On suppose u C^4 sur $[0,1]$ (5)

On cherche $(u_i)_{i\in[\![0,N+1]\!]} \in \mathbb{R}^{N+2}$ tq

$u_i \simeq u(x_i)$, avec u solution de l'EDP.

Les conditions aux limites donnent :

$$\boxed{\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{N+1} = \beta \end{cases}}$$

On s'intéresse à $u_h = (u_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$:

En approximant $u''(x_i) \simeq \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$,

on obtient le système :

$$-\left[\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}\right] = f(x_i) \quad \forall i \in [\![1,N]\!]$$

ce qui se réécrit : $\boxed{A_h u_h = f_h}$

avec

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$$

$$f_h = \begin{bmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ résolution d'un système linéaire.

<u>Questions</u> : (1) le système admet-il une solution ?

(2) quelle est la précision de la méthode ? La discrétisation devient-elle exacte quand $h \to 0$?

(3) Les composantes de U_h convergent-elles vers la solution évaluée en les nœuds du maillage quand $h \to 0$?

(1)' $A_h U_h = f_h$ admet une unique solution car A_h est symétrique définie positive.

(2) Notons
$$\Pi_h : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$
$$u \longmapsto \begin{bmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{bmatrix}$$

avec $\mathcal{F}$ espace fonctionnel dans lequel on cherche u.

On a : $\forall i \in [\![1, N]\!]$, $\exists \xi_i \in]x_{i-1}, x_{i+1}[$

tq
$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} = f(x_i) - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi_i)$$

D'où $A_h \Pi_h(u) = f_h + \xi_h(u)$

avec
$$\xi_h(u) = -\frac{h^2}{12} \left(u^{(4)}(\xi_i) \right)_{i \in [\![1,N]\!]} \in \mathbb{R}^N$$

<u>déf</u> : $\xi_h(u)$ est appelée erreur de consistance du schéma. Celui-ci est dit consistant pour la norme $\| \|$ de $\mathbb{R}^N$ si
$$\lim_{h \to 0} \| \xi_h(u) \| = 0$$

Si de plus, $\exists p > 0$, $\exists C \geq 0$ indépendante de h, tq $\| \xi_h(u) \| \leq C h^p$, alors le schéma est dit consistant à l'ordre p pour la norme $\| \|$.

Avec la norme $\| \ \|_\infty$ de $\mathbb{R}^N$, définie par

$\forall z \in \mathbb{R}^N \quad \|z\|_\infty = \sup_{i \in [\![1,N]\!]} |z_i| = \max_{i \in [\![1,N]\!]} |z_i|$

$\|\xi_h(u)\|_\infty = \frac{h^2}{12} \|(u^{(4)}(\xi_i))_{i \in [\![1,N]\!]}\|_\infty$

or $\forall i \in [\![1,N]\!] \quad |u^{(4)}(\xi_i)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|$

$\in \mathbb{R}$

$(u \in C^4)$

D'où $\|\xi_h(u)\|_\infty \leq \underbrace{\frac{1}{12} \sup_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|}_{= C \in \mathbb{R} \text{ indépendant de } h} h^2$

Ce schéma est consistant d'ordre 2 pour la norme $\| \ \|_\infty$.

(3) Ce schéma est convergent (à l'ordre 2) pour la norme $\| \ \|_\infty$.

En effet, on a :

$$\begin{cases} A_h u_h = f_h \\ A_h \Pi_h(u) = f_h + \xi_h(u) \end{cases}$$

D'où $A_h(\Pi_h(u) - u_h) = \xi_h(u)$

A_h inversible $\Rightarrow$

$\Pi_h(u) - u_h = A_h^{-1} \xi_h(u)$

D'où $\|\Pi_h(u) - u_h\|_\infty = \|A_h^{-1} \xi_h(u)\|_\infty$

$\leq \|A_h^{-1}\|_\infty \underbrace{\|\xi_h(u)\|_\infty}_{\leq C h^2}$

$\leq C \|A_h^{-1}\|_\infty h^2$

avec $\|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty$

or $\|A_h^{-1}\|_\infty$ est bornée (admis)

d'où $\exists \tilde{C} \geq 0$, indépendante de h, h

$$\|\Pi_h(u) - U_h\|_\infty \leq \tilde{C} h^2 \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

4) Normes subordonnées

déf : Soit $\|\ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$

On pose $\|\cdot\| : \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$A \longmapsto \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

$\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, appelée norme subordonnée, qui vérifie : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2 \ \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

$\forall (x, A) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \ \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$

ex : • $\|\ \|_\infty$: $\forall x \in \mathbb{R}^N \ \|x\|_\infty = \sup_{i \in [\![1,N]\!]} |x_i|$

$\forall A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \ \|A\|_\infty = \sup_{i \in [\![1,N]\!]} \sum_{j=1} |a_{ij}|$

• $\|\ \|_2$: $\forall x \in \mathbb{R}^N \ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$

$\forall A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \ \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

avec $\forall B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \ \rho(B) = \max |\lambda|$, λ v.p. de B

Si $A \in S_N(\mathbb{R})$ alors $\|A\|_2 = \rho(A)$

Pour l'étude des EDP, on privilégiera des normes discrètes du type :

$$\forall p > 0 \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} h\, x_i^{\,p} \right)^{1/p}$$

Elles renvoient à des discrétisations de normes définies sur des espaces fonctionnels (L^p)

<u>déf</u> norme $\|\ \|_h$

On pose $\forall x \in \mathbb{R}^N \quad \|x\|_h = \sqrt{h \sum_{i=1}^{N} x_i^2}$

$\|\cdot\|_h$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$

On a $\forall x \in \mathbb{R}^N \quad \|x\|_h = \sqrt{h}\, \|x\|_2$

avec $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$

On a $\forall A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \quad \|A\|_h = \|A\|_2$.

<u>Rem</u> : $\forall x \in \mathbb{R}^N \quad \|x\|_h \leq \|x\|_\infty$

III Différences finies pour les EDP instationnaires

1) Exemple de l'équation de la chaleur (1)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{sur }]0,1[\times]0,T[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t \in]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in]0,1[\end{cases}$$

On se donne un maillage spatio-temporel régulier, de pas d'espace h et de pas de temps Δt : $(x_i)_{i \in [\![0, N+1]\!]}$, $(t_n)_{n \in [\![0, M+1]\!]}$

avec $h = \dfrac{1}{N+1}$, $\Delta t = \dfrac{1}{M+1}$.

On cherche u_i^n une bonne approximation de $u(x_i, t_n)$.

Les conditions aux limites donnent :

$$\forall n \in [\![0, M+1]\!] \quad u_0^n = u_{N+1}^n = 0$$

La condition initiale donne :

$$\forall i \in [\![0, N+1]\!] \quad u_i^0 = u_0(x_i)$$

Il ne reste plus qu'à déterminer $(u_i^n)_{\substack{i \in [\![1, N]\!] \\ n \in [\![1, M+1]\!]}}$

On note $U_h^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$

On approxime $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) \simeq \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}$

On s'intéresse à différents schémas temporels.

a) Schéma explicite

On approxime $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$

On obtient :

$$(S_E) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = f(x_i, t_n)$$

ce qui s'écrit : $U_h^{n+1} = A_h U_h^n + \Delta t F^n$

avec $A_h = \begin{bmatrix} 1-2c & c & & (0) \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ (0) & & c & 1-2c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ avec $c = \frac{\Delta t}{h^2}$

$$F^n = \begin{bmatrix} f(x_1, t_n) \\ \vdots \\ f(x_N, t_n) \end{bmatrix}$$

b) schéma implicite

On approxime $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \sim \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t}$

D'où :

$$(S_I) \quad \frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} = f(x_i, t_n)$$

ce qui s'écrit : $B_h U_h^n = U_h^{n-1} + \Delta t F^n$

avec $B_h = \begin{bmatrix} 1+2c & (-c) & & (0) \\ (-c) & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & (-c) \\ (0) & & (-c) & 1+2c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

$\rightsquigarrow$ Résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps.

c) schéma de Richardson, ou saute-mouton (Leap-frog)

On approxime $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \sim \frac{U_i^{n+1} - U_i^{n-1}}{2\Delta t}$

Il vient :

$$(S_{LF}) \quad \frac{U_i^{n+1} - U_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} = f(x_i, t_n)$$

ce qui s'écrit :

$$U_h^{n+1} = -2c T_h U_h^n + U_h^{n-1} + 2\Delta t F^n$$

avec $T_h = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

Rem : i) le schéma est à 2 niveaux : il faut connaître U_h^n et U_h^{n-1} pour calculer U_h^{n+1}

iii) outre U_h^0, il est nécessaire de fournir U_h^1 pour amorcer la récurrence : utilisation d'un autre schéma pour le calcul de U_h^1.

d) schéma de Crank-Nicholson

"Moyenne" des schémas explicite et implicite.

$$\begin{cases} U_h^{n+1} = A_h U_h^n + \Delta t F^n \\ B_h U_h^{n+1} = U_h^n + \Delta t F^{n+1} \end{cases}$$

D'où

(S_{CN}) $$(I_N + B_h) U_h^{n+1} = (I_N + A_h) U_h^n + \Delta t (F^n + F^{n+1})$$

2) Consistance, stabilité, convergence d'un schéma numérique

Les schémas précédents peuvent se généraliser sous la forme de schémas à $l+m$ niveaux

$$B_l U_h^{n+l} + B_{l-1} U_h^{n+l-1} + \dots + B_0 U_h^n + B_{-1} U_h^{n-1} + \dots + B_{-m} U_h^{n-m} = C^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{p=-m}^{l} B_p U_h^{n+p} = C^n \quad (*)$$

avec $n \geq m$, $l \geq 0$, $m \geq 0$, $l+m \geq 1$ et B_l inversible.

<u>Rem</u> : (S_E) : $l=1$, $m=0$

(S_I) : $l=0$, $m=1$

(S_{LF}) : $l=1$, $m=1$

(S_{CN}) : $l=1$, $m=0$