



# Introduction aux télécommunications

Études de chaînes de transmission en bande de base

Première Année, Département SN



Hamza MOUDDENE

April 19, 2020



## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Objectifs du travail réalisé . . . . .	2
1.2	Schéma général des chaines à étudier (canal AWGN) . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Première chaine à étudier : "chaine de référence"</b>	<b>5</b>
2.1	Etude théorique . . . . .	5
2.2	Implantation sous Matlab . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Deuxième chaine à étudier : impact du choix du filtre de réception</b>	<b>14</b>
3.1	Etude théorique . . . . .	14
3.2	Implantation sous Matlab . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Troisième chaine à étudier : impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée</b>	<b>24</b>
4.1	Etude théorique . . . . .	24
4.2	Implantation sous Matlab . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Quatrième chaine à étudier : impact du choix du mapping</b>	<b>31</b>
5.1	Etude théorique . . . . .	31
5.2	Implantation sous Matlab . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>40</b>
<b>7</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>42</b>

## Introduction

---

### 1.1 Objectifs du travail réalisé

1. Etre capable d'implanter une chaine de transmission en bande de base et d'explicitier le rôle des différents éléments la composant.
2. Etre capable d'analyser la chaine de transmission en bande de base implantée pour :
  - Identifier les éléments qu'il est possible de modifier pour l'optimiser si elle ne l'est pas.
  - Déterminer si elle est optimisée ou non en termes d'efficacité spectrale et d'efficacité en puissance.
3. Etre capable de comparer des chaines de transmission bande de base en termes d'efficacité spectrale et d'efficacité en puissance.

### 1.2 Schéma général des chaines à étudier (canal AWGN)

La figure 1.1 présente le schéma général des chaines à étudier.

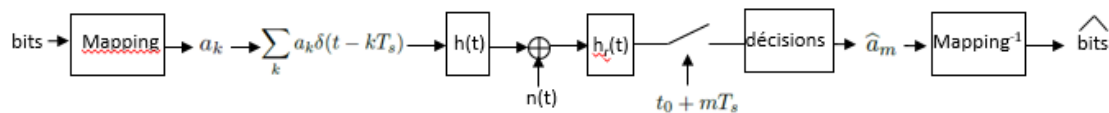


Figure 1.1: Chaîne de transmission en bande de base

#### Génération de l'information binaire à transmettre

La génération de l'information binaire à transmettre (bits 0 et 1 équiprobables et indépendants) pourra être réalisée grâce à la fonction *randi* de Matlab.

## Mapping

Un mapping devra être réalisé afin de passer de l'information binaire aux symboles  $a_k$ . Le mapping est un des éléments qui pourra différer selon les chaînes de transmission à étudier et implanter.

## Suréchantillonnage

La suite d'impulsions de Dirac espacées de la durée symbole  $T_s$  et pondérées par les symboles  $a_k$  issus du mapping sera générée, en numérique, en insérant  $N_s - 1$  zéros entre deux symboles  $a_k$ , si  $N_s$  représente le nombre d'échantillons utilisés par symbole (ou facteur de suréchantillonnage :  $T_s = N_s T_e$ ,  $T_e$  étant la période d'échantillonnage).  $N_s$  devra être déterminé pour que le signal numérique généré respecte la condition d'échantillonnage de Shannon.

## Filtrage de mise en forme

La réponse impulsionnelle,  $h(t)$ , du filtre de mise en forme est un des éléments qui pourra différer selon les chaînes de transmission à étudier et implanter. Ne seront implantés que des filtres de type RIF (à réponse impulsionnelle finie). Une fois la réponse impulsionnelle numérique générée ( $h = [h(0)h(1)...h(N-1)]$ , si  $N$  représente l'ordre du filtre), le filtrage pourra être réalisé en utilisant la fonction *filter* de matlab : *signal\_filtre=filter(h,1,signal\_a\_filtre)* (attention alors au retard dû à la causalité du filtre) ou bien en utilisant la fonction *conv.m*, comme lors des TP de traitement du signal.

## Canal de transmission AWGN

Le canal de transmission est supposé à bruit,  $n(t)$ , additif blanc et Gaussien, de densité spectrale de puissance égale à  $\frac{N_0}{2}$  quelle que soit la fréquence. Pour les simulations, ce bruit sera généré sur la bande  $F_e$  (fréquence d'échantillonnage), grâce à la fonction *randn* de matlab, avec plusieurs puissances différentes, notées  $\sigma_n^2$  : *bruit =  $\sigma_n * randn(1, length(r))$* ; si  $r$  représente le vecteur d'échantillons de signal à l'entrée du récepteur. On calculera la puissance du bruit  $\sigma_n^2$ , en fonction des rapports signal à bruit par bit souhaités à l'entrée du récepteur  $\frac{E_b}{N_0}$ , de la manière suivante (voir démonstration en annexe):

$$\sigma_n^2 = \frac{P_r N_s}{2 \log_2(M) \frac{E_b}{N_0}},$$

où  $N_s$  représente le facteur de suréchantillonnage,  $M$  l'ordre de la modulation et  $P_r$  la puissance du signal  $r$  qui peut être obtenue sous matlab de la manière suivante :  $P_r = mean(abs(r).^2)$ .

## Filtrage de réception

La réponse impulsionnelle,  $h_r(t)$ , du filtre de mise de réception est un des éléments qui pourra différer selon les chaînes de transmission à étudier et im-

planter. Ne seront implantés que des filtres de type RIF (à réponse impulsionnelle finie). Une fois la réponse impulsionnelle numérique générée ( $hr = [hr(0)hr(1)...hr(N - 1)]$ , si  $N$  représente l'ordre du filtre), le filtrage pourra être réalisé en utilisant la fonction *filter* de matlab : *signal\_filtre=filter(hr,1,signal\_a\_filtre)* (attention alors au retard dû à la causalité du filtre) ou bien en utilisant la fonction *conv.m*, comme lors des TPs de traitement du signal.

### **Echantillonnage**

Le signal filtré devra être échantillonné à  $t_0 + mT_s$  pour revenir au rythme symbole. L'instant d'échantillonnage optimal  $t_0$  pourra être déterminé dans l'étude théorique de la chaîne à implanter et retrouvé grâce au tracé d'un diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception.

### **Décisions**

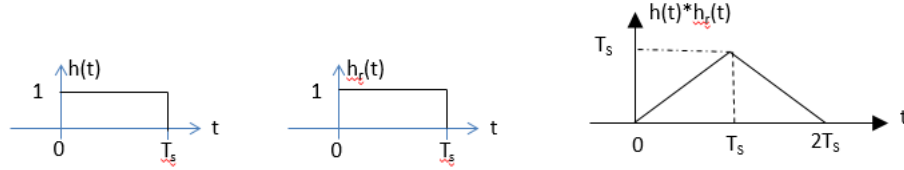
Un détecteur à seuil permettra de prendre les décisions sur les symboles à partir du signal échantillonné. Le seuil optimal devra être déterminé dans l'étude théorique de la chaîne à implanter et retrouvé grâce au tracé d'un diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception.

### **Demapping**

Un demapping devra être réalisé en vue de comparer les bits reçus aux bits émis dans l'objectif de calculer le taux d'erreur binaire simulé de la transmission, TEB simulé qui devra être comparé au TEB théorique déterminé dans l'étude théorique de la chaîne en question.

## Première chaine à étudier : "chaîne de référence"

On considérera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles  $ak \in \{-1, 1\}$ ) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception,  $h(t)$  et  $h_r(t)$ , rectangulaires de durée  $T_s$ .



### 2.1 Etude théorique

1. Calculer la densité spectrale de puissance du signal transmis. Quelle est, en théorie, la bande nécessaire à la transmission d'un tel signal ?

$$S_{x|f} = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re}[R_a \exp(j2\pi f k T_s)] + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_k |H(\frac{k}{T_s})|^2 \delta(f - \frac{k}{T_s})$$

$$\text{avec : } \sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2] \quad m_a = E[a_k] \quad R_a = \frac{E[a_m^* a_{m-k}] - |m_a|^2}{\sigma_a^2} \quad (2.1)$$

Sachant que les symboles  $a_k$  sont des variables aléatoires discrètes équiprobables, alors:

$$\begin{aligned} m_a &= E[a_k] = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ \sigma_a^2 &= E[|a_k - m_a|^2] = E[|a_k - 0|^2] = E[|a_k|^2] = -1^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ R_a &= \frac{E[a_m^* a_{m-k}] - |m_a|^2}{\sigma_a^2} = \frac{E[a_m^* a_{m-k}] - 0}{1} = E[a_m^* a_{m-k}] = 0 \text{ si } k \neq 0 \\ S_{x|f} &= \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 = S_{x|f} = \frac{1}{T_s} |T_s \text{sinc}(\pi f T_s)|^2 = T_s \text{sinc}(\pi f T_s)^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

En théorie, la bande nécessaire à la transmission d'un tel signal est infinie mais  $B \propto \frac{1}{T_s}$ .

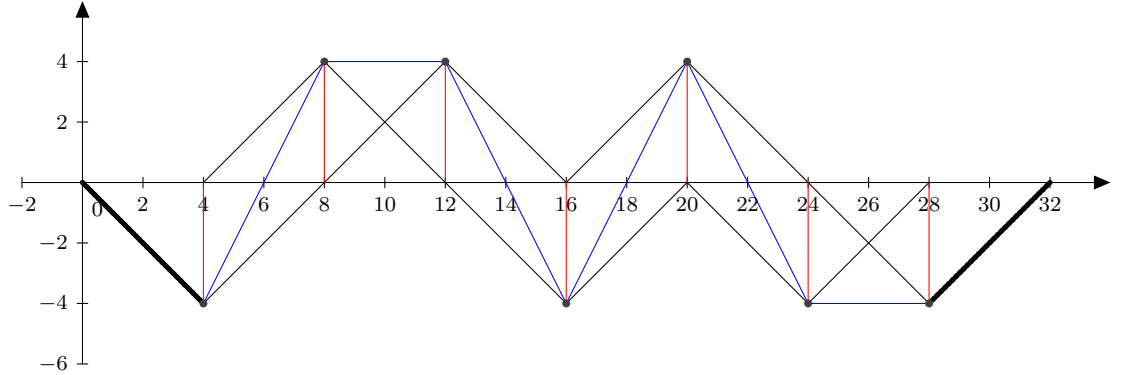
**2.** La chaîne de communication peut-elle vérifier le critère de Nyquist ? Justifiez votre réponse.

Soit :

$$g(t) = h(t) * h_r(t), \exists t_0 \text{ tel que : } \begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0 \forall p \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \quad (2.3)$$

En utilisant le graphe de  $g(t)$ , on conclut que **"le critère de Nyquist"** est respecté pour :  $t_0 = T_s$ , car  $g(t) = h(t) * h_r(t)$ .

**3.** Sans bruit, tracer le signal  $z(t)$  en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$  pour la suite de bits émise suivante: 0110100. Retrouve-t-on sur ce signal le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ?



On prend  $T_s = 4$  sur la figure, on sait que le signal en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$  s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_k a_k \delta(t - kT_s) * h(t) * h_r(t) \\ &= \sum_k a_k g(t - kT_s) \text{ avec } g(t) = h(t) * h_r(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

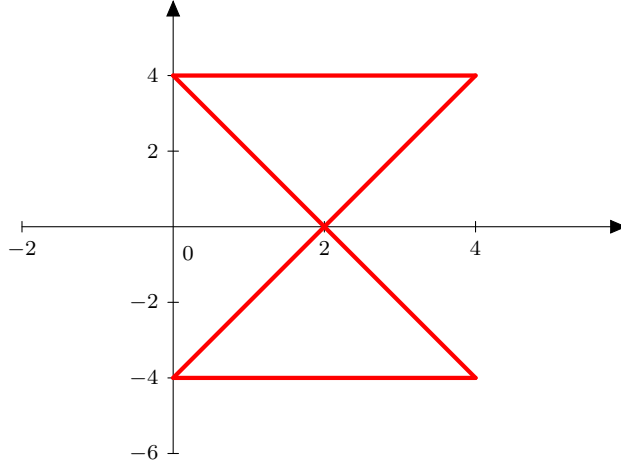
Pour la suite de bits émise suivante 0110100, on échantillonne le signal en sortie tel que  $t = mT_s + t_0$ , alors le signal  $z(t)$  devient:

$$\begin{aligned} z(mT_s + t_0) &= \sum_k a_k g((m - k)T_s + t_0) = a_m g(t_0) + \sum_{k \neq m} a_k g((m - k)T_s + t_0) \\ IES = 0 &\iff \sum_{k \neq m} a_k g((m - k)T_s + t_0) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$



Donc on retrouve que la chaîne respecte **”le critère de Nyquist”**.

4. Toujours sans bruit, tracer le diagramme de l’œil avec une base de temps de  $T_s$ . Retrouve-t-on sur le diagramme de l’œil le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ?



Sur le diagramme de l’œil : On prend le  $t_0 = T_s = 4s$  tel qu’ à cet instant il n’y ai que deux valeurs possibles. On trouve donc sur le diagramme de l’œil le fait que la chaîne de transmission respecte **le critère de Nyquist**.

5. En supposant que l’on échantillonne aux instants optimaux (sans ISI), calculer le rapport signal sur bruit aux instants d’échantillonnage (on admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception).

En supposant que l’on échantillonne aux instants optimaux (sans ISI), alors : Le rapport signal sur bruit aux instants d’échantillonnage est donné par la relation  $SNR = \frac{P_s}{P_b}$  où  $P_s$  est la puissance du signal et  $P_b$  est la puissance du bruit.

$$P_s = \int_{\mathbb{R}} S_x(f) df = E[|x(t)|^2] = E[|a_m T_s|^2] = E[|a_m|^2] E[|T_s|^2] = T_s^2 \quad (2.6)$$

On admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception.

Selon la relation de Wiener-Lee, on a :

$$P_b = \int_{\mathbb{R}} S_w(f) df = \int_{\mathbb{R}} S_n(f) |H_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2 df \quad (2.7)$$

On applique **”l’égalité de Parseval”** pour passer du fréquentiel au temporel,

donc on obtient :

$$\begin{aligned} P_b &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} dt = \frac{N_0 T_s}{2} \\ SNR &= \frac{P_s}{P_b} = \frac{T_s^2}{\frac{N_0 T_s}{2}} = \frac{2T_s}{N_0} \end{aligned} \quad (2.8)$$

**6.** On choisira d'utiliser un détecteur à seuil. Déterminer le seuil optimal à utiliser en expliquant votre choix.

À  $t_0 + mT_s$ , le symbole décidé est

$$\hat{a}_m = \underset{\tilde{a}_m}{\operatorname{argmax}} P(\tilde{a}_m / z_m)$$

On rappelle que  $a_k \in \{-1, 1\}$  et que  $z_m = \tilde{a}_m g(t_0) + w_n$  **”Critère de Nyquist respecté”** or  $w_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , nous savons que toute transformation affine d'un vecteur gaussien reste gaussienne, alors  $z_m \sim \mathcal{N}(a_m g(t_0), \sigma^2)$ . Règle de décision MAP :

$$\begin{cases} z_m \geq 0; \tilde{a}_m = +1 \\ z_m < 0; \tilde{a}_m = -1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Alors on choisira d'utiliser un détecteur à seuil à 0.

**7.** En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise le seuil optimal de décision, donner le taux d'erreur binaire de la transmission en fonction de  $T_s$  et  $\sigma$ ,  $\sigma^2$  représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$ .

Le taux d'erreur binaire de la transmission est donné par la relation :

$$\begin{aligned} TEB &= \frac{TES}{\log_2(2)} \Rightarrow TEB = TES = \sum_{a_k} P(\tilde{a}_k \neq a_k) \\ &= P(a_k = -1)P(\tilde{a}_k = 1/a_k = -1) + P(a_k = 1)P(\tilde{a}_k = -1/a_k = 1) \\ &= \frac{1}{2}P(-g(t_0) + w_n \geq 0) + \frac{1}{2}P(g(t_0) + w_n < 0) \\ &= \frac{1}{2}P\left(\frac{w_n}{\sigma} \geq \frac{g(t_0)}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}P\left(\frac{w_n}{\sigma} < \frac{-g(t_0)}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{w_n}{\sigma} \geq \frac{g(t_0)}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma}\right) \\ &= Q\left(\frac{T_s}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

**8.** Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception  $\sigma^2$  en fonction de  $N_0$  et de  $T_s$ .

On admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception.

Selon la relation de Wiener-Lee, on a :

$$P_b = \int_{\mathbb{R}} S_w(f) df = \int_{\mathbb{R}} S_n(f) |H_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2 df \quad (2.11)$$

On applique **”l’égalité de Parseval”** pour passer du fréquentielle au temporelle, donc on obtient :

$$P_b = \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} dt = \frac{N_0 T_s}{2} \quad (2.12)$$

**9.** Calculer l’énergie des symboles à l’entrée du récepteur,  $E_s$ , en fonction de  $T_s$ .

Une forme d’onde associée à chaque  $a_k$  en entrée du récepteur tel que  $a_k h(t - kT_s)$ .

$$\begin{aligned} E_s &= \int_{\mathbb{R}} |a_k h(t - kT_s)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} h(t - kT_s)^2 dt = T_s \\ &= PT_s \iff E_b = T_b \log_2(M) \text{ donc en binaire } E_s = E_b \end{aligned} \quad (2.13)$$

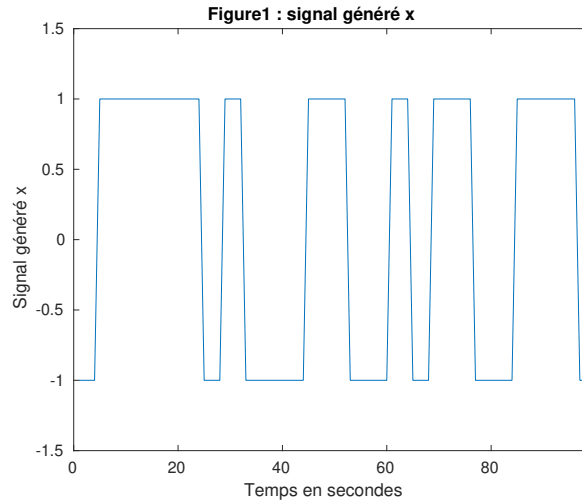
**10.** Dédurre des questions précédentes l’expression du taux d’erreur binaire (TEB) en fonction de  $\frac{E_b}{N_0}$  pour la chaîne étudiée.

D’après la question 7, nous avons trouvé :  $TEB = Q(\frac{T_s}{\sigma})$  avec  $\sigma^2 = \frac{N_0 T_s}{2}$  et comme nous sommes en binaire alors  $E_s = E_b$ , on conclut que :

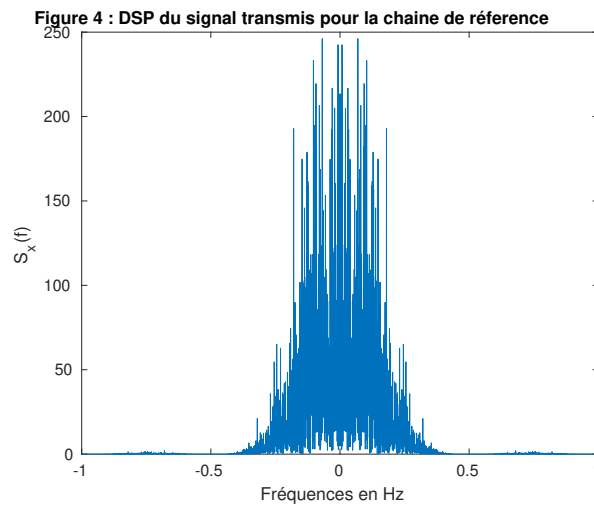
$$TEB = Q(\frac{T_s}{\sigma}) = Q(\frac{T_s}{\sqrt{\frac{N_0 T_s}{2}}}) = Q(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}) = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}) \quad (2.14)$$

## 2.2 Implantation sous Matlab

1. La génération de l'information binaire à transmettre (bits 0 et 1 équiprobables et indépendants), avec un mapping binaire à moyenne nulle :  $0 \Rightarrow -1$ ,  $1 \Rightarrow 1$  afin de passer de l'information binaire aux symboles  $a_k$ , avec un filtre de mise en forme rectangulaires de durée  $T_s$

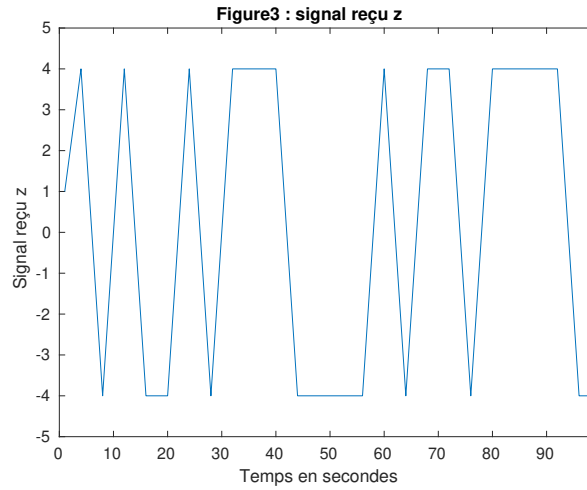


La densité spectrale de puissance est un  $\text{sinc}^2$  comme le montre l'étude théorique en bande de base autour de la fréquence 0.

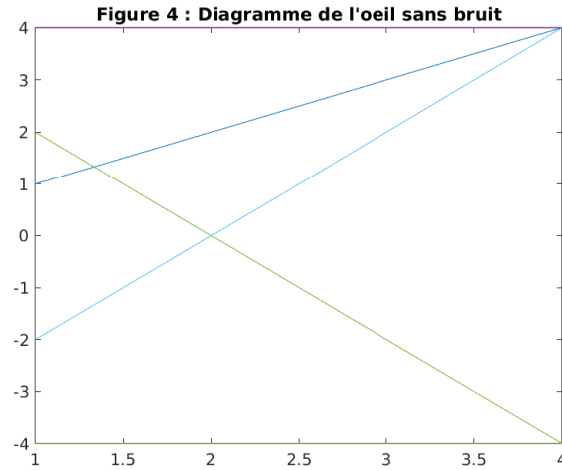


2. Implantation de la chaîne sans bruit :

- (a) Le signal en sortie du filtre de réception est conforme avec ce que nous avons trouvé dans l'étude théorique, le résultat du produit de convolution entre  $h(t)$  et  $h_r(t)$  est donné par une fenêtre triangulaire de longueur  $T_s$ .



- (b) Le diagramme de l'œil en sortie du filtre de réception montre que  $t_0 = T_s$  est l'instant optimal d'échantillonnage, conformément à l'étude théorique.

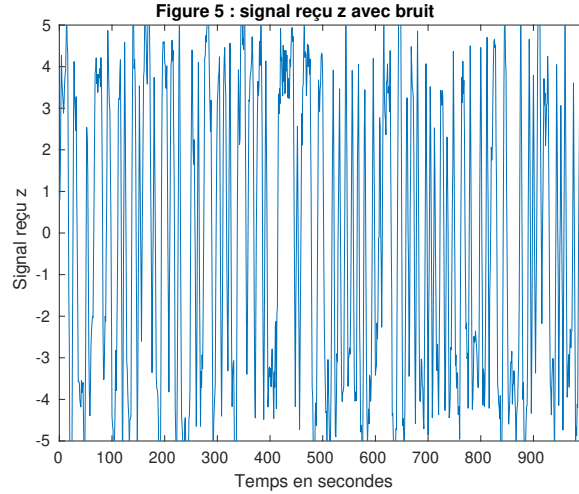


- (c) En prenant,  $t_0 = T_s$  comme instant optimal d'échantillonnage et avec un détecteur à seuil en 0, puisqu'on a utilisé un mapping equiprobable alors on va décider soit 1 ou  $-1$ , et donc le  $TEB = 0$

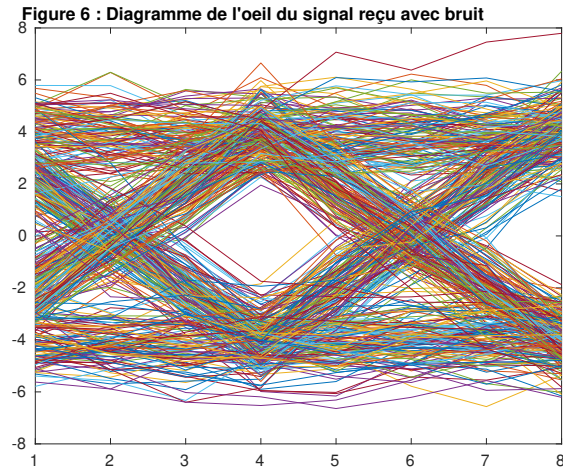
**3.** Implantation de la chaine avec bruit :

On vient de rajouter un bruit blanc gaussien tel que sa densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences de la bande passante, il suit une loi normal.

Le signal filtré et échantillonné à  $t_0 + mT_s$ .

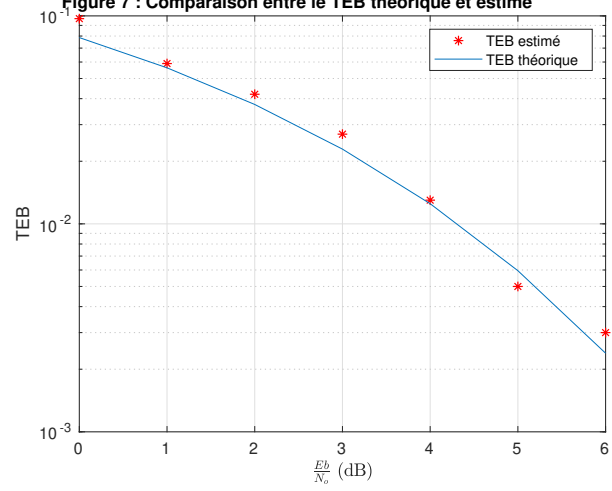


L'instant d'échantillonnage optimal est  $t_0 = T_s$  retrouvé grace au tracé d'un diagramme de l'œil avec bruit en sortie du filtre de réception.



**4.** Le taux d'erreur binaire obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur  $(\frac{E_b}{N_0})$  en décibels. On prendra des valeurs de  $(\frac{E_b}{N_0})dB$  allant de 0 à 6dB.

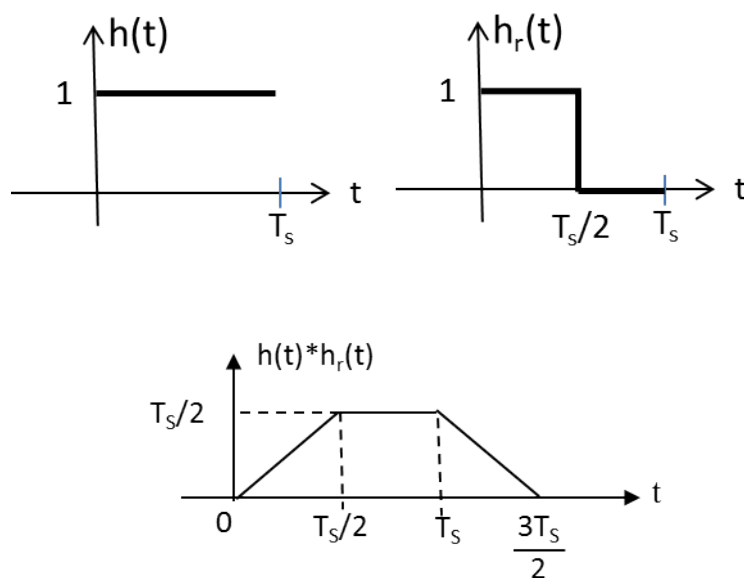
Figure 7 : Comparaison entre le TEB théorique et estimé



## Deuxième chaine à étudier : impact du choix du filtre de réception

---

On considérera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles  $ak \in \{-1, 1\}$ ) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception,  $h(t)$  et  $h_r(t)$ , rectangulaires de durée  $T_s$ .



### 3.1 Étude théorique

**1.** La chaine de communication peut-elle vérifier le critère de Nyquist ? Justifiez votre réponse.

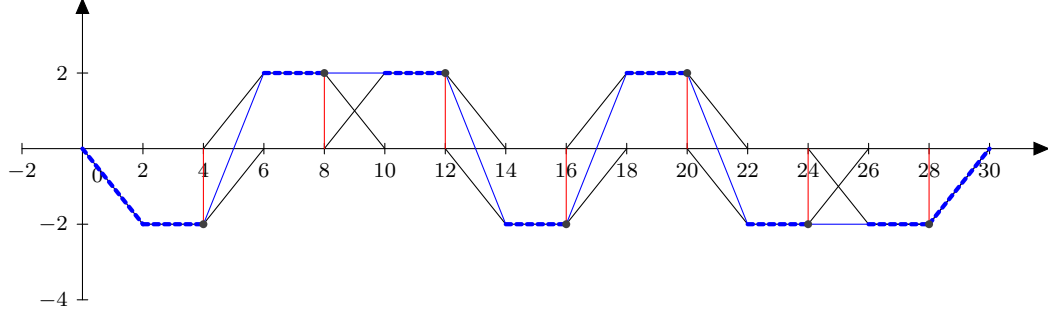
Si nous regardons le produit de convolution entre les réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception,  $h(t)$  et  $h_r(t)$ , nous verrons que **”le critère de Nyquist”** est respecté pour  $\forall t_0 \in [\frac{T_s}{2}, T_s]$  où il satisfait la chose



suivante :

$$\begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \quad (3.1)$$

**2.** Sans bruit, tracer le signal  $z(t)$  en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$  pour la suite de bits émise suivante: 0110100. Retrouve-t-on sur ce signal le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ? Expliquez votre réponse.



Sur la figure j'ai pris  $T_s = 4s$ , on sait que le signal en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$  s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_k a_k \delta(t - kT_s) * h(t) * h_r(t) \\ &= \sum_k a_k g(t - kT_s) \\ \text{avec } g(t) &= h(t) * h_r(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pour la suite de bits émise suivante 0110100 on trouve :

Nous avons trouvé précédemment que  $z(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s)$ , on échantillonne le signal en sortie tel que  $t = mT_s + t_0$  alors :

$$\begin{aligned} z(mT_s + t_0) &= \sum_k a_k g((m - k)T_s + t_0) = a_m g(t_0) + \sum_{k \neq m} a_k g((m - k)T_s + t_0) \\ IES = 0 &\iff \sum_{k \neq m} a_k g((m - k)T_s + t_0) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Donc on retrouve que la chaîne respecte **"le critère de Nyquist"**.

**3.** Toujours sans bruit, tracer le diagramme de l'œil avec une base de temps de  $T_s$ . Retrouve-t-on sur le diagramme de l'œil le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ? Justifiez votre réponse.

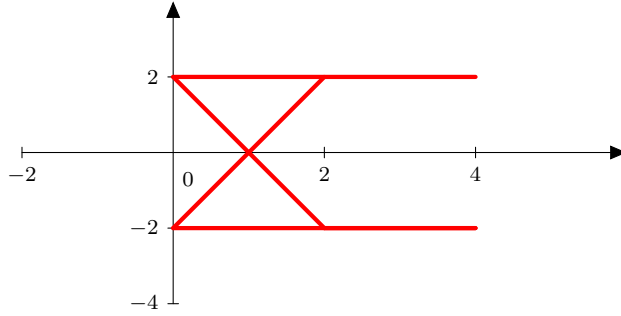


Diagramme de l'œil : On prend le  $t_0$  tel que à cet instant il n'y a que deux valeurs possibles.

4. En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux (sans ISI), calculer le rapport signal sur bruit aux instants d'échantillonnage (on admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception). Comparer le rapport signal sur bruit obtenu ici avec celui obtenu dans la chaîne de référence. Que peut-on supposer sur la comparaison des *TEBs* des deux chaînes de transmission ?

En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux (sans ISI), alors : Le rapport signal sur bruit aux instants d'échantillonnage est donné par la relation  $SNR = \frac{P_s}{P_b}$  où  $P_s$  est la puissance du signal et  $P_b$  est la puissance du bruit.

$$\begin{aligned} P_s &= \int_{\mathbb{R}} S_x(f) df = E[|x(t)|^2] = E[|a_m \frac{T_s}{2}|^2] \\ &= E[|a_m|^2] E[|\frac{T_s}{2}|^2] = \frac{T_s^2}{4} \end{aligned} \quad (3.4)$$

On admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception.

Selon la relation de Wiener-Lee, on a :

$$\begin{aligned} P_b &= \int_{\mathbb{R}} S_w(f) df = \int_{\mathbb{R}} S_n(f) |H_r(f)|^2 df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2 df \end{aligned} \quad (3.5)$$

On applique "l'égalité de Parseval" pour passer du fréquentiel au temporel, donc on obtient :

$$\begin{aligned}
P_b &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \int_0^{\frac{T_s}{2}} dt \\
&= \frac{N_0 T_s}{4} \\
SNR &= \frac{P_s}{P_b} = \frac{\frac{T_s^2}{4}}{\frac{N_0 T_s}{4}} = \frac{T_s}{N_0}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Le rapport signal sur bruit obtenu ici est 2 fois plus petit que celui obtenu dans la chaîne de référence, on suppose que le TEB associé à cette chaîne de transmission sera plus grand que celui obtenu dans la chaîne de référence.

**5.** On choisira d'utiliser un détecteur à seuil. Déterminer le seuil optimal à utiliser en expliquant votre choix.

À  $t_0 + mT_s$ , le symbole décidé est :

$$\hat{a}_m = \underset{\tilde{a}_m}{\operatorname{argmax}} P(\tilde{a}_m / z_m) \tag{3.7}$$

On rappelle que  $a_k \in \{-1, 1\}$  et que  $z_m = \tilde{a}_m g(t_0) + w_n$  **”Critère de Nyquist respecté ”** or  $w_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , nous savons que toute transformation affine d'un vecteur gaussien reste gaussienne, alors  $z_m \sim \mathcal{N}(\tilde{a}_m g(t_0), \sigma^2)$ .

Règle de décision MAP :

$$\begin{cases} z_m \geq 0; \tilde{a}_m = +1 \\ z_m < 0; \tilde{a}_m = -1 \end{cases} \tag{3.8}$$

Alors on choisira d'utiliser un détecteur à seuil à 0.

**6.** En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise le seuil optimal de décision, donner le taux d'erreur binaire de la transmission en fonction de  $T_s$  et  $\sigma$ ,  $\sigma^2$  représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$ .

Le taux d'erreur binaire de la transmission est donné par la relation :

$$\begin{aligned}
TEB &= \frac{TES}{\log_2(2)} \Rightarrow TEB = TES = \sum_{a_k} P(\tilde{a}_k \neq a_k) \\
&= P(a_k = -1)P(\tilde{a}_k = 1/a_k = -1) + P(a_k = 1)P(\tilde{a}_k = -1/a_k = 1) \\
&= \frac{1}{2}P(-g(t_0) + w_n \geq 0) + \frac{1}{2}P(g(t_0) + w_n < 0) \\
&= \frac{1}{2}P\left(\frac{w_n}{\sigma} \geq \frac{g(t_0)}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}P\left(\frac{w_n}{\sigma} < \frac{-g(t_0)}{\sigma}\right) \\
&= P\left(\frac{w_n}{\sigma} \geq \frac{g(t_0)}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma}\right) \\
&= Q\left(\frac{T_s}{2\sigma}\right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

**7.** Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception  $\sigma^2$  en fonction de  $N_0$  et de  $T_s$ .

On admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception.

Selon la relation de Wiener-Lee, on a :

$$\begin{aligned}
P_b &= \int_{\mathbb{R}} S_w(f)df = \int_{\mathbb{R}} S_n(f)|H_r(f)|^2df \\
&= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2df
\end{aligned} \tag{3.10}$$

On applique "l'égalité de Parseval" pour passer du fréquentielle au temporelle, donc on obtient :

$$\begin{aligned}
P_b &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(t)|^2dt = \frac{N_0}{2} \int_0^{\frac{T_s}{2}} dt \\
&= \frac{N_0 T_s}{4}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

**8.** Calculer l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur,  $E_s$ , en fonction de  $T_s$ .

Une forme d'onde associée à chaque  $a_k$  en entrée du récepteur tel que  $a_k h(t - kT_s)$ .

$$\begin{aligned}
E_s &= \int_{\mathbb{R}} |a_k h(t - kT_s)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} h(t - kT_s)^2 dt = T_s = PT_s \\
&= T_b \log_2(M)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Donc en binaire  $E_s = E_b$ .

**9.** Déduire des questions précédentes l'expression du taux d'erreur binaire en fonction de  $\frac{E_b}{N_0}$  pour la chaine étudiée.

D'après la question 7, nous avons trouvé :

$$\begin{aligned} TEB &= Q\left(\frac{T_s}{2\sigma}\right) \\ \text{avec } \sigma^2 &= \frac{N_0 T_s}{4} \end{aligned} \tag{3.13}$$

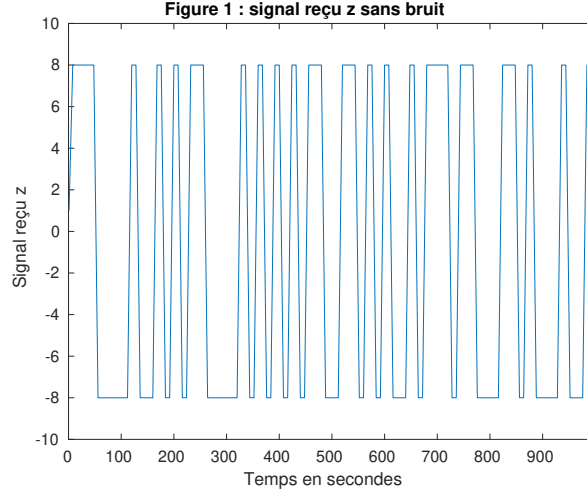
et comme nous sommes en binaire alors  $E_s = E_b$ , on conclut que :

$$TEB = Q\left(\frac{T_s}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{T_s}{2\sqrt{\frac{N_0 T_s}{4}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \tag{3.14}$$

## 3.2 Implantation sous Matlab

### 1. Implantation de la chaine sans bruit :

- (a)



Sur la figure j'ai pris  $T_s = 16$  et sachant que le signal en sortie du filtre de réception s'écrit sous la forme  $z(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s)$ , on échantillonne le signal en sortie tel que  $t = mT_s + t_0$  alors :

$$z(mT_s + t_0) = \sum_k a_k g((m - k)T_s + t_0) = a_m g(t_0) + \sum_{k \neq m} a_k g((m - k)T_s + t_0)$$

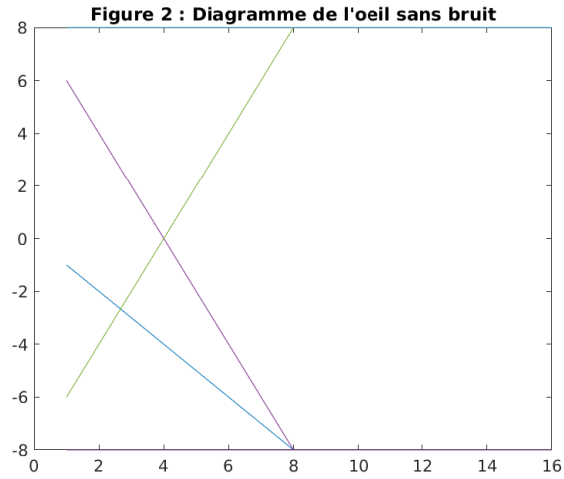
$$IES = 0 \iff \sum_{k \neq m} a_k g((m - k)T_s + t_0) = 0 \quad \text{''le critère de Nyquist''}$$

$$z(mT_s + t_0) = a_m g(t_0) = a_m \frac{T_s}{2} = \pm \frac{16}{2} = \pm 8$$

(3.15)

Ce qui est conforme avec l'étude théorique, à un détail près, dans l'étude théorique j'ai pris  $T_s = 4$  alors qu'ici  $T_s = 16$ , mais en principe c'est la même chose.

- (b) Le diagramme de l'œil en sortie du filtre de réception:



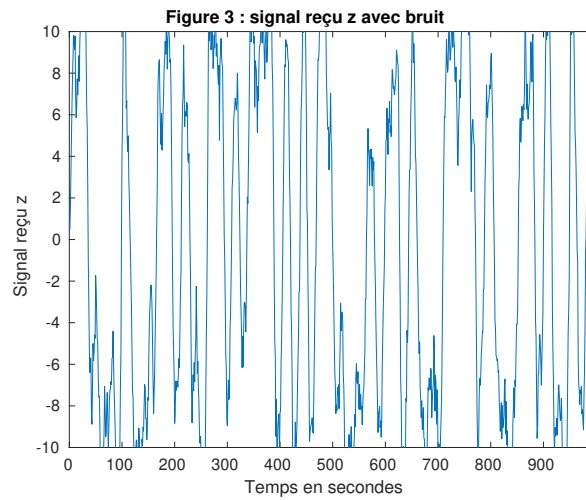
On prend le  $t_0$  tel que à cet instant il n'y a que deux valeurs possibles, donc  $\forall t_0 \in [\frac{T_s}{2}, T_s]$

- (c) En prenant,  $t_0 = T_s$  comme instant optimal d'échantillonnage et avec un détecteur à seuil en 0, puisqu'on a utilisé un mapping equiprobable alors on va décider soit 1 ou  $-1$ , et donc le  $TEB = 0$ .

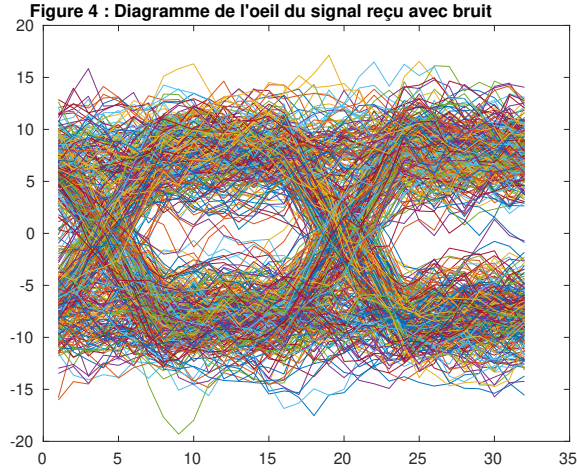
**2. Implantation de la chaîne avec bruit :**

On vient de rajouter un bruit blanc gaussien tel que sa densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences de la bande passante, il suit une loi normal.

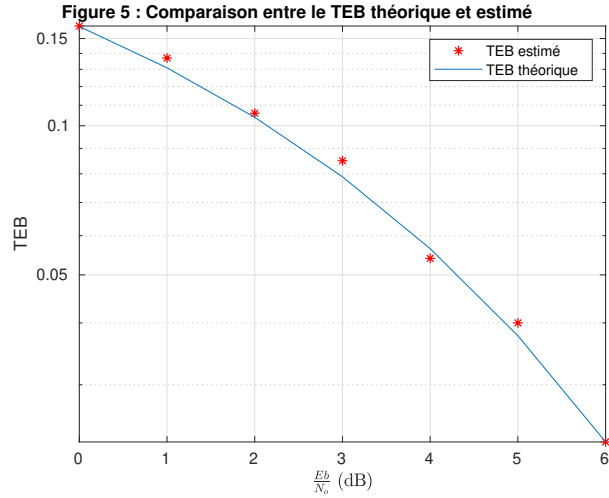
Le signal filtré et échantillonné à  $t_0 + mT_s$ .



L'instant d'échantillonnage optimal est  $\forall t_0 \in [\frac{T_s}{2}, T_s]$  retrouvé grace au diagramme de l'œil avec bruit en sortie du filtre de réception.



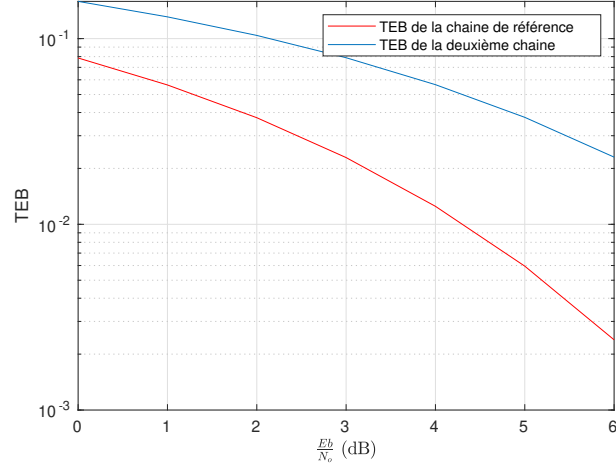
3. On remarque que le TEB estimé est pratiquement identique au TEB théorique donné par la formule  $TEB = Q(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}})$ .



4. le TEB de la deuxième chaine de transmission est donné par  $TEB = Q(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}})$  alors que le TEB de la chaine de référence est donné par  $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$ . Donc le premier est 2 fois plus petit que le deuxième, donc le TEB de la chaine de référence est plus efficace car le rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur est plus petit donc une efficacité en puissance plus élevée.

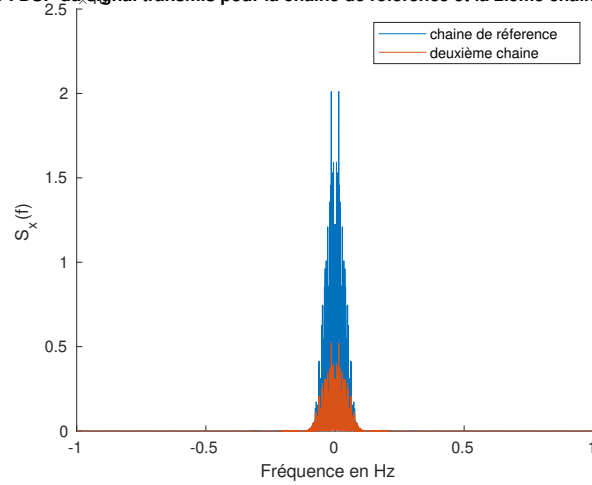


5 : Comparaison entre le TEB de la chaine réfence et de la deuxième chaine



5.

6 : DSP du signal transmis pour la chaine de référence et la 2ième chaine



On remarque que la chaine de référence a la meme efficacité spectrale que la deuxième chaine, car le tracé des deux DSP à dévoilé que la bande passante de la deuxième chaine est pareil que celle de la chaine de référence.

## Troisième chaine à étudier : impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée

---

On considérera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles  $a_k \in \{-1, 1\}$ ) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception,  $h(t)$  et  $h_r(t)$ , en racine de cosinus surélevé de même roll off  $\alpha = 0.5$ .

### 4.1 Étude théorique

**1.** Quel est le facteur de suréchantillonnage minimal à utiliser ici ? Justifiez votre réponse.

Le produit de convolution des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception,  $h(t)$  et  $h_r(t)$  donne un cosinus surélevé de roll off  $\alpha = 0.5$  où  $0 \leq \alpha \leq 1$  et  $R_s = \frac{1}{T}$ .

Si on veut un nombre entier d'échantillons, qui respecte le critère d'échantillonnage de Shannon, donc :

$$F_e \geq (1 + \alpha)R_s = 1,5.R_s \implies F_e = 2R_s \quad (4.1)$$

**2.** La chaine de communication peut-elle vérifier le critère de Nyquist ? Justifiez votre réponse.

Dans le domaine temporel "**le critère de Nyquist**" est traduit par la formule suivante :

$$\begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \quad (4.2)$$

Mais dans ce cas, on va vérifier "**le critère de Nyquist**" dans le domaine fréquentiel, et ceci se traduit par la relation suivante :

$$\sum_k G^{t_0}(f - \frac{k}{T_s}) = cte$$

$$G^{t_0}(f) = TF(\frac{g(t+t_0)}{g(t_0)}) \quad (4.3)$$

Alors  $|G(f)| = 0 \quad \forall |f| > R_s$ , donc  $G(f) + G(f - R_s) = cte$ , on peut conclure alors que :  $\sum_k G^{t_0}(f - \frac{k}{T_s}) = cte$  avec  $f = \frac{R_s}{2}$  comme point de symétrie. Donc on retrouve que la chaîne respecte **”le critère de Nyquist”**.

**3.** La chaîne de communication vérifie-t-elle le critère de filtrage adapté ? Justifiez votre réponse.

Les réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception,  $h(t)$  et  $h_r(t)$ , sont en racine de cosinus surélevé de même roll off  $\alpha = 0.5$ , alors on note  $g(t)$  la réponse impulsionnelle globale définie par le produit de convolution entre le filtre de mise en forme et le filtre de réception, alors  $g(t) = h(t) * h_r(t)$ , avec une transformée de Fourier, on trouve  $G(f) = H(f).H_r(f)$ , comme les deux filtres sont identiques alors on pourra écrire la chose suivante :  $H_r(f) = H^*(f)$ , donc  $G(f) = |H(f)|^2 \implies |H(f)| = \sqrt{G(f)}$ .

**4.** Donner (sans le calculer) le taux d'erreur binaire théorique de la transmission, en justifiant votre choix de formule.

On sait que si le filtre de réception est un filtre adapté, le  $TEB$  est minimal est égal à  $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$ . Si le filtre n'est pas adapté alors  $TEB > Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$ . En plus de ça, nous avons un filtre qui satisfait **le critère de Nyquist** (pas de ISI) donc  $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}) = Q(\frac{g(t_0)}{\sigma})$ .

**5.** A quelle condition pourrait-on transmettre le signal généré par le modulateur proposé dans un canal de transmission idéal à bande limitée de bande  $BW = 1500$  Hz ?

Il faut trouver le débit symbole maximum qui permet de satisfaire **”le critère de Nyquist”** :

si  $(1 + \alpha) \frac{R_s}{2} \leq BW$  alors ceci implique  $R_s \leq \frac{2BW}{1+\alpha} = \frac{3000}{1.5} = 2000 \text{ bits/s}$

## 4.2 Implantation sous Matlab

### 1. Implantation de la chaine sans bruit :

- (a) **Théorème de Shannon :**

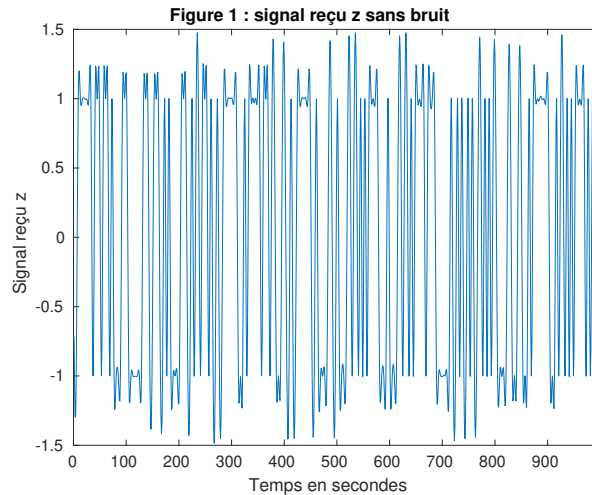
Pour que le signal puisse être entièrement reconstruit à partir des échantillons, il faut et il suffit que :  $f_e > 2F_{max}$ .

Selon 1)- de l'étude théorique, on avait trouvé qu'un facteur d'échantillonnage qui respecte la condition d'échantillonnage de Shannon satisfait la relation suivante:

$$\begin{aligned} F_e &\geq (1 + \alpha)R_s = 1,5.R_s \implies F_e = 2R_s \\ F_e &= 12000Hz \geq 1,5 * 3000 = 4500Hz \end{aligned} \quad (4.4)$$

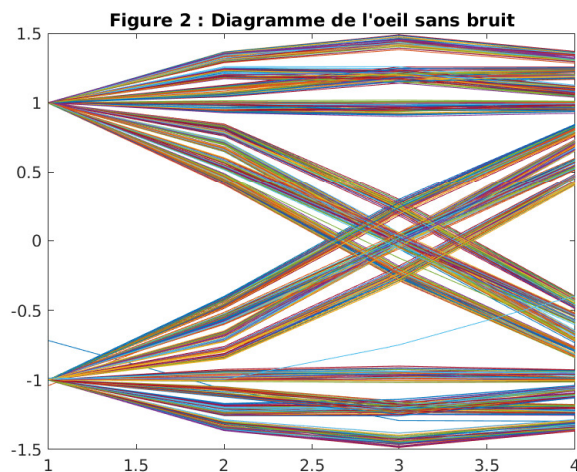
Alors, on en déduit que Le facteur de suréchantillonnage utilisé ici permet de respecter **"la condition d'échantillonnage de Shannon"**.

- (b) On a utilisé un mapping binaire à moyenne nulle (symboles  $a_k \in \{-1, 1\}$ ) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception,  $h(t)$  et  $h_r(t)$ , en racine de cosinus surélevé de meme roll off  $\alpha = 0.5$ , le produit de convolution de  $h(t)$  et  $h_r(t)$  donne un cosinus surélevé de roll off  $\alpha = 0.5$ .



On distingue que le signal est conforme avec la partie théorique.

- (c) Le diagramme de l'œil en sortie du filtre de réception:



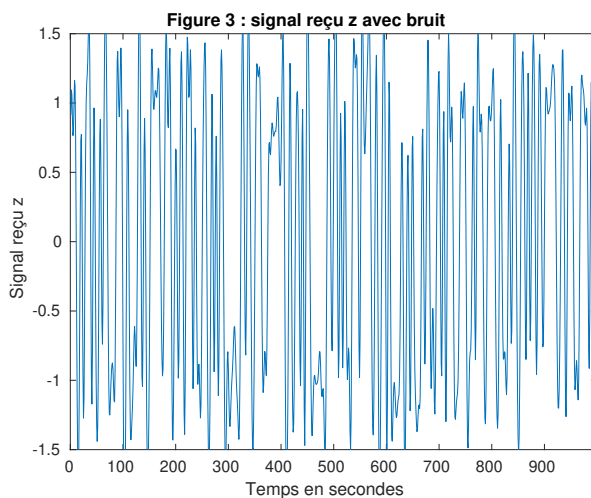
On prend le  $t_0$  tel que à cet instant il n'y a que deux valeurs possibles.

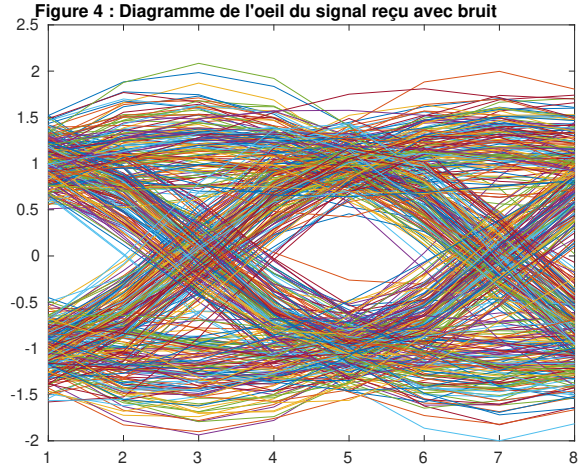
- (d) En utilisant les instants optimaux d'échantillonnage puis un détecteur à seuil, avec seuil optimal, le TEB obtenu est bien nul car on est dans le cas d'une chaîne de transmission idéale.

## 2. Implantation de la chaîne avec bruit :

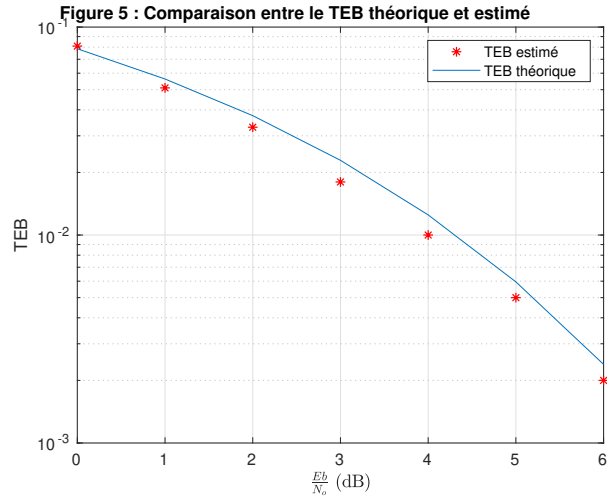
On vient de rajouter un bruit blanc gaussien tel que sa densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences de la bande passante, il suit une loi normal.

Le signal filtré et échantillonné à  $t_0 + mT_s$ .





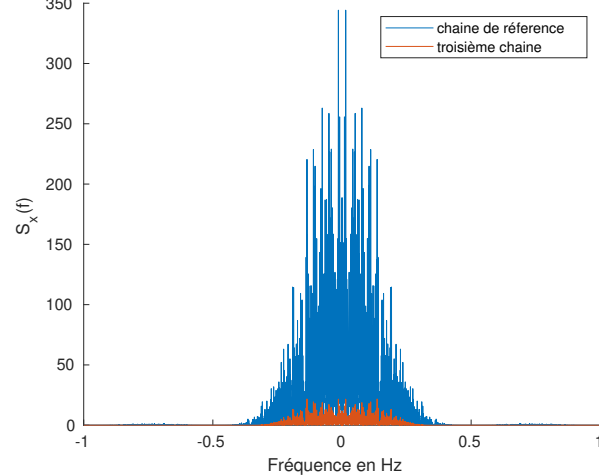
3. On remarque que le TEB estimé est pratiquement identique au TEB théorique donné par la formule  $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$ .



4. le TEB obtenu par simulation de la chaîne de transmission étudiée est donné par  $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}) = Q(\frac{g(t_0)}{\sigma})$  alors simulation de la chaîne de référence est donné par  $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$ . Donc on remarque que les deux TEB sont identiques en terme de puissance.

5.

6 : DSP du signal transmis pour la chaîne de référence et la 3<sup>ème</sup> chaîne

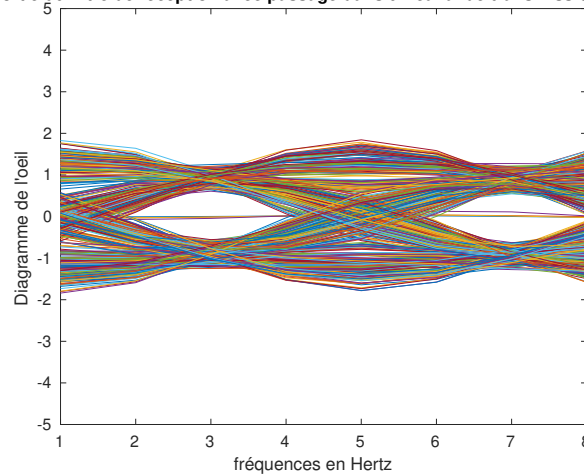


On remarque que la chaîne courante est plus efficace que la chaîne de référence en terme d'efficacité spectrale, car elle a une bande passante plus petite que celle de la chaîne de référence.

7. On reprend la chaîne de transmission sans bruit, et on introduit un passage dans un canal de transmission.

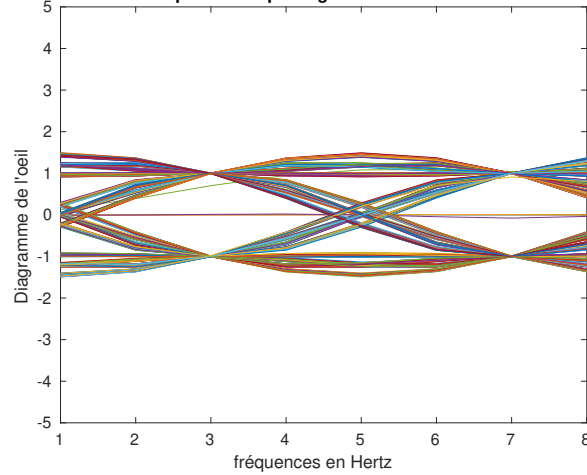
- (a) De bande  $BW = 1500Hz$  implanté comme un filtre passe bas de fréquence de coupure  $1500Hz$ .

an sortie du filtre de réception avec passage dans un canal de transmission (BW :



- (b) De bande  $BW = 3000Hz$  implanté comme un filtre passe bas de fréquence de coupure  $3000Hz$ .

en sortie du filtre de réception avec passage dans un canal de transmission (BW :



Dans l'étude théorique, sur la dernière question, on a trouvé que le débit symbole maximum qui permet de satisfaire **"le critère de Nyquist"** : si  $(1 + \alpha) \frac{R_s}{2} \leq BW$ , alors pour le cas de  $BW = 1500Hz, 3000Hz$  avec un  $R_s = 3000$  symboles par secondes, on a plutôt ça:

$$(1 + \alpha) \frac{R_s}{2} \geq BW \quad (4.5)$$

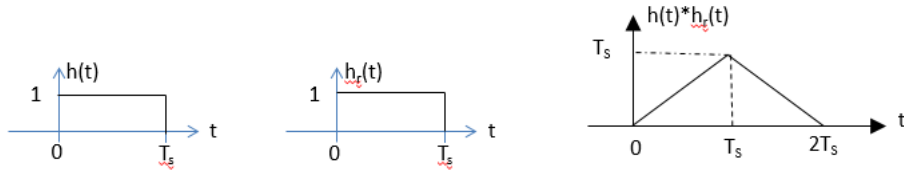
Dans ce cas de configuration **"le critère de Nyquist"** n'est plus respecté, donc  $ISI \neq 0$ .



## Quatrième chaine à étudier : impact du choix du mapping

---

On considèrera un mapping 4-aire à moyenne nulle (symboles  $ak \in -3, -1, 1, 3$ ) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception,  $h(t)$  et  $h_r(t)$ , rectangulaire de durée  $T_s$ .



### 5.1 Étude théorique

**1.** Proposer un instant optimal  $t_0$  pour démarrer l'échantillonnage en expliquant votre choix. On échantillonnera alors aux instants optimaux  $t_0 + mT_s, m = 0, 1, 2, \dots$

Comme les deux filtres sont rectangulaires de durée  $T_s$ , on se situe dans le même cas que pour la chaîne de référence en ce qui concerne la détermination des instants optimaux, donc :

$$g(t) = h(t) * h_r(t), \exists t_0 \text{ tel que : } \begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0 \forall p \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \quad (5.1)$$

On conclut que **"le critère de Nyquist"** est respecté pour :  $t_0 = T_s$ .

**2.** En supposant que l'on utilise un détecteur à seuil pour prendre les décisions, quels sont les seuils optimaux à utiliser ? Justifiez votre réponse.

À  $t_0 + mT_s$ , le symbole décidé est

$$\hat{a}_m = \underset{\tilde{a}_m}{\operatorname{argmax}} P(\tilde{a}_m / z_m)$$

On rappelle que  $a_k \in \{+3, -3, -1, 1\}$  et que  $z_m = \tilde{a}_m g(t_0) + w_n$  ”**Critère de Nyquist respecté**” or  $w_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , nous savons que toute transformation affine d’un vecteur gaussien reste gaussienne, alors  $z_m \sim \mathcal{N}(a_m g(t_0), \sigma^2)$ .  
Règle de décision MAP :

$$\begin{cases} z_m \leq -2g(t_0); \tilde{a}_m = -3 \\ -2g(t_0) < z_m \leq 0; \tilde{a}_m = -1 \\ 0 < z_m \leq 2g(t_0); \tilde{a}_m = +1 \\ z_m \geq 2g(t_0); \tilde{a}_m = +3 \end{cases} \quad (5.2)$$

On en déduit que les seuils optimaux sont :  $-2Vg(t_0), 0, 2Vg(t_0)$ , avec ici  $V = 1$  et  $g(t_0) = T_s$ .

**3.** On suppose que l’on échantillonne aux instants optimaux et que l’on utilise un détecteur à seuil avec seuils optimaux. En utilisant le mapping suivant :  
00 : -3, 01 : -1, 11 : +1, 10 : +3.

- **(a)** Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole -1 alors que l’on a émis -3.

$$\begin{aligned} P(\tilde{a}_m = -1/a_m = -3) &= P(-2T_s < z_m \leq 0/z_m = -3T_s + \omega_m) \\ &= P(-2T_s < -3T_s + \omega_m \leq 0) = P(T_s < \omega_m \leq 3T_s) \\ &= P\left(\frac{T_s}{\sigma} < \frac{\omega_m}{\sigma} < \frac{3T_s}{\sigma}\right) \\ &= -P\left(\frac{\omega_m}{\sigma} > \frac{3T_s}{\sigma}\right) + P\left(\frac{\omega_m}{\sigma} > \frac{T_s}{\sigma}\right) \\ &= -Q\left(\frac{3T_s}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{T_s}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

- **(b)** Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole +1 alors que l’on a émis -3.

$$\begin{aligned} P(\tilde{a}_m = +1/a_m = -3) &= P(0 < z_m \leq 2T_s/z_m = -3T_s + \omega_m) \\ &= P(0 < -3T_s + \omega_m \leq 2T_s) = P(3T_s < \omega_m \leq 5T_s) \\ &= P\left(\frac{3T_s}{\sigma} < \frac{\omega_m}{\sigma} < \frac{5T_s}{\sigma}\right) \\ &= -P\left(\frac{\omega_m}{\sigma} > \frac{5T_s}{\sigma}\right) + P\left(\frac{\omega_m}{\sigma} > \frac{3T_s}{\sigma}\right) \\ &= -Q\left(\frac{5T_s}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{3T_s}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

- (c) Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole +1 alors que l'on a émis -3.

$$\begin{aligned}
P(\tilde{a}_m = +3/a_m = -3) &= P(z_m \geq 2T_s/z_m = -3T_s + \omega_m) \\
&= P(-3T_s + \omega_m \geq 2T_s) = P(\omega_m \geq 5T_s) \\
&= P\left(\frac{\omega_m}{\sigma} \geq \frac{5T_s}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{5T_s}{\sigma}\right)
\end{aligned} \quad (5.5)$$

- (d) AN :  $N_0 = 10^{-3} V^2 / Hz$ ,  $R_b = 1 kbps$ .  
Selon la relation de Wiener-Lee, on a :

$$P_b = \int_{\mathbb{R}} S_w(f) df = \int_{\mathbb{R}} S_n(f) |H_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2 df \quad (5.6)$$

On applique "l'égalité de Parseval" pour passer du fréquentielle au temporelle, donc on obtient :

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = P_b &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} dt = \frac{N_0 T_s}{2} \\
\sigma &= \sqrt{\frac{N_0 T_s}{2}}
\end{aligned} \quad (5.7)$$

En plus, on sait que  $R_s = 2R_b$ ,  $T_s = \frac{1}{2R_b}$ ,  $T_s = 2 \times 10^{-3} s$ ,  $\sigma = 10^{-3} V$  et  $\frac{T_s}{\sigma} = 2s/V$ , à l'aide de la table de la fonction  $Q$  de la loi normale centrée réduite, on trouve :

$$\begin{aligned}
P(\tilde{a}_m = -1/a_m = -3) &\approx 0.023 \\
P(\tilde{a}_m = 1/a_m = -3) &\approx 9.8 \times 10^{-8} \\
P(\tilde{a}_m = 3/a_m = -3) &\approx 7.6 \times 10^{-24}
\end{aligned} \quad (5.8)$$

- (e) La règle de codage choisie pour le mapping vous paraît-elle intéressante ? Si oui, quel est son intérêt ?

la règle de codage choisie pour le mapping est **le codage de Gray**, elle est intéressante car pour passer d'un symbole à l'autre, seul un bit change à chaque fois.

- (f) Sachant que le taux d'erreur symbole de la liaison est donné par :

$$TES = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}}\right) \quad (5.9)$$

Avec la règle de codage choisie pour le mapping donnez le taux d'erreur binaire (TEB) de la liaison, en expliquant votre réponse.

**Principe de Gray :**

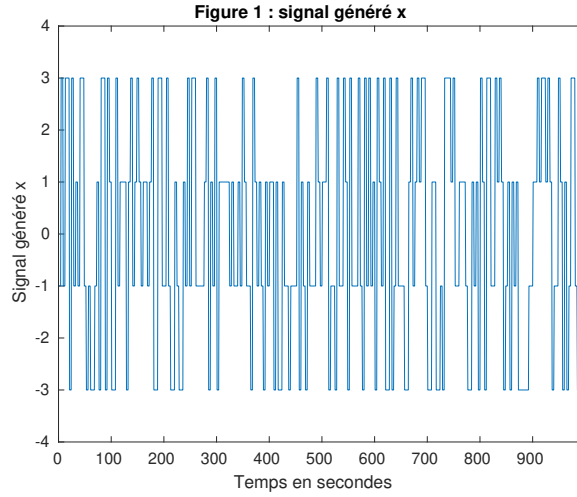
Entre deux niveaux consécutifs, seulement un bit change. L'intérêt par rapport au fait de faire des erreurs vient de la propriété suivante : "Les symboles adjacents ne diffèrent que d'un bit". Ainsi si l'on fait une erreur sur un symbole, donc il n'y a qu'un bit qui est erroné et ce quelque soit le nombre de bits que transporte le symbole. Donc la probabilité d'erreur sur un bit  $P_b$  = probabilité d'erreur sur un symbole  $P_s$  sur  $n$  :  $P_b = \frac{P_s}{n}$  où  $M$  est la taille de constellation :  $M = 2n$  donc :  $P_b = \frac{P_s}{\log_2(M)} \Rightarrow TEB = \frac{TES}{\log_2(M)}$  Dans ce cas , on a  $M = 4$  , donc

$$\begin{aligned} TEB &= \frac{1}{2}TES \\ TES &= \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}}\right) \end{aligned} \tag{5.10}$$

## 5.2 Implantation sous Matlab

1. Implantation de la chaine sans bruit : on l'implantera en utilisant le mapping suivant : 00 : -3, 01 : -1, 10 : +1, 11 : +3.

- (a) La génération de l'information binaire à transmettre (bits  $a_k \in (-3, -1, 1, 3)$  équiprobables et indépendants), avec un mapping binaire à moyenne nulle : 00 : -3, 01 : -1, 10 : +1, 11 : +3. afin de passer de l'information binaire aux symboles  $a_k$ , avec un filtre de mise en forme rectangulaires de durée  $T_s$ , donc le signal généré doit osciller entre  $(-3, -1, 1, 3)$ . On trouve ceci sur la figure suivante :



On sait que la densité spectrale vaut :

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re}[R_a \exp(j2\pi f k T_s)] + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_k |H(\frac{k}{T_s})|^2 \delta(f - \frac{k}{T_s})$$

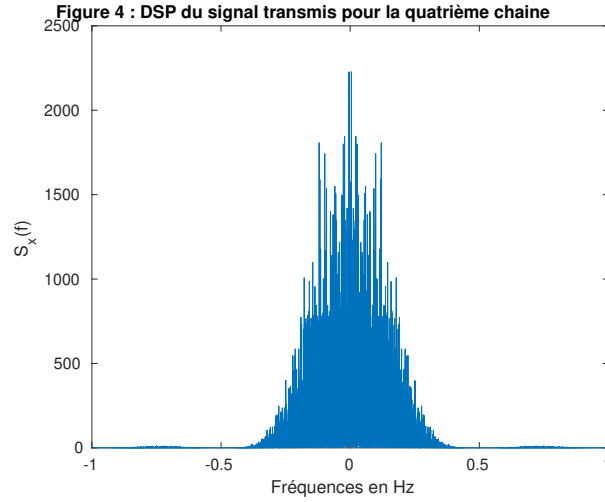
$$\text{avec : } \sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2] \quad m_a = E[a_k] \quad R_a = \frac{E[a_m^* a_{m-k}] - |m_a|^2}{\sigma_a^2} \quad (5.11)$$

Sachant que les symboles  $a_k$  sont des variables aléatoires discrètes

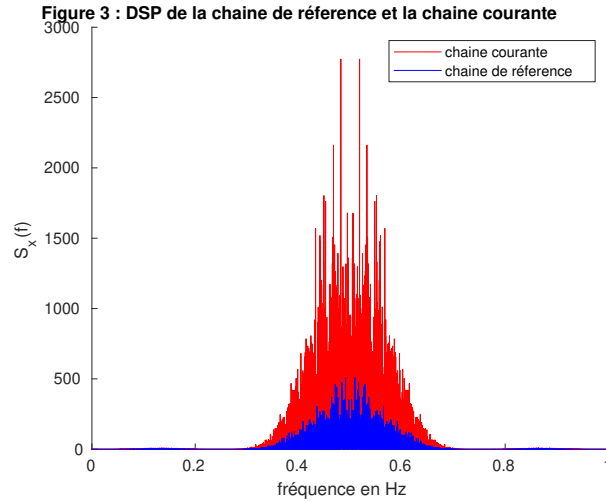
équipropables, alors:

$$\begin{aligned}
m_a &= E[a_k] = -1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 0 \\
\sigma_a^2 &= E[|a_k - m_a|^2] = E[|a_k - 0|^2] = E[|a_k|^2] = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + (-3)^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} = 5 \\
R_a &= \frac{E[a_m^* a_{m-k}] - |m_a|^2}{\sigma_a^2} = \frac{E[a_m^* a_{m-k}] - 0}{5} = \frac{E[a_m^* a_{m-k}]}{5} = 0 \quad \text{si } k \neq 0 \\
S_{x[f]} &= \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 = S_{x[f]} = \frac{5}{T_s} |T_s \text{sinc}(\pi f T_s)|^2 = 5 T_s \text{sinc}(\pi f T_s)^2
\end{aligned} \tag{5.12}$$

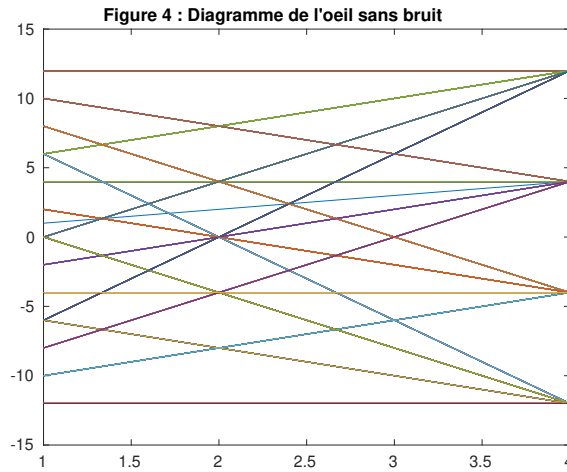
La densité spectrale de puissance est un  $\text{sinc}^2$  comme le montre la figure suivante en bande de base autour de la fréquence 0.



- **(b)** Si on compare l'efficacité spectrale de la chaîne étudiée avec celle de la chaîne de référence, on trouve que la DSP de la chaîne courante est donnée par  $5T_s \text{sinc}(\pi f T_s)^2$  et celle de la chaîne de référence est donnée par  $T_s \text{sinc}(\pi f T_s)^2$ , ce qui explique la différence entre les deux DSP d'un facteur de 5. La chaîne de référence a la même efficacité spectrale que la chaîne courante, car elle a une bande passante identique à celle de la chaîne courante.

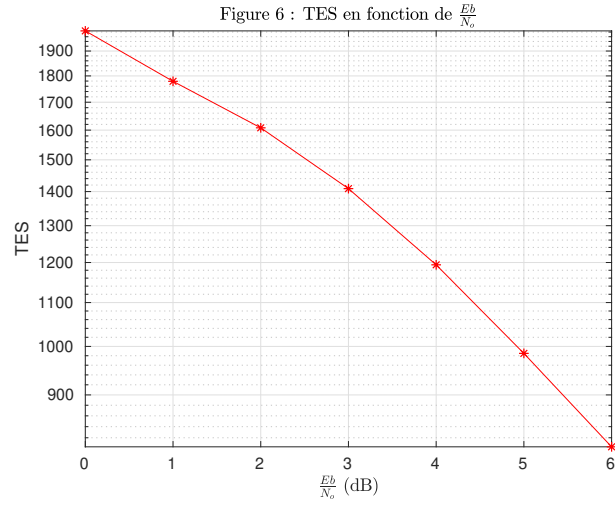


- (c) Le diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception comme le montre la figure suivante, confirme les résultats trouvés dans l'étude théorique.

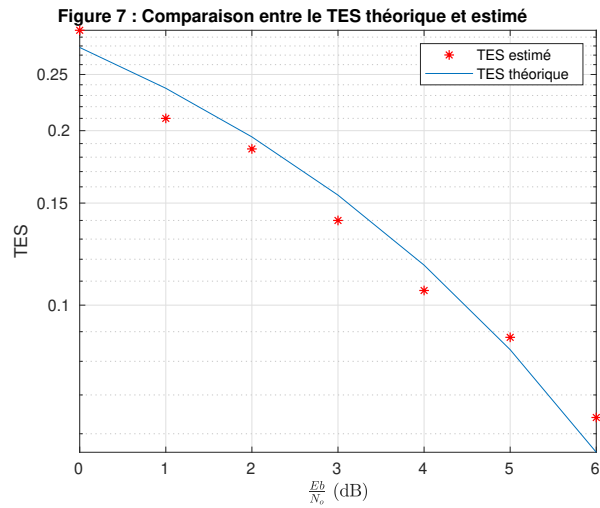


- (d) En utilisant les instants optimaux d'échantillonnage puis un détecteur à seuil, avec seuil optimal, le TEB obtenu est bien nul car on est dans le cas d'une chaîne de transmission idéale.

2. On vient de rajouter un bruit blanc gaussien tel que sa densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences de la bande passante, il suit une loi normale. Le taux d'erreur symbole (TES) obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur ( $\frac{E_b}{N_0}$ ) en décibels.



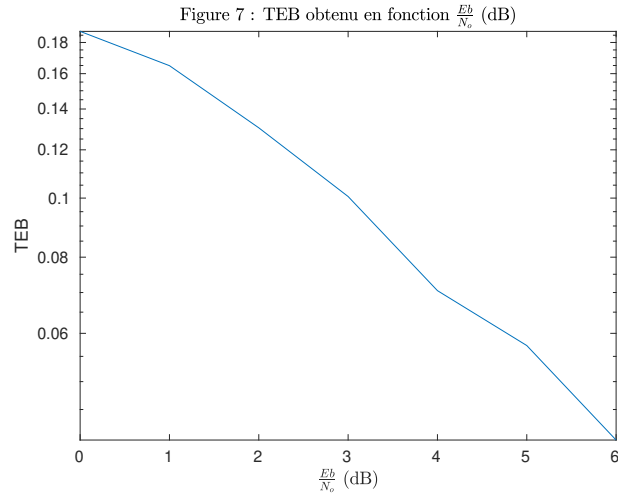
3. en comparant le TES obtenu par simulation sur la chaîne implantée figurant sur la figure précédente au TES donné pour la chaîne étudiée dans l'étude théorique, donné par la formule suivante :  $TES = \frac{3}{2}Q(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}})$ .



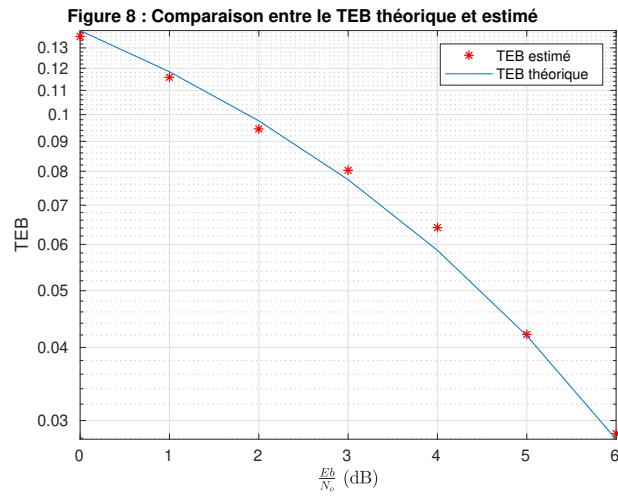
On remarque que le TES théorique est approximativement analogue au TES estimé.

4. Le taux d'erreur binaire (TEB) obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur ( $\frac{E_b}{N_0}$ ) en décibels.





5. Le TEB obtenu par simulation sur la chaine implantée au TEB donné pour la chaine étudiée dans l'étude théorique sont égaux presque partout.



Ce qui montre que le TEB obtenu par estimation est analogue a celui obtenu dans l'étude théorique.

## Conclusion

---

La transmission en bande de base consiste à transmettre des informations d'un émetteur vers un récepteur à travers un canal de propagation. La transmission des informations s'effectue grâce à certains mécanismes constituant la chaîne de transmission, possédant des caractéristiques qui peuvent avoir des conséquences sur la transmission. C'est le cas de l'étude que nous avons menée, au début nous avons pris une chaîne de transmission de référence, puis nous avons analysé l'impact des filtres de mise en forme et de réception ainsi que le canal de propagation en rajoutant un bruit blanc gaussien et finalement on a regardé l'impact du mapping. Tout ces changements avaient des conséquences sur l'efficacité spectrale et la puissance par rapport à la chaîne de référence.

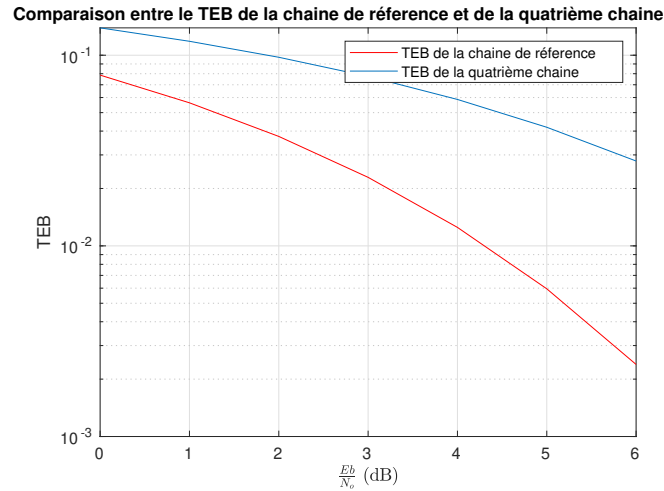
le TEB de la deuxième chaîne de transmission est donné par  $TEB = Q(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}})$  alors que le TEB de la chaîne de référence est donné par  $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$ . Donc le premier est 2 fois plus petit que le deuxième, donc le TEB de la chaîne de référence est plus efficace car le rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur est plus petit donc une efficacité en puissance plus élevée. En terme d'efficacité spectrale, la bande passante de la deuxième chaîne est identique à celle de la chaîne de référence, donc la chaîne de référence a la même efficacité spectrale que la deuxième chaîne, ceci résume l'impact du choix du filtre de réception.

L'impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée a des conséquences sur la chaîne de transmission, par exemple le TEB de la troisième chaîne de transmission est donné par

$TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}) = Q(\frac{g(t_0)}{\sigma})$  et le TEB de la chaîne de référence est donné par  $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$ . Donc on remarque que les deux TEB sont identiques en terme de puissance. On remarque que la troisième chaîne est plus efficace que la chaîne de référence en terme d'efficacité spectrale, car elle a une bande passante plus petite que celle de la chaîne de référence.

La DSP de la quatrième chaîne est donnée par  $5T_s \text{sinc}(\pi f T_s)^2$  et celle de la chaîne de référence est donnée par  $T_s \text{sinc}(\pi f T_s)^2$ , ce qui explique la différence

entre les deux DSP d'un facteur de 5. La chaîne de référence a la même efficacité spectrale que la quatrième chaîne, car elle a une bande passante identique que celle de la quatrième chaîne. Le TEB de la quatrième chaîne de transmission est donné par  $TEB = \frac{3}{4}Q(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}})$  et le TEB de la chaîne de référence est donné par  $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$ .



D'après la figure précédente, on remarque que le TEB de la chaîne de référence est plus efficace en terme de puissance que la quatrième chaîne. Ce qui résume la différence entre le mapping binaire et 4-aires.

## Bibliographie

---

- <http://thomas.perso.enseeiht.fr/DigitalCommunications.html>
- M. Joindot, A. Glavieux, Introduction aux communications numériques
- <https://fr.mathworks.com/help/matlab/>
- <http://univ-toulouse-scholarvox.com.gorgone.univ-toulouse.fr/catalog/book/88834121>