Validation par analyse statique

Partie : Interprétation abstraite, cours 3/3

Pierre-Loïc Garoche

(merci à Pierre Roux pour ses contributions à ce cours)

ONERA

ENSEEIHT 2A

2019-2020

Page du cours : `http://garoche.enseeiht.fr/N7/VAS/`

Abstractions relationnelles

- Rappel
- Polyèdres
- Octogones

Si le cours avait duré un semestre...

- Domaines non numériques
- Virgule flottante
- Partitionnement
- Stratégies d'itération
- Invariants quadratiques

Outils existants

Comment abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$?

Deux grandes solutions

- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ en $\mathbb{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ puis $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *non relationnel* : les valeurs de x et y sont indépendantes

Comment abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$?

Deux grandes solutions

- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ en $\mathbb{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ puis $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *non relationnel* : les valeurs de x et y sont indépendantes
- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ directement en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *relationnel* : certaines combinaisons de x et y sont impossibles

Comment abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$?

Deux grandes solutions

- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ en $\mathbb{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ puis $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *non relationnel* : les valeurs de x et y sont indépendantes
- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ directement en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *relationnel* : certaines combinaisons de x et y sont impossibles
  - $+$ plus précis
  - $-$ plus compliqué et plus coûteux

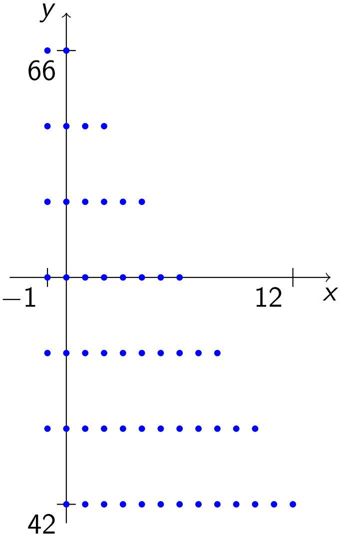
Comment abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$?

Deux grandes solutions

- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ en $\mathbb{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ puis $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *non relationnel* : les valeurs de x et y sont indépendantes
  - le cours précédent
- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ directement en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *relationnel* : certaines combinaisons de x et y sont impossibles
  - $+$ plus précis
  - $-$ plus compliqué et plus coûteux
  - maintenant !

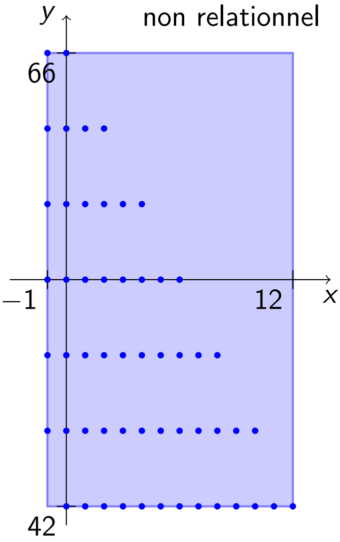
Deux petits dessins valent mieux que de longs discours

Exemple précédent au point de programme 2 (invariant de boucle)



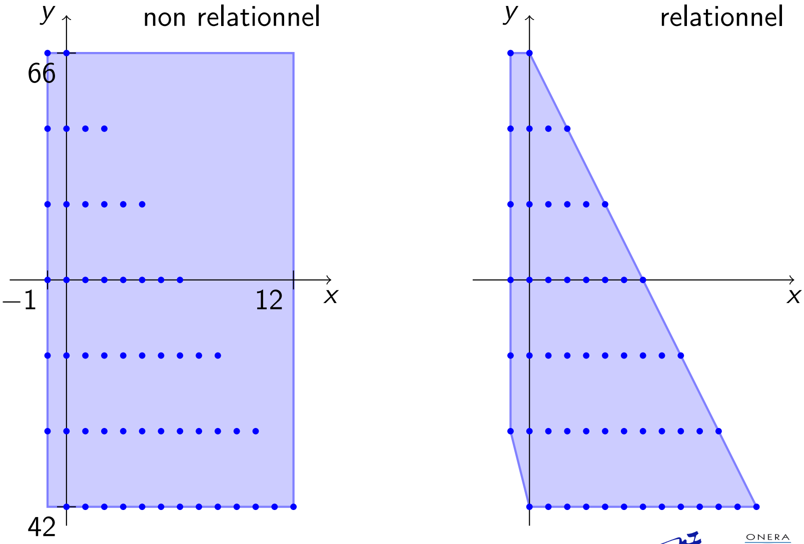
Deux petits dessins valent mieux que de longs discours

Exemple précédent au point de programme 2 (invariant de boucle)



Deux petits dessins valent mieux que de longs discours

Exemple précédent au point de programme 2 (invariant de boucle)



Limitations des domaines non relationnels

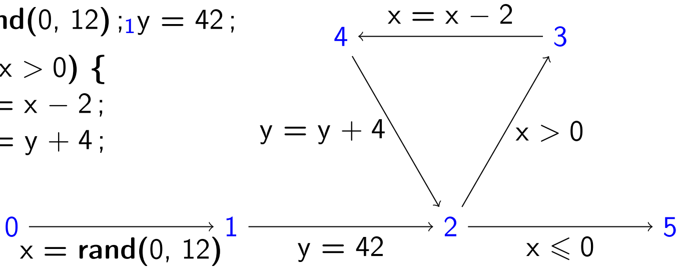
${}_0x = \textbf{rand}(0, 12)\,;{}_1y = 42\,;$

$\textbf{while}\ {}_2(x > 0)\ \{$

$\quad {}_3x = x - 2\,;$

$\quad {}_4y = y + 4\,;$

$\}_5$



- Pour borner y, on a besoin de l'invariant $2x + y \leqslant 66$.
- Cet invariant de boucle ne peut être exprimé par aucun domaine non relationnel.

Abstractions relationnelles

- Rappel
- Polyèdres
- Octogones

Si le cours avait duré un semestre...

- Domaines non numériques
- Virgule flottante
- Partitionnement
- Stratégies d'itération
- Invariants quadratiques

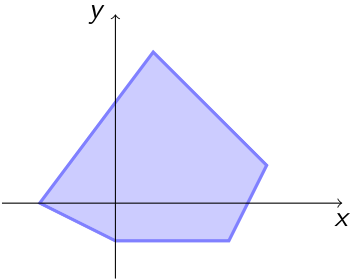
Outils existants

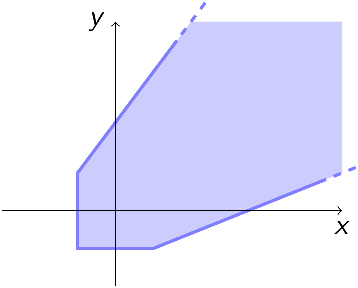
Polyèdres

On s'intéresse aux polyèdres fermés convexes

soit des ensembles de la forme $\left\{ \rho \;\middle|\; \bigwedge_i \left(\sum_j a_{ij}\rho(v_j) \geqslant b_i \right) \right\}$

avec $a_{ij}, b_i \in \mathbb{Z}$ et $v_i \in \mathbb{V}$.

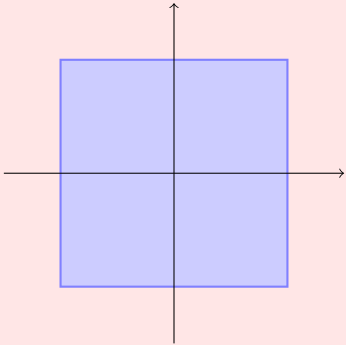




Polyèdre, treillis

Remarque

Les polyèdres ne forment pas un treillis :
une intersection d'une infinité de carrés peut donner un disque.

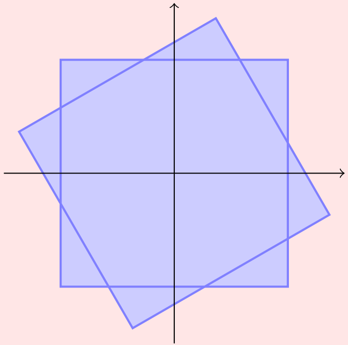


En pratique, on ne calcule que des intersections finies,
donc ce n'est pas gênant.

Polyèdre, treillis

Remarque

Les polyèdres ne forment pas un treillis :
une intersection d'une infinité de carrés peut donner un disque.

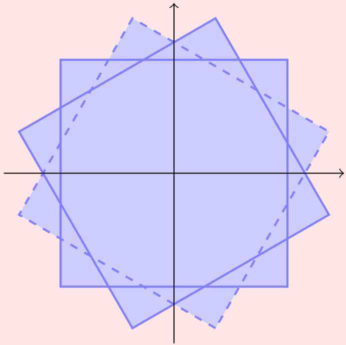


En pratique, on ne calcule que des intersections finies,
donc ce n'est pas gênant.

Polyèdre, treillis

Remarque

Les polyèdres ne forment pas un treillis :
une intersection d'une infinité de carrés peut donner un disque.

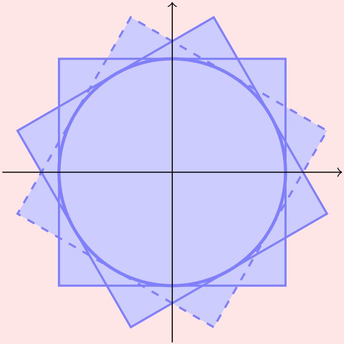


En pratique, on ne calcule que des intersections finies,
donc ce n'est pas gênant.

Polyèdre, treillis

Remarque

Les polyèdres ne forment pas un treillis :
une intersection d'une infinité de carrés peut donner un disque.

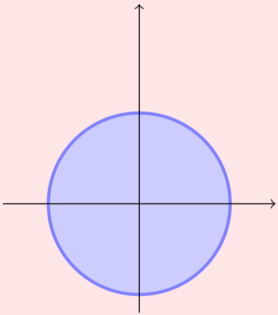


En pratique, on ne calcule que des intersections finies,
donc ce n'est pas gênant.

Polyèdres, meilleure abstraction

Remarque

De nombreux objets concrets n'ont pas de meilleure abstraction : un disque peut être approximé par un polygone régulier à n côtés, un polygone régulier à $2n$ côtés sera une meilleure abstraction.

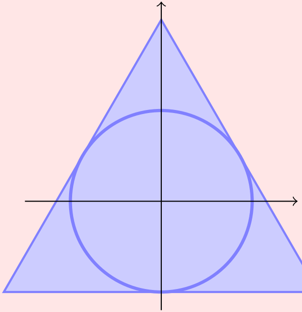


En pratique, on ne considère que des polyèdres
avec un nombre fini de côtés, donc ce n'est pas gênant.

Polyèdres, meilleure abstraction

Remarque

De nombreux objets concrets n'ont pas de meilleure abstraction : un disque peut être approximé par un polygone régulier à n côtés, un polygone régulier à $2n$ côtés sera une meilleure abstraction.

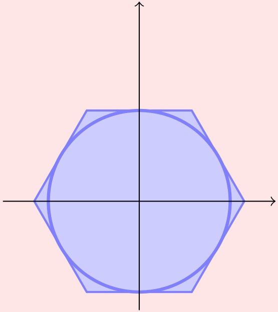


En pratique, on ne considère que des polyèdres avec un nombre fini de côtés, donc ce n'est pas gênant.

Polyèdres, meilleure abstraction

Remarque

De nombreux objets concrets n'ont pas de meilleure abstraction : un disque peut être approximé par un polygone régulier à n côtés, un polygone régulier à $2n$ côtés sera une meilleure abstraction.



En pratique, on ne considère que des polyèdres avec un nombre fini de côtés, donc ce n'est pas gênant.

Représentation des polyèdres

Deux représentations duales :

Contraintes

(M, c) avec $M \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ et $c \in \mathbb{Z}^m$:

$$\gamma\,(M, c) = \{v \mid Mv \geqslant c\}$$

avec $v = (v_1, \ldots, v_n)$ vecteur des variables ($v_i \in \mathbb{V}$).

Représentation des polyèdres

Deux représentations duales :

Contraintes

(M, c) avec $M \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ et $c \in \mathbb{Z}^m$:

$$\gamma\,(M, c) = \{v \mid Mv \geqslant c\}$$

avec $v = (v_1, \ldots, v_n)$ vecteur des variables ($v_i \in \mathbb{V}$).

Générateurs

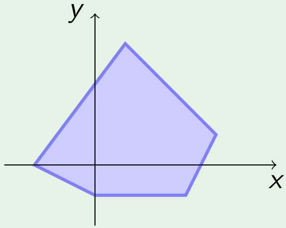
(P, R) avec $P \in \mathbb{Z}^{n \times p}$ et $R \in \mathbb{Z}^{n \times r}$:

$$\gamma\,(P, R) = \left\{ \left(\sum_{i=1}^{p} a_i P_{.i} \right) + \left(\sum_{i=1}^{r} b_i R_{.i} \right) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i, a_i \geqslant 0, b_i \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i = 1 \end{array} \right\}$$

P est nommé ensemble de *points* et R ensemble de *rayons*.

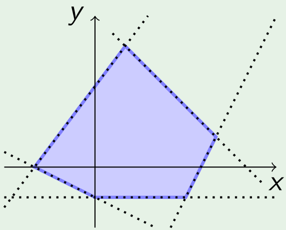
Représentation des polyèdres, exemples

Contraintes



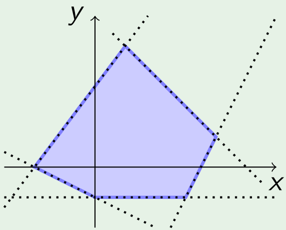
Représentation des polyèdres, exemples

Contraintes

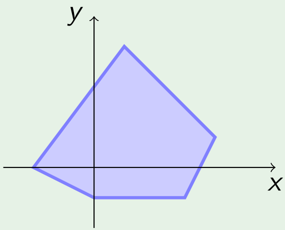


Représentation des polyèdres, exemples

Contraintes

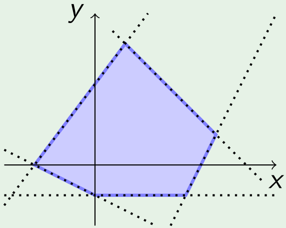


Générateurs

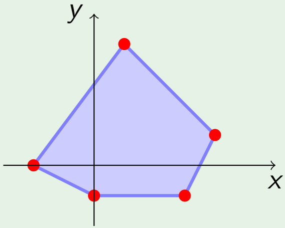


Représentation des polyèdres, exemples

Contraintes

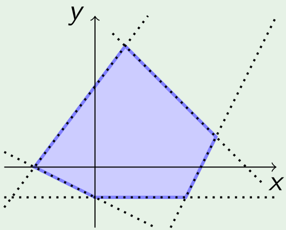


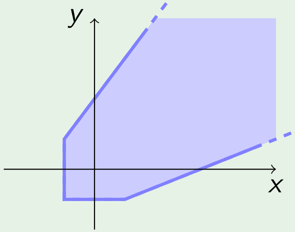
Générateurs



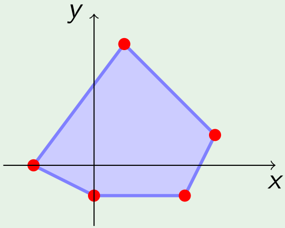
Représentation des polyèdres, exemples

Contraintes



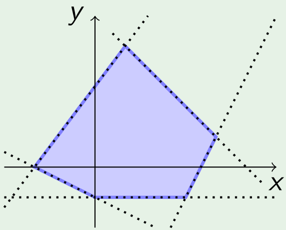


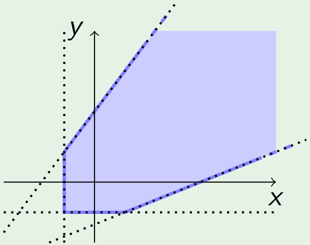
Générateurs



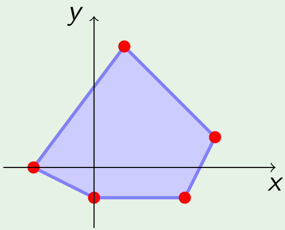
Représentation des polyèdres, exemples

Contraintes



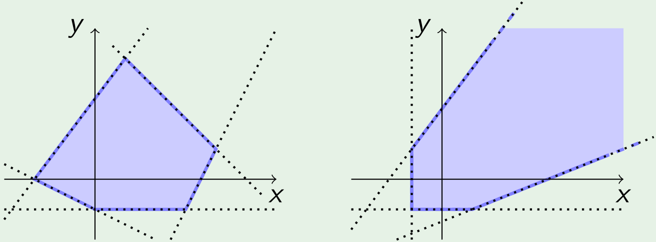


Générateurs

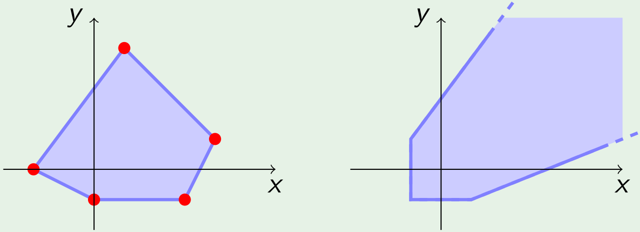


Représentation des polyèdres, exemples

Contraintes

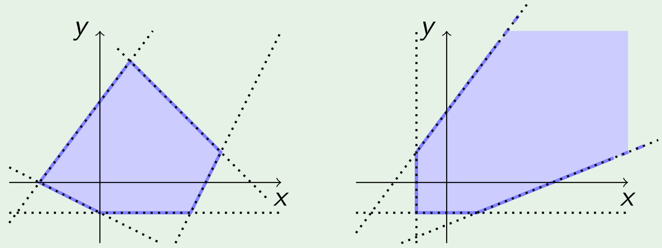


Générateurs

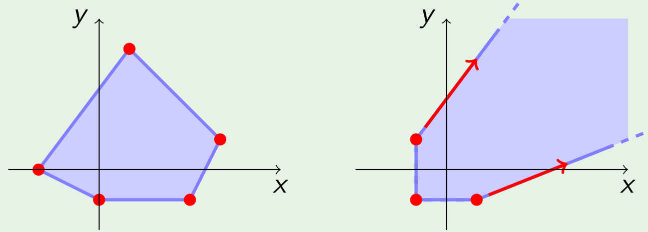


Représentation des polyèdres, exemples

Contraintes



Générateurs



Minimalité de la représentation

Définition

Une représentation est *minimale* si elle ne contient pas de contrainte (resp. point ou rayon) redondante (i.e. aucune contrainte (resp. point, rayon) ne peut être enlevée sans changer la concrétisation).

Minimalité de la représentation

Définition

Une représentation est *minimale* si elle ne contient pas de contrainte (resp. point ou rayon) redondante (i.e. aucune contrainte (resp. point, rayon) ne peut être enlevée sans changer la concrétisation).

Remarques

- La représentation minimale n'est pas unique.
  - contraintes

Minimalité de la représentation

Définition

Une représentation est *minimale* si elle ne contient pas de contrainte (resp. point ou rayon) redondante (i.e. aucune contrainte (resp. point, rayon) ne peut être enlevée sans changer la concrétisation).

Remarques

- La représentation minimale n'est pas unique.
  - contraintes

  - générateurs

Minimalité de la représentation

Définition

Une représentation est *minimale* si elle ne contient pas de contrainte (resp. point ou rayon) redondante (i.e. aucune contrainte (resp. point, rayon) ne peut être enlevée sans changer la concrétisation).

Remarques

- La représentation minimale n'est pas unique.
  - contraintes

  - générateurs

- Il est intéressant de garder une représentation minimale pour minimiser la complexité spatiale et temporelle.

Remarques sur la dualité

Remarques

- Les opérations sont souvent plus faciles
  sur une des représentations que sur l'autre.
- On a un algorithme (Chernikova)
  pour passer d'une représentation à l'autre.
- Complexité au pire cas exponentielle en n
  (l'hypercube de dimension n a $2n$ faces et 2^n sommets).

Opérations abstraites

Grâce à la dualité, on peut calculer simplement :

- $x^\sharp \sqsubseteq^\sharp y^\sharp$: chaque générateur de $x^\sharp$ vérifie toutes les contraintes de $y^\sharp$

Opérations abstraites

Grâce à la dualité, on peut calculer simplement :

- $x^\sharp \sqsubseteq^\sharp y^\sharp$: chaque générateur de $x^\sharp$ vérifie toutes les contraintes de $y^\sharp$
- $x^\sharp =^\sharp y^\sharp$: $x^\sharp \sqsubseteq^\sharp y^\sharp$ et $y^\sharp \sqsubseteq^\sharp x^\sharp$

Opérations abstraites

Grâce à la dualité, on peut calculer simplement :

- $x^\sharp \sqsubseteq^\sharp y^\sharp$: chaque générateur de $x^\sharp$ vérifie toutes les contraintes de $y^\sharp$
- $x^\sharp =^\sharp y^\sharp$: $x^\sharp \sqsubseteq^\sharp y^\sharp$ et $y^\sharp \sqsubseteq^\sharp x^\sharp$
- $x^\sharp \sqcap^\sharp y^\sharp$: union des ensembles de contraintes

Opérations abstraites

Grâce à la dualité, on peut calculer simplement :

- $x^\sharp \sqsubseteq^\sharp y^\sharp$: chaque générateur de $x^\sharp$ vérifie toutes les contraintes de $y^\sharp$
- $x^\sharp =^\sharp y^\sharp$: $x^\sharp \sqsubseteq^\sharp y^\sharp$ et $y^\sharp \sqsubseteq^\sharp x^\sharp$
- $x^\sharp \sqcap^\sharp y^\sharp$: union des ensembles de contraintes
- $x^\sharp \sqcup^\sharp y^\sharp$: union des ensembles de générateurs

Opérations abstraites

Grâce à la dualité, on peut calculer simplement :

- $x^\sharp \sqsubseteq^\sharp y^\sharp$: chaque générateur de $x^\sharp$ vérifie toutes les contraintes de $y^\sharp$
- $x^\sharp =^\sharp y^\sharp$: $x^\sharp \sqsubseteq^\sharp y^\sharp$ et $y^\sharp \sqsubseteq^\sharp x^\sharp$
- $x^\sharp \sqcap^\sharp y^\sharp$: union des ensembles de contraintes
- $x^\sharp \sqcup^\sharp y^\sharp$: union des ensembles de générateurs

- Gardes : on ajoute des contraintes :

$$\left[\!\left[\sum_i a_i v_i + b > 0\right]\!\right]^\sharp_{\mathrm{C}}(M, c) = \left(\begin{pmatrix} M \\ a_1 \dots a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 1 - b \end{pmatrix}\right)$$

Opérations abstraites, affectation

On applique simplement l'affectation aux générateurs :

$$\left[\!\left[v_i = \sum_i a_i v_i + b \right]\!\right]^{\sharp}_{\mathrm{C}} (P, R) = (AP + B, AR)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Opérations abstraites, affectation

On applique simplement l'affectation aux générateurs :

$$\left[\!\left[v_i = \sum_i a_i v_i + b \right]\!\right]^\sharp_{\mathrm{C}} (P, R) = (AP + B, AR)$$

avec

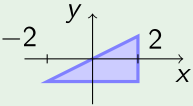
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarques

- Malgré l'absence de correspondance de Galois, toutes ces opérations sont optimales (et même exactes, sauf $\sqcup^\sharp$).
- Dans le cas non linéaire, il faudrait abstraire par du linéaire...

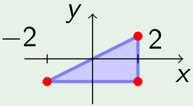
Opérations abstraites, affectation, exemples

Exemple ($x = x - y - 1$)



Opérations abstraites, affectation, exemples

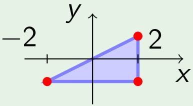
Exemple ($x = x - y - 1$)



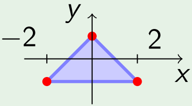
$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Opérations abstraites, affectation, exemples

Exemple ($x = x - y - 1$)



$$\xrightarrow{\quad x = x - y - 1 \quad}$$

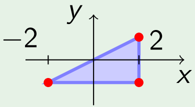


$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

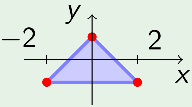
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Opérations abstraites, affectation, exemples

Exemple (x = x − y − 1)

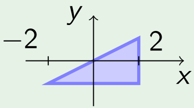


$$\xrightarrow{\quad x = x - y - 1 \quad}$$



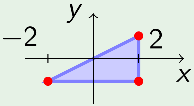
$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple (x = 2y)

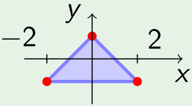


Opérations abstraites, affectation, exemples

Exemple (x = x − y − 1)



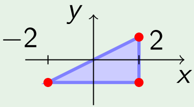
$$\xrightarrow{\quad x = x - y - 1 \quad}$$



$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

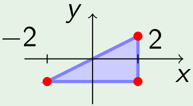
Exemple (x = 2y)



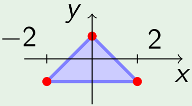
$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Opérations abstraites, affectation, exemples

Exemple (x = x − y − 1)

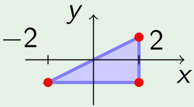


$$\xrightarrow{\quad x = x - y - 1 \quad}$$

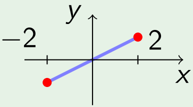


$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple (x = 2y)



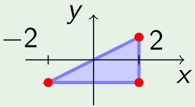
$$\xrightarrow{\quad x = 2y \quad}$$



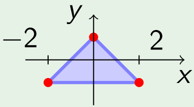
$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Opérations abstraites, affectation, exemples

Exemple ($x = x - y - 1$)

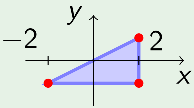


$\xrightarrow{\quad x = x - y - 1 \quad}$

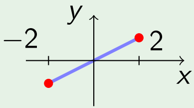


$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple ($x = 2y$)



$\xrightarrow{\quad x = 2y \quad}$



$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice (*)

Définir l'opérateur abstrait d'affectation sur les contraintes.

Élargissement

On a des chaînes croissantes infinies
donc il nous faut un élargissement (widening).

Élargissement

On a des chaînes croissantes infinies
donc il nous faut un élargissement (widening).

Idée

Toujours la même : ne conserver que les contraintes stables.

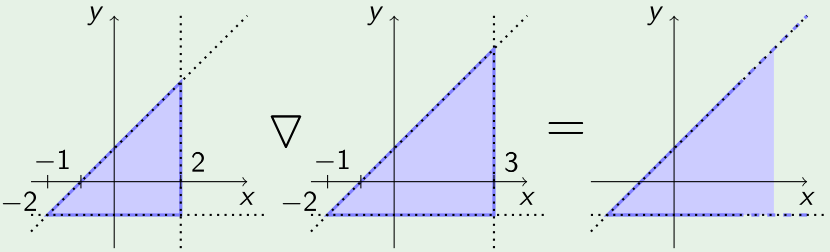
Élargissement

On a des chaînes croissantes infinies
donc il nous faut un élargissement (widening).

Idée

Toujours la même : ne conserver que les contraintes stables.

Exemple



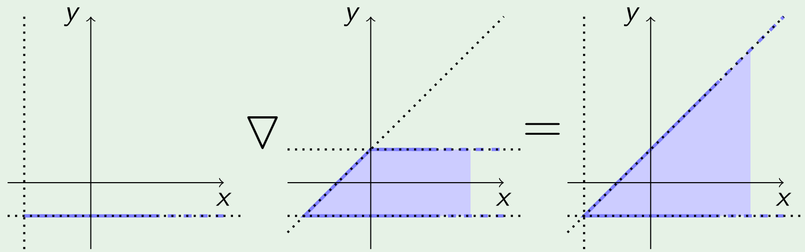
Élargissement (suite et fin)

Plus formellement :

Définition

Pour $x^\sharp$ et $y^\sharp$ sous forme d'ensemble de contraintes minimaux,
$x^\sharp \nabla y^\sharp =$
$$\left\{ c \in x^\sharp \;\middle|\; y^\sharp \in \{\, c \,\} \right\} \cup \left\{ c \in y^\sharp \;\middle|\; \exists c' \in x^\sharp, x^\sharp =^\sharp \left(x^\sharp \setminus c' \right) \cup \{\, c \,\} \right\}$$

Exemple



Exemple

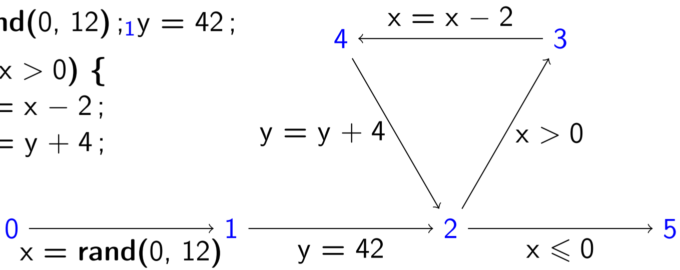
$_{0}\mathsf{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\,;_{1}\mathsf{y} = 42\,;$

$\mathbf{while}\ _{2}(\mathsf{x} > 0)\ \{$

$\quad _{3}\mathsf{x} = \mathsf{x} - 2\,;$

$\quad _{4}\mathsf{y} = \mathsf{y} + 4\,;$

$\}_{5}$



Exemple

$_0x = \mathbf{rand}(0,\ 12)\ ;_1y = 42\ ;$

$\mathbf{while}\ _2(x > 0)\ \{$

$\quad _3x = x - 2\ ;$

$\quad _4y = y + 4\ ;$

$\}_5$

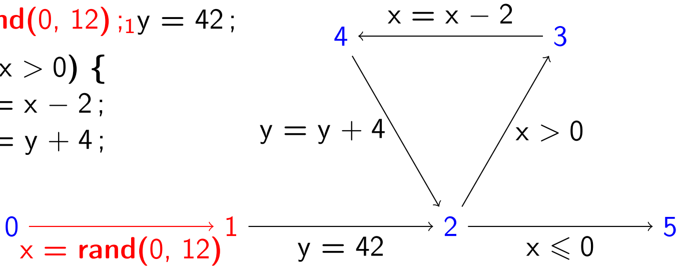
$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[dr, "y = y + 4"'] & & 3 \arrow[ll, "x = x - 2"'] & \\
0 \arrow[r, "x = \mathbf{rand}(0,\ 12)"'] & 1 \arrow[rr, "y = 42"'] & & 2 \arrow[ur, "x > 0"'] \arrow[rr, "x \leqslant 0"'] & & 5
\end{tikzcd}$$

$\top$

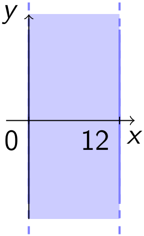
0

Exemple

```
₀x = rand(0, 12) ;₁y = 42 ;
while ₂(x > 0) {
    ₃x = x − 2 ;
    ₄y = y + 4 ;
}₅
```



$\top$



0 1

Exemple

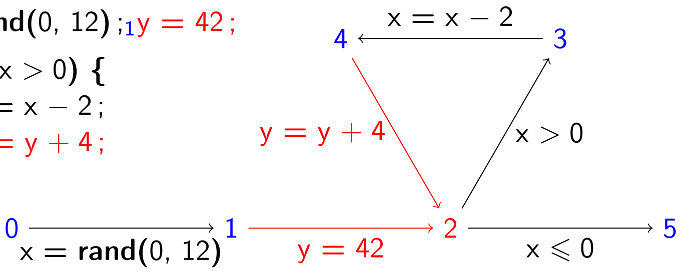
$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;

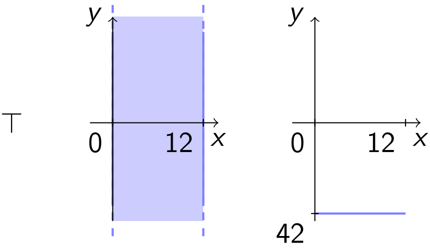
while $_2$(x > 0) **{**

  $_3$x = x − 2 ;

  $_4$y = y + 4 ;

}$_5$

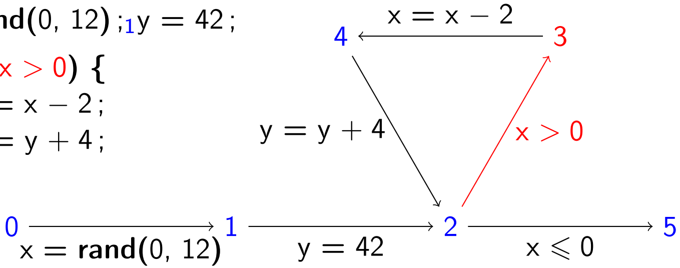


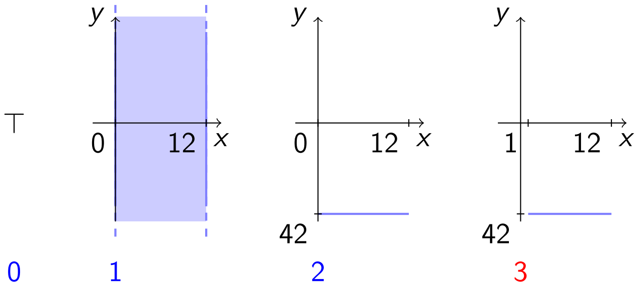


0 1 2

Exemple

$_{0}$x = **rand**(0, 12) ;$_{1}$y = 42 ;
while $_{2}$(x > 0) {
    $_{3}$x = x − 2 ;
    $_{4}$y = y + 4 ;
}$_{5}$





Exemple

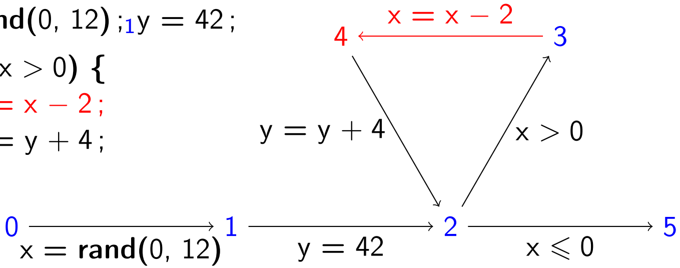
$_0$x $=$ **rand**(0, 12) ; $_1$y $=$ 42 ;

while $_2$(x $>$ 0) **{**

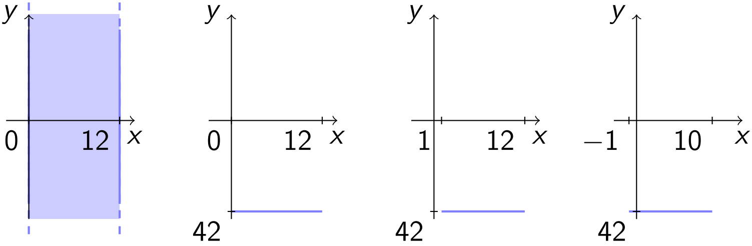
  $_3$x $=$ x $-$ 2 ;

  $_4$y $=$ y $+$ 4 ;

}$_5$



$\top$



0 1 2 3 4

Exemple (suite)

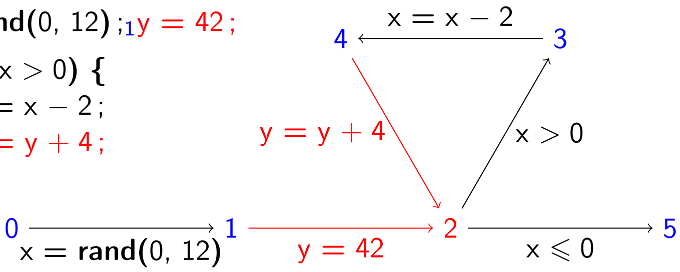
$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;

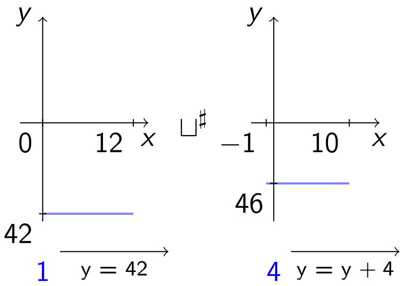
while $_2$(x > 0) **{**

  $_3$x = x − 2 ;

  $_4$y = y + 4 ;

}$_5$





Exemple (suite)

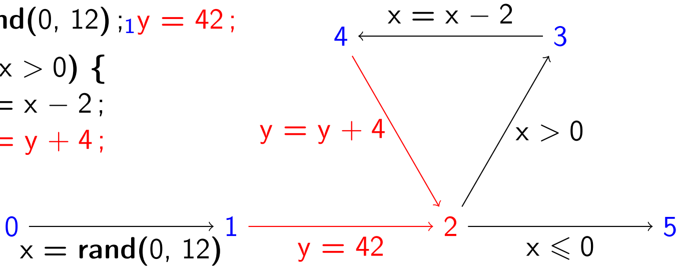
$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;

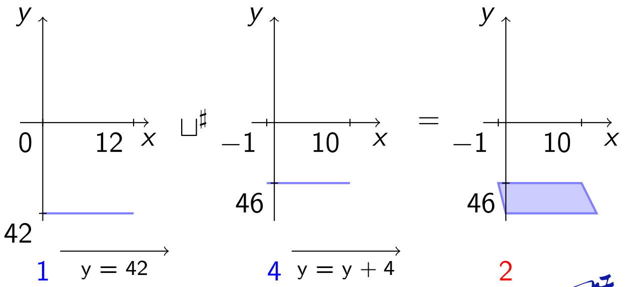
while $_2$(x > 0) **{**

    $_3$x = x − 2 ;

    $_4$y = y + 4 ;

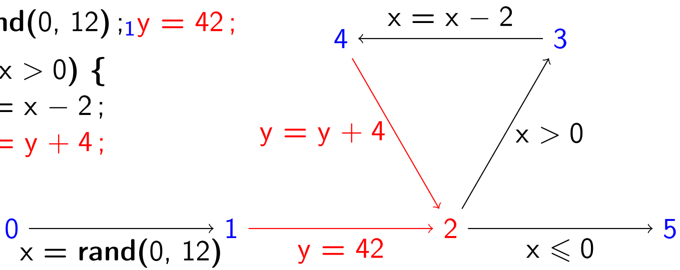
}$_5$

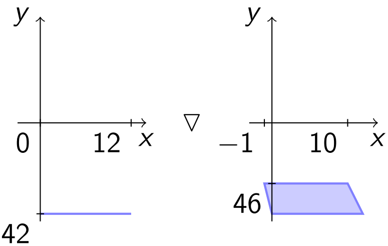




Exemple (suite)

$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$





Exemple (suite)

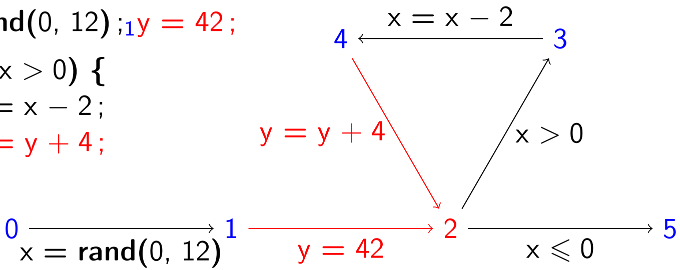
$_0x = \mathbf{rand}(0, 12)\,;\,_1y = 42\,;$

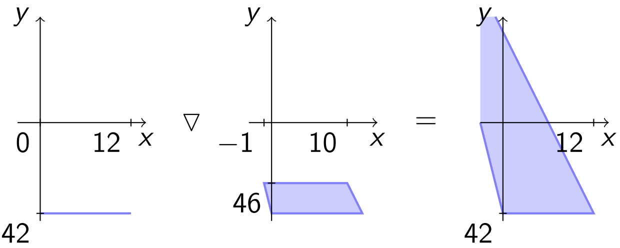
$\mathbf{while}\ _2(x > 0)\ \{$

$\quad _3x = x - 2\,;$

$\quad _4y = y + 4\,;$

$\}_5$





2

Exemple (suite)

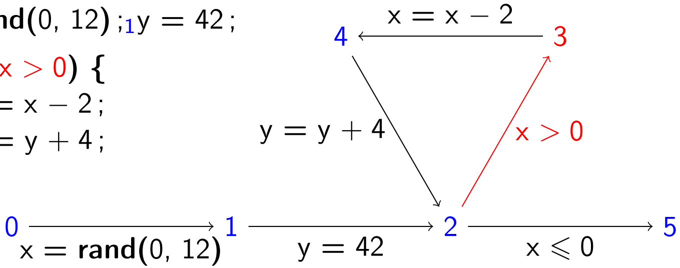
$_{0}\mathsf{x} = \textbf{rand}(0,\ 12)\ ;_{1}\mathsf{y} = 42\ ;$

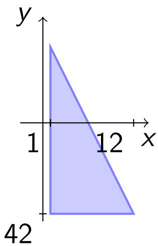
$\textbf{while}\ _{2}(\mathsf{x} > 0)\ \{$

$\quad _{3}\mathsf{x} = \mathsf{x} - 2\ ;$

$\quad _{4}\mathsf{y} = \mathsf{y} + 4\ ;$

$\}_{5}$





3

Exemple (suite)

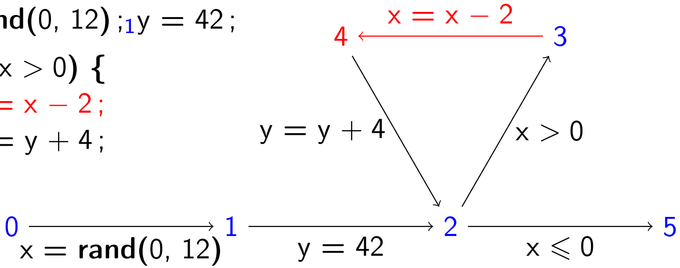
$_0\mathsf{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\ ;_1\mathsf{y} = 42\ ;$

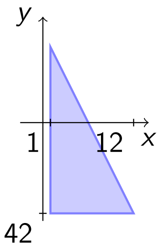
$\mathbf{while}\ _2(\mathsf{x} > 0)\ \mathbf{\{}$

$\quad _3\mathsf{x} = \mathsf{x} - 2\ ;$

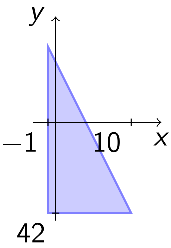
$\quad _4\mathsf{y} = \mathsf{y} + 4\ ;$

$\mathbf{\}}_5$





3



4

Exemple (suite)

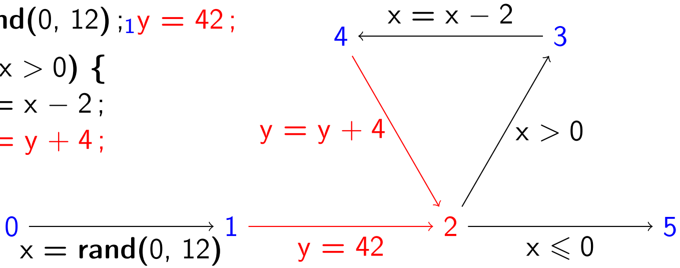
$_0\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\,;\ _1\mathrm{y} = 42\,;$

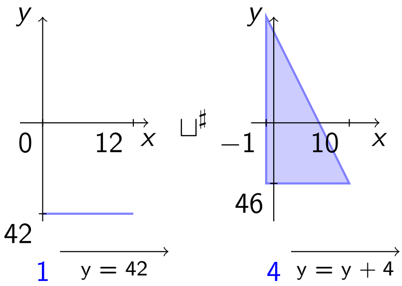
$\mathbf{while}\ _2(\mathrm{x} > 0)\ \{$

$\quad _3\mathrm{x} = \mathrm{x} - 2\,;$

$\quad _4\mathrm{y} = \mathrm{y} + 4\,;$

$\}_5$





Exemple (suite)

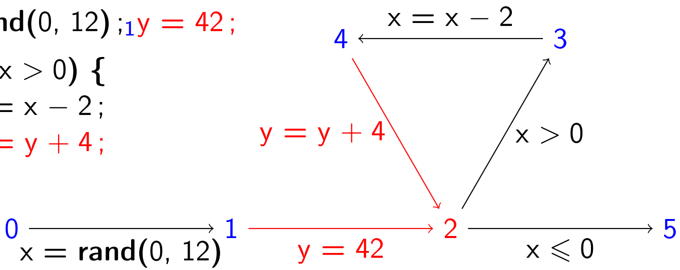
$_0\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0, 12)\,;_1\mathrm{y} = 42\,;$

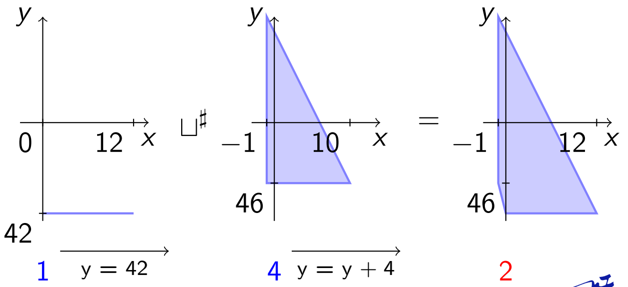
$\mathbf{while}\ _2(\mathrm{x} > 0)\ \{$

$\quad _3\mathrm{x} = \mathrm{x} - 2\,;$

$\quad _4\mathrm{y} = \mathrm{y} + 4\,;$

$\}_5$





Exemple (suite)

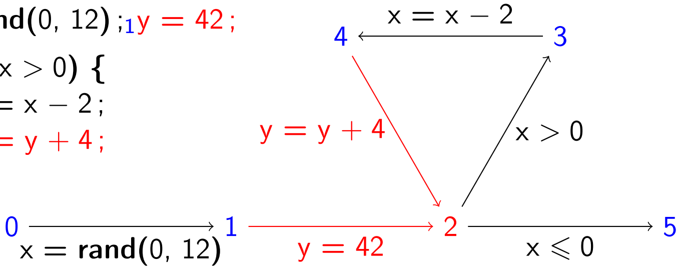
$_{0}\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\ ;\ _{1}\mathrm{y} = 42\ ;$

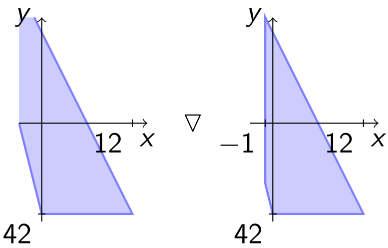
$\mathbf{while}\ _{2}(\mathrm{x} > 0)\ \{$

$\quad _{3}\mathrm{x} = \mathrm{x} - 2\ ;$

$\quad _{4}\mathrm{y} = \mathrm{y} + 4\ ;$

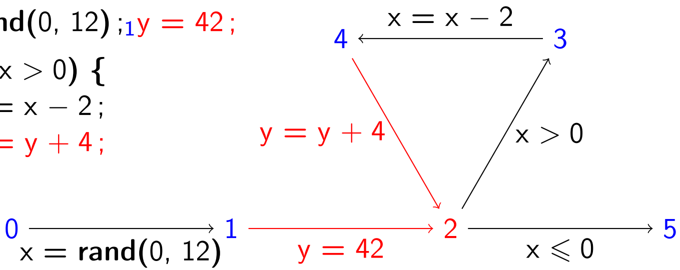
$\}_{5}$

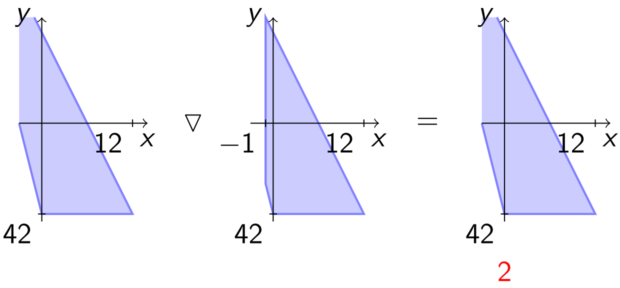




Exemple (suite)

${}_0$x = **rand**(0, 12) ;${}_1$y = 42 ;
while ${}_2$(x > 0) **{**
  ${}_3$x = x − 2 ;
  ${}_4$y = y + 4 ;
}${}_5$





Exemple (suite)

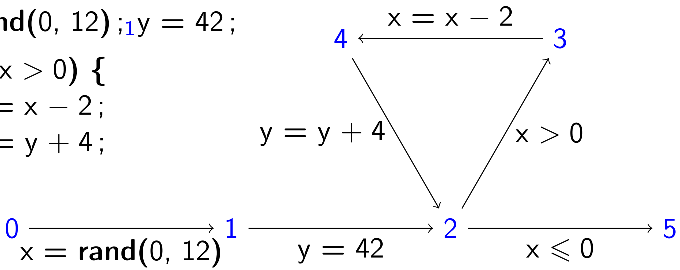
$_{0}\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\,12)\,;_{1}\mathrm{y} = 42\,;$

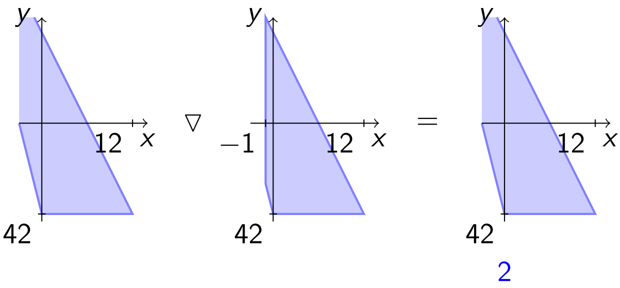
$\mathbf{while}\ _{2}(\mathrm{x} > 0)\ \{$

$\quad _{3}\mathrm{x} = \mathrm{x} - 2\,;$

$\quad _{4}\mathrm{y} = \mathrm{y} + 4\,;$

$\}_{5}$

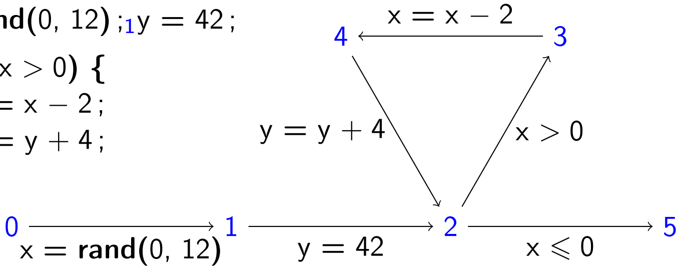


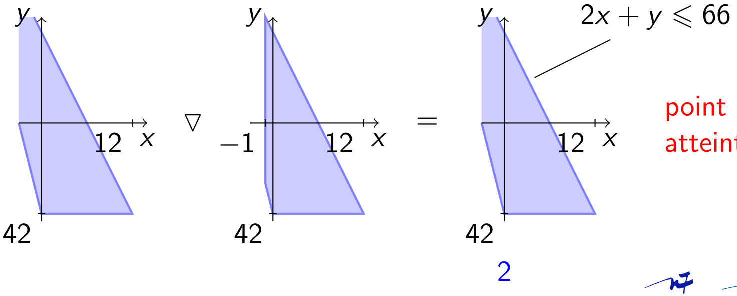


point fixe atteint

Exemple (suite)

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
    $_3$x = x − 2 ;
    $_4$y = y + 4 ;
}$_5$





point fixe atteint

Exemple (suite)

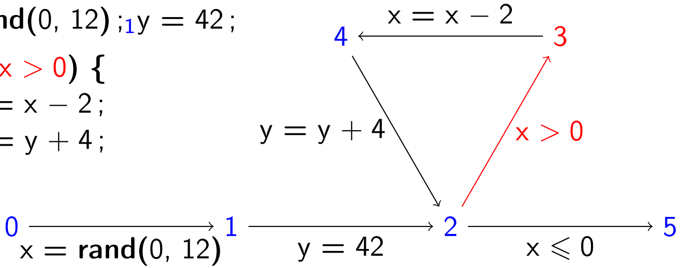
$_0\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\ ;{}_1\mathrm{y} = 42\ ;$

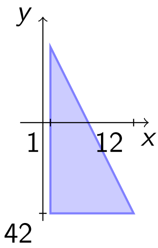
$\mathbf{while}\ {}_2(\mathrm{x} > 0)\ \{$

$\quad {}_3\mathrm{x} = \mathrm{x} - 2\ ;$

$\quad {}_4\mathrm{y} = \mathrm{y} + 4\ ;$

$\}_5$





3

Exemple (suite)

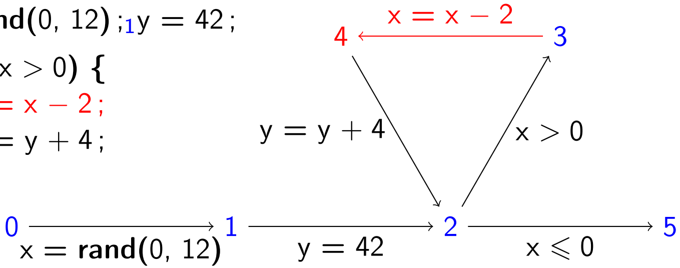
${}_{\color{blue}0}\mathsf{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\,;{}_{\color{blue}1}\mathsf{y} = 42\,;$

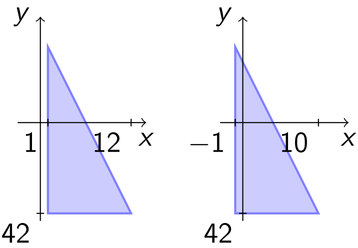
$\mathbf{while}\ {}_{\color{blue}2}(\mathsf{x} > 0)\ \mathbf{\{}$

$\quad {}_{\color{blue}3}\color{red}{\mathsf{x} = \mathsf{x} - 2\,;}$

$\quad {}_{\color{red}4}\mathsf{y} = \mathsf{y} + 4\,;$

$\mathbf{\}}_{\color{blue}5}$





3 4

Exemple (suite et fin)

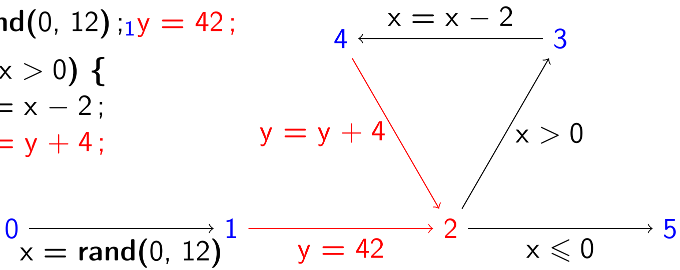
$_0\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0, 12)\,;_1\mathrm{y} = 42\,;$

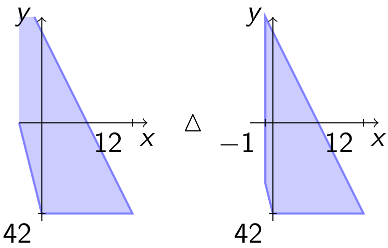
$\mathbf{while}\ _2(\mathrm{x} > 0)\ \{$

$\quad _3\mathrm{x} = \mathrm{x} - 2\,;$

$\quad _4\mathrm{y} = \mathrm{y} + 4\,;$

$\}_5$





Exemple (suite et fin)

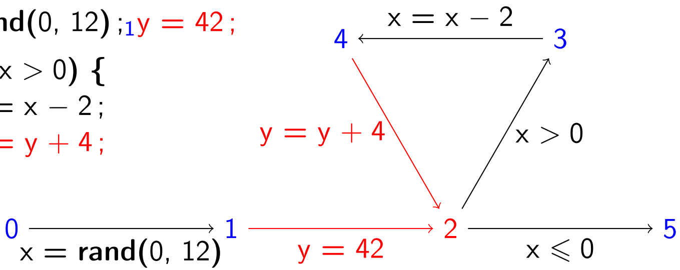
$_0\mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\ ;_1\mathrm{y} = 42\ ;$

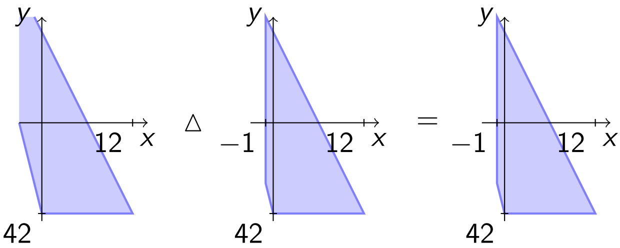
$\mathbf{while}\ _2(\mathrm{x} > 0)\ \{$

$\quad _3\mathrm{x} = \mathrm{x} - 2\ ;$

$\quad _4\mathrm{y} = \mathrm{y} + 4\ ;$

$\}_5$

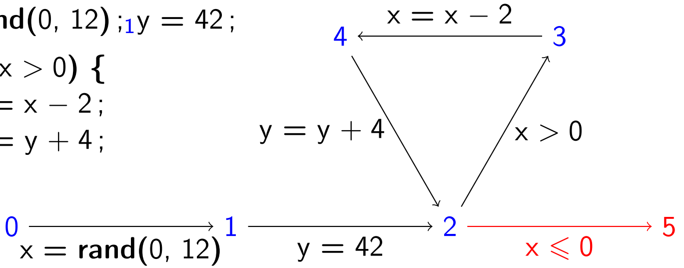


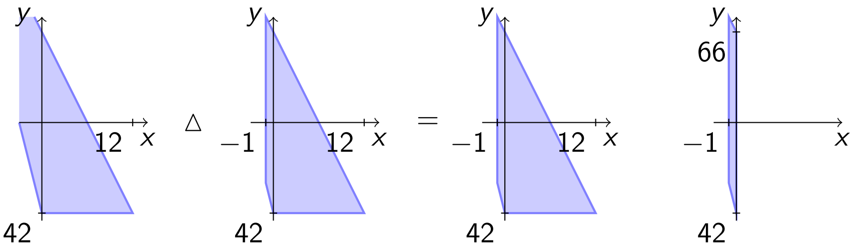


2

Exemple (suite et fin)

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$





2

5

Abstractions relationnelles

- Rappel
- Polyèdres
- Octogones

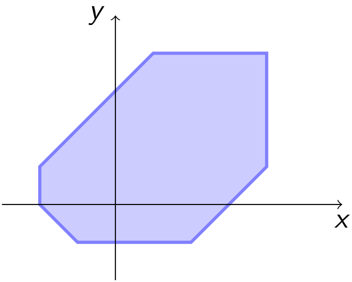
Si le cours avait duré un semestre...

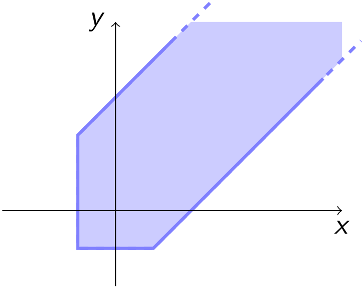
- Domaines non numériques
- Virgule flottante
- Partitionnement
- Stratégies d'itération
- Invariants quadratiques

Outils existants

Octogones

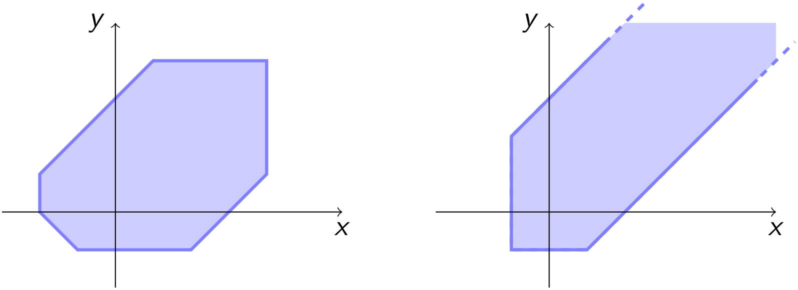
Similaire aux polyèdres mais en autorisant seulement les pentes multiples de 45°.





Octogones

Similaire aux polyèdres mais en autorisant seulement les pentes multiples de 45°.



- $-$ moins précis
- $+$ meilleure complexité : chaque opération est en $\mathrm{O}\left(n^3\right)$ (complexité au pire cas exponentielle pour les polyèdres)

Octogones, exercice

Exercice

On considère le programme suivant :

$_0\mathsf{x} = \mathbf{rand}(0, 12)\,;_1\mathsf{y} = 0\,;$

$\mathbf{while}\ _2(\mathsf{x} > 0)\ \{$

$\quad _3\mathbf{if}\ (\mathbf{rand}(0, 1) > 0)\ \{$

$\qquad _4\mathsf{x} = \mathsf{x} - 1\,;$

$\quad \}\ \mathbf{else}\ \{$

$\qquad _5\mathsf{x} = \mathsf{x} - 2\,;$

$\quad \}$

$\quad _6\mathsf{y} = \mathsf{y} + 1\,;$

$\}_7$

1. Dessiner le graphe de flot de contrôle.
2. Calculer le point fixe.
3. Le raffiner par une itération descendante (avec $\triangle$).

Autres domaines relationnels

Il existe bien d'autres domaines relationnels :

Autres domaines relationnels

Il existe bien d'autres domaines relationnels :

- égalités affines ($2x + 3y = 5$)

Autres domaines relationnels

Il existe bien d'autres domaines relationnels :

- égalités affines ($2x + 3y = 5$)
- congruences ($x + 2y$ congru à 3 modulo 5)

Autres domaines relationnels

Il existe bien d'autres domaines relationnels :

- égalités affines ($2x + 3y = 5$)
- congruences ($x + 2y$ congru à 3 modulo 5)
- polyèdres tropicaux (polyèdres sur une algèbre $(\max, +)$)
- ...

Domaines non numériques

Tous les domaines abstraits ne sont pas numériques.

Exemple (listes)

On peut abstraire une liste en retenant
si elle est vide (nil) ou non (non_nil).

Domaines non numériques

Tous les domaines abstraits ne sont pas numériques.

Exemple (listes)

On peut abstraire une liste en retenant
si elle est vide (nil) ou non (non_nil).

Exemple : concaténation de deux listes

@	nil	non_nil
nil	nil	non_nil
non_nil	non_nil	non_nil

Domaines non numériques

Tous les domaines abstraits ne sont pas numériques.

Exemple (listes)

On peut abstraire une liste en retenant
si elle est vide (nil) ou non (non_nil).

Exemple : concaténation de deux listes

@	nil	non_nil
nil	nil	non_nil
non_nil	non_nil	non_nil

Exemple d'utilisation : prouver qu'on n'essaye jamais d'acceder
à la tête d'une liste vide (`List.hd []` en Caml).

Virgule flottante

- Les nombres réels ne sont pas représentable en machine.

Virgule flottante

- Les nombres réels ne sont pas représentable en machine.
- On utilise donc des nombres à virgule flottante.

Virgule flottante

- Les nombres réels ne sont pas représentable en machine.
- On utilise donc des nombres à virgule flottante.
- D'où des erreurs d'arrondi (démo).

Virgule flottante

- Les nombres réels ne sont pas représentable en machine.
- On utilise donc des nombres à virgule flottante.
- D'où des erreurs d'arrondi (démo).
- Problème : comment abstraire correctement ces arrondis.

Virgule flottante

- Les nombres réels ne sont pas représentable en machine.
- On utilise donc des nombres à virgule flottante.
- D'où des erreurs d'arrondi (démo).
- Problème : comment abstraire correctement ces arrondis.

Solutions :

- pour les intervalles : arrondir les bornes vers l'extérieur ;

Virgule flottante

- Les nombres réels ne sont pas représentable en machine.
- On utilise donc des nombres à virgule flottante.
- D'où des erreurs d'arrondi (démo).
- Problème : comment abstraire correctement ces arrondis.

Solutions :

- pour les intervalles : arrondir les bornes vers l'extérieur ;
- plus généralement : on peut abstraire une opération flottante $\mathrm{round}(a + b)$ par une opération réelle $(1 + \epsilon)(a + b)$ puis utiliser des domaines sur les réels ;
- reste alors à implémenter correctement des domaines sur les réels, c'est un autre problème (on peut utiliser des rationnels par exemple).

Partitionnement, exemple

$_0$x = **rand(**-12, 12**)** ;
$_1$**if (**x > 0**) {**
    $_2$x = x + 1 ;
} else {
    $_3$x = x − 1 ;
}
$_4$y = 1 / x ;$_5$

Partitionnement, exemple

$_0$x = **rand(**-12, 12**)** ;
$_1$**if** (x > 0) **{**
    $_2$x = x + 1 ;
} else {
    $_3$x = x − 1 ;
}
$_4$y = 1 / x ;$_5$

- Après 2, on a a x $\in [\![2, 13]\!]$
- Après 3, on a a x $\in [\![-13, -1]\!]$

Partitionnement, exemple

$_0$x = **rand(**-12, 12**)** ;
$_1$**if** (x > 0) **{**
  $_2$x = x + 1 ;
} else {
  $_3$x = x − 1 ;
}
$_4$y = 1 / x ;$_5$

- Après 2, on a a $x \in [\![2, 13]\!]$
- Après 3, on a a $x \in [\![-13, -1]\!]$
- D'où en 4, $x \in [\![-13, 13]\!]$
  et une fausse alarme division par 0

Partitionnement, exemple

$_0$x $=$ **rand**(-12, 12) ;

$_1$**if** (x $>$ 0) **{**

  $_2$x $=$ x $+$ 1 ;

} **else** **{**

  $_3$x $=$ x $-$ 1 ;

}

$_4$y $=$ 1 / x ;$_5$

- Après 2, on a a $x \in [\![2, 13]\!]$
- Après 3, on a a $x \in [\![-13, -1]\!]$
- D'où en 4, $x \in [\![-13, 13]\!]$
  et une fausse alarme division par 0

Solution : déplacer le calcul de la borne supérieure des intervalles après l'affectation y := 1 / x.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, "x = \mathbf{rand}(0,\ 12)"] & & 1 \arrow[dl, "x > 0"'] \arrow[dr, "x \leqslant 0"] & \\
 & 2 \arrow[dr, "x = x + 1"'] & & 3 \arrow[dl, "x = x - 1"] \\
 & & 4 \arrow[d, "y = 1 / x"'] & \\
 & & 5 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, "x = \mathbf{rand}(0,\ 12)"] & & 1 \arrow[dl, "x > 0"'] \arrow[dr, "x \leqslant 0"] & \\
 & 2 \arrow[d, "x = x + 1"'] & & 3 \arrow[d, "x = x - 1"] \\
 & 4 \arrow[dr, "y = 1 / x"'] & & 4 \arrow[dl, "y = 1 / x"] \\
 & & 5 &
\end{tikzcd}
$$

Stratégies d'itération

- Le widening/narrowing marche plutôt bien.

Stratégies d'itération

- Le widening/narrowing marche plutôt bien.
- Mais il est difficile de concevoir un bon widening.

Stratégies d'itération

- Le widening/narrowing marche plutôt bien.
- Mais il est difficile de concevoir un bon widening.
- D'où l'intérêt pour d'autres méthodes d'itération :
  - accélération ;
  - itération sur les stratégies (policy iteration).

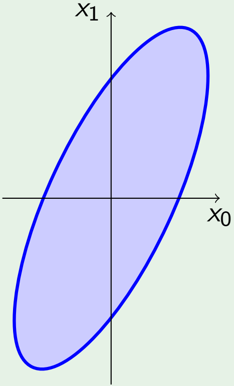
Invariants quadratiques

- Certains systèmes n'ont pas de bon invariant linéaire mais ont de bons invariants quadratiques (ellipsoïdes).

Invariants quadratiques

- Certains systèmes n'ont pas de bon invariant linéaire mais ont de bons invariants quadratiques (ellipsoïdes).
- On peut calculer ce genre d'invariants avec des outils d'optimisation (programmation semi définie).

Exemple




```
node coupled_mass(u0, u1 : real)
returns (x0, x1, x2, x3 : real)
let
  assert(u0 >= −1.0 and u0 <= 1.0);
  assert(u1 >= −1.0 and u1 <= 1.0);
  x0 = 0.0→0.6227∗pre(x0)+0.3871∗pre(x1)
     −0.1130∗pre(x2)+0.0102∗pre(x3)
     +0.3064∗pre(u0)+0.1826∗pre(u1);
  x1 = 0.0→−0.3407∗pre(x0)+0.9103∗pre(x1)
     −0.3388∗pre(x2)+0.0649∗pre(x3)
     −0.0054∗pre(u0)+0.6731∗pre(u1);
  x2 = 0.0→0.0918∗pre(x0)−0.0265∗pre(x1)
     −0.7319∗pre(x2)+0.2669∗pre(x3)
     −0.0494∗pre(u0)+1.6138∗pre(u1);
  x3 = 0.0→0.2643∗pre(x0)−0.1298∗pre(x1)
     −0.9903∗pre(x2)+0.3331∗pre(x3)
     −0.0531∗pre(u0)+0.4012∗pre(u1);
tel
```

Abstractions relationnelles

- Rappel
- Polyèdres
- Octogones

Si le cours avait duré un semestre...

- Domaines non numériques
- Virgule flottante
- Partitionnement
- Stratégies d'itération
- Invariants quadratiques

Outils existants

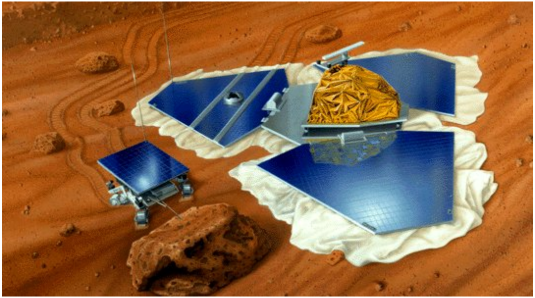
Astrée

- Développé par l'équipe de Patrick Cousot à l'ÉNS Ulm.
- Preuve d'absence d'erreur à l'exécution
  dans du code temps réel embarqué.
- Utilisé pour les commandes de vol des Airbus
  (plusieurs centaines de milliers de lignes de C).

http://www.astree.ens.fr/

IKOS : Inference Kernel for Open Static Analyzers

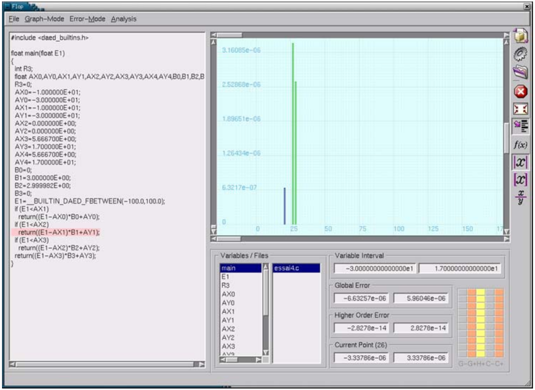
- Développé par la NASA.
- Objectifs similaires à Astrée.
- Prédécesseur (CGS) utilisé sur les contrôleurs de vols de : Mars Pathfinder, Deep Space One,...



http://ti.arc.nasa.gov/opensource/ikos/

Fluctuat

- Développé par l'équipe d'Éric Goubault au CEA.
- Analyse des erreurs d'arrondi en virgule flottante.
- Utilisé par divers industriels.



`http://www-list.cea.fr/labos/fr/LSL/fluctuat/index.html`

Polyspace

- Vendu par MathWorks.
- Plus généraliste.
- Moins précis.
- Utilisé par divers industriels.

http://www.polyspace.com/

Apron

- Librairie de domaines relationnels
  développée par Bertrand Jeannet (INRIA Rhône-Alpes)
  et Antoine Miné (CNRS, ÉNS).
- Polyèdres.
- Octogones.
- Implémenté en C.
- Interface en OCaml.

http://apron.cri.ensmp.fr/library/