omega) = \sum_{i=1}^n \angle(j\omega - z_i) - \sum_{i=1}^m \angle(j\omega - p_i). \quad (34)$$

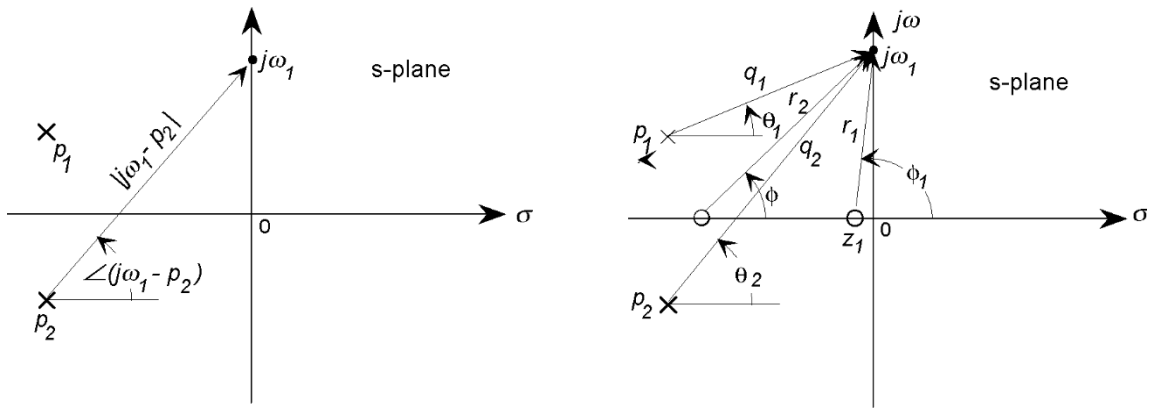


그림 7: 극-영점 플롯에서 주파수 응답 함수를 정의하는 데 사용되는 벡터 양의 정의. (a)에는 극(또는 0)의 벡터가 정의되어 있고, (b)에는 일반적인 시스템의 모든 극과 0의 벡터가 표시되어 있습니다.

위에서 정의한 대로 극 p_i 에서 점 $s = j\omega$ 까지의 벡터가 길이 q_i 와 수평으로부터의 각도 θ_i 를 가지며, 영점 z_i 에서 점 $j\omega$ 까지의 벡터가 길이 r_i 와 각도 ϕ_i 를 가지면 그림 7b와 같이 점 $j\omega$ 에서의 주파수 응답 값은 다음과 같습니다.

$$|H(j\omega)| = K \frac{r_1 \dots r_m}{q_1 \dots q_n} \quad (35)$$

$$\angle H(j\omega) = (\varphi_1 + \dots + \varphi_m) - (\theta_1 + \dots + \theta_n) \quad (36)$$

그래픽 방법은 시스템 주파수 응답의 정성적 그림을 도출하는 데 매우 유용할 수 있습니다. 예를 들어, 그림 8a와 같이 실축에 극이 있는 1차 시스템의 정현파 응답($s = 1/\tau$)과 그림 8b의 보데 플롯을 생각해 보겠습니다. 극-제로 플롯에서 이득 상수 K 를 결정할 수는 없지만 입력 주파수를 변경할 때 극에서 가상 축에 대한 벡터의 크기와 각도의 거동에 주목하여 다음과 같은 관찰을 직접 수행할 수 있습니다:

1. 저주파수에서는 이득이 유한한 값에 가까워지고 위상각은 작지만 유한한 지연을 갖습니다.
2. 입력 주파수가 증가하면 이득이 감소하고(벡터의 길이가 증가하기 때문에) 위상 지연도 증가합니다(벡터의 각도가 커지기 때문에).
3. 매우 높은 입력 주파수에서 이득은 0에 가까워지고 위상각은 $\pi/2$ 에 가까워집니다.

두 번째 예로 그림 9a와 같이 한 쌍의 복소 공액 극이 가상 축에 가깝게 위치하도록 감쇠비가 선택된 2차 시스템을 생각해 보겠습니다. 이 경우 두 극을 가상 축에 연결하는 한 쌍의 벡터가 있으며, 테스트 주파수가 가상 축 위로 이동함에 따라 벡터의 길이와 각도가 어떻게 변하는지에 주목하여 다음과 같은 결론을 도출할 수 있습니다:

1. 저주파수에서는 시스템과 관련된 유한한(그러나 결정되지 않은) 계인과 작지만 유한한 위상 지연이 있습니다.
2. 입력 주파수가 증가하고 가상 축의 테스트 포인트가 극에 가까워지면 벡터 중 하나(두 번째 사분면의 극과 연관된)의 길이가 감소합니다.

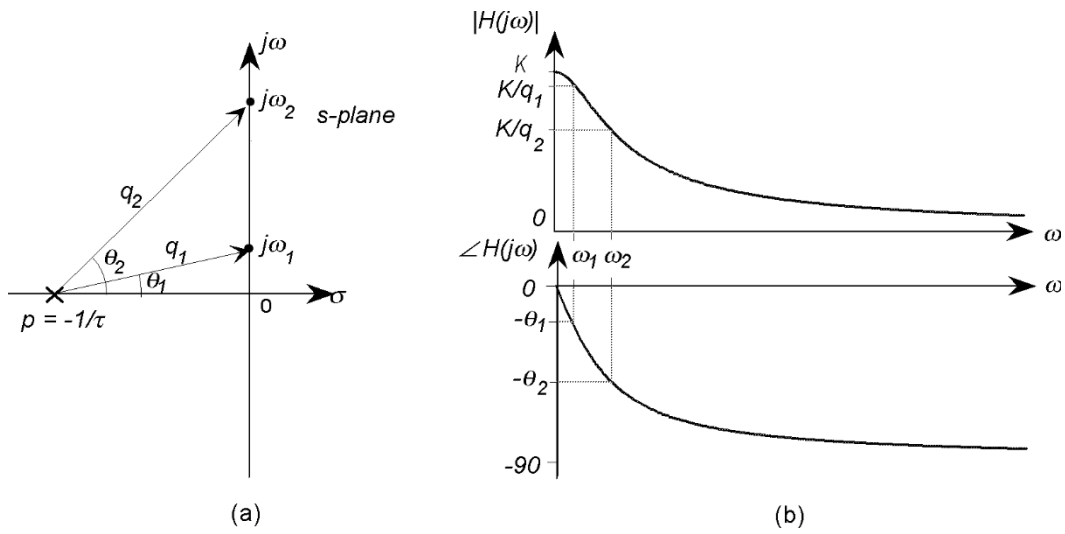


그림 8: 1차 시스템의 극-제로 플롯과 주파수 응답 함수.

어느 시점에서 최소값에 도달합니다. 극에 가까운 주파수 범위에서 크기 함수의 값이 증가합니다.

3. 매우 높은 주파수에서 두 벡터의 길이는 무한대에 가까워지고 주파수 응답의 크기는 0이 되는 경향이 있는 반면, 위상은 각 벡터의 각도가 $\pi/2$ 에 가까워지기 때문에 π 라디안 각도에 가까워집니다.

극-제로 플롯의 기하학적 해석을 기반으로 선형 시스템의 정현파 주파수 응답에 대해 다음과 같이 일 반화할 수 있습니다:

1. 시스템에 0의 개수를 초과하는 극이 있는 경우 주파수가 커질수록 주파수 응답의 크기는 0이 되는 경향이 있습니다. 마찬가지로 시스템에 과잉 0이 있는 경우 입력 주파수가 증가함에 따라 이득이 제한 없이 증가합니다. 이는 시스템을 통한 무한한 전력 이득을 의미하기 때문에 물리적 에 너지 시스템에서는 발생할 수 없습니다.
2. 시스템에 가상 축에 가까운 한 쌍의 복잡한 공액 극이 있는 경우 주파수 응답의 크기는 극에 근 접한 주파수에서 "피크" 또는 공명을 갖습니다. 극 쌍이 가상 축에 직접 놓여 있으면 시스템은 해당 주파수에서 무한 이득을 나타냅니다.
3. 시스템에 가상 축에 가까운 한 쌍의 복소 공액 0이 있는 경우 주파수 응답은 0에 가까운 주파수 에서 크기 함수에서 "딥" 또는 "노치"를 갖습니다. 한 쌍의 0이 가상 축에 바로 놓여 있으면 0의 주파수에서 응답이 동일하게 0이 되며 시스템은 해당 주파수에서 정현파 여기에는 전혀 응답하 지 않습니다.
4. s-평면의 원점에 있는 극(전달 함수에서 순수 적분 항에 해당)은 제로 주파수에서 무한 이득을

의미합니다.

5. 마찬가지로 s -평면의 원점(순수 미분에 해당)에서 0은 0 주파수에서 시스템의 이득이 0임을 의미합니다.

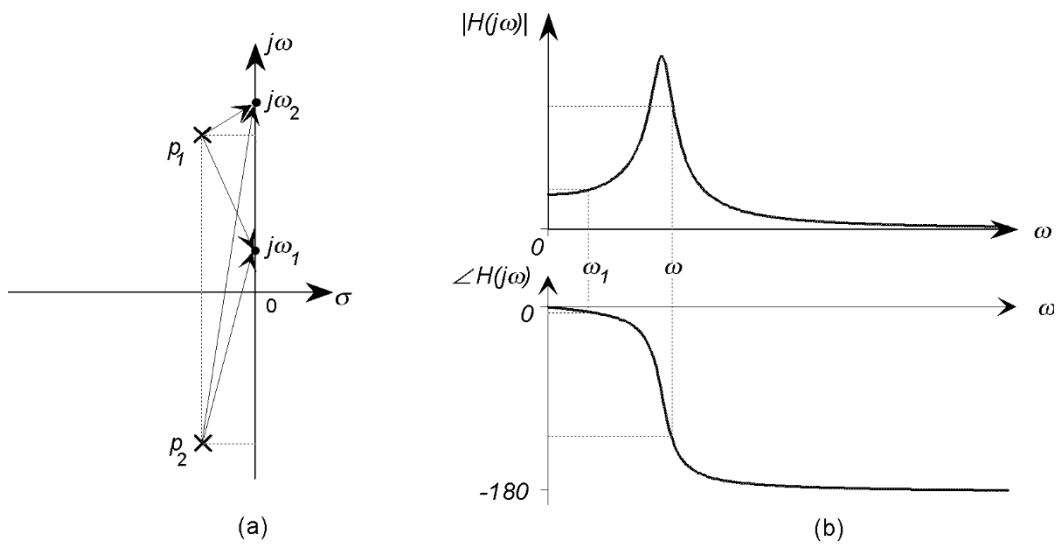


그림 9: 2차 시스템의 극-제로 플롯과 해당 주파수 응답 함수.

3.1 극-영점 플롯에서 직접 Magnitude Bode 플롯을 구성하는 간단한 방법

시스템의 극-제로 플롯에는 임의의 이득 상수를 제외하고 주파수 응답을 정의하기에 충분한 정보가 포함되어 있습니다. 절대 이득을 알지 못해도 크기 보데 플롯의 모양을 아는 것으로 충분한 경우가 많습니다. 여기에 설명된 방법을 사용하면 개별 컴포넌트 곡선을 그리지 않고도 검사를 통해 크기 플롯을 스케치할 수 있습니다. 이 방법은 전체 크기 곡선이 각 브레이크 주파수에서 기울기 *변화*를 겪는다는 사실에 기반합니다.

첫 번째 단계는 전달 함수를 인수 분해하거나 극-제로 플롯에서 직접 차단 주파수를 식별하는 것입니다. 그림과 같이 선형 시스템의 일반적인 극-제로 플롯을 생각해 보겠습니다.

10a. 4개의 1차 및 2차 블록의 차단 주파수는 모두 s -평면의 원점으로부터 극 또는 0의 반경 방향 거리와 동일한 주파수, 즉 $\omega_b = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ 입니다. 따라서 모든 휴식 주파수는 나침반을 가지고 각각에서 호를 그려서 찾을 수 있습니다.

극 또는 0을 양의 가상 축으로 설정합니다. 이러한 중단 주파수는 보데 플롯의 로그 주파수 축으로 직접 전송할 수 있습니다.

모든 저주파 점근은 이득이 0dB인 수평선이기 때문에 극 또는 0은 차단 주파수 아래의 보데 플롯에 기여하지 않습니다. 각 극 또는 0은 차단 주파수보다 20dB/초 높은 점근 플롯의 기울기 변화에 기여합니다. 복합 공액 극 또는 제로 쌍은 쌍의 각 멤버에서 ~~하나씩~~ [±] 20dB/초의 ~~두 개의~~ [±] 동시 차단을 정의하여 총 40dB/초의 기울기 변화를 제공합니다. 따라서 모든 주파수 ω 에서 점근 크기 함수의 기울기는 ω 보다 작은 주파수 또는 보데 플롯의 왼쪽에 있는 브레이크 포인트 수에만 의존합니다. 왼쪽에 0으로 인한 Z 중단점이 있고 극으로 인한 P 중단점이 있는 경우 해당 주파수에서 곡선의 기울기는 $20(Z - P)$

dB/decade입니다.

원점의 극이나 0은 사실상 모든 유한 파단 주파수의 왼쪽에 있기 때문에 보데 플롯에 그릴 수 없습니다. 그러나 초기 기울기를 정의합니다. 임의의 시작 주파수와 해당 주파수에서 가정된 게인(예: 0dB)을 선택한 경우 초기 기울기를 기록하고 다음과 같이 구성하여 크기 플롯의 모양을 쉽게 구성할 수 있습니다.

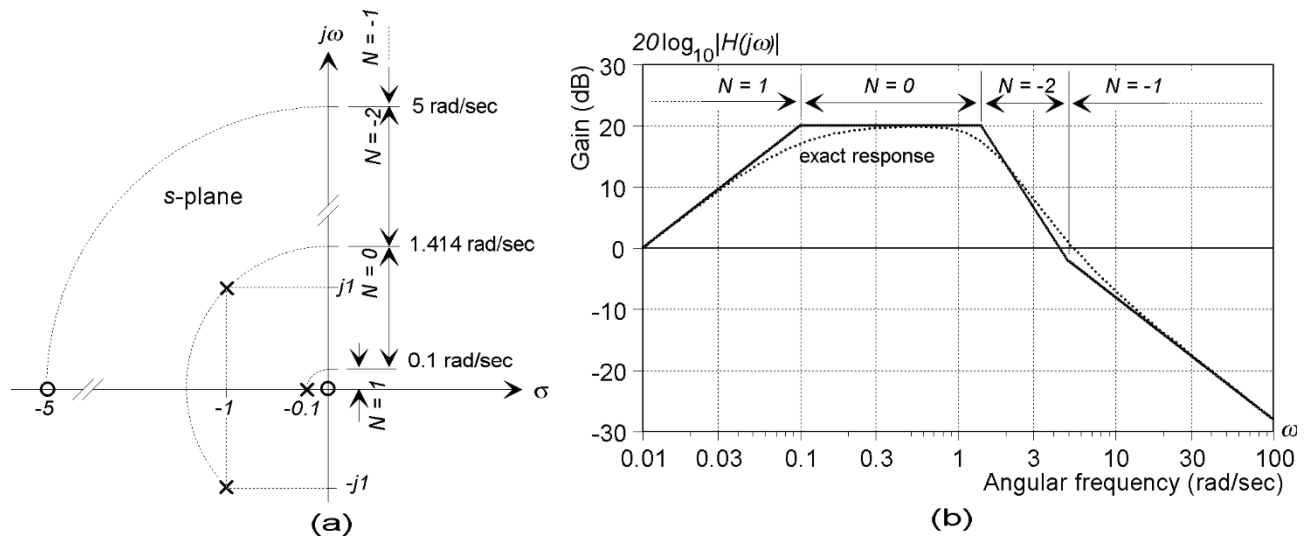


그림 10: 극-제로 다이어그램에서 크기 보데 플롯의 구성: (a)는 일반적인 3차 시스템과 차단 주파수의 정의를 보여주고, (b)는 차단 주파수에서의 기울기 변화에 따른 보데 플롯을 보여줍니다.

곡선은 중단점에서 20dB/초 단위로 기울기가 변하는 직선 세그먼트의 곡선입니다. 기준 게인을 임의로 선택하면 커브의 수직 변위가 발생합니다.

그림 10b는 이 방법을 사용하여 구축한 그림 10a에 표시된 시스템의 직선 크기 플롯을 보여줍니다. 0.01~100라디안/초의 주파수 범위를 임의로 선택하고 0.01라디안/초에서 0dB의 이득을 기준 레벨로 지정했습니다. 0, 0.1, 1.414 및 5 라디안/초의 차단 주파수를 극-제로 플롯에서 주파수 축으로 옮겼습니다. 모든 주파수에서 N 의 값은 $z - p$ 이며, 여기서 z 는 왼쪽에 있는 0의 수이고 p 는 왼쪽에 있는 극의 수입니다. 곡선은 각 주파수 간격에 기울기 값을 할당하고 연결된 선을 그려서 간단히 그릴 수 있습니다.