Thème Logique des propositions

Une théorie formalisée

Exercice 1 En utilisant la déduction naturelle constructive sans les règles de la négation $\neg$ et de l'anti-té $\perp$, construire la preuve que les formules bien formées suivantes sont des théorèmes.

1. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
2. $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
3. $((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$
4. $((A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow C$

Exercice 2 En utilisant la déduction naturelle constructive avec les règles de la négation $\neg$, construire la preuve que les formules bien formées suivantes sont des théorèmes.

1. $A \rightarrow \neg\neg A$
2. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg A)$

Exercice 3 En utilisant la déduction naturelle constructive avec les règles de la négation $\neg$ et de l'anti-té $\perp$, construire la preuve que les formules bien formées suivantes sont des théorèmes.

1. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$
2. $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Exercice 4 En utilisant la déduction naturelle, montrer que la formule bien formée suivante est un théorème.

- $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Exercice 5 En utilisant la déduction naturelle, montrer que la formule bien formées suivante issue de la question 4 de l'exercice 1 du thème 1 est un théorème.

$$((E \rightarrow (Y \vee R)) \wedge (Y \rightarrow R)) \rightarrow (\neg R \rightarrow \neg E)$$

Rappels de cours distribués lors de l'examen écrit.

1 Logique des propositions : Vision syntaxique

1.1 Déduction naturelle constructive

Hypothèse	$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ \text{Hyp}$

Opérateur	Introduction	Elimination
$\to$	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ I_\to$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_\to$
$\wedge$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ I_\wedge$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_\wedge^G \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_\wedge^D$
$\vee$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_\vee^G \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_\vee^D$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \chi \quad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}\ E_\vee$
$\neg$	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ I_\neg$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ E_\neg$
$\bot$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ I_\bot$	$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_\bot$

1.2 Déduction naturelle classique

Tiers-exclu	Preuve par l'absurde
$\frac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi}\ \text{TE}$	$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ \text{Abs}$