Exo 1 :

1) $P_f = f * v$, où $v(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin x}{x}$

On a $f \in L^2$ et $v \in L^2$ (v^2 fonction continue sur $\mathbb{R}$, en $\frac{1}{x^2}$ à l'∞)

Donc $f * v$ est définie partout et continue sur $\mathbb{R}$ (th. de cours)

2) f et v étant dans $L^2(\mathbb{R})$, elles admettent des TF^{-1} de L^2.

$\exists$ donc h et g de $L^2(\mathbb{R})$ tq $\hat{h} = f$ et $\hat{g} = v$

D'après l'aide, $g(x) = \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right]}(x)$

On a : $P_f = \hat{h} * \hat{g} = \widehat{hg}$

Or, $hg \in L^2(\mathbb{R})$ car $\int_{\mathbb{R}} |h(x) g(x)|^2 dx = \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} |h(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |h(x)|^2 dx$

fini car $h \in L^2$

Donc $\widehat{hg} \in L^2$

Donc $P_f \in L^2$

3) On a : $\|P_f\|_{L^2}^2 = \|\widehat{hg}\|_{L^2}^2 = \|hg\|_{L^2}^2$ (Parseval)

$\leq \|h\|_{L^2}^2$ (d'après ce qui précède)

$\|f\|_{L^2}^2$ (Parseval).

cqfd.

4) $P_f = \hat{h} * \hat{g}$ avec $\hat{h} = f$

donc $P_{P_f} = P_f * \hat{g} = \hat{h} * \hat{g} * \hat{g} = \hat{h} * \widehat{gg} = \hat{h} * \hat{g} = P_f$

(car $g(x) g(x) = g(x) \ \forall x$)

Exo 2. (2)

1) $f *_a g = f_a * g$, où $f_a = \frac{1}{a} f \, 1\!\!1_{[0,a]} \in L^2$

De m̂ qu'à l'exo 1, on a alors $f *_a g$ définie continue sur $\mathbb{R}$

(note : la démo complète est en fait un peu plus compliquée, et elle utilise la périodicité de $f *_a g$ montrée en 2).)

2) $$f *_a g(t+a) = \frac{1}{a} \int_0^a f(u) \underbrace{g(t+a-u)}_{= g(t-u) \text{ par périodicité}} du = f *_a g(t)$$

3) $$c_k(f *_a g) = \frac{1}{a} \int_0^a f *_a g(t) \, e^{-2j\pi kt/a} dt$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^a \left(\frac{1}{a} \int_0^a f(u) g(t-u) du \right) e^{-j2\pi \frac{kt}{a}} dt$$

$$= \frac{1}{a^2} \int_0^a \left(\int_0^a h(t,u) \, du \right) dt \quad \text{avec } h(t,u) = f(u) g(t-u) e^{-j2\pi \frac{kt}{a}}$$

On cherche à inverser les intégrales : il faut donc utiliser Fubini en calculant $\int_0^a \left(\int_0^a |h(t,u)| dt \right) du$

On a :
$$\int_0^a \left(\int_0^a |h(t,u)| dt \right) du = \int_0^a \left(\int_0^a |f(u)| |g(t-u)| dt \right) du$$

$$= \int_0^a |f(u)| \underbrace{\int_0^a |g(t-u)| dt}_{= \int_{-u}^{a-u} |g(v)| dv = \int_0^a |g(v)| dv \text{ par périodicité } (v = t-u)} du$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^a |f(u)| du \right)}_{\text{fini car } f \in L^1} \underbrace{\left(\int_0^a |g(v)| dv \right)}_{\text{fini car } g \in L^1} \quad \text{fini}$$

Donc on peut inverser les intégrales (mais pas avant d'avoir fait ce calcul !)

d'où :
$$c_k(f *_a g) = \frac{1}{a^2} \int_0^a \left(\int_0^a f(u) g(t-u) e^{-j2\pi \frac{kt}{a}} dt \right) du$$

on pose : $v = t - u$

$$= \frac{1}{a^2} \int_0 f(u) \Big(\int_{-u} \underbrace{g(v)\, e \quad\quad}_{a\text{-périodique}} e \; dv \Big)\, du$$

$$= \frac{1}{a^2} \int_0^a f(u)\, e^{-2i\pi \frac{ku}{a}} \left(\int_0^a g(v)\, e^{-2i\pi \frac{kv}{a}}\, dv \right) du$$

$$= \left(\frac{1}{a} \int_0^a f(u) e^{-2i\pi \frac{ku}{a}}\, du \right) \left(\frac{1}{a} \int_0^a g(v)\, e^{-2i\pi \frac{kv}{a}}\, dv \right)$$

$$= c_k(f)\, c_k(g) \qquad \text{cqfd.}$$

4) • f et g paires :

$$f *_a g(-t) = \frac{1}{a} \int_0^a f(u)\, g(-t-u)\, du$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^a f(u)\, g(t+u)\, du \qquad (g \text{ paire})$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^a f(-v)\, g(t-v)\, dv \qquad v = -u$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^a f(v)\, g(t-v)\, dv \qquad (f \text{ paire})$$

$$= f *_a g(t)$$

• Si f et g impaires : ds le calcul précédent, $g(-t-u) = -g(t+u)$, $f(-v) = -f(v)$

et on obtient le m̂ résultat

• Si f paire, g impaire : $g(-t-u) = -g(t+u)$, $f(-v) = f(v)$

et on obtient $-f *_a g(t)$

On pouvait aussi raisonner avec les coefficients de Fourier et leurs propriétés.

3) • $R_{f,g}(t) = f *_a \tilde{g}(t)$, où $\tilde{g}(t) = \overline{g(-t)}$

g étant L^2 et a-périodique, $\tilde{g}$ aussi.

Donc $R_{f,g}$ est bien définie et continue.

• $c_k(R_{f,g}) = c_k(f *_a \tilde{g}) = c_k(f)\, c_k(\tilde{g})$

et $$c_k(\tilde{g}) = \frac{1}{a}\int_0^a \tilde{g}(t)\, e^{-2j\pi\frac{kt}{a}}\,dt$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a \overline{g(-t)}\, e^{-2j\pi\frac{kt}{a}}\,dt$$

$$= \frac{1}{a}\overline{\int_0^a g(-t)\, e^{2j\pi\frac{kt}{a}}\,dt}$$

$$= \frac{1}{a}\overline{\int_0^a g(t')\, e^{-2j\pi\frac{kt'}{a}}\,dt'} \quad t' = -t$$

$$= \overline{c_k(g)}$$

d'où : $$c_k(R_{f,g}) = c_k(f)\,\overline{c_k(g)}$$

• On a : $$R_{f,f}(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(R_{f,f})\, e^{2j\pi\frac{k0}{a}}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\,\overline{c_k(f)} = \sum |c_k(f)|^2$$

d'autre part : $$R_{f,f}(0) = \frac{1}{a}\int_0^a f(u)\,\overline{f(u)}\,du = \frac{1}{a}\int_0^a |f(u)|^2\,du$$

cqfd.

Exo 1

1) $$e^{2j\pi\frac{kt}{a}} *_a e^{2j\pi\frac{\ell t}{a}} = \frac{1}{a}\int_0^a e^{2j\pi\frac{ku}{a}} e^{2j\pi\frac{\ell}{a}(t-u)}\,du$$

$$= \frac{1}{a} e^{2j\pi\frac{\ell t}{a}} \int_0^a e^{2j\pi\frac{(k-\ell)u}{a}}\,du$$

. Pour $k=\ell$: $\frac{1}{a}\int_0^a \underbrace{e^{2j\pi\frac{(k-\ell)u}{a}}}_{1}\,du = 1 \Rightarrow e^{2j\pi\frac{kt}{a}} *_a e^{2j\pi\frac{\ell t}{a}} = e^{2j\pi\frac{kt}{a}}$

. Pour $k\neq\ell$: $\frac{1}{a}\int_0^a e^{2j\pi\frac{(k-\ell)u}{a}}\,du = \frac{1}{a}\left[\frac{e^{2j\pi\frac{(k-\ell)u}{a}}}{2j\pi\frac{(k-\ell)}{a}}\right]_0^a$

$$= \frac{1}{2j\pi(k-\ell)}\Big(\underbrace{e^{2j\pi(k-\ell)}}_{=1} - 1\Big) = 0$$

2) On a donc :

$$T *_a U = \sum_k c_k(T) \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} c_\ell(U) \underbrace{e^{2j\pi\frac{kt}{a}} *_a e^{2j\pi\frac{\ell t}{a}}}$$

$= c_k(U) e^{2j\pi\frac{kt}{a}}$ $\quad \ell = k$

$= 0$ $\quad \ell \neq k$

$$= \sum_k c_k(T)\, c_k(U)\, e^{2j\pi\frac{kt}{a}}$$

d'où :

$$c_k(T *_a U) = c_k(T)\, c_k(U)$$

3) $\Delta_a = \sum_k \frac{1}{a} e^{2j\pi\frac{kt}{a}} \Rightarrow c_k(\Delta_a) = \frac{1}{a}$, $\forall k$. $\Rightarrow c_k(\Delta_a * \Delta_a) = \frac{1}{a^2}$ $\forall k$

$$\Rightarrow \Delta_a * \Delta_a = \sum_k \frac{1}{a^2} e^{2j\pi\frac{kt}{a}} = \frac{1}{a}\Delta_a$$

4) $$T_f *_a \Delta_a = \sum_k c_k(T_f *_a \Delta_a)\, e^{2j\pi\frac{kt}{a}} = \sum_k c_k(T_f)\underbrace{c_k(\Delta_a)}_{1/a} e^{2j\pi\frac{kt}{a}}$$

$$= \frac{1}{a}\sum_k c_k(T_f)\, e^{2j\pi\frac{kt}{a}}$$

$$= \frac{1}{a} T_f$$