Exo 5: TF de $f(x) = e^{-ax^2}$ $a>0$

a. $$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-ax^2} e^{-2i\pi t x}}_{g(t,x) \in C^1} dx$$

On a: $$\frac{\partial g}{\partial t} = -2i\pi x \, e^{-ax^2} e^{-2i\pi t x}$$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}\right| \leq 2\pi |x| e^{-ax^2} \quad \text{intégrable sur } \mathbb{R}$$

Donc, d'après le th. de dérivation des fonct° définies par une intégrale:
$\hat{f}(t)$ dérivable, et

$$\hat{f}'(t) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} x e^{-ax^2} e^{-2i\pi t x} dx$$

On a donc: $$\hat{f}'(t) = -2i\pi \left(\underbrace{\left[-\frac{e^{-ax^2}}{2a} e^{-2i\pi t x} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \frac{2i\pi t}{2a} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-2i\pi t x} dx}_{\hat{f}(t)} \right)$$

d'où : $$\boxed{\hat{f}'(t) = -\frac{2\pi^2 t}{a} \hat{f}(t)}$$

b. on a $\hat{f}$ solution de $u'(t) + \frac{2\pi^2 t}{a} u(t) = 0$

$\Leftrightarrow$ $$\frac{u'(t)}{u(t)} = -\frac{2\pi^2 t}{a}$$

$\Rightarrow$ $$\ln u(t) = -\frac{\pi^2 t^2}{a} + k$$

$\Rightarrow$ $$u(t) = K e^{-\frac{\pi^2 t^2}{a}}$$

et $$\hat{f}(0) = K = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx$$

On $$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = (\sqrt{a})^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

d'où : $K = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Donc : $$\boxed{\hat{f}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2 t^2}{a}}}$$

Donc :

* pour $a = \pi \Rightarrow f(x) = e^{-\pi x^2}$ et $\hat{f}(t) = e^{-\pi t^2}$
* pour $a = \frac{1}{2\sigma^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow \hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sqrt{2\pi}\,\sigma\, e^{-2\pi^2\sigma^2 t^2}$

$$\hat{f}(t) = e^{-2\pi^2\sigma^2 t^2}$$

Exo 6 :

$$f, f' \in L^1_{\mathbb{R}} \cap C^1$$

$$\widehat{f'}(t) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\, e^{-2i\pi xt}\, dx$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{+a} f'(x)\, e^{-2i\pi tx}\, dx$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \left(\left[e^{-2i\pi tx} f(x) \right]_{-a}^{+a} + 2i\pi t \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2i\pi tx}\, dx \right)$$

Or, $f, f' \in L^1 \cap C^1$

Donc $f(a) \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$

d'où : $$\boxed{\widehat{f'}(t) = 2i\pi t\, \hat{f}(t)}$$

Plus généralement : $$\boxed{\widehat{f^{(k)}}(t) = (2i\pi t)^k\, \hat{f}(t)}$$

Si $x^k f(x) \in L^1_{\mathbb{R}}$

(et on a : $\hat{f}^{(k)}(t) = \widehat{(-2i\pi x)^k f(x)}$)

Exo 6 : Soit f vérifiant :

$$f''(t) - 4\pi^2 t^2 f(t) = \lambda f(t)$$

On suppose $f \in C^2 \cap L^1$ et $f'' \in L^1$

Alors :

$$\widehat{f''}(x) - \widehat{4\pi^2 t^2 f(t)}(x) = \lambda \hat{f}(x)$$

Or,

$$\widehat{f''}(x) = (2i\pi x)^2 \hat{f}(x) = -4\pi^2 x^2 \hat{f}(x)$$

et

$$\hat{f}^{(k)}(x) = \widehat{(-2i\pi t)^k f(t)}(x)$$

c-à-d :

$$\hat{f}^{(2)}(x) = -4\pi^2 \, \widehat{t^2 f(t)}(x)$$

d'où :

$$-4\pi^2 x^2 \hat{f}(x) + \frac{4\pi^2}{4\pi^2} \hat{f}^{(2)}(x) = \lambda \hat{f}(x)$$

et

$$\hat{f}''(x) - 4\pi^2 x^2 \hat{f}(x) = \cancel{4\pi^2}\lambda \hat{f}(x)$$

On retrouve donc ~~[illegible]~~ la même équation ~~[illegible]~~)

Exo 7 : Soit

$$f(x) = (1-x^2)\, \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

On a :

$$\hat{f}(t) = \int_{-1}^{+1} (1-x^2) e^{-2i\pi t x} dx$$

$$= \cancel{\int_{-1}^{+1} e^{-2i\pi t x} dx} - \left(\left[\frac{x^2 e^{-2i\pi t x}}{-2i\pi t} \right]_{-1}^{+1} + \frac{1}{2i\pi t} \int_{-1}^{1} 2x e^{-2i\pi t x} dx \right)$$

$$= \frac{1}{i\pi t} \left[\frac{x e^{-2i\pi t x}}{-2i\pi t} \right]_{-1}^{+1} + \frac{1}{i\pi t} \frac{1}{2i\pi t} \int_{-1}^{+1} e^{-2i\pi t x} dx$$

Exo 8 : Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3}\,dt = \frac{3\pi}{4}$

On a. $\mathbb{1}_{[-a,a]}(x) \longrightarrow \frac{\sin 2\pi a t}{\pi t}$

donc : $\pi\, \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(x) \longrightarrow \frac{\sin t}{t} \in L^2$

et $\left(1 - \frac{2|x|}{A}\right)\mathbb{1}_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]}(x) \longrightarrow \frac{\sin^2(\pi t \frac{A}{2})}{\pi^2 t^2 \frac{A}{2}}$. On prend $A = \frac{2}{\pi}$

d'où : $\pi\left(1 - \pi|x|\right)\mathbb{1}_{[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}]}(x) \longrightarrow \frac{\sin^2 t}{\pi\, t^2} \in L^2$

d'où, d'après Plancherel : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \pi^2 \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(x) \left(1 - \pi|x|\right) \mathbb{1}_{[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}]}(x)\,dx$$

$$= \pi^2 \int_{-\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} \left(1 - \pi|x|\right)dx$$

$$= \pi^2 \left(\frac{1}{\pi} - 2\pi \int_0^{1/2\pi} x\,dx\right)$$

$$= \pi - 2\pi^3 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2\pi}$$

$$= \pi - \frac{\pi^3}{4\pi^2} = 3\pi/4$$!! ~~Changer en $\frac{\pi}{2}$~~

Exo 3 :

$$f(x) = \frac{\sin \pi a x}{\pi x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin \pi b x}{\pi x}$$

1) On a :

$$\widehat{f_1 * g_1}(x) = \hat{f_1}(x) \cdot \hat{g_1}(x) \qquad \text{si } f_1, g_1 \in L^1$$

Or,

$$f(x) = \hat{f_1}(x) \quad \text{où} \quad f_1(t) = 1\!\!1_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(t)$$

et

$$g(x) = \hat{g_1}(x) \quad \text{où} \quad g_1(t) = 1\!\!1_{[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]}(t)$$

donc

$$f * g(x) = \hat{f_1} * \hat{g_1}(x) = \widehat{f_1(t) \cdot g_1(t)}\,(x)$$

Or,

$$f_1(t)\, g_1(t) = 1\!\!1_{[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]}(t) \quad \text{où} \quad c = \min(a,b)$$

d'où :

$$f * g(x) = \widehat{1\!\!1}_{[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]}(x)$$

c.à.d :

$$\boxed{f * g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi c x)}{\pi x}, & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}}$$

2) On a :

$$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\sin \pi a t}{\pi t} \; \frac{\sin \pi b t}{\pi t}}_{\in L^2} dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{1\!\!1}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(t) \; \widehat{1\!\!1}_{[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]}(t)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{1\!\!1_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(t)\; 1\!\!1_{[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]}(t)}_{\in L^2}\, dt \qquad \text{(Plancherel)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]}(t)\, dt$$

d'où :

$$\underline{\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin \pi a t}{\pi t} \cdot \frac{\sin \pi b t}{\pi t}\, dt = c}$$

Pour $a = b = 1$, on a,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 \pi t}{\pi^2 t^2}\, dt = 1 \qquad . \quad u = \pi t, \quad dt = \frac{du}{\pi}$$

d'où,

$$\underline{\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du = \pi}$$

TD d'Intégration n° 5

Exo 1 : on a : $x(t) = v(t) + R\,i(t) = v(t) + RC\,v'(t)$

1ère méthode (classique) :

$$v'(t) + \frac{1}{RC} v(t) = \frac{1}{RC} x(t)$$

a. Equat° sans second membre :

$$v'(t) = -\frac{1}{RC} v(t) \Rightarrow \frac{v'(t)}{v(t)} = -\frac{1}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln v(t) = -\frac{t}{RC} + K \Rightarrow v(t) = \lambda e^{-\frac{t}{RC}}$$

b. Variation de la constante

$$v(t) = \lambda(t)\, e^{-t/RC}$$

$$v'(t) + \frac{1}{RC} v(t) = \lambda'(t) e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{\lambda(t)}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\lambda(t)}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{RC} x(t)$$

d'où :

$$\lambda'(t) = \frac{1}{RC} x(t)\, e^{\frac{t}{RC}}$$

donc :

$$\lambda(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{t} x(u)\, e^{\frac{u}{RC}}\, du + K \quad (\text{intégrable sur }]-\infty, u])$$

c. Conditions aux limites

$$x(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow v(t) = 0 \ \forall t$$

et

$$v(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{t} x(u)\, e^{-\frac{t-u}{RC}}\, du + K e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow K = 0$$

d'où :

$$v(t) = \frac{1}{RC} \int_{\mathbb{R}} x(u)\, e^{-\frac{t-u}{RC}}\, 1\!\!1_{]-\infty,t]}(u)\, du$$

Or, $1\!\!1_{]-\infty,t]}(u) = 1 \iff u \leq t \iff t-u \geq 0$

donc $1\!\!1_{]-\infty,t]}(v) = 1\!\!1_{\mathbb{R}^+}(t-v) = u(t-v)$

d'où :

$$\underline{v(t) = x * h\,(t)}$$

avec $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$

<u>2ème méthode : par transformée de Fourier</u>

$$v'(t) + \frac{1}{RC} v(t) = \frac{1}{RC} x(t)$$

si $v' \in L^1$; $x \in L^1$

$$\widehat{v'}(\xi) + \frac{1}{RC} \hat{v}(\xi) = \frac{1}{RC} \hat{x}(\xi)$$

Or, $\widehat{v'}(\xi) = 2i\pi\xi\, \hat{v}(\xi)$

d'où :

$$(1 + 2i\pi RC\xi)\, \hat{v}(\xi) = \hat{x}(\xi)$$

$$\hat{v}(\xi) = \hat{x}(\xi) \cdot \frac{1}{1 + 2i\pi RC\xi}$$

Or, $e^{-at} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{a + 2i\pi\xi}$

donc $e^{-\frac{t}{RC}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{\frac{1}{RC} + 2i\pi\xi} = \frac{RC}{1 + 2i\pi RC\xi}$

d'où :

$$\hat{v}(\xi) = \hat{x}(\xi) \cdot \frac{1}{RC}\, \widehat{e^{-\frac{t}{RC}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)}\,(\xi) = \hat{x}(\xi) \cdot \hat{h}(\xi)$$

d'où :

$$\underline{v(t) = x * h\,(t)} \quad \text{(par injectivité)}$$

Rq : $x = 0 \Rightarrow \hat{x} = 0 \Rightarrow \hat{v} = 0 \Rightarrow v = 0$