Examen – Théorie des graphes

Session 1, jeudi 16 janvier 2020

Durée : 1h30

1 Introduction

— Documents autorisés : 1 pages A4 recto-verso manuscrite.

— Les exercices sont à faire sur des feuilles différentes. Si vous ne faites pas un exercice, vous rendez une page blanche avec votre nom et le numéro de l'exercice.

2 Exercices

▷ **Exercice 1.** (4 points)
On considère 10 pièces de dominos $(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)$
On souhaite savoir s'il est possible de connecter ces 10 dominos.

1.1. Formaliser le problème (on prendra comme arêtes les pièces de dominos).

1.2. Répondre à la question.

▷ **Exercice 2.** (5 points)
Soir G un graphe simple ayant n sommets et $n-1$ arêtes qui n'est pas un arbre. On rappelle qu'un sommet isolé est un arbre trivial. Dans cet exercice vous aurez le droit d'utiliser les différentes caractérisations des graphes démontrées en classe comme équivallentes.

2.1. Montrez que G n'est pas un connexe.

2.2. Montrez que G possède au moins un sous graphe défini par une composante connexe qui est un arbre.

2.3. Montrez que G possède au moins un sous graphe défini par une composante connexe qui n'est pas un arbre.

2.4. Montrez que si G possède exactement deux composantes connexes, alors celle qui n'est pas un arbre possède exactement un cycle.

▷ **Exercice 3.** (5 points)
Sept élèves A, ... G se sont rendus dans une salle de cours dans la journée, à différents horaires. Le tableau suivant indique qui a rencontré qui :

l'élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E,G	B,C,E,F

On souhaite savoir de combien de places assises doit disposer au minimum la salle pour que chacun ait eu une place assise lorsqu'il était dans la salle. Formaliser ce problème à l'aide d'un graphe et répondre à la question.

▷ **Exercice 4.** (6 points)
On considère un graphe simple non orienté d'ordre n $G = (V, E)$ et sa matrice d'adjacence A.

4.1. Donner le nombre de chaînes fermées de longueur k en fonction des valeurs propres de A et de k.

4.2. Soit $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n$ le polynôme caractéristique associé à la matrice A. On rappelle que

$$c_k = (-1)^k \sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}, Card(J)=k} \det(A_J)$$

où A_J est la sous-matrice matrice carrée de A correspondant aux lignes et colonnes d'indices dans J. Montrer que

1. $-c_1 = 0$;
2. $-c_2$ est égale au nombre d'arêtes du graphe G ;
3. $-c_3$ est le double du nombre de triangles (cliques à 3 sommets) du graphe G.