EDP : introduction aux différences finies

I Introduction

1) Motivations

L'objectif est de pouvoir comprendre, prédire, optimiser les comportements de systèmes complexes, tels que ceux issus de la physique (météo, mécanique, etc...), de la chimie, de l'économie, etc...

ex : → prédire le futur : temps, climat, finance
→ systèmes non accessibles à l'observation (océan, astrophysique, ...)
→ réduire les coûts de prototypage : numérique (avion, ...)

Les modélisations de ces problèmes font intervenir des équations différentielles ordinaires (EDO) mais aussi des équations aux dérivées partielles (EDP), c.à.d. des équations pluri-dimensionnelles.

ex : → EDO : $\frac{du}{dt} = f(t, u(t))$

→ EDP : $f(u, t, x, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots) = 0$

Une fois les équations posées, s'ensuit l'analyse du modèle :

① Existence, unicité de solutions dans des espaces à définir.

(2) Discrétisation du problème : passage de la dimension infinie à la dimension finie, étude de la perte d'information, etc.

(3) Résolution du problème discret : numérique et analyse du comportement de la solution.

2) Exemples d'EDP et éléments de classification

ex 1 : Équation de la chaleur 2D

Trouver u telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = f & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+^* \quad \text{"conditions aux limites" (C.L.)} \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \quad \text{"condition initiale" (C.I.)} \end{cases}$$

ex 2 : Équation d'advection linéaire 1D

Trouver u t.q. :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+^* \quad (\text{C.L.}) \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \quad (\text{C.I.}) \end{cases}$$

déf : ordre d'une EDP

On appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus élevé des dérivées présentes dans l'équation.

ex : Eq. chaleur 2D : ordre 2

Eq. advection linéaire 1D : ordre 1

déf : classification des EDP d'ordre 2

Soit une EDP linéaire d'ordre 2 sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ et d'inconnue $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Elle peut s'écrire :

$$\forall z \in \Omega \quad \sum_{i,j=1}^{k} a_{ji}(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_i}(z) + \sum_{i=1}^{k} b_i(z) \frac{\partial u}{\partial z_i}(z)$$

$$+ g(z)\, u(z) = h(z)$$

avec pour convention $a_{ji}(z) = a_{ij}(z)$

On note $A(z) = [a_{ij}(z)]_{(i,j) \in [\![1,k]\!]^2}$

L'EDP est dite :

i) elliptique en $z \in \Omega$ si la matrice $A(z)$ n'admet que des valeurs propres non nulles toutes de même signe.

ii) hyperbolique en $z \in \Omega$ si $A(z)$ n'admet que des valeurs propres non nulles toutes de même signe, sauf une de signe opposé.

iii) parabolique en $z \in \Omega$ si $A(z)$ admet $k-1$ valeurs propres non nulles de même signe, et une valeur propre nulle.

De plus, soit $v(z)$ un vecteur propre associé à 0, alors $\langle v(z), b(z) \rangle \neq 0$

Rem : Les composantes de z renvoient aussi bien aux dimensions spatiales que temporelles : $A(x)$ ou $A(x,t)$

ex : i) EDP elliptique
⇝ modèles stationnaires : thermique, electromagnétisme, ...

Laplacien : $\begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ + \text{C.L.} \end{cases}$

ii) EDP hyperbolique
⇝ modèles instationnaires : propagation d'ondes

Eq. des ondes $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \text{ sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ + \text{C.L.} + \text{C.I.} \end{cases}$

iii) EDP parabolique
⇝ modèles instationnaires : diffusion thermique, fluides visqueux incompressibles

Eq. de la chaleur $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \text{ sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ + \text{C.L.} + \text{C.I.} \end{cases}$

def : Conditions aux limites

i) conditions aux limites de Dirichlet
$\forall x \in \Gamma \quad u(x)$ est donnée

ii) C.L. de Neumann
$\forall x \in \Gamma \quad \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x)$ est donnée

avec ν normale sortante à Γ.

iii) C.L. de Cauchy

$\forall x \in \Gamma \quad u(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$ donnés.

iv) C.L. mixtes

C.L. de Dirichlet et de Neumann sur différentes parties de Γ

v) C.L. de Robin

combinaison linéaire de C.L. de Dirichlet et Neumann

ex : $u(x) + \alpha \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \quad \forall x \in \Gamma$

II Principes de la méthode

1) Approximations des dérivées

On se place en 1D : $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "suffisamment régulière.

a) Rappels

i) u est dérivable en $x \in \mathbb{R}$:

$$\exists \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} := u'(x)$$

ii) Développement de Taylor-Lagrange

u C^{n+1} sur $[x, x+h]$

$\exists \xi_h \in]x, x+h[$ tq

$$u(x+h) = u(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{h^i}{i!} u^{(i)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} u^{(n+1)}(\xi_h)$$

b) Approximations de la dérivée d'ordre 1

ex1 : Supposons u C^2 sur un intervalle $[x-h_0, x+h_0]$, avec $h_0>0$

$\forall h \in]0,h_0]$, $\exists \xi \in]x, x+h[$ tq

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(\xi)$$

d'où $$\left| \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u'(x) \right| = \frac{h}{2} |u''(\xi)|$$

$$\leq ch$$

avec $c = \frac{1}{2} \sup_{y\in[x,x+h_0]} |u''(y)| \in \mathbb{R}$ (u C^2)

indépendante de h.

L'approximation est dite consistante d'ordre 1

ex2 : Supposons u C^3 sur $[x-h_0, x+h_0]$, avec $h_0>0$

$\exists c\geq 0$ tq $\forall h \in]0,h_0]$

$$\left| \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} - u'(x) \right| \leq ch^2$$

L'approximation est dite consistante d'ordre 2.

preuve : cf TD1

déf : Une approximation de $u'(x)$ est dite consistante à l'ordre p, s'il existe une constante C, positive et indépendante de h, tq l'erreur d'approximation est majorée par Ch^p

Rem : i) cette définition est valable pour les dérivées d'ordre supérieur.

ii) La précision de l'approximation va dépendre de la régularité de la solution.

c) Approximation de la dérivée seconde

ex : Supposons u C^4 sur $[x-h_0, x+h_0]$, $h_0>0$

$\exists C \geq 0$ tq $\forall h \in]0, h_0]$

$$\left| \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u''(x) \right| \leq Ch^2$$

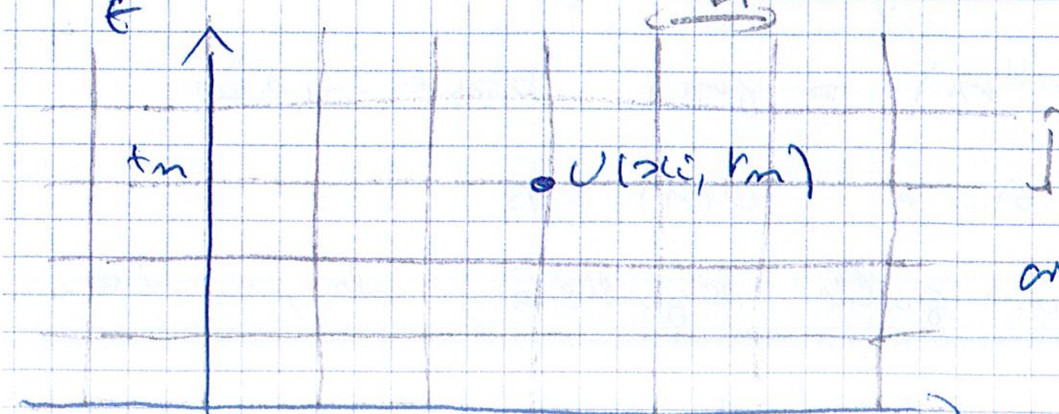
preuve : cf TD1

L'approximation est consistante d'ordre 2.

2) Application à la résolution d'EDP

Supposons un problème spatio-temporel 1D x 1D.

Soit le maillage régulier, de pas de temps Δt, de pas d'espace h (ou Δx) :



avec $x_i = ih$ $\forall i \in \mathbb{Z}$

$t_n = n\Delta t$ $\forall n \in \mathbb{N}$

On cherche une approximation u_h de la solution u en les points du maillage :

$$[u_h]_i^n := u_i^n \sim u(x_i, t_n)$$

On approche les dérivées par différences finies :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \sim \begin{cases} \cdot \ \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \\[2mm] \cdot \ \dfrac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} \\[2mm] \cdot \ \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} \\[2mm] \text{etc...} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) \sim \begin{cases} \cdot \ \dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \\[2mm] \text{etc...} \end{cases}$$

rem : Il n'y a pas unicité du schéma d'approximation. Néanmoins, ceux-ci auront des propriétés d'approximation différentes.

3] Exemple : Laplacien 1D

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall x \in]0,1[\\ u(0) = \alpha, & u(1) = \beta \end{cases}$$

Supposons une grille régulière, de pas d'espace h.