



Introduction aux télécommunications

Études de chaînes de transmission en bande de base

Première Année, Département SN



Hamza MOUDDENE

April 19, 2020

Sommaire

1	Introduction	2
2	Conclusion	3
2.1	Première chaine à étudier : "chaine de référence"	3
2.1.1	Etude théorique	3
2.1.2	Implantation sous Matlab	8
2.2	Deuxième chaine à étudier : impact du choix du filtre de réception	12
2.2.1	Étude théorique	12
2.2.2	Implantation sous Matlab	17
2.3	Troisième chaine à étudier : impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée	21
2.3.1	Étude théorique	21
2.3.2	Implantation sous Matlab	23
2.4	Quatrième chaine à étudier : impact du choix du mapping	28
2.4.1	Étude théorique	28
2.4.2	Implantation sous Matlab	31
3	Bibliographie	36

Introduction

Les objectifs de ce travail sont les suivants :

1. Etre capable d'implanter une chaine de transmission en bande de base et d'explicitier le role des différents éléments la composant.
2. Etre capable d'analyser la chaine de transmission en bande de base implantée pour :
 - Identifier les éléments qu'il est possible de modifier pour l'optimiser si elle ne l'est pas.
 - Déterminer si elle est optimisée ou non en termes d'efficacité spectrale et d'efficacité en puissance.
3. Etre capable de comparer des chaines de transmission bande de base en termes d'efficacité spectrale et d'efficacité en puissance.

Conclusion

2.1 Première chaine à étudier : "chaine de référence"

On considèrera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, rectangulaires de durée T_s .

2.1.1 Etude théorique

1. Calculer la densité spectrale de puissance du signal transmis. Quelle est, en théorie, la bande nécessaire à la transmission d'un tel signal ?

$$S_{x|f} = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re}[R_a \exp(j2\pi f k T_s)] + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_k |H(\frac{k}{T_s})|^2 \delta(f - \frac{k}{T_s})$$

$$\text{avec : } \sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2] \quad m_a = E[a_k] \quad R_a = \frac{E[a_m^* a_{m-k}] - |m_a|^2}{\sigma_a^2} \quad (2.1)$$

Sachant que les symboles a_k sont des variables aléatoires discrètes équiprobables, alors:

$$\begin{aligned} m_a &= E[a_k] = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ \sigma_a^2 &= E[|a_k - m_a|^2] = E[|a_k - 0|^2] = E[|a_k|^2] = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ R_a &= \frac{E[a_m^* a_{m-k}] - |m_a|^2}{\sigma_a^2} = \frac{E[a_m^* a_{m-k}] - 0}{1} = E[a_m^* a_{m-k}] = 0 \text{ si } k \neq 0 \\ S_{x|f} &= \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 = S_{x|f} = \frac{1}{T_s} |T_s \text{sinc}(\pi f T_s)|^2 = T_s \text{sinc}(\pi f T_s)^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

En théorie, la bande nécessaire à la transmission d'un tel signal est infinie mais $B \propto \frac{1}{T_s}$.

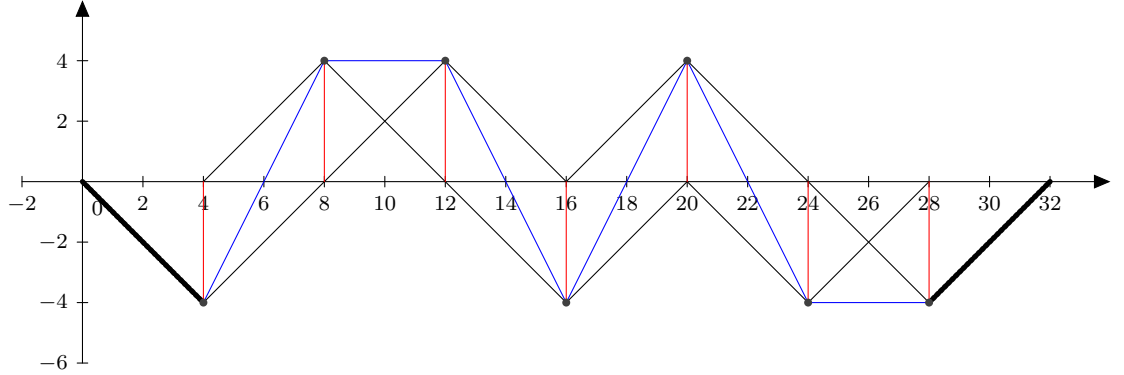
2. La chaine de communication peut-elle vérifier le critère de Nyquist ?
Justifiez votre réponse.

Soit :

$$g(t) = h(t) * h_r(t), \exists t_0 \text{ tel que : } \begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0 \forall p \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \quad (2.3)$$

En utilisant le graphe de $g(t)$, on conclut que **”le critère de Nyquist”** est respecté pour : $t_0 = T_s$, car $g(t) = h(t) * h_r(t)$.

3. Sans bruit, tracer le signal $z(t)$ en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la suite de bits émise suivante: 0110100. Retrouve-t-on sur ce signal le fait que la chaine de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ?



On prend $T_s = 4$ sur la figure, on sait que le signal en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ s'écrit sous la forme :

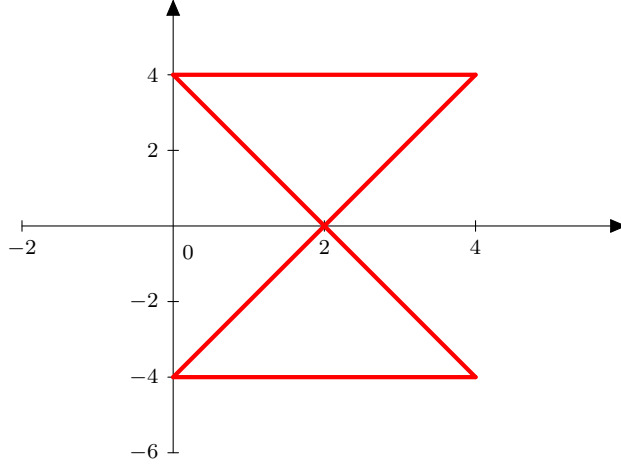
$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_k a_k \delta(t - kT_s) * h(t) * h_r(t) \\ &= \sum_k a_k g(t - kT_s) \text{ avec } g(t) = h(t) * h_r(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pour la suite de bits émise suivante 0110100, on échantillonne le signal en sortie tel que $t = mT_s + t_0$, alors le signal $z(t)$ devient:

$$\begin{aligned} z(mT_s + t_0) &= \sum_k a_k g((m - k)T_s + t_0) = a_m g(t_0) + \sum_{k \neq m} a_k g((m - k)T_s + t_0) \\ IES = 0 &\iff \sum_{k \neq m} a_k g((m - k)T_s + t_0) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Donc on retrouve que la chaine respecte **”le critère de Nyquist”**.

4. Toujours sans bruit, tracer le diagramme de l'œil avec une base de temps de T_s . Retrouve-t-on sur le diagramme de l'œil le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ?



Sur le diagramme de l'œil : On prend le $t_0 = T_s = 4s$ tel qu' à cet instant il n'y ai que deux valeurs possibles. On trouve donc sur le diagramme de l'œil le fait que la chaîne de transmission respecte **le critère de Nyquist**.

5. En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux (sans ISI), calculer le rapport signal sur bruit aux instants d'échantillonnage (on admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception).

En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux (sans ISI), alors : Le rapport signal sur bruit aux instants d'échantillonnage est donné par la relation $SNR = \frac{P_s}{P_b}$ où P_s est la puissance du signal et P_b est la puissance du bruit.

$$P_s = \int_{\mathbb{R}} S_x(f) df = E[|x(t)|^2] = E[|a_m T_s|^2] = E[|a_m|^2] E[|T_s|^2] = T_s^2 \quad (2.6)$$

On admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception.

Selon la relation de Wiener-Lee, on a :

$$P_b = \int_{\mathbb{R}} S_w(f) df = \int_{\mathbb{R}} S_n(f) |H_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2 df \quad (2.7)$$

On applique "**l'égalité de Parseval**" pour passer du fréquentielle au

temporelle, donc on obtient :

$$\begin{aligned} P_b &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} dt = \frac{N_0 T_s}{2} \\ SNR &= \frac{P_s}{P_b} = \frac{T_s^2}{\frac{N_0 T_s}{2}} = \frac{2T_s}{N_0} \end{aligned} \quad (2.8)$$

6. On choisira d'utiliser un détecteur à seuil. Déterminer le seuil optimal à utiliser en expliquant votre choix.

À $t_0 + mT_s$, le symbole décidé est

$$\hat{a}_m = \underset{\tilde{a}_m}{\operatorname{argmax}} P(\tilde{a}_m / z_m)$$

On rappelle que $a_k \in \{-1, 1\}$ et que $z_m = \tilde{a}_m g(t_0) + w_n$ **”Critère de Nyquist respecté”** or $w_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, nous savons que toute transformation affine d'un vecteur gaussien reste gaussienne, alors $z_m \sim \mathcal{N}(\tilde{a}_m g(t_0), \sigma^2)$. Règle de décision MAP :

$$\begin{cases} z_m \geq 0; \tilde{a}_m = +1 \\ z_m < 0; \tilde{a}_m = -1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Alors on choisira d'utiliser un détecteur à seuil à 0.

7. En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise le seuil optimal de décision, donner le taux d'erreur binaire de la transmission en fonction de T_s et σ , σ^2 représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$.

Le taux d'erreur binaire de la transmission est donné par la relation :

$$\begin{aligned} TEB &= \frac{TES}{\log_2(2)} \Rightarrow TEB = TES = \sum_{a_k} P(\tilde{a}_k \neq a_k) \\ &= P(a_k = -1)P(\tilde{a}_k = 1/a_k = -1) + P(a_k = 1)P(\tilde{a}_k = -1/a_k = 1) \\ &= \frac{1}{2}P(-g(t_0) + w_n \geq 0) + \frac{1}{2}P(g(t_0) + w_n < 0) \\ &= \frac{1}{2}P\left(\frac{w_n}{\sigma} \geq \frac{g(t_0)}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}P\left(\frac{w_n}{\sigma} < \frac{-g(t_0)}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{w_n}{\sigma} \geq \frac{g(t_0)}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma}\right) \\ &= Q\left(\frac{T_s}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

8. Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception σ^2 en fonction de N_0 et de T_s .

On admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception.

Selon la relation de Wiener-Lee, on a :

$$P_b = \int_{\mathbb{R}} S_w(f) df = \int_{\mathbb{R}} S_n(f) |H_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2 df \quad (2.11)$$

On applique **”l’égalité de Parseval”** pour passer du fréquentielle au temporelle, donc on obtient :

$$P_b = \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} dt = \frac{N_0 T_s}{2} \quad (2.12)$$

9. Calculer l’énergie des symboles à l’entrée du récepteur, E_s , en fonction de T_s .

Une forme d’onde associée à chaque a_k en entrée du récepteur tel que $a_k h(t - kT_s)$.

$$\begin{aligned} E_s &= \int_{\mathbb{R}} |a_k h(t - kT_s)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} h(t - kT_s)^2 dt = T_s \\ &= PT_s \iff E_b = T_b \log_2(M) \text{ donc en binaire } E_s = E_b \end{aligned} \quad (2.13)$$

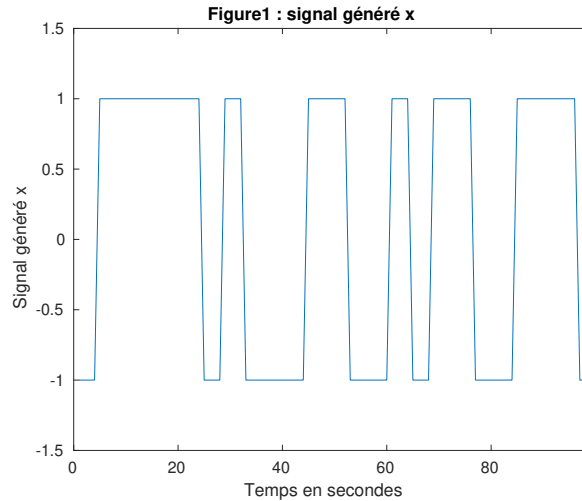
10. Dédurre des questions précédentes l’expression du taux d’erreur binaire (TEB) en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ pour la chaîne étudiée.

D’après la question 7, nous avons trouvé : $TEB = Q(\frac{T_s}{\sigma})$ avec $\sigma^2 = \frac{N_0 T_s}{2}$ et comme nous sommes en binaire alors $E_s = E_b$, on conclut que :

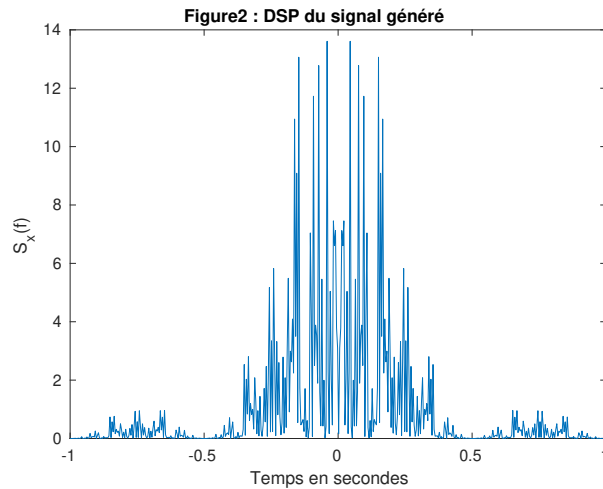
$$TEB = Q(\frac{T_s}{\sigma}) = Q(\frac{T_s}{\sqrt{\frac{N_0 T_s}{2}}}) = Q(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}) = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}) \quad (2.14)$$

2.1.2 Implantation sous Matlab

1. La génération de l'information binaire à transmettre (bits 0 et 1 équiprobables et indépendants), avec un mapping binaire à moyenne nulle : $0 \Rightarrow -1$, $1 \Rightarrow 1$ afin de passer de l'information binaire aux symboles a_k , avec un filtre de mise en forme rectangulaires de durée T_s

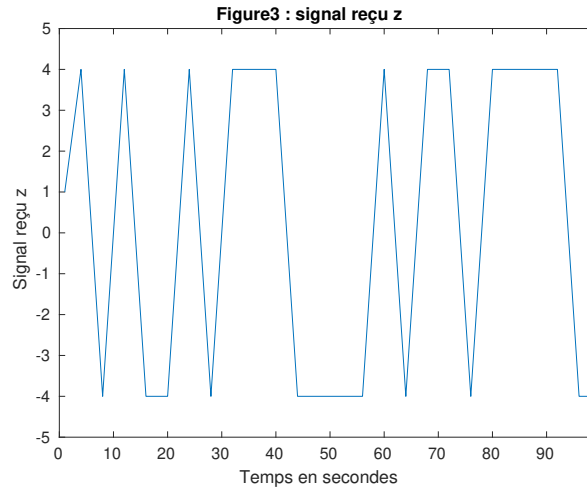


La densité spectrale de puissance est un sinc^2 comme le montre l'étude théorique en bande de base autour de la fréquence 0.

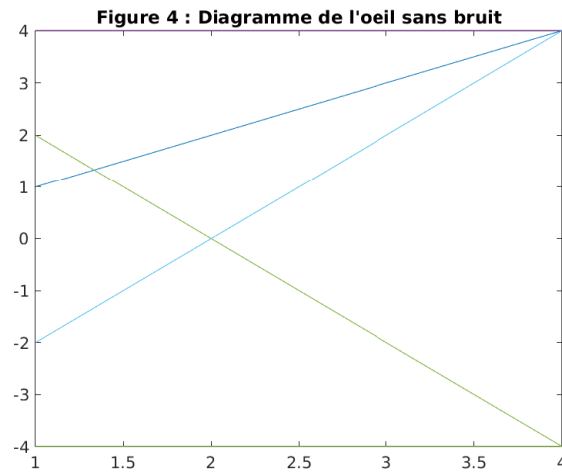


2. Implantation de la chaine sans bruit :
 - (a) Le signal en sortie du filtre de réception est conforme avec ce que nous avons trouvé dans l'étude théorique, le résultat du produit de

convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ est donné par une fenêtre triangulaire de longueur T_s .



- (b) Le diagramme de l'œil en sortie du filtre de réception montre que $t_0 = T_s$ est l'instant optimal d'échantillonnage, conformément à l'étude théorique.

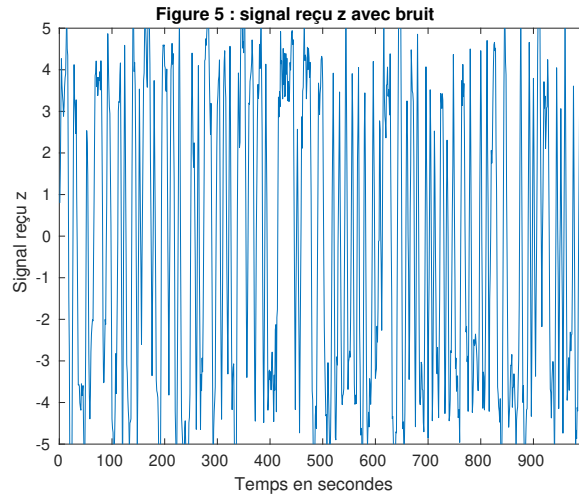


- (c) En prenant, $t_0 = T_s$ comme instant optimal d'échantillonnage et avec un détecteur à seuil en 0, puisqu'on a utilisé un mapping equiprobable alors on va décider soit 1 ou -1 , et donc le $TEB = 0$

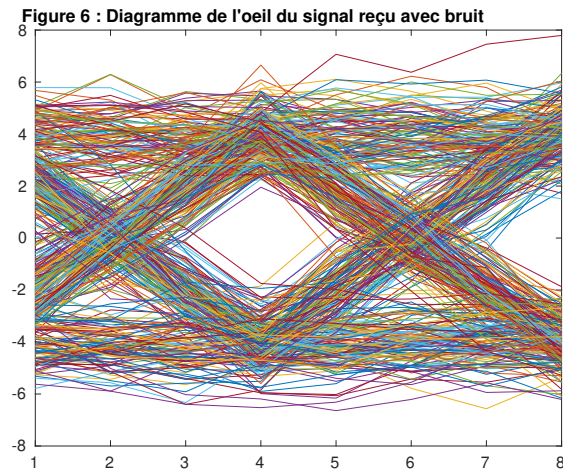
3. Implantation de la chaîne avec bruit :

On vient de rajouter un bruit blanc gaussien tel que sa densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences de la bande passante, il suit une loi normal.

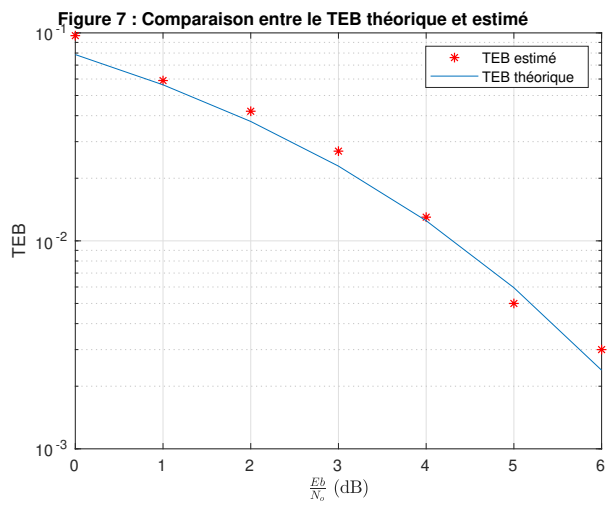
Le signal filtré et échantillonné à $t_0 + mT_s$.



L'instant d'échantillonnage optimal est $t_0 = T_s$ retrouvé grace au tracé d'un diagramme de l'œil avec bruit en sortie du filtre de réception.



4. Le taux d'erreur binaire obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur $(\frac{E_b}{N_0})$ en décibels. On prendra des valeurs de $(\frac{E_b}{N_0})dB$ allant de 0 à 6dB.



2.2 Deuxième chaine à étudier : impact du choix du filtre de réception

On considèrera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, rectangulaires de durée T_s .

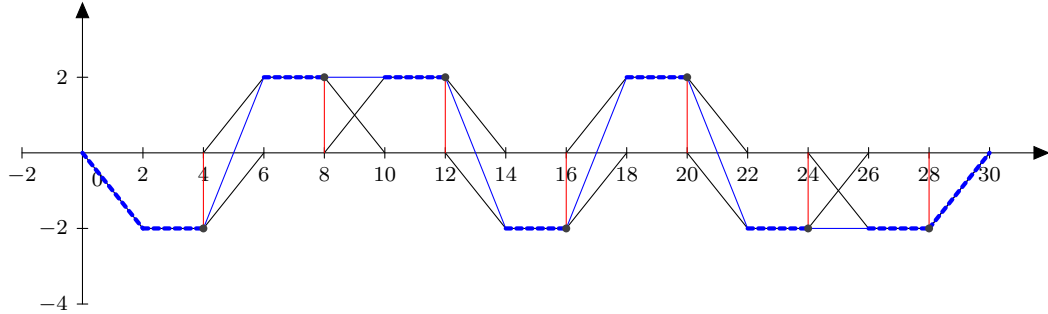
2.2.1 Étude théorique

1. La chaine de communication peut-elle vérifier le critère de Nyquist ? Justifiez votre réponse.

Si nous regardons le produit de convolution entre les réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, nous verrons que **”le critère de Nyquist”** est respecté pour $\forall t_0 \in [\frac{T_s}{2}, T_s]$ où il satisfait la chose suivante :

$$\begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \quad (2.15)$$

2. Sans bruit, tracer le signal $z(t)$ en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la suite de bits émise suivante: 0110100. Retrouve-t-on sur ce signal le fait que la chaine de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ? Expliquez votre réponse.



Sur la figure j’ai pris $T_s = 4s$, on sait que le signal en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ s’écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_k a_k \delta(t - kT_s) * h(t) * h_r(t) \\ &= \sum_k a_k g(t - kT_s) \\ \text{avec } g(t) &= h(t) * h_r(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pour la suite de bits émise suivante 0110100 on trouve :

Nous avons trouvé précédemment que $z(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s)$, on échantillonne

le signal en sortie tel que $t = mT_s + t_0$ alors :

$$z(mT_s + t_0) = \sum_k a_k g((m-k)T_s + t_0) = a_m g(t_0) + \sum_{k \neq m} a_k g((m-k)T_s + t_0)$$

$$IES = 0 \iff \sum_{k \neq m} a_k g((m-k)T_s + t_0) = 0$$
(2.17)

Donc on retrouve que la chaîne respecte **”le critère de Nyquist”**.

3. Toujours sans bruit, tracer le diagramme de l’œil avec une base de temps de T_s . Retrouve-t-on sur le diagramme de l’œil le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ? Justifiez votre réponse.

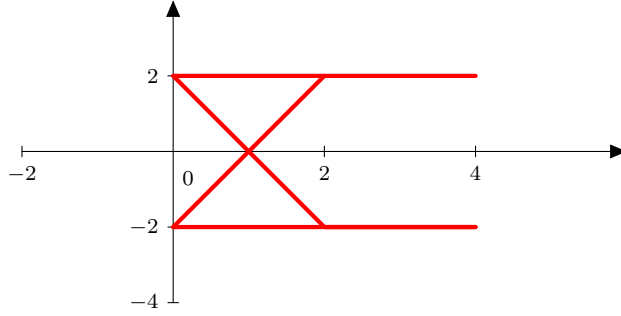


Diagramme de l’œil : On prend le t_0 tel que à cet instant il n’y a que deux valeurs possibles.

4. En supposant que l’on échantillonne aux instants optimaux (sans ISI), calculer le rapport signal sur bruit aux instants d’échantillonnage (on admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception). Comparer le rapport signal sur bruit obtenu ici avec celui obtenu dans la chaîne de référence. Que peut-on supposer sur la comparaison des *TEBs* des deux chaînes de transmission ?

En supposant que l’on échantillonne aux instants optimaux (sans ISI), alors : Le rapport signal sur bruit aux instants d’échantillonnage est donné par la relation $SNR = \frac{P_s}{P_b}$ où P_s est la puissance du signal et P_b est la puissance du bruit.

$$P_s = \int_{\mathbb{R}} S_x(f) df = E[|x(t)|^2] = E[|a_m \frac{T_s}{2}|^2]$$

$$= E[|a_m|^2] E[|\frac{T_s}{2}|^2] = \frac{T_s^2}{4}$$
(2.18)

On admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de

réception.

Selon la relation de Wiener-Lee, on a :

$$\begin{aligned} P_b &= \int_{\mathbb{R}} S_w(f) df = \int_{\mathbb{R}} S_n(f) |H_r(f)|^2 df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2 df \end{aligned} \quad (2.19)$$

On applique **l'égalité de Parseval** pour passer du fréquentielle au temporelle, donc on obtient :

$$\begin{aligned} P_b &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \int_0^{\frac{T_s}{2}} dt \\ &= \frac{N_0 T_s}{4} \\ SNR &= \frac{P_s}{P_b} = \frac{\frac{T_s^2}{4}}{\frac{N_0 T_s}{4}} = \frac{T_s}{N_0} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Le rapport signal sur bruit obtenu ici est 2 fois plus petit que celui obtenu dans la chaîne de référence, on suppose que le TEB associé à cette chaîne de transmission sera plus grand que celui obtenu dans la chaîne de référence.

5. On choisira d'utiliser un détecteur à seuil. Déterminer le seuil optimal à utiliser en expliquant votre choix.

À $t_0 + mT_s$, le symbole décidé est :

$$\hat{a}_m = \underset{a_m}{\operatorname{argmax}} P(\tilde{a}_m / z_m) \quad (2.21)$$

On rappelle que $a_k \in \{-1, 1\}$ et que $z_m = \tilde{a}_m g(t_0) + w_n$ **”Critère de Nyquist respecté”** or $w_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, nous savons que toute transformation affine d'un vecteur gaussien reste gaussienne, alors $z_m \sim \mathcal{N}(a_m g(t_0), \sigma^2)$.

Règle de décision MAP :

$$\begin{cases} z_m \geq 0; \tilde{a}_m = +1 \\ z_m < 0; \tilde{a}_m = -1 \end{cases} \quad (2.22)$$

Alors on choisira d'utiliser un détecteur à seuil à 0.

6. En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise le seuil optimal de décision, donner le taux d'erreur binaire de la transmission en fonction de T_s et σ , σ^2 représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$.

Le taux d'erreur binaire de la transmission est donné par la relation :

$$\begin{aligned}
TEB &= \frac{TES}{\log_2(2)} \Rightarrow TEB = TES = \sum_{a_k} P(\tilde{a}_k \neq a_k) \\
&= P(a_k = -1)P(\tilde{a}_k = 1/a_k = -1) + P(a_k = 1)P(\tilde{a}_k = -1/a_k = 1) \\
&= \frac{1}{2}P(-g(t_0) + w_n \geq 0) + \frac{1}{2}P(g(t_0) + w_n < 0) \\
&= \frac{1}{2}P\left(\frac{w_n}{\sigma} \geq \frac{g(t_0)}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}P\left(\frac{w_n}{\sigma} < \frac{-g(t_0)}{\sigma}\right) \\
&= P\left(\frac{w_n}{\sigma} \geq \frac{g(t_0)}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma}\right) \\
&= Q\left(\frac{T_s}{2\sigma}\right)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

7. Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception σ^2 en fonction de N_0 et de T_s .

On admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception.

Selon la relation de Wiener-Lee, on a :

$$\begin{aligned}
P_b &= \int_{\mathbb{R}} S_w(f)df = \int_{\mathbb{R}} S_n(f)|H_r(f)|^2df \\
&= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2df
\end{aligned} \tag{2.24}$$

On applique "l'égalité de Parseval" pour passer du fréquentielle au temporelle, donc on obtient :

$$\begin{aligned}
P_b &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(t)|^2dt = \frac{N_0}{2} \int_0^{\frac{T_s}{2}} dt \\
&= \frac{N_0 T_s}{4}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

8. Calculer l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur, E_s , en fonction de T_s .

Une forme d'onde associée à chaque a_k en entrée du récepteur tel que $a_k h(t - kT_s)$.

$$\begin{aligned}
E_s &= \int_{\mathbb{R}} |a_k h(t - kT_s)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} h(t - kT_s)^2 dt = T_s = PT_s \\
&= T_b \log_2(M)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Donc en binaire $E_s = E_b$.

9. Déduire des questions précédentes l'expression du taux d'erreur binaire en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ pour la chaine étudiée.

D'après la question 7, nous avons trouvé :

$$\begin{aligned} TEB &= Q\left(\frac{T_s}{2\sigma}\right) \\ \text{avec } \sigma^2 &= \frac{N_0 T_s}{4} \end{aligned} \tag{2.27}$$

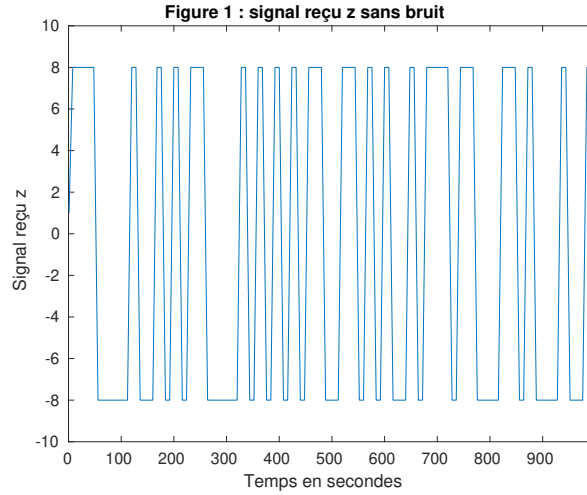
et comme nous sommes en binaire alors $E_s = E_b$, on conclut que :

$$TEB = Q\left(\frac{T_s}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{T_s}{2\sqrt{\frac{N_0 T_s}{4}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \tag{2.28}$$

2.2.2 Implantation sous Matlab

1. Implantation de la chaine sans bruit :

- (a)



Sur la figure j'ai pris $T_s = 16$ et sachant que le signal en sortie du filtre de réception s'écrirait sous la forme $z(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s)$, on échantillonne le signal en sortie tel que $t = mT_s + t_0$ alors :

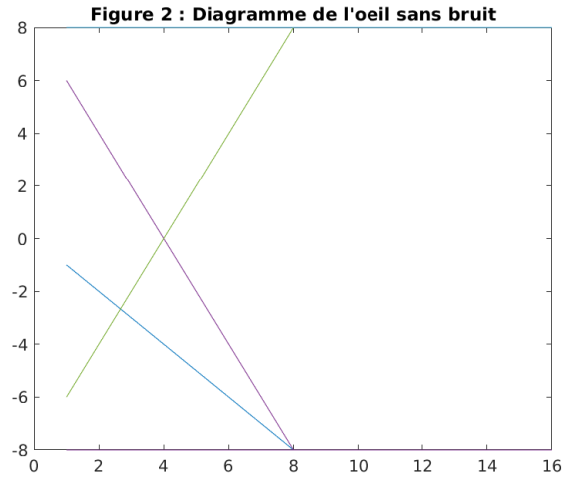
$$z(mT_s + t_0) = \sum_k a_k g((m - k)T_s + t_0) = a_m g(t_0) + \sum_{k \neq m} a_k g((m - k)T_s + t_0)$$

$$IES = 0 \iff \sum_{k \neq m} a_k g((m - k)T_s + t_0) = 0 \quad \text{''le critère de Nyquist''}$$

$$z(mT_s + t_0) = a_m g(t_0) = a_m \frac{T_s}{2} = \pm \frac{16}{2} = \pm 8 \quad (2.29)$$

Ce qui est conforme avec l'étude théorique, à un détail près, dans l'étude théorique j'ai pris $T_s = 4$ alors qu'ici $T_s = 16$, mais en principe c'est la même chose.

- (b) Le diagramme de l'œil en sortie du filtre de réception:



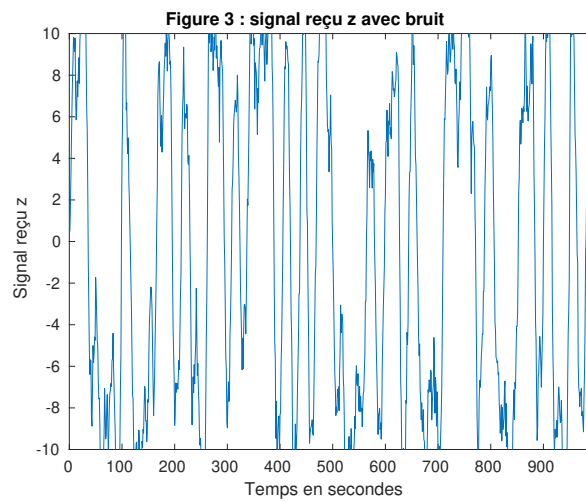
On prend le t_0 tel que à cet instant il n'y a que deux valeurs possibles, donc $\forall t_0 \in [\frac{T_s}{2}, T_s]$

- (c) En prenant, $t_0 = T_s$ comme instant optimal d'échantillonnage et avec un détecteur à seuil en 0, puisqu'on a utilisé un mapping equiprobable alors on va décider soit 1 ou -1 , et donc le $TEB = 0$.

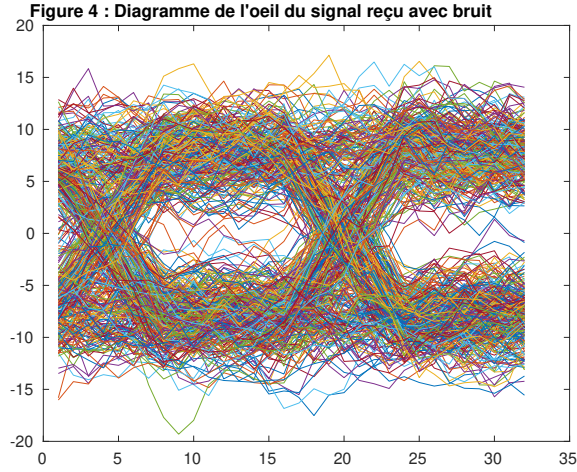
2. Implantation de la chaîne avec bruit :

On vient de rajouter un bruit blanc gaussien tel que sa densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences de la bande passante, il suit une loi normal.

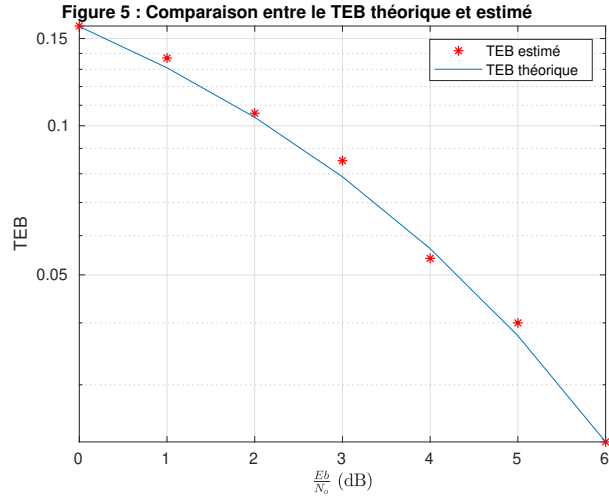
Le signal filtré et échantillonné à $t_0 + mT_s$.



L'instant d'échantillonnage optimal est $\forall t_0 \in [\frac{T_s}{2}, T_s]$ retrouvé grace au diagramme de l'œil avec bruit en sortie du filtre de réception.



3. On remarque que le TEB estimé est pratiquement identique au TEB théorique donné par la formule $TEB = Q(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}})$.



4. le TEB obtenu par simulation pour la chaîne de transmission étudiée au TEB est donné par $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$ alors simulation de la chaîne de référence est donné par $TEB = Q(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}})$. Donc le premier est 2 fois plus grand que le deuxième, donc le deuxième est plus efficace car le rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur est plus petit donc une efficacité en puissance plus élevée, ce qui est le contraire en terme d'efficacité spectrale.

5.

Figure 8 : DSP du signal généré pour la chaine de référence

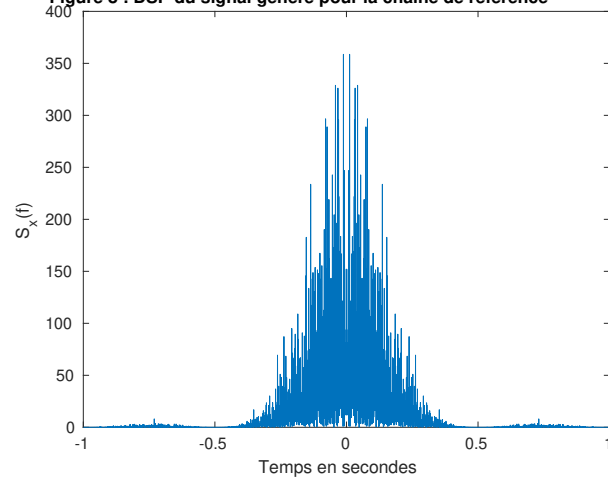
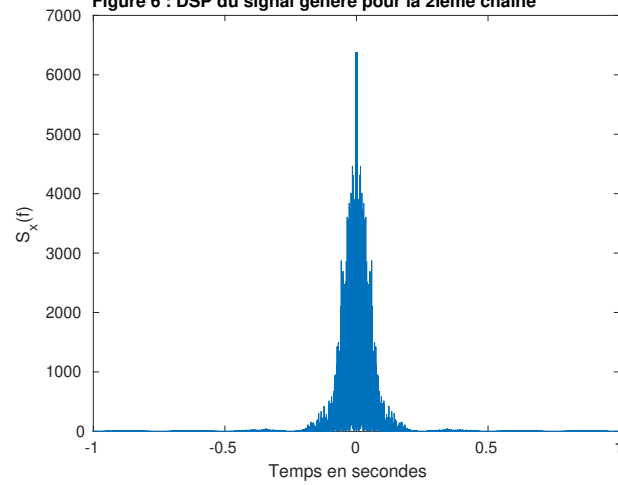


Figure 6 : DSP du signal généré pour la 2ième chaine



On remarque que la chaine de référence est moins efficace que la deuxième chaine en terme d'efficacité spectrale.

2.3 Troisième chaine à étudier : impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée

On considèrera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, en racine de cosinus surélevé de meme roll off $\alpha = 0.5$.

2.3.1 Étude théorique

1. Quel est le facteur de suréchantillonnage minimal à utiliser ici ? Justifiez votre réponse.

Le produit de convolution des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$ donne un cosinus surélevé de roll off $\alpha = 0.5$ où $0 \leq \alpha \leq 1$ et $R_s = \frac{1}{T}$.
Si on veut un nombre entier d'échantillons, qui respecte le critère d'échantillonnage de Shannon, donc :

$$F_e \geq (1 + \alpha)R_s = 1,5.R_s \implies F_e = 2R_s \quad (2.30)$$

2. La chaine de communication peut-elle vérifier le critère de Nyquist ? Justifiez votre réponse.

Dans le domaine temporel "**le critère de Nyquist**" est traduit par la formule suivante :

$$\begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \quad (2.31)$$

Mais dans ce cas, on va vérifier "**le critère de Nyquist**" dans le domaine fréquentiel, et ceci se traduit par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \sum_k G^{t_0}(f - \frac{k}{T_s}) &= cte \\ G_0^t(f) &= TF(\frac{g(t + t_0)}{g(t_0)}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Alors $|G(f)| = 0 \quad \forall |f| > R_s$, donc $G(f) + G(f - R_s) = cte$, on peut conclure alors que : $\sum_k G^{t_0}(f - \frac{k}{T_s}) = cte$ avec $f = \frac{R_s}{2}$ comme point de symétrie.
Donc on retrouve que la chaine respecte "**le critère de Nyquist**".

- 3.** La chaîne de communication vérifie-t-elle le critère de filtrage adapté ? Justifiez votre réponse.

Les réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, sont en racine de cosinus surélevé de même roll off $\alpha = 0.5$, alors on note $g(t)$ la réponse impulsionnelle globale définie par le produit de convolution entre le filtre de mise en forme et le filtre de réception, alors $g(t) = h(t) * h_r(t)$, avec une transformée de Fourier, on trouve $G(f) = H(f).H_r(f)$, comme les deux filtres sont identiques alors on pourra écrire la chose suivante : $H_r(f) = H^*(f)$, donc $G(f) = |H(f)|^2 \implies |H(f)| = \sqrt{G(f)}$.

- 4.** Donner (sans le calculer) le taux d'erreur binaire théorique de la transmission, en justifiant votre choix de formule.

On sait que si le filtre de réception est un filtre adapté, le TEB est minimal est égal à $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$. Si le filtre n'est pas adapté alors $TEB > Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$. En plus de ça, nous avons un filtre qui satisfait **le critère de Nyquist** (pas de ISI) donc $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}) = Q(\frac{g(t_0)}{\sigma})$.

- 5.** A quelle condition pourrait-on transmettre le signal généré par le modulateur proposé dans un canal de transmission idéal à bande limitée de bande BW = 1500 Hz ?

Il faut trouver le débit symbole maximum qui permet de satisfaire **"le critère de Nyquist"** :

si $(1 + \alpha) \frac{R_s}{2} \leq BW$ alors ceci implique $R_s \leq \frac{2BW}{1+\alpha} = \frac{3000}{1.5} = 2000 \text{ bits/s}$

2.3.2 Implantation sous Matlab

1. Implantation de la chaine sans bruit :

- **(a) Théorème de Shannon :**

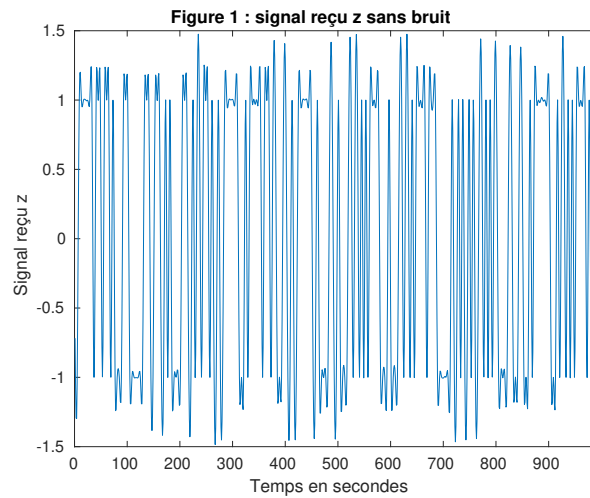
Pour que le signal puisse être entièrement reconstruit à partir des échantillons, il faut et il suffit que : $f_e > 2F_{max}$.

Selon 1)- de l'étude théorique, on avait trouvé qu'un facteur d'échantillonnage qui respecte la condition d'échantillonnage de Shannon satisfait la relation suivante:

$$\begin{aligned} F_e &\geq (1 + \alpha)R_s = 1,5.R_s \implies F_e = 2R_s \\ F_e &= 12000Hz \geq 1,5 * 3000 = 4500hz \end{aligned} \quad (2.33)$$

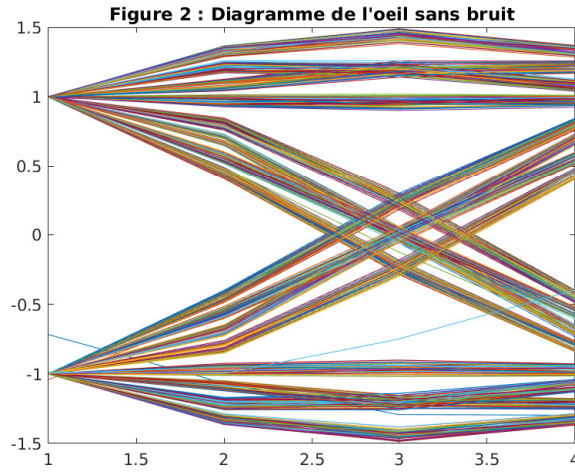
Alors, on en déduit que Le facteur de suréchantillonnage utilisé ici permet de respecter **"la condition d'échantillonnage de Shannon"**.

- **(b)** On a utilisé un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, en racine de cosinus surélevé de meme roll off $\alpha = 0.5$, le produit de convolution de $h(t)$ et $h_r(t)$ donne un cosinus surélevé de roll off $\alpha = 0.5$.



On distingue que le signal est conforme avec la partie théorique.

- **(c)** Le diagramme de l'œil en sortie du filtre de réception:



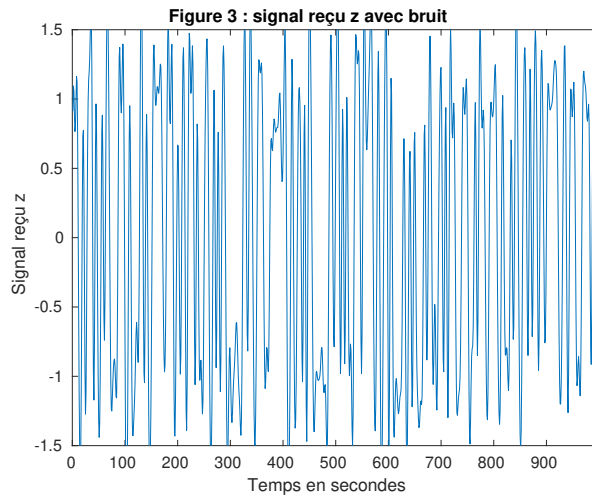
On prend le t_0 tel que à cet instant il n'y a que deux valeurs possibles.

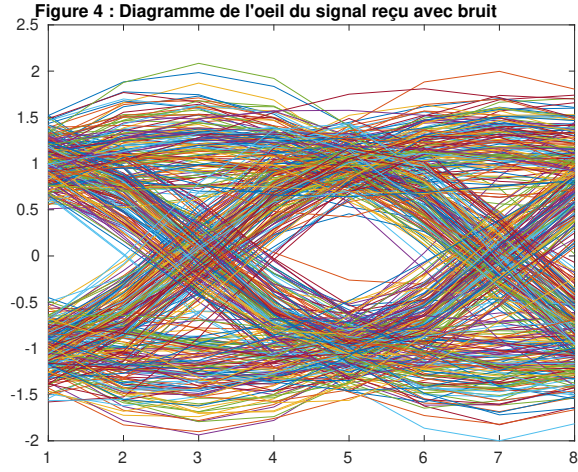
- (d) En utilisant les instants optimaux d'échantillonnage puis un détecteur à seuil, avec seuil optimal, le TEB obtenu est bien nul car on est dans le cas d'une chaîne de transmission idéale.

2. Implantation de la chaîne avec bruit :

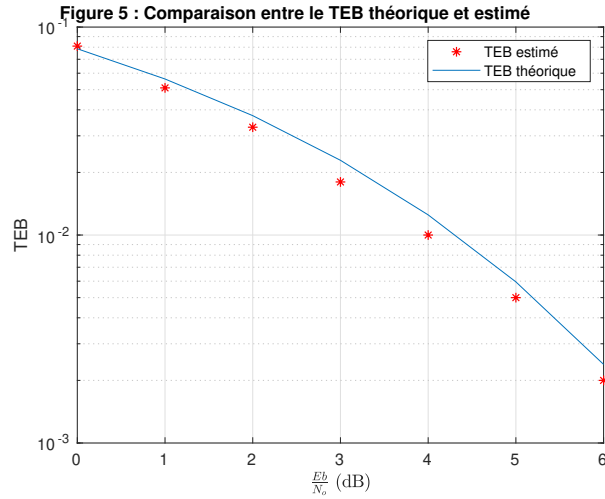
On vient de rajouter un bruit blanc gaussien tel que sa densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences de la bande passante, il suit une loi normal.

Le signal filtré et échantillonné à $t_0 + mT_s$.



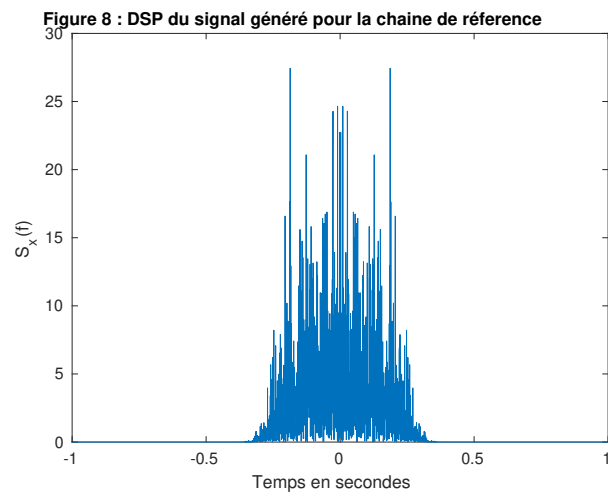
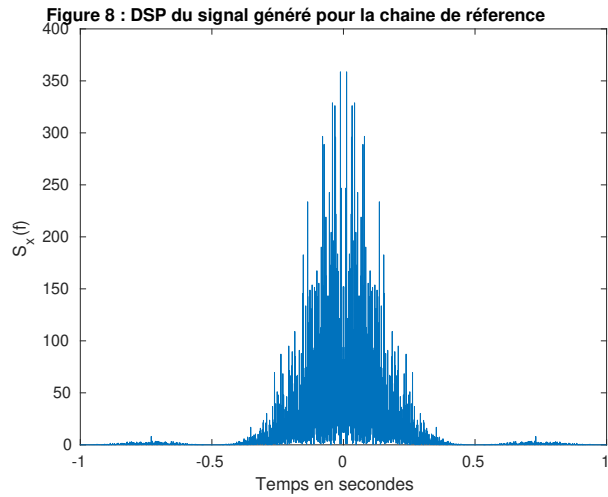


3. On remarque que le TEB estimé est pratiquement identique au TEB théorique donné par la formule $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$.



4. le TEB obtenu par simulation de la chaîne de transmission étudiée est donné par $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}) = Q(\frac{g(t_0)}{\sigma})$ alors simulation de la chaîne de référence est donné par $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$. Donc on remarque que les deux TEB sont identique en terme de puissance.

5.

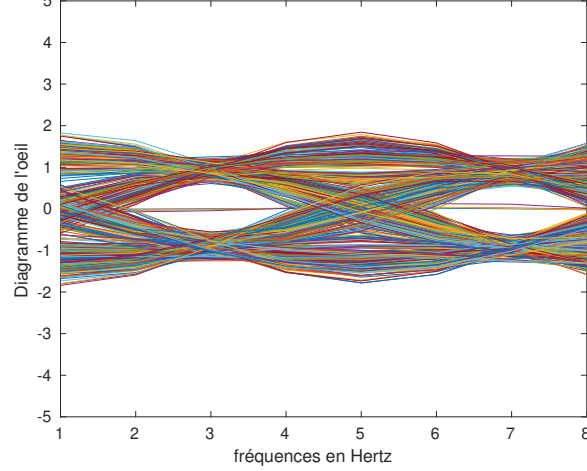


On remarque que la chaine de référence est plus efficace que la chaine étudiée en terme d'efficacité spectrale.

7. On reprend la chaine de transmission sans bruit, et on introduit un passage dans un canal de transmission.

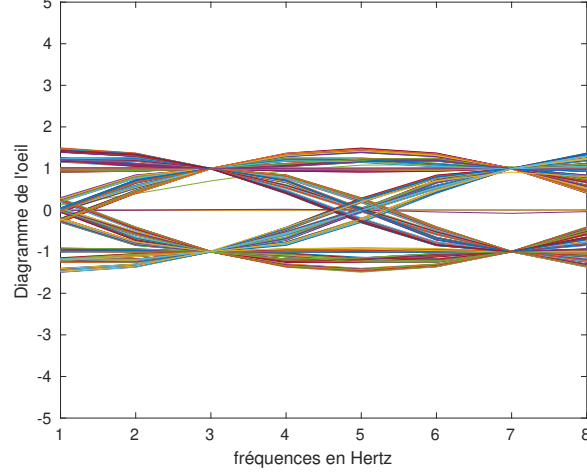
- **(a)** De bande $BW = 1500Hz$ implanté comme un filtre passe bas de fréquence de coupure $1500Hz$.

en sortie du filtre de réception avec passage dans un canal de transmission (BW =



- (b) De bande $BW = 3000Hz$ implanté comme un filtre passe bas de fréquence de coupure $3000Hz$.

en sortie du filtre de réception avec passage dans un canal de transmission (BW =



Dans l'étude théorique, sur la dernière question, on a trouvé que le débit symbole maximum qui permet de satisfaire **"le critère de Nyquist"** : si $(1 + \alpha) \frac{R_s}{2} \leq BW$, alors pour le cas de $BW = 1500Hz, 3000Hz$ avec un $R_s = 3000$ symboles par secondes, on plutôt ça:

$$(1 + \alpha) \frac{R_s}{2} \geq BW \quad (2.34)$$

Dans ce cas de configuration **"le critère de Nyquist"** n'est plus respecté, donc $ISI \neq 0$.

2.4 Quatrième chaine à étudier : impact du choix du mapping

On considèrera un mapping 4-aire à moyenne nulle (symboles $ak \in -3, -1, 1, 3$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, rectangulaire de durée T_s .

2.4.1 Étude théorique

1. Proposer un instant optimal t_0 pour démarrer l'échantillonnage en expliquant votre choix. On échantillonnera alors aux instants optimaux $t_0 + mT_s, m = 0, 1, 2, \dots$

Comme les deux filtres sont rectangulaires de durée T_s , on se situe dans le même cas que pour la chaîne de référence en ce qui concerne la détermination des instants optimaux, donc :

$$g(t) = h(t) * h_r(t), \exists t_0 \text{ tel que : } \begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0 \forall p \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \quad (2.35)$$

On conclut que "le critère de Nyquist" est respecté pour : $t_0 = T_s$.

2. En supposant que l'on utilise un détecteur à seuil pour prendre les décisions, quels sont les seuils optimaux à utiliser ? Justifiez votre réponse.

À $t_0 + mT_s$, le symbole décidé est

$$\hat{a}_m = \underset{\tilde{a}_m}{\operatorname{argmax}} P(\tilde{a}_m / z_m)$$

On rappelle que $a_k \in \{+3, -3, -1, 1\}$ et que $z_m = \tilde{a}_m g(t_0) + w_n$ "Critère de Nyquist respecté" or $w_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, nous savons que toute transformation affine d'un vecteur gaussien reste gaussienne, alors $z_m \sim \mathcal{N}(\tilde{a}_m g(t_0), \sigma^2)$.

Règle de décision MAP :

$$\begin{cases} z_m \leq -2g(t_0); \tilde{a}_m = -3 \\ -2g(t_0) < z_m \leq 0; \tilde{a}_m = -1 \\ 0 < z_m \leq 2g(t_0); \tilde{a}_m = +1 \\ z_m \geq 2g(t_0); \tilde{a}_m = +3 \end{cases} \quad (2.36)$$

On en déduit que les seuils optimaux sont : $-2Vg(t_0), 0, 2Vg(t_0)$, avec ici $V = 1$ et $g(t_0) = T_s$.

3. On suppose que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise un détecteur à seuil avec seuils optimaux. En utilisant le mapping suivant :

00 : -3, 01 : -1, 11 : +1, 10 : +3.

- **(a)** Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole -1 alors que l'on a émis -3.

$$\begin{aligned}
P(\tilde{a}_m = -1/a_m = -3) &= P(-2T_s < z_m \leq 0/z_m = -3T_s + \omega_m) \\
&= P(-2T_s < -3T_s + \omega_m \leq 0) = P(T_s < \omega_m \leq 3T_s) \\
&= P\left(\frac{T_s}{\sigma} < \frac{\omega_m}{\sigma} < \frac{3T_s}{\sigma}\right) \\
&= -P\left(\frac{\omega_m}{\sigma} > \frac{3T_s}{\sigma}\right) + P\left(\frac{\omega_m}{\sigma} > \frac{T_s}{\sigma}\right) \\
&= -Q\left(\frac{3T_s}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{T_s}{\sigma}\right)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

- **(b)** Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole +1 alors que l'on a émis -3.

$$\begin{aligned}
P(\tilde{a}_m = +1/a_m = -3) &= P(0 < z_m \leq 2T_s/z_m = -3T_s + \omega_m) \\
&= P(0 < -3T_s + \omega_m \leq 2T_s) = P(3T_s < \omega_m \leq 5T_s) \\
&= P\left(\frac{3T_s}{\sigma} < \frac{\omega_m}{\sigma} < \frac{5T_s}{\sigma}\right) \\
&= -P\left(\frac{\omega_m}{\sigma} > \frac{5T_s}{\sigma}\right) + P\left(\frac{\omega_m}{\sigma} > \frac{3T_s}{\sigma}\right) \\
&= -Q\left(\frac{5T_s}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{3T_s}{\sigma}\right)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

- **(c)** Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole +1 alors que l'on a émis -3.

$$\begin{aligned}
P(\tilde{a}_m = +3/a_m = -3) &= P(z_m \geq 2T_s/z_m = -3T_s + \omega_m) \\
&= P(-3T_s + \omega_m \geq 2T_s) = P(\omega_m \geq 5T_s) \\
&= P\left(\frac{\omega_m}{\sigma} \geq \frac{5T_s}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{5T_s}{\sigma}\right)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

- **(d)** AN : $N_0 = 10^{-3}V^2/Hz$, $R_b = 1kbps$.
Selon la relation de Wiener-Lee, on a :

$$P_b = \int_{\mathbb{R}} S_w(f)df = \int_{\mathbb{R}} S_n(f)|H_r(f)|^2df = \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2df \tag{2.40}$$

On applique "l'égalité de Parseval" pour passer du fréquentielle au temporelle, donc on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= P_b = \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} dt = \frac{N_0 T_s}{2} \\ \sigma &= \sqrt{\frac{N_0 T_s}{2}}\end{aligned}\quad (2.41)$$

En plus, on sait que $R_s = 2R_b$, $T_s = \frac{1}{2R_b}$, $T_s = 0.5 \times 10^{-3} s$, $\sigma = 5 \times 10^{-4} V$ et $\frac{T_s}{\sigma} = 1 s/V$, à l'aide de la table de la fonction Q de la loi normale centrée réduite, on trouve :

$$\begin{aligned}P(\tilde{a}_m = -1/a_m = -3) &\approx 0.1574 \\ P(\tilde{a}_m = 1/a_m = -3) &\approx 0.0013 \\ P(\tilde{a}_m = 3/a_m = -3) &\approx 0\end{aligned}\quad (2.42)$$

- (e) La règle de codage choisie pour le mapping vous paraît-elle intéressante ? Si oui, quel est son intérêt ?

la règle de codage choisie pour le mapping est **le codage de Gray**, elle est intéressante car pour passer d'un symbole à l'autre, seul un bit change à chaque fois.

- (f) Sachant que le taux d'erreur symbole de la liaison est donné par :

$$TES = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}}\right) \quad (2.43)$$

Avec la règle de codage choisie pour le mapping donnez le taux d'erreur binaire (TEB) de la liaison, en expliquant votre réponse.

Principe de Gray :

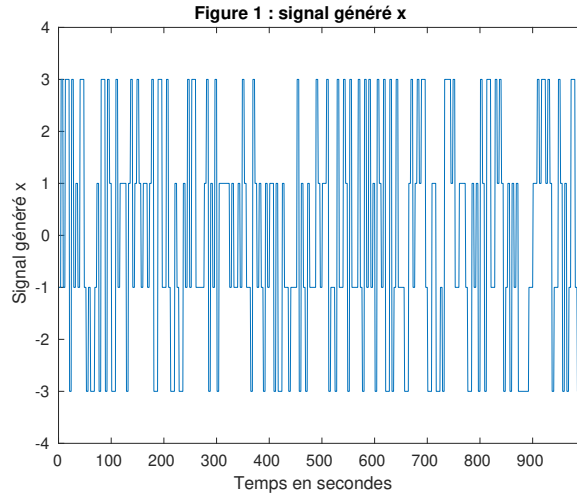
Entre deux niveaux consécutifs, seulement un bit change. L'intérêt par rapport au fait de faire des erreurs vient de la propriété suivante : "Les symboles adjacents ne diffèrent que d'un bit". Ainsi si l'on fait une erreur sur un symbole, donc il n'y a qu'un bit qui est erroné et ce quelque soit le nombre de bits que transporte le symbole. Donc la probabilité d'erreur sur un bit P_b = probabilité d'erreur sur un symbole P_s sur n : $P_b = \frac{P_s}{n}$ où M est la taille de constellation : $M = 2n$ donc : $P_b = \frac{P_s}{\log_2(M)} \implies TEB = \frac{TES}{\log_2(M)}$ Dans ce cas, on a $M = 4$, donc

$$\begin{aligned}TEB &= \frac{1}{2} TES \\ TES &= \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}}\right)\end{aligned}\quad (2.44)$$

2.4.2 Implantation sous Matlab

1. Implantation de la chaine sans bruit : on l'implantera en utilisant le mapping suivant : 00 : -3, 01 : -1, 10 : +1, 11 : +3.

- (a) La génération de l'information binaire à transmettre (bits $a_k \in (-3, -1, 1, 3)$ équiprobables et indépendants), avec un mapping binaire à moyenne nulle : 00 : -3, 01 : -1, 10 : +1, 11 : +3. afin de passer de l'information binaire aux symboles a_k , avec un filtre de mise en forme rectangulaires de durée T_s , donc le signal généré doit osciller entre $(-3, -1, 1, 3)$. On trouve ceci sur la figure suivante :



On sait que la desité spectrale vaut :

$$S_{x|f} = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re}[R_a \exp(j2\pi f k T_s)] + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_k |H(\frac{k}{T_s})|^2 \delta(f - \frac{k}{T_s})$$

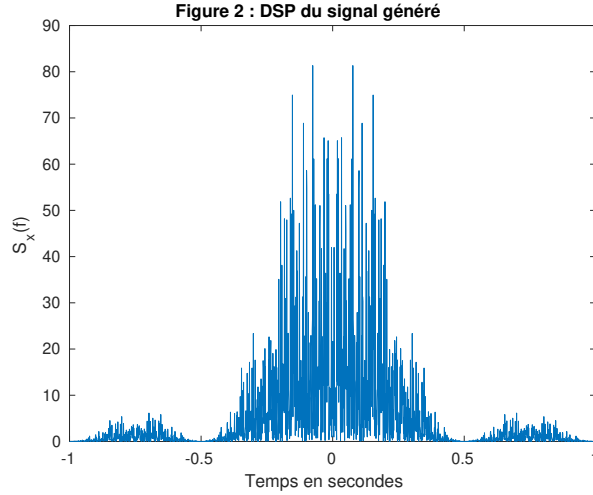
$$\text{avec : } \sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2] \quad m_a = E[a_k] \quad R_a = \frac{E[a_m^* a_{m-k}] - |m_a|^2}{\sigma_a^2} \quad (2.45)$$

Sachant que les symboles a_k sont des variables aléatoires discrètes

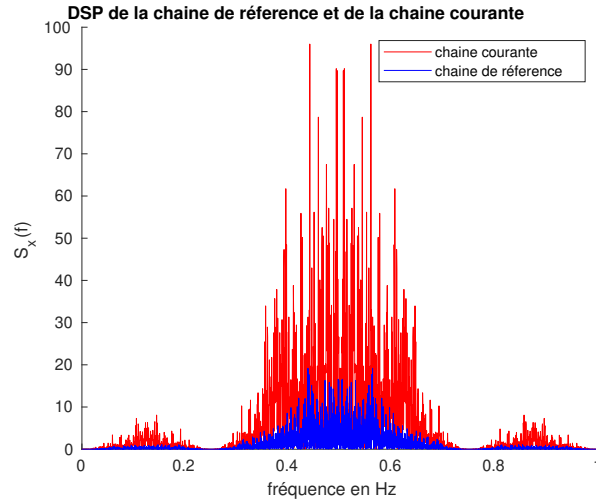
équipropables, alors:

$$\begin{aligned}
m_a &= E[a_k] = -1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 0 \\
\sigma_a^2 &= E[|a_k - m_a|^2] = E[|a_k - 0|^2] = E[|a_k|^2] = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + (-3)^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} = 5 \\
R_a &= \frac{E[a_m^* a_{m-k}] - |m_a|^2}{\sigma_a^2} = \frac{E[a_m^* a_{m-k}] - 0}{5} = \frac{E[a_m^* a_{m-k}]}{5} = 0 \quad \text{si } k \neq 0 \\
S_{x(f)} &= \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 = S_{x(f)} = \frac{5}{T_s} |T_s \text{sinc}(\pi f T_s)|^2 = 5 T_s \text{sinc}(\pi f T_s)^2
\end{aligned} \tag{2.46}$$

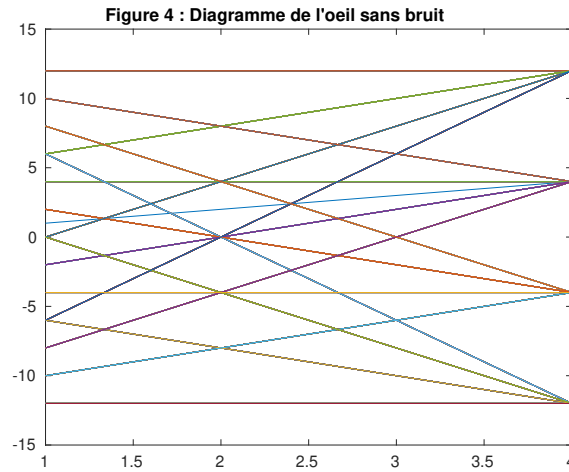
La densité spectrale de puissance est un sinc^2 comme le montre la figure suivante en bande de base autour de la fréquence 0.



- (b) Si on compare l'efficacité spectrale de la chaîne étudiée avec celle de la chaîne de référence, on trouve que la DSP de la chaîne courante est donnée par $5T_s \text{sinc}(\pi f T_s)^2$ et celle de la chaîne de référence est donnée par $T_s \text{sinc}(\pi f T_s)^2$, ce qui explique la différence entre les deux DSP d'un facteur de 5. La chaîne de référence est plus efficace en terme d'efficacité spectrale que la chaîne courante, car elle a une bande passante plus petite que celle de la chaîne courante.

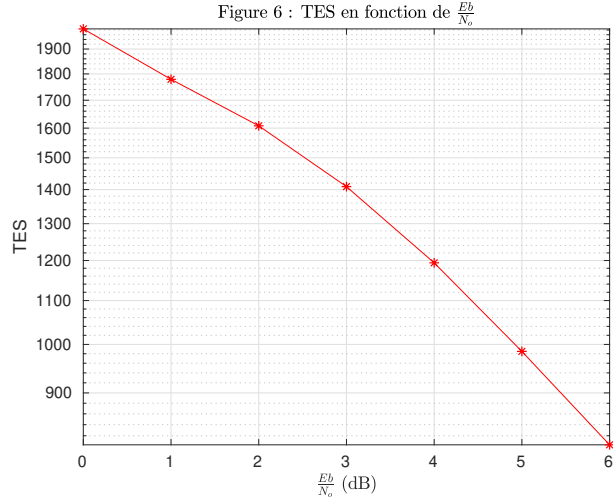


- (c) Le diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception comme le montre la figure suivante, confirme les résultats trouvés dans l'étude théorique.

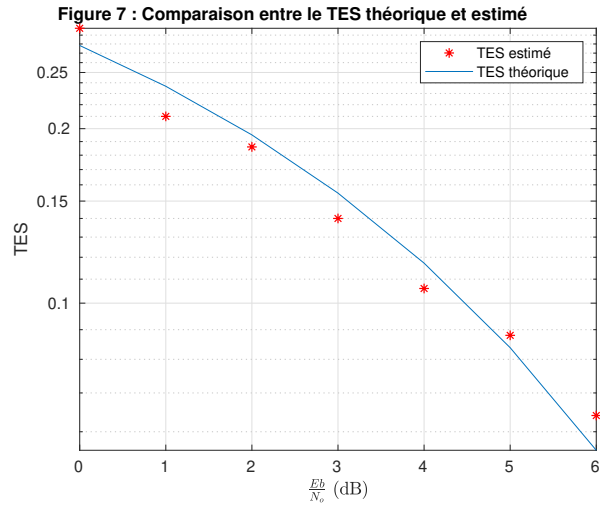


- (d) En utilisant les instants optimaux d'échantillonnage puis un détecteur à seuil, avec seuil optimal, le TEB obtenu est bien nul car on est dans le cas d'une chaîne de transmission idéale.

2. On vient de rajouter un bruit blanc gaussien tel que sa densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences de la bande passante, il suit une loi normale. Le taux d'erreur symbole (TES) obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur ($\frac{E_b}{N_0}$) en décibels.

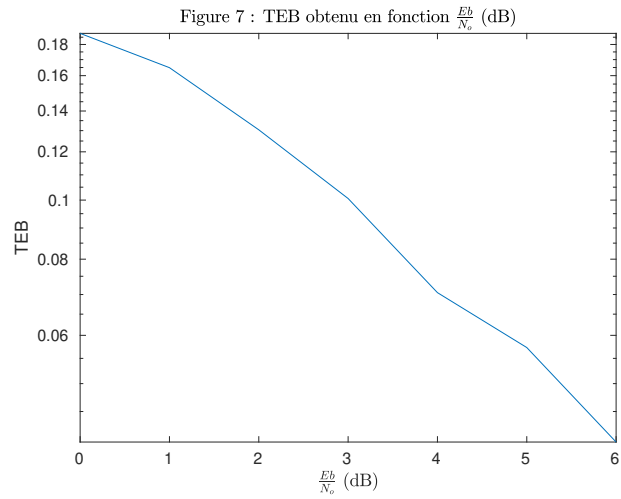


3. en comparant le TES obtenu par simulation sur la chaîne implantée figurant sur la figure précédente au TES donné pour la chaîne étudiée dans l'étude théorique, donné par la formule suivante : $TES = \frac{3}{2}Q(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}})$.

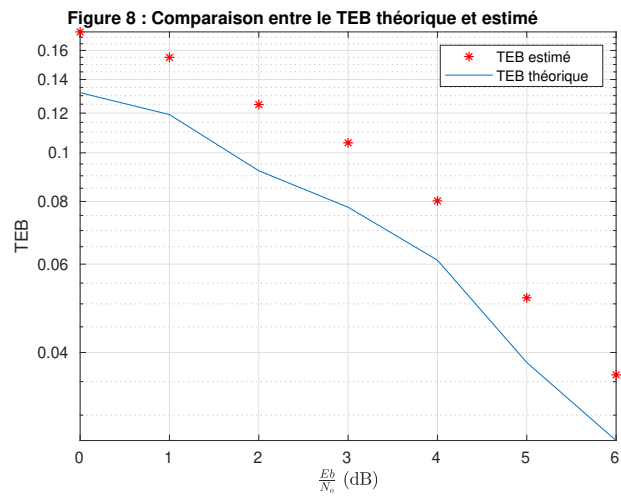


On remarque que le TES théorique est approximativement analogue au TES estimé.

4. Le taux d'erreur binaire (TEB) obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur ($\frac{E_b}{N_0}$) en décibels.



5. Le TEB obtenu par simulation sur la chaine implantée au TEB donné pour la chaine étudiée dans l'étude théorique sont égaux presque partout.



Bibliographie

- <http://thomas.perso.enseeiht.fr/DigitalCommunications.html>
- M. Joindot, A. Glavieux, Introduction aux communications numériques
- <https://fr.mathworks.com/help/matlab/>