Examen d'Analyse de Fourier
mardi 18 janvier 2011
documents autorisés : 2 feuilles au format A4, recto-verso
Calculettes et téléphones interdits.

Remarque : dans tout l'énoncé, $\int_a^b f(x)dx$ désigne l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a;b]} f d\lambda$ de f sur $[a,b]$ $(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ.

1 Transformée de Fourier

On rappelle les résultats suivants :

- Si f et g sont dans $L^2(\mathbb{R})$, alors $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.
- Pour $a > 0$, on a: $\widehat{\mathbb{I}}_{[-a,a]} = \frac{\sin(2\pi a x)}{\pi x}$ (TF dans $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$).
- $\widehat{\frac{\sin(x)}{x}} = \pi \mathbb{I}_{[-1/2\pi,1/2\pi]}$ (TF dans $L^2(\mathbb{R})$).

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On considère l'application P, qui à la fonction f associe la fonction P_f définie par

$$P_f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\frac{\sin y}{y}dy$$

1. En remarquant que P_f est un produit de convolution, justifier que P_f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. En exprimant P_f sous la forme $P_f = \widehat{h} * \widehat{g}$, où $\widehat{h} = f$ (dans $L^2(\mathbb{R})$), et g est une fonction que l'on déterminera, montrer que $P_f \in L^2(\mathbb{R})$.
3. En déduire que $\|P_f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$.
4. Montrer, toujours en utilisant l'expression $P_f = \widehat{h} * \widehat{g}$, que $P \circ P = P$ (c'est-à-dire $P_{P_f} = P_f$).

2 Convolution de fonctions périodiques

Soient f et g deux fonctions périodiques, de même période $a > 0$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de carré intégrable sur $[0,a]$ (f et g sont donc également intégrables sur $[0,a]$). On définit alors le **produit de convolution périodique** par

$$f *_a g(t) = \frac{1}{a}\int_0^a f(u)g(t-u)du$$

1. Montrer que $f *_a g$ est une fonction définie en tout point $t \in \mathbb{R}$ et qu'elle est continue.
2. Montrer que $f *_a g$ est périodique de période a.
3. Les fonctions périodiques f et g, appartenant à $L^2([0,a])$, peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{2j\pi kt/a} \\ g(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(g)e^{2j\pi kt/a} \end{aligned}$$

où $(c_k(f))_k$ et $(c_k(g))_k$ sont les coefficients de Fourier de $f(t)$ et de $g(t)$ (l'égalité ayant lieu dans $L^2([0;a])$). De même, on peut écrire

$$f *_a g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f *_a g) e^{2j\pi kt/a}$$

Sachant que les coefficients de Fourier d'une une fonction périodique p de période a s'expriment sous la forme

$$c_k(p) = \frac{1}{a}\int_0^a p(t)e^{-2j\pi kt/a}dt,$$

montrer que :

$$c_k(f *_a g) = c_k(f)c_k(g)$$

aides :

- on rappelle que si p est une fonction périodique de période a, on a $\int_u^{u+a} p(t)dt = \int_0^a p(t)dt$, $\forall u$.
- on utilisera convenablement le théorème de Fubini.

4. Montrer que si f et g sont toutes deux paires (ou impaires toutes les deux), alors $f *_a g$ est impaire. Montrer que si f est paire et g est impaire, alors $f *_a g$ est impaire.
5. On définit l'*intercorrélation* entre f et g, appartenant toujours à $L^2([0,a])$, comme

$$R_{f,g}(t) = \frac{1}{a}\int_0^a f(u)\overline{g(u-t)}du$$

- Montrer que $R_{f,g}$ est une fonction périodique continue qui s'exprime comme un produit de convolution.
- Déterminer les coefficients de Fourier de $R_{f,g}$ en fonction de ceux de f et de g.
- Etant donné que la fonction d'auto-corrélation $R_{f,f}$ est continue, donc égale partout à son développement en série de Fourier, retrouver alors la formule de Parseval

$$\frac{1}{a}\int_0^a |f(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$$

3 Convolution de distributions périodiques

On rappelle qu'une distribution T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est périodique de période a si, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a : $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle$, où $\tau_{-a}\varphi$ est la fonction définit par $\tau_{-a}\varphi(x) = \varphi(x+a)$.
Soient alors 2 distributions périodiques T et U, de même période a. Elles sont développables en série de Fourier (au sens des distributions), sous la forme

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(T)e^{2j\pi kt/a} \\ U &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(U)e^{2j\pi kt/a} \end{aligned}$$

On définit alors la **convolution de ces 2 distributions périodiques** par

$$T *_a U = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(T) \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l(U) e^{2j\pi kt/a} *_a e^{2j\pi lt/a} \right), \tag{1}$$

où la convolution dans la somme entre parenthèses est une **convolution de 2 fonctions périodiques** de période a.

1. Calculer $e^{2j\pi kt/a} *_a e^{2j\pi lt/a}$ pour k et l entiers quelconques.

2. En calculant alors l'expression (1), montrer que

$$c_k\left(T *_a U\right) = c_k(T)c_k(U)$$

3. Sachant que le peigne de Dirac Δ_a s'écrit sous la forme $\Delta_a = \frac{1}{a}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2j\pi kt/a}$, calculer le produit de convolution $\Delta_a *_a \Delta_a$ (on exprimera le résultat en fonction de Δ_a).

4. Soit f une fonction de $L^2([0,a])$, périodique de période a. Elle est alors localement intégrable, donc définit une distribution régulière T_f, périodique de période a, dont les coefficients de Fourier $c_k(T_f)$ sont égaux aux coefficients $c_k(f)$ de la fonction f. Déterminer alors $T_f *_a \Delta_a$.