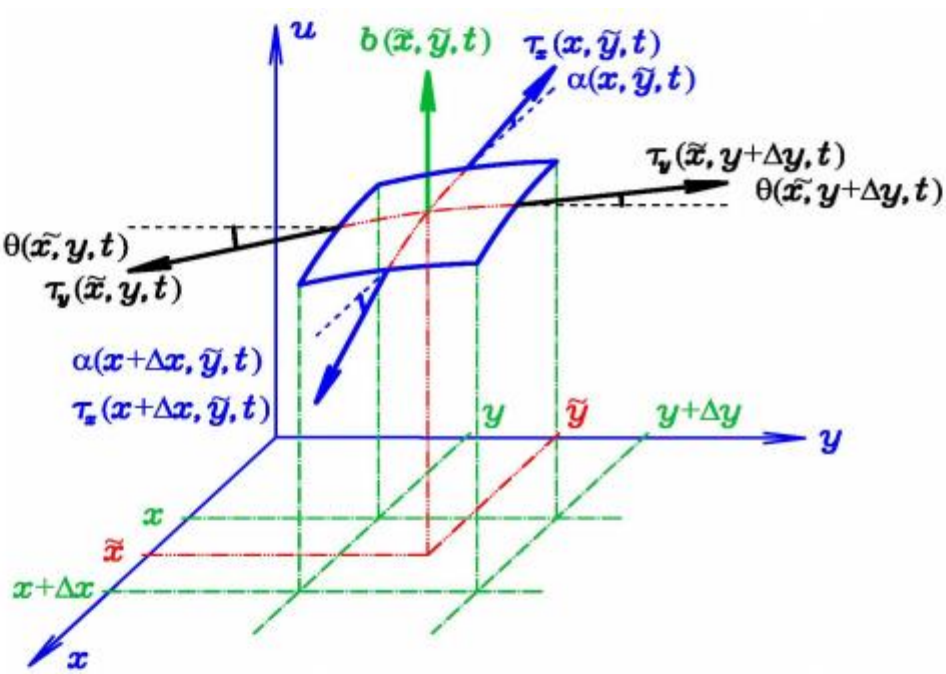
ECUACIÓN BIDIMENSIONAL DE ONDA. (MEMBRANA VIBRANTE)

INTRODUCCIÓN:

Para hallar la solución del problema, se harán las siguientes suposiciones:

1. La masa de la membrana por unidad de área es constante ("membrana homogénea"). La membrana es perfectamente flexible y tan delgada que no ofrece resistencia alguna a la flexión.
2. La membrana se tensa y a continuación, se fija a lo largo de toda su frontera, en el plano *xy* .La tensión por unidad de longitud T, provocada al estirar la membrana es la misma en todos los puntos y en todas las direcciones, y no cambia durante el movimiento.
3. La deflexión *u(x,y,t)* de la membrana durante el movimiento es pequeña comparada con el tamaño de ésta y todos los ángulos de inclinación son pequeños.

Para obtener la ecuación diferencial que rige el movimiento de la membrana, en la figura se consideran las fuerzas que actúan sobre una pequeña porción de la misma. Puesto que las deflexiones de la membrana y los ángulos de inclinación son pequeños, los lados de la porción son aproximadamente iguales a Δx y Δy. La tensión T es la fuerza por unidad de longitud. De donde, las fuerzas que actúan sobre los bordes de la porción son aproximadamente $T\Delta x$ y $T\Delta y$.



Primero se consideran las componentes horizontales de las fuerzas. Se obtienen estas componentes al multiplicar las fuerzas por los cosenos de los ángulos de inclinación. Ya que estos ángulos son pequeños, sus cosenos están cercanos a 1. De donde las componentes horizontales de las fuerzas en bordes opuestos son aproximadamente iguales. Por tanto, el movimiento de las partículas de la membrana en la dirección horizontal será aproximadamente despreciable. Por esto se concluye que es posible considerar el movimiento de la membrana como transversal.

Las componentes verticales de las fuerzas a lo largo de los bordes, paralelas al plano y son:

$$T\Delta y sen\beta \quad \text{y} \quad -T\Delta y sen \propto$$

El signo menos aparece porque la fuerza que actúa sobre el lado izquierdo está dirigida hacia abajo. Cuando los ángulos son pequeños, pueden remplazar sus senos por tangentes por lo tanto la resultante queda como:

$$T\Delta y(sen\beta - sen \propto) \approx T\Delta y(tan\beta - tan \propto)$$

$$= T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] \qquad (1)$$

Donde los subíndices x denotan derivadas parciales y y_1 y y_2 son valores entre y y $y + \Delta y$. De manera análoga, la resultante de las componentes verticales de las fuerzas que actúan sobre los otros bordes de la porción es:

$$= T\Delta x\left[u_y\left(x_{1,} y + \Delta y\right) - u_y(x_2, y)\right] \qquad (2)$$

donde $x_{1,}$y x_2 son valores entre x y $x + \Delta x$.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas dadas por (1) y (2) es igual a la masa $\rho\Delta A$ de esa pequeña porción multiplicada por la aceleración $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Considerando que ρ es la masa de la membrana no desviada por unidad de área y $\Delta A = \Delta x\Delta y$ es el área de esa misma porción cuando no está desviada. Por tanto:

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] + T\Delta x\left[u_y\left(x_{1,} y + \Delta y\right) - u_y(x_2, y)\right]$$

Donde la derivada de la izquierda se evalúa en algún punto apropiado $(\tilde{x}, \tilde{y})$correspondiente a esa porción. Al dividir entre $\rho\Delta x\Delta y$ da:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left\{\left[\frac{u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x}\right] + \left[\frac{u_y\left(x_{1,} y + \Delta y\right) - u_y(x_2, y)}{\Delta y}\right]\right\}$$

Si se hace que Δx y Δy tiendan a cero, se obtiene la ecuación diferencial parcial

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}}$$

Esta se conoce como **ecuación bidimensional de onda.**

DESARROLLO TEÓRICO.

La Membrana Vibrante

Para resolver el problema de la membrana vibrante, tenemos que determinar una solución de la ecuación de onda bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

donde:

$$c^2 = \frac{T}{\rho}$$

que satisfaga la condición de frontera

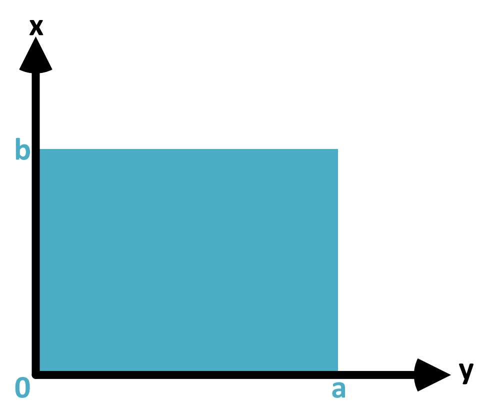
u =0

sobre la frontera de la membrana para todo t≥0 .

Y las dos condiciones iniciales

u(x,y,0)=f(x,y) *y* $\frac{\partial u}{\partial t} = g(x,y)\ para\ \ t = 0$

Como un primer caso importante, consideremos una membrana rectangular, como se muestra.



Primer paso

Se propone una solución en forma de un producto de dos funciones que dependen de (x,y) y t por separado.

$$u(x, y, t) = F(x, y)G(t)$$

Sustituyendo $u(x, y, t)$ en la ecuación diferencial obtenemos:

$$F(x, y)\ddot{G}(t) = c^2(Fxx(x)G(t) + Fyy(x)G(t))$$

Dividiendo entre c^2F G nos queda

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(Fxx(x) + Fyy(x))$$

La expresión de la izquierda depende únicamente de t, mientras que la expresión de la derecha depende únicamente de x, y. Por lo tanto, cada expresión debe ser igual a una constante (negativa otra vez).

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(Fxx + Fyy) = -v^2$$

Esto nos lleva inmediatamente a la ecuación diferencial ordinaria

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0$$

donde $\lambda = cv$.

Y a la ecuación diferencial parcial

$$Fxx + Fyy + v^2F = 0 \tag{3}$$

Consideramos esta ecuación diferencial y aplicamos el método de separación de variables otra vez. Esto es, proponemos:

$$F(x, y) = H(x)Q(y)$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos, como antes,

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2} + v^2Q\right) = -k^2$$

Lo que nos da como resultado las dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2H}{dx^2} + k^2H = 0 \tag{4}$$

$$\frac{d^2Q}{dy^2} . p^2Q = 0 \tag{5}$$

donde:

$$p^2 = v^2 - k^2$$

Segundo paso

Las soluciones de las ecuaciones 4 y 5 son de la forma:

$$\therefore H\ (x) = A \cos kx + \ B\ sen\ kx$$

$$Q\ (y) = C \cos py + D\ sen\ py$$

De las condiciones de frontera, tenemos que $u(x, y, t)$ debe ser cero en las orillas de la membrana, que son: x = 0, x = a, y = 0, y = b.

Esto nos lleva a las condiciones

$$H\ (0) = 0 \qquad\qquad Q\ (0) = 0$$

$$H\ (a) = 0 \qquad\qquad Q\ (b) = 0$$

Entonces:

$$H\ (0) = A = 0$$

$$H\ (a) = B\ sen\ ka = 0$$

$$\Longrightarrow k = \frac{m\pi}{a}$$

$$m = entero$$

$$Q\ (0) = C = 0$$

$$Q\ (b) = D\ sen\ pb = 0$$

$$\Longrightarrow p = \frac{n\pi}{b}$$

$$n = entero$$

Entonces obtenemos las soluciones:

$$H_m\ (x) = sen \frac{m\pi x}{a}$$

$$Q_n\ (y) = sen \frac{n\pi y}{b}$$

Entonces las funciones:

$$F_{mn}\ (x, y) = H_m\ (x)\ Q_n\ (y) = sen \frac{m\pi x}{a}\ \ sen \frac{n\pi y}{b}$$

son soluciones de la ecuación 3 que satisfacen las condiciones de frontera.

Puesto que:

$$p^2 = v^2 - k^2 \qquad \text{y} \qquad \lambda = c\ v$$

Entonces:

$$\lambda = c\sqrt{k^2 + p^2}$$

Y a cada valor de m y n le corresponde un valor de λ:

$$\lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

La correspondiente solución general es:

$$G_{mn}\,(t) = B_{mn}\cos\lambda_{mn}\,t + B^*{}_{mn}\,\mathrm{sen}\,\lambda_{mn}\,t$$

Y entonces las funciones:

$$u_{mn}\,(x,y,t) = F_{mn}(x,y)\;G_{mn}\,(t)$$

Son explícitamente:

$$u_{mn}\,(x,y,t) = (B_{mn}\cos\lambda_{mn}\,t + B^*{}_{mn}\,\mathrm{sen}\,\lambda_{mn}\,t)\;sen\frac{m\pi}{a}x\quad sen\frac{m\pi}{b}y$$

Estas funciones, para cada valor de m y n, son soluciones de la ecuación diferencial que satisfacen las condiciones de frontera.

Estas funciones se llaman eigenfunciones o funciones características, y los valores $\boldsymbol{\lambda_{mn}}$ son llamados eigenvalores o valores característicos de la membrana vibrante. La frecuencia de vibración de $\boldsymbol{u_{mn}}$ es $\boldsymbol{\frac{\lambda_{mn}}{2\pi}}$.

Es interesante notar que, dependiendo de los valores de a y b, varias funciones $\boldsymbol{F_{mn}}$ pueden corresponder al mismo valor característico $\boldsymbol{\lambda_{mn}}$. Físicamente esto significa que pueden existir varias vibraciones de la misma frecuencia pero diferentes líneas nodales (curvas de puntos en la membrana que no se mueven).

Tercer paso

Es claro que una sola de las soluciones $u_{mn(x,y,t)}$ no va a satisfacer las condiciones iniciales en general.

Puesto que la ecuación es lineal y homogénea, sabemos del teorema fundamental que una suma de ellas también será una solución. Para obtener una solución que satisfaga las condiciones iniciales, consideremos la doble serie infinita:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x,y,t)$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(B_{mn}cos\lambda_{mn}t + B_{mn}sen\lambda_{mn}t).sen\frac{m.\pi}{a}x.sen\frac{n.\pi}{b}y \quad (6)$$

De esta solución y de la condición inicial u(x,y,0) = f(x,y) , vemos que

$$u_{mn}(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(B_{mn}).sen\frac{m.\pi}{a}x.\ sen\frac{n.\pi}{b}y = f(x,y)$$

Esta serie se conoce como doble serie de Fourier. Los coeficientes B_{mn} se pueden calcular de la siguiente manera:

Definimos una función

$$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\,.sen\frac{n.\pi}{b}y \quad (7)$$

Entonces:

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(y).sen\frac{m\pi}{a}x$$

para una y fija, esta última serie es la serie de Fourier de senos de la extensión periódica impar de $f(x,y)$. Entonces:

$$K_m(y) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\,.sen\frac{m\pi x}{a}dx \quad (8)$$

De la ecuación 7, vemos que es la serie de Fourier de senos de K_m (y), y entonces los coeficientes B_{mn} son:

$$B_{mn} = \frac{2}{b}\int_o^b K_m(y)\ .sen\frac{n\pi y}{b}dy \quad (9)$$

De las ecuaciones 8 y 9, obtenemos la fórmula generalizada de Euler:

$$B_{mn} = \frac{4}{a\,b}$$

$$\int_0^b \int_0^a f\,(x,y) sen \frac{m\pi x}{a}\ \ sen \frac{n\pi y}{b}\ dx\,dy$$

Similarmente, diferenciando la ecuación 7 con respecto al tiempo y usando la segunda condición inicial, tenemos:

$$u_{mn}\,(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B^*{}_{mn}\ \lambda_{mn}\, sen \frac{m\pi}{a} x\ sen \frac{n\pi}{b} y = g(x,y)$$

Entonces, procediendo como antes, obtenemos:

$$B^*{}_{mn} = \frac{4}{a\,b\,\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g\,(x,y)\ sen \frac{m\pi}{a} x\ sen \frac{n\pi}{b} y\ dx\,dy$$

BIBLIOGRAFÍA

- MATEMÁTICA AVANZADA PARA INGENIERÍA. ERWIN KREYZIG. Volumen II, Sexta Edición.