déf : Erreur de consistance, consistance d'un schéma

i) On appelle erreur de consistance à l'instant t_n du schéma $(*)$ le vecteur $\xi_h^n(U) \in \mathbb{R}^N$ tq

$$\xi_h^n(U) = \sum_{p=-m}^{\ell} B_p \, \Pi_h(U)(t_{n+p}) - C$$

avec $\Pi_h(U)(t_{n+p}) = \begin{bmatrix} U(x_1, t_{n+p}) \\ \vdots \\ U(x_N, t_{n+p}) \end{bmatrix}$

ii) le schéma est consistant pour la norme $\| \ \|$ de $\mathbb{R}^N$ si

$$\sup_{n\Delta t \le T} \| \xi_h^n(U) \| \xrightarrow[\substack{\Delta t \to 0 \\ h \to 0}]{} 0$$

S'il existe $C \geq 0$, $p \geq 0$, $q > 0$, toutes les trois indépendants de Δt et h, tq

$$\sup_{n\Delta t \le T} \| \xi_h^n(U) \| \le C(\Delta t^p + h^q)$$

le schéma est dit consistant à l'ordre p en temps et q en espace.

Rem : i) $C = 0$: le schéma est exacte.

ii) Un schéma est consistant si la discrétisation devient exacte quand Δt et $h \to 0$

déf : stabilité

Un schéma du type $(*)$ est stable pour la norme $\| \ \|$ de $\mathbb{R}^N$ si $\exists C_1, C_2$ positives, indépendantes de Δt et h, tq

$$\sup_{n\Delta t \le T} \|U_h^n\| \le C_1 \sup_{j_0 \in [\![0, \ell+m-1]\!]} \|U_h^{j_0}\| + C_2 \sup_{n\Delta t \le T} \|\varepsilon^n\|$$

et ceci quels que soient les données initiales $(U_h^{j_0})_{j_0 \in [\![0, \ell+m-1]\!]}$ et termes sources $(\varepsilon^n)_{n\Delta t \le T}$

rem : i) En pratique, la stabilité traduit le fait que l'erreur ne s'amplifie "pas trop" au cours du temps

ii) Si cette majoration n'a lieu que pour des Δt et h astreints à certaines inégalités, on dit que le schéma est conditionnellement stable.

prop Soit un schéma de la forme

$$\begin{cases} U_h^{n+1} = B U_h^n + \Delta t F^n \\ U_h^0 \text{ donné} \end{cases}$$

où B est la matrice dite d'amplificatio[n]
Le schéma est stable pour la norme $\| \ \|$ de $\mathbb{R}^N$ ssi $\exists C \ge 0$ indépendan[te] de Δt et h, tq

$$\sup_{n\Delta t \le T} \|B^n\| \le C$$

dé[m] prop : Stabilité pour la norme $\| \ \|_h$
Soit un schéma de la forme

$$\begin{cases} U_h^{n+1} = B\,U_h^n + \Delta t\, F^n \\ U_h^0 \text{ donné} \end{cases}$$

avec B symétrique ($\|B\|_h = \rho(B)$)

Par convention, le schéma est stable pour la norme $\|\ \|_h$ si $\rho(B) \leq 1$

déf : Convergence d'un schéma

on considère un schéma du type (*) et on suppose que les données initiales vérifient :

$$\sup_{j_0 \in [0, \ell+m-1]} \| U_h^{j_0} - \Pi h(u)(t_{j_0}) \| \xrightarrow[\substack{\Delta t \to 0 \\ h \to 0}]{} 0$$

le schéma est convergent pour la norme $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^N$ si

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \| U_h^n - \Pi h(u)(t_n) \| \xrightarrow[\substack{\Delta t \to 0 \\ h \to 0}]{} 0$$

thm : Théorème de Lax

Soit un schéma du type (*), consistant et stable pour la norme $\|\ \|$ de $\mathbb{R}^N$, il est alors convergent pour cette même norme.

3) Etude de quelques schémas pour l'équation de la chaleur

a) schéma explicite

$$\begin{cases} U_h^{n+1} = A_h U_h^n + \Delta t\, F^n \\ U_h^0 \text{ donné} \end{cases}$$

prop : i) le schéma est consistant à l'ordre 1 en temps et 2 en espace pour la norme $\| \|_\infty$

ii) le schéma est conditionnellement stable pour la norme $\| \|_\infty$: si $\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}$, alors le schéma est stable pour la norme $\| \|_\infty$.

iii) le schéma est convergent pour la norme $\| \|_\infty$ si $\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}$

preuve : i) cf TD3

ii) supposons $\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}$

$$\|A_h\|_\infty = \max(|1-2c|+c, |1-2c|+2c)$$
$$= |1-2c| + 2c$$
$$= 1 - 2c + 2c \quad \text{car } c = \frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$
$$= 1$$

D'où $\sup_{n\Delta t \leq T} \|A_h^n\|_\infty \leq 1$

rem : le schéma explicite est "simple" à mettre en œuvre, mais $\Delta t \leq \frac{h^2}{2}$ requiert des pas de temps petits :
$h \sim 10^{-3} \Rightarrow \Delta t \sim 10^{-6}$.
$\Rightarrow$ coût et temps de calculs peuvent être élevés

b) schéma implicite

$$(S_I) \quad \begin{cases} B_h U_h^n = U_h^{n-1} + \Delta t F^n \\ U_h^0 \text{ donné} \end{cases}$$

prop : i) le schéma implicite est consistant à l'ordre 1 en temps et deux en espace pour la norme $\| \|_\infty$ (11)

ii) le schéma implicite est inconditionnellement stable pour la norme $\| \|_\infty$

iii) le schéma implicite est convergent pour la norme $\| \|_\infty$

preuve : cf TD3

rem : l'absence de condition de stabilité sur Δt et h permet de travailler avec des pas de temps Δt plus grands que ceux utilisés pour le schéma explicite

c) Schéma de Richardson

$$(S_{LR}) \begin{cases} U_h^{n+1} = -2\sigma T_h U_h^n + U_h^{n-1} + 2\Delta t F^n \\ U_h^0, U_h^1 \text{ donnés} \end{cases}$$

prop : i) le schéma de Richardson est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace pour la norme $\| \|_h$

ii) le schéma de Richardson est inconditionnellement instable pour la norme $\| \|_h$.

preuve : cf TD3

rem : i) Ceci est vrai pour l'équation de la chaleur. Néanmoins, le schéma pourra être "bon" pour d'autres EDP.

d) schéma de Crank-Nicholson

$$(S_{CN}) \left\{ \begin{array}{l} (I_N + B_h) U_h^{n+1} = (I_N + A_h) U_h^n + \Delta t (F^n + F \\ U_h^0 \text{ donné} \end{array} \right.$$

<u>prop</u> : i) Le schéma de Crank-Nicholson est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace pour la norme $\| \|_h$.

ii) Le schéma est inconditionnellement stable pour la norme $\| \|_h$.

iii) Le schéma est convergent pour la norme $\| \|_h$.

4) Étude de stabilité au sens de Von Neumann

On suppose l'EDP linéaire à coefficients constants, ainsi que la solution périodique en espace (On ne tient pas compte des conditions aux limites). On suppose de plus que les termes sources sont nuls ($f=0$ par simplicité).

D'après le théorème de Dirichlet, u continue et L-périodique en espace (L est la longueur du domaine), la série de Fourier de $u(x,t_n)$ converge simplement vers $u(x,t_n)$ avec $t_n = n\Delta t$ fixé :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u(x,t_n) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{u}_p^n \, e^{\frac{2i p \pi x}{L}}$$

avec $\hat{u}_p^n = \frac{1}{L} \int_0^L u(x,t_n) \, e^{\frac{-2i p \pi x}{L}} dx$

et $i^2 = -1$

d'où $\forall j \in [\![1, N]\!]$

$$v(x_j, t_n) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \hat{v}_h^n \, e^{\frac{2i\pi p j \Delta x}{L}}$$

avec $x_j = jh = j\Delta x$

$$v(x_{j+1}, t_n) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \left(\hat{v}_h^n \, e^{\frac{2i\pi p \Delta x}{L}} \right) e^{\frac{2i\pi p j \Delta x}{L}}$$

$\Rightarrow$ on s'intéresse aux modes de Fourier des type $v_j^n = a_k^n \, e^{ijk\Delta x}$

avec $k \in \mathbb{R}$ le nombre d'onde (longueur d'onde $\frac{2\pi}{|k|}$) et $a_k^n \in \mathbb{C}$ est l'amplitude à l'instant t_n du mode de Fourier associé au nombre d'onde k.

On pose $v_j^{n+1} = a_k^{n+1} e^{ijk\Delta x}$

On obtient $a_k^{n+1} = G_k a_k^n$ avec $G_k \in \mathbb{C}$ le facteur d'amplification

__rem__ : G_k dépendra de Δt, Δx, etc...

__def__ : Stabilité de Von Neumann

Le schéma est stable au sens de Von Neumann si $\forall k \in \mathbb{R} \ |G_k| \leq 1$

__rem__ : Toutes les longueurs d'onde ne sont pas représentables sur une grille de pas d'espace h

En pratique $|k| \leq \frac{\pi}{\Delta x}$

IV Bibliographie

[1] Equations aux dérivées partielles et leurs approximations, Brigitte Lucquin, Ellipses.