INTRODUCTION AUX TELECOMMUNICATIONS
EXERCICES CORRIGES
Première année télécommunications et réseaux
2019 – 2020

I. Exercice 1 : calcul de la DSP d'un signal biphase

A partir d'une suite de bits à transmettre, considérés comme des variables aléatoires équiprobables et indépendantes, on veut générer un signal de type biphase dans lequel les bits à 1 seront codés par un front descendant, tandis que les bits à 0 seront codés par un front montant. La période symbole sera notée T_s.

1) Donner un mapping et une réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme permettant de générer ce signal.
Le signal en sortie du modulateur s'écrit $x(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s)$. Il s'agit de trouver les symboles a_k (mapping) et la forme d'onde $h(t)$ (réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme) qui permettent d'obtenir le signal demandé. On peut utiliser le mapping suivant : $0 \rightarrow -1$, $1 \rightarrow +1$ et la réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme donnée par la figure 1.

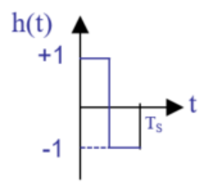

Fig. 1. Réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme

2) Tracer le signal biphase généré pour transmettre la suite de bits suivante : 0110100.
Voir figure 2.

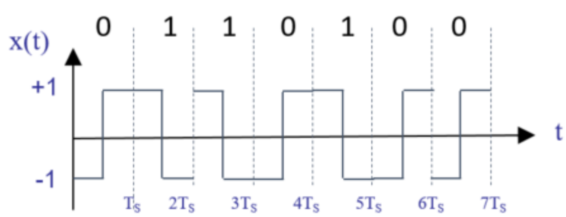

Fig. 2. Signal biphase pour la suite de bits 0110100.

3) Déterminer la densité spectrale de puissance du signal biphase, en supposant que les symboles émis sont indépendants et équiprobables.
On va utiliser l'expression générale de la densité spectrale de puissance (DSP) d'un signal de communication numérique en bande de base (voir planches de cours) et l'adapter au mapping et au filtre de mise en forme utilisés dans l'exercice :
$m_a = E\left[a_k\right] = P\left(a_k = -1\right) \times (-1) + P\left(a_k = +1\right) \times (+1) = 0$,
$\sigma_a^2 = E\left[|a_k - m_a|^2\right] = E\left[|a_k|^2\right] = P\left(a_k = -1\right) \times |-1|^2 + P\left(a_k = +1\right) \times |+1|^2 = 1$,
$R_a(k) = 0 \;\forall k \neq 0$ (symboles indépendants).
$h(t) = \Pi_{\frac{T_s}{2}}\left(t - \frac{T_s}{4}\right) - \Pi_{\frac{T_s}{2}}\left(t - \frac{3T_s}{4}\right)$ donne :
$H(f) = \frac{T_s}{2} sinc\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right) e^{-j2\pi f \frac{T_s}{4}} - \frac{T_s}{2} sinc\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right) e^{-j2\pi f \frac{3T_s}{4}} = \frac{T_s}{2} sinc\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right) e^{-j\pi f T_s} 2j \sin\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right)$
$= jT_s \frac{\sin^2\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right)}{\pi f \frac{T_s}{2}} e^{-j\pi f T_s}$
D'où

$$S_x(f) = T_s \frac{\sin^4\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right)}{\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right)^2}$$

Vous trouverez un tracé de la DSP d'un signal biphase dans les planches de cours.

4) Le signal généré est-il un signal modulé en "bande de base" ou bien "sur fréquence porteuse" ? Expliquez votre réponse.
La DSP du signal généré s'étend autour de $f = 0$, le signal généré ici est donc un signal bande de base.
5) Comparer, en termes d'efficacité spectrale, le signal biphase au signal NRZ bipolaire.
Pour une même énergie conservée au signal, le signal NRZ bipolaire nécessite une bande passante plus petite, il est donc plus efficace spectralement.

II. Exercice 2 : Étude d'une chaine de transmission en bande de base

Soit le système de transmission donné par la figure 3. On place en émission et en réception deux filtres de même réponse impulsionnelle : $h_r(t) = h(t) = sinc(\pi t/T_s)$. Le bruit $n(t)$ est supposé additif, blanc et gaussien, de densité spectrale de puissance égale à $\frac{N_0}{2}$ quelle que soit la fréquence.

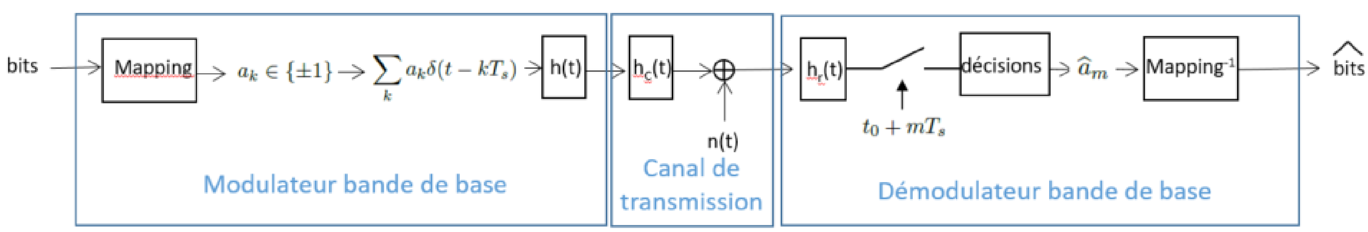

Fig. 3. chaîne de transmission considérée dans l'exercice 2

1) En considérant que $h_c(t) = \delta(t)$ (canal AWGN) :
   a) Vérifier dans le domaine fréquentiel que la chaîne de transmission peut vérifier le critère de Nyquist.
   $G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f) = T_s\Pi_{1/T_s}(f) \times 1 \times T_s\Pi_{1/T_s}(f) = T_s^2\Pi_{1/T_s}(f)$.
   On a bien $\sum_k G\left(f - \frac{k}{T_s}\right) =$ constante(T_s^2) (faire un dessin pour le visualiser) et donc le critère de Nyquist peut être respecté.
   Remarque : Nous sommes ici dans le cas de respect du critère de Nyquist avec la bande occupée la plus petite possible (bande de Nyquist), irréalisable en pratique.
   b) Vérifier dans le domaine temporel que la chaîne de transmission peut vérifier le critère de Nyquist.
   $g(t) = TF^{-1}[G(f)] = T_s sinc(\pi t/T_s)$. Pour $t_0 = 0$ on a bien $g(t_0) \neq 0$ et $g(t_0 + pT_s) = 0 \;\forall\, p \in Z^*$, donc le critère de Nyquist peut être respecté sur cette chaine de transmission.
   Remarques :
   - les filtres donnés ici ne sont pas causaux, il faudrait donc décaler les réponses impulsionnelles pour les rendre causaux, ce qui modifierait le t_0 à considérer.
   - par rapport au calcul réalisé en cours : $g^{(t_0)}(t) = \frac{g(t)}{g(0)} = sinc(\pi t/T_s)$ ($g(t)$ déjà centré en 0), ce qui donne $G^{(t_0)}(f) = T_s\Pi_{1/T_s}(f)$ et donc $\sum_k G\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = constante = T_s$
   c) La chaine de transmission proposée vérifie t-elle le critère de filtrage adapté ?
   Le critère de filtrage adapté est respecté si on positionne en réception un filtre de réponse impulsionnelle $h_r(t) \propto h_e^*(t_0 - t)$, où $h_e(t) = h(t) * h_c(t)$ (forme d'onde à l'entrée du récepteur). Ici $h_e(t) = h(t)$ ($h_c(t) = \delta(t)$) et nous avons établi plus tôt que $t_0 = 0$. Il faut donc $h_r(t) \propto h^*(-t)$ pour respecter le critère de filtrage adpaté. Or $h(t)$ est réel et pair donc nous avons bien $h^*(t) = h(t)$, le critère de filtrage adapté est donc respecté.
   Remarque : avec des filtres causaux nous aurions également le critère de filtrage adapté qui serait respecté mais avec un $t_0 \neq 0$.
   d) En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux, calculer le rapport signal sur bruit aux instants de décision. Le comparer à celui obtenu dans le cas où $h(t)$ et $h_r(t)$ sont deux fonctions porte de même durée T_s.

Aux instants d'échantillonnage optimaux, $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = 0$, nous avons $a_m g(t_0) + w_m$, où w_m représente un échantillon de bruit filtré, car le critère de Nyquist est respecté. D'où :

$$SNR = \frac{E\left[|a_m g(t_0)|^2\right]}{\int_R \frac{N_0}{2} |H_r(f)|^2 df} = \frac{\sigma_a^2 |g(t_0)|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\frac{1}{2T_s}}^{\frac{1}{2T_s}} T_s^2 df} = \frac{T_s^2}{\frac{N_0}{2} T_s} = \frac{2T_s}{N_0}$$

SNR identique à celui qui est obtenu dans le cas où $h(t)$ et $h_r(t)$ sont deux fonctions portes de même durée T_s (voir premier exercice des TDs) car critère de Nyquist et filtrage adapté dans les deux cas si on échantillonne aux instants optimaux.

e) Sans le calculer, déterminez le taux d'erreur binaire de cette transmission. Expliquez votre réponse.
$TEB = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$: TEB pour une chaine de transmission avec mapping binaire à moyenne nulle, symboles indépendants et équiprobables, critère de Nyquist et filtrage adapté, instants optimaux d'échantillonnage, si détecteur à seuil avec seuil optimal en 0.

2) On suppose maintenant que le canal de transmission introduit un filtrage et que le module de sa réponse en fréquence $H_c(f) = TF[h_c(t)]$ est donné par la figure 4. Peut-on, en présence de ce canal, continuer à respecter le critère de Nyquist ? Si oui, à quelle condition ?

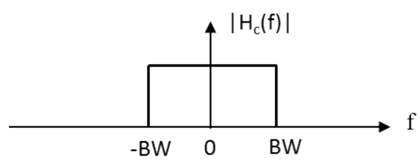

Fig. 4. Fonction de transfert du canal de l'exercice 2

Si $BW > \frac{1}{2T_s} \Leftrightarrow R_s = \frac{1}{T_s} < 2BW$ ($H(f)H_r(f)$ est de support $\left[-\frac{1}{2T_s}, \frac{1}{2T_s}\right]$), alors on pourra respecter le critère de Nyquist sur la transmission (limitation du débit possible pour une transmission sans interférences entre symboles aux instants de décision).

III. Exercice 3 : impact d'un canal de propagation à bande passante limitée

Soit un signal émis $x(t)$ qui se compose de symboles équiprobables et indépendants appartenant à l'alphabet $\{\pm 1\}$ mis en forme par un filtre en racine de cosinus surélevé de roll off égal à $0,2$. On transmet ce signal en bande de base dans un canal de transmission idéal de bande 1200 Hz. Le filtre de réception est identique au filtre de mise en forme.

1) Le critère de Nyquist peut-il être respecté pour cette transmission ? Si oui à quelle condition ?
Si on note $H(f)$ la réponse en fréquence du filtre d'émission et $H_r(f)$ la réponse en fréquence du filtre de réception, alors $H(f)H_r(f)$ est un filtre en cosinus surélevé qui permet de respecter le critère de Nyquist (un tracé de $H(f)H_r(f)$ et de ses versions décalées tous les $\frac{1}{T_s}$ montre que cette forme permet de respecter le critère de Nyquist car l'ajout de tous ces décalages est bien constant : critère de Nyquist vu dans le domaine fréquentiel). Attention cependant le critère de Nyquist doit être respecté sur $G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f)$, si $H_c(f)$ représente la réponse en fréquence du canal de propagation. Ce canal est idéal sur une bande de 1200 Hz, ce qui veut dire que sa réponse en fréquence est donné par la figure 5. Pour pouvoir respecter le critère de Nyquist sur cette transmission il faudra donc que $\frac{1+\alpha}{2} R_s = 0.6 R_s < 1200\ Hz$, $R_s = \frac{1}{T_s}$ représentant le débit symbole. Cette condition permet que le canal de propoagation ne vienne pas "perturber" la forme $H(f)H_r(f)$ permettant de respectre le critère de Nyquist.

2) En déduire le débit symbole R_s maximal qui pourra être transmis sans apparition d'interférence entre symboles aux instants optimaux d'échantillonnage.
$R_s \leq 2000\ bauds \Rightarrow (R_s)_{max} = 2000$ bauds.

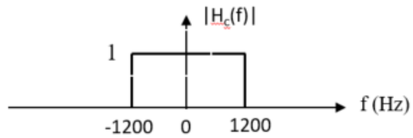

Fig. 5. Réponse en fréquence du canal de transmission.

3) Si l'on veut transmettre avec un débit binaire $R_b = 4$ Kbps, quels ordres de modulations PAM pourront être utilisés sans apparition d'interférence entre symboles aux instants optimaux d'échantillonnage ?
$R_s = \frac{R_b}{log_2(M)}$, où M représente l'ordre de la modulation (nombre de symboles possibles). Il faudra ici $M \geq 4$ si on veut continuer à assurer le critère de Nyquist sur la transmission.

4) Pour obtenir un taux d'erreur binaire de 10^{-3} quel sera le SNR par bit minimal nécessaire à l'entrée du récepteur sans apparition d'interférence entre symboles aux instants optimaux d'échantillonnage ?
En utilisant les courbes de TEB données pour une M-PAM dans les planches de cours, avec $M = 4$, on obtient $\frac{E_b}{N_0} = 10.5$ dB pour garantir un $TEB = 10^{-3}$

IV. Exercice 4 : Etude de l'impact d'un canal de propagation multitrajets

Soit le système de transmission donné par la figure 6. On place en émission et en réception deux filtres de même réponse impulsionnelle égale à une fonction porte de largeur $T_s/2$ et de hauteur égale à 1. Le bruit $n(t)$ est supposé additif, blanc et gaussien, de densité spectrale de puissance égale à $\frac{N_0}{2}$ quelle que soit la fréquence.

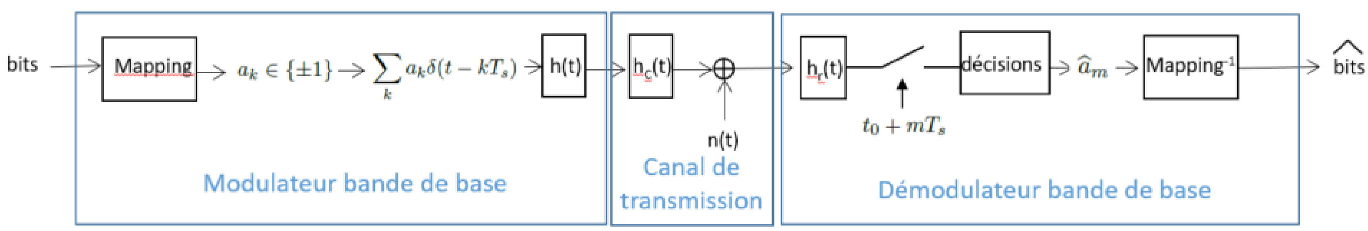

Fig. 6. chaîne de transmission considérée dans l'exercice 4

Le canal de réponse impulsionnelle $h_c(t)$ est donné par la figure 7, où $x(t)$ représente le signal émis, $y(t)$ le signal reçu, α_0 le coefficient d'atténuation sur la ligne de vue directe entre l'émetteur et le récepteur, α_1 le coefficient d'atténuation sur le trajet réfléchi entre l'émetteur et le récepteur, τ_0 le retard sur la ligne de vue directe entre l'émetteur et le récepteur, τ_1 le retard sur le trajet réfléchi entre l'émetteur et le récepteur.

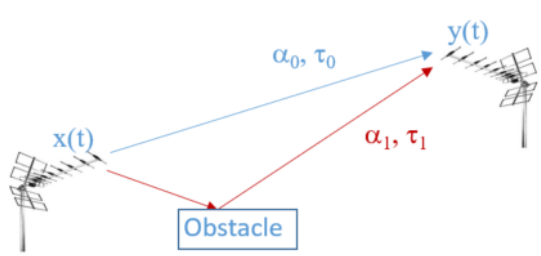

Fig. 7. Canal multi trajets

1) Ecrire $y(t)$ en fonction de $x(t)$ et des paramètres du canal.
   $y(t) = \alpha_0 x(t-\tau_0) + \alpha_1 x(t-\tau_1)$

2) En déduire la réponse impulsionnelle $h_c(t)$ du canal.
   $y(t) = \alpha_0 x(t-\tau_0) + \alpha_1 x(t-\tau_1) = (\alpha_0\delta(t-\tau_0) + \alpha_1\delta(t-\tau_1)) * x(t) = h_c(t) * x(t)$,
   d'où $h_c(t) = \alpha_0\delta(t-\tau_0) + \alpha_1\delta(t-\tau_1)$.

3) On prend $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = \tau_0 + T_s$, $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = 0,6$. Sans bruit, tracer le signal en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la séquence binaire transmise suivante 011001.
   $g(t) = h(t) * h_c(t) * h_r(t) = h(t) * h_r(t) * h_c(t)$. Notons $g_1(t) = h(t) * h_r(t)$, on a alors :
   $g(t) = g_1(t) * (\delta(t) + 0.6\delta(t-T_s)) = g_1(t) + 0.6 g_1(t-T_s)$.
   Le résultat de la convolution de deux fonctions porte est connu. Il est donné par la figure 8 dans le cas de deux portes de largeur $\frac{T_s}{2}$ et de hauteur 1. La figure 9 donne alors la forme prise par $g(t)$ et le signal sans bruit en sortie du filtre de réception, $z(t) = \sum_k a_k g(t-kT_s)$, est tracé en rouge dans la figure 10.

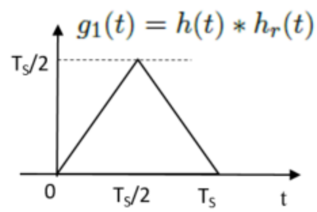

Fig. 8. Tracé de $g_1(t)$.

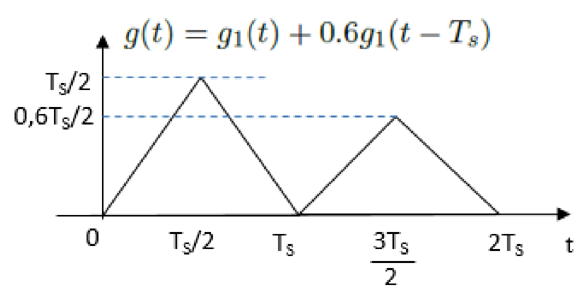

Fig. 9. Tracé de $g(t)$

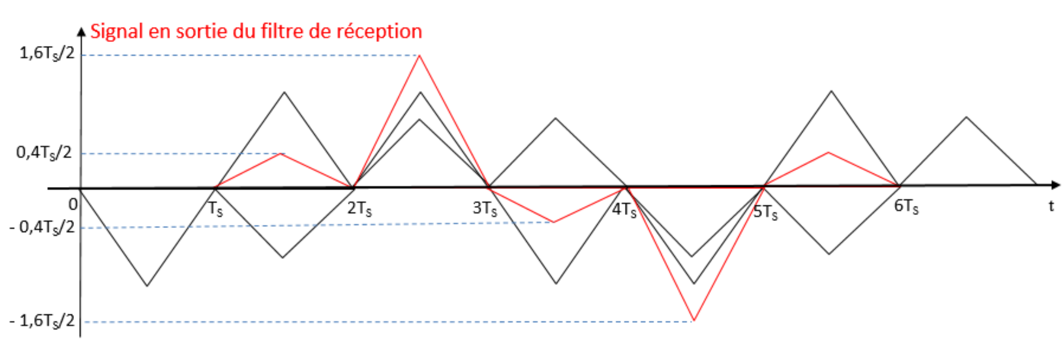

Fig. 10. Tracé du signal sans bruit en sortie du filtre de réception.

4) Tracer le diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$. A-t-on de l'interférence entre symboles ?
Le diagramme de l'oeil, tracé sans bruit sur une durée T_s à partir d'un signal $z(t)$, représente, sur un même tracé, tout ce qui peut se produire sur ce signal pendant T_s. Il est tracé sur la figure 11. En échantillonnant dans la durée T_s on voit toujours (quel que soit l'instant d'échantillonnage considéré) apparaitre plus de deux valeurs possibles alors que seulement deux valeurs sont possibles pour les symboles émis, il y aura donc ici de l'interférence entre symboles quel que soit l'instant d'échantillonnage. Le critère de Nyquist ne pourra donc pas être respecté.

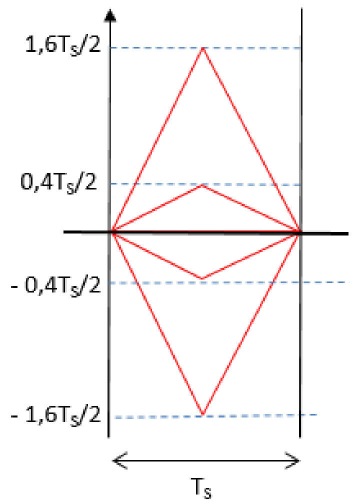

Fig. 11. Tracé du signal sans bruit en sortie du filtre de réception.

5) En supposant que l'on échantillonne à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s/2$ et que l'on utilise un détecteur à seuil avec un seuil à 0 (chaîne de transmission pour canal AWGN), calculer le TEB de la liaison.
$TEB = TES = P\left[a_k = -1\right] \times P\left[\widehat{a}_k = +1 | a_k = -1\right] + P\left[a_k = +1\right] \times P\left[\widehat{a}_k = -1 | a_k = +1\right]$, avec ici, si w_m représente l'échantillon de bruit prélevé à l'instant $t_0 + mT_s$:
$P\left[\widehat{a}_k = +1 | a_k = -1\right] = P\left[a_{k-1} = -1\right] \times P\left[-1.6\frac{T_s}{2} + w_m > 0\right] + P\left[a_{k-1} = +1\right] \times P\left[-0.4\frac{T_s}{2} + w_m > 0\right] = \frac{1}{2}P\left[w_m > 1.6\frac{T_s}{2}\right] + \frac{1}{2}P\left[w_m > 0.4\frac{T_s}{2}\right] = \frac{1}{2}Q\left(\frac{1.6T_s}{2\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{0.4T_s}{2\sigma}\right)$
et
$P\left[\widehat{a}_k = -1 | a_k = +1\right] = P\left[a_{k-1} = -1\right] \times P\left[0.4\frac{T_s}{2} + w_m < 0\right] + P\left[a_{k-1} = +1\right] \times P\left[1.6\frac{T_s}{2} + w_m < 0\right] = \frac{1}{2}P\left[w_m < -0.4\frac{T_s}{2}\right] + \frac{1}{2}P\left[w_m < -1.6\frac{T_s}{2}\right] = \frac{1}{2}Q\left(\frac{1.6T_s}{2\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{0.4T_s}{2\sigma}\right)$,
d'où $TES = TEB = 2 \times \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}Q\left(\frac{1.6T_s}{2\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{0.4T_s}{2\sigma}\right)\right\} = \frac{1}{2}Q\left(\frac{1.6T_s}{2\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{0.4T_s}{2\sigma}\right)$

6) En prenant de manière arbitraire $\frac{T_s}{2\sigma} = 1$, comparer le TEB obtenu sur canal multitrajet avec le TEB obtenu sur canal idéal sans erreurs de synchronisation.
Réponse : $TES = TEB = \frac{1}{2}Q(1.6) + \frac{1}{2}Q(0.4) = 0.1997$ au lieu de $Q(1) = 0.1587$.

La fonction $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ *est donnée par la figure 23 en fin d'énoncé.*

V. Exercice 5 : Etude de l'impact d'une erreur de synchronisation (gigue sur l'instant d'échantillonnage)

Soit la chaîne de transmission donnée par la figure 12, dans laquelle la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre d'émission est une fonction porte de largeur $T_s/2$ et de hauteur 1.

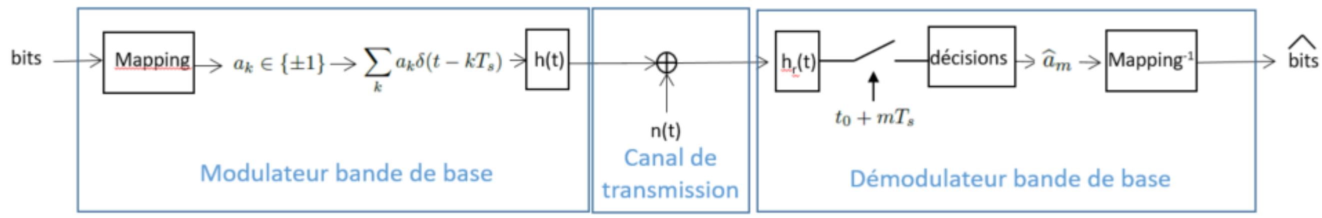

Fig. 12. Chaîne de transmission considérée dans l'exercice 5

.

1) Déterminer $h_r(t)$ tel que ce soit le filtre adapté à $h(t)$ et qu'il soit causal.
Le critère de filtrage adapté est respecté si on positionne en réception un filtre de réponse impulsionnelle $h_r(t) \propto h_e^*(t_0 - t)$, où $h_e(t) = h(t) * h_c(t)$ (forme d'onde à l'entrée du récepteur). Ici $h_e(t) = h(t)$ (le canal n'introduit pas de filtrage, il ne fait qu'ajouter un bruit gaussien et blanc, $n(t)$, au signal émis). Il faut donc construire $h_r(t) = h^*(t_0 - t)$, en prenant, pour simplifier les choses, un coefficient de proportionnalité égal à 1. La figure 13 présente la manière de construire ce filtre adapté : construction de $h^*(-t)$ puis décalage afin de rendre le filtre obtenu causal. Le décalage introduit donne $t_0 = \frac{T_s}{2}$.

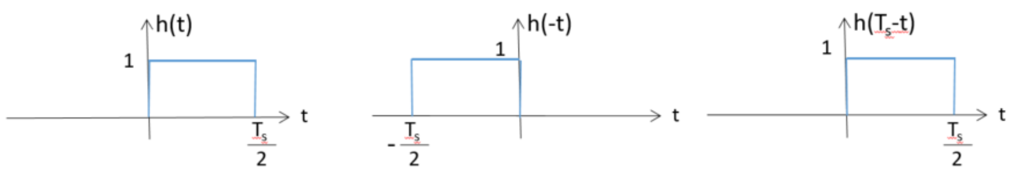

Fig. 13. Construction du filtre adapté.

2) Déterminer la réponse impulsionnelle globale $g(t)$ de la chaîne de transmission.
Le résultat de la convolution de deux fonctions porte est connu. Il est donné par la figure 14 dans le cas de deux portes de largeur $\frac{T_s}{2}$ et de hauteur 1.

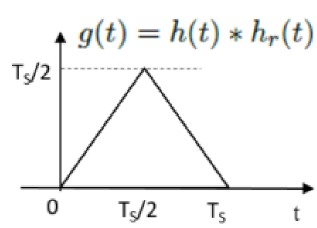

Fig. 14. Réponse impulsionnelle de la chaine de transmission de l'exercice 5.

3) Tracer le signal $z(t)$ obtenu sans bruit en sortie de $h_r(t)$ pour la suite binaire suivante : 011001.
Le tracé du signal $z(t)$ est donné par la figure 15.

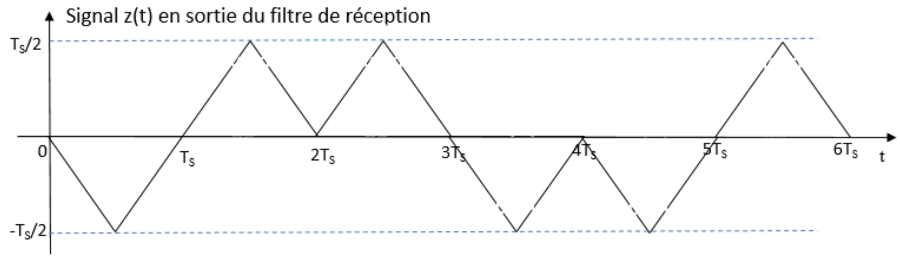

Fig. 15. Tracé du signal en sortie du filtre de réception, exercice 5.

4) Tracer le diagramme de l'oeil en sortie du filtre adapté sans bruit.
Le diagramme de l'oeil, tracé sur une durée T_s à partir d'un signal $s(t)$, représente, sur un même tracé, tout ce qui peut se produire sur ce signal pendant T_s. Il est tracé sur la figure 16 pour le signal sans bruit en sortie du filtre de réception $z(t)$. En échantillonnant dans la durée T_s on voit que quel que soit l'instant d'échantillonnage on ne retrouve que deux valeurs possibles alors que deux symboles ont été émis, il y a donc jamais d'interférence entre symboles. Le critère de Nyquist peut être respecté quel que soit les instants d'échantillonnage choisis. Cependant choisir $t_0 = \frac{T_s}{2}$ est la meilleure solution car la distance entre symboles reçus est alors la plus grande, ce qui donnera la meillleure robustesse en présence de bruit.

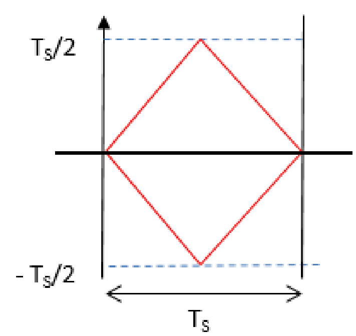

Fig. 16. Tracé du diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception, exercice 5.

5) On prend les décisions à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s/2$, a-t-on de l'interférence entre symboles ?
Quel que soit le t_0 choisi il n'y a jamais d'interférence entre symboles (voir commentaire question 4).

6) On prend les décisions à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s/2 + T_s/8$, a-t-on de l'interférence entre symboles ?
Quel que soit le t_0 choisi il n'y a jamais d'interférence entre symboles (voir commentaire question 4).

7) Donner le TEB de la liaison en fonction de la variance σ^2 du bruit en sortie de $h_r(t)$ et de T_s dans le cas où on échantillonne à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s/2$.
On peut utiliser ici $TEB = TES = Q\left(\frac{Vg(t_O)}{\sigma}\right)$ car on transmet des symboles binaires à moyenne nulle indépendants $a_k \in \{\pm 1\}$ $(V = 1)$ et la chaine de transmission permet de respecter le critère de Nyquist. En prenant $t_0 = T_s/2$ on a $g(t_0) = T_s/2$ et donc $TEB = TES = Q\left(\frac{T_s}{2\sigma}\right)$

8) On suppose maintenant que les instants de prise de décision sont affectés d'une gigue de phase. Les instants de décision sont égaux à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s/2 + g$, g étant une variable aléatoire qui prend ses valeurs parmi 0, $T_s/8$, $-T_s/8$ avec les probabilités respectives $1/3$, $1/3$, $1/3$. Calculer le TEB de la liaison avec gigue de phase, en fonction de la variance σ^2 du bruit en sortie de $h_r(t)$ et de T_s .
On considère que le TEB est une fonction de la variable aléatoire discrète g prenant ses valeurs dans l'ensemble 0, $T_s/8$, $-T_s/8$ de manière équiprobable et on utilise la loi des probabilités totales :

$TEB = 2 \times \frac{1}{3} Q\left(\frac{D_{min_1}}{2\sigma}\right) + \frac{1}{3} Q\left(\frac{D_{min_2}}{2\sigma}\right)$, où $D_{min_1} = \frac{3T_s}{4}$ représente la distance entre deux symboles reçus sans bruit lorsqu'on échantillonne à $t_0 = T_s/2 \pm T_s/8$ et $D_{min_2} = T_s$ représente la distance entre deux symboles reçus sans bruit lorsqu'on échantillonne à $t_0 = T_s/2$ (voir figure 17).
On a donc : $TEB = \frac{2}{3} Q\left(\frac{3T_s}{8\sigma}\right) + \frac{1}{3} Q\left(\frac{T_s}{2\sigma}\right)$.

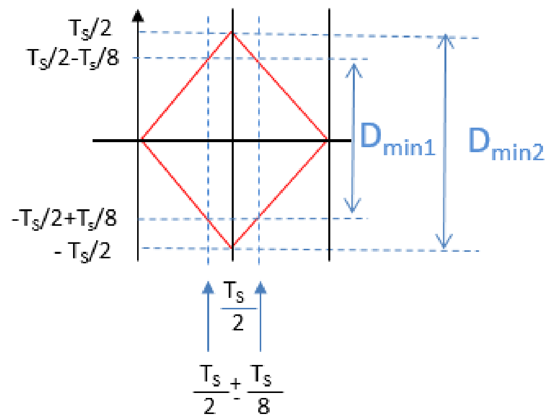

Fig. 17. Tracé du diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception, exercice 5.

9) En prenant de manière arbitraire $\frac{T_s}{2\sigma} = 1$, comparer le TEB obtenu avec gigue au TEB " idéal " (synchronisation parfaite, sans gigue).
Sans gigue on obtient $Q(1) = 0.1587$, avec gigue on obtient $\frac{1}{3} Q(1) + \frac{2}{3} + Q\left(\frac{3}{4}\right) = 0.2040$.

VI. Exercice 6 : Comparaison de systèmes de transmission sur fréquence porteuse

On considère les trois systèmes de transmission définis dans le tableau suivant ("SRRCF" signifie "Square Root Raised Cosine Filter" ou filtre en racine de cosinus surélevé en français) :

Modulation :	16-QAM	16-PSK	16-ASK
Filtre d'emission :	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$
Filtre de reception :	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$
Debit binaire :	32 kbps	32 kbps	32 kbps
TEB :	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}

1) Tracer les constellations des trois modulations considérées.
Voir planches de cours pour 16-QAM et 16-PSK.
Pour tracer la constellation de la 16-ASK il faut positionner les 16 valeurs possibles pour les symboles sur l'axe réel (modulation mono-dimensionnelle). On choisit, en général, des symboles à moyenne nulle, ce qui donnerait 8 points à placer de chaque côté de l'axe imaginaire.
2) Déterminer le débit symbole (R_s) dans les trois cas.
$R_s = \frac{R_b}{\log_2(M)} = 8$ kbauds, car $M = 16$, dans les 3 cas.
3) Calculer les efficacités spectrales des trois systèmes de transmission proposés. Pouvait-on s'attendre à un tel résultat ?
$\eta = \frac{\log_2(M)}{k}$, où k est donné par la bande occupée par le signal transmis : $B = kR_s$.
Ici $B = 2 \times \frac{1+\alpha}{2T_s} = (1+\alpha) R_s$. On a donc $k = 1 + \alpha$ et donc $\eta \simeq 2.67$ bits/s/Hz dans les 3 cas. On pouvait s'attendre à ce résultat identique pour les 3 systèmes de transmission car ils ont le même nombre de symboles possibles et le même filtre de mise en forme, ce dont dépend l'efficacité spectrale.

4) Le canal de propagation à traverser est supposé AWGN de bande 15 kHz (module de la réponse en fréquence constante sur la bande occupée, phase linéaire en fréquence).
   a) Tracez le module de la réponse en fréquence du canal de propagation.
   On a ici un canal de type passe-bande (transmission sur fréquence porteuse). La figure 18 trace la réponse en fréquence de ce canal.

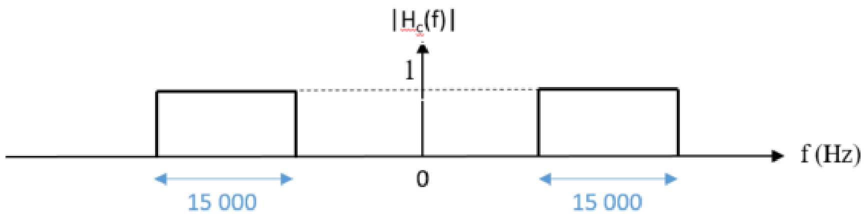

Fig. 18. Tracé du module de la réponse en fréquence du canal de propagation.

   b) Sera-t-il possible de réaliser chaque transmission en trouvant, au niveau du récepteur, des instants d'échantillonnage sans interférence entre symboles ? Expliquez votre réponse.
   Pour pouvoir réaliser la transmission en trouvant des instants d'échantillonnage sans interférence entre symboles il faut que $G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f)$ soit un eforme qui permette de respecter le critère de Nyquist. $H(f)H_r(f)$ est une forme en cosinus surélevé qui permet de respecter le critère de Nyquist. Afin que $G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f)$ continue à le respecter il faut que $2 \times \frac{1+\alpha}{2T_s} = (1+\alpha)\, R_s \leq 15000$ Hz, soit $R_s \leq 10000$ bauds, ce qui est bien le cas ici.
5) La figure 19 donne les courbes de TEB obtenus en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en dB pour les trois modulations considérées. En déduire les E_b/N_0 nécessaires pour satisfaire à la spécification du TEB ? Quel est le système le plus efficace en terme de puissance ? Justifiez votre réponse.
   $E_b/N_0(16ASK) \simeq 22dB > E_b/N_0(16PSK) \simeq 17dB > E_b/N_0(16QAM) \simeq 13dB$. Le système le plus efficace en puissance est celui qui demande le E_b/N_0 le plus faible pour atteindre le TEB fixé. Ici c'est donc le système utilisant la modulation $16-QAM$.
   Réponse :

VII. Exercice 7 :Performance d'une modulation BPSK

Soit un signal émis modulé en BPSK (Binary Phase Shift Keying). Ce signal est affecté par un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance $N_0/2\ \forall f \in \mathbb{R}$. On appelle $H(f)$ et $H_r(f)$ les fonctions de transfert des filtres d'émission et de réception. On suppose que la fonction de transfert du canal $C(f)$ est telle que $C(f) = 1 \forall f \in \mathbb{R}$.

1) Donner le schéma du modulateur permettant de générer un signal modulé en BPSK. Tracer la constellation de la modulation.
   Le schéma du modulateur BPSK (Binary PSK ou modulation de phase à deux états) est donné dans la figure 20, avec $h(t) = TF^{-1}\left[H(f)\right]$. La constellation est tracée figure 21.

2) Donner l'expression du signal modulé ainsi que celle de son enveloppe complexe.
   Signal modulé : $x(t) = \sum_k a_k h(t-kT_s)\cos\left(2\pi f_p t\right)$, où T_s représente la durée symbole, $h(t) = TF^{-1}\left[H(f)\right]$ et f_p représente la fréquence porteuse.
   Enveloppe complexe associée (par rapport à f_p) : $x_e(t) = \sum_k a_k h(t-kT_s)$.

3) A partir du schéma de la chaîne passe-bas équivalente à la chaîne de transmission BPSK,
   a) Dans le cas où $G(f) = H(f)H_r(f)$ est donné par :

$$G(f) = \begin{cases} T_s \cos^2\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right) & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T_s} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{1}$$

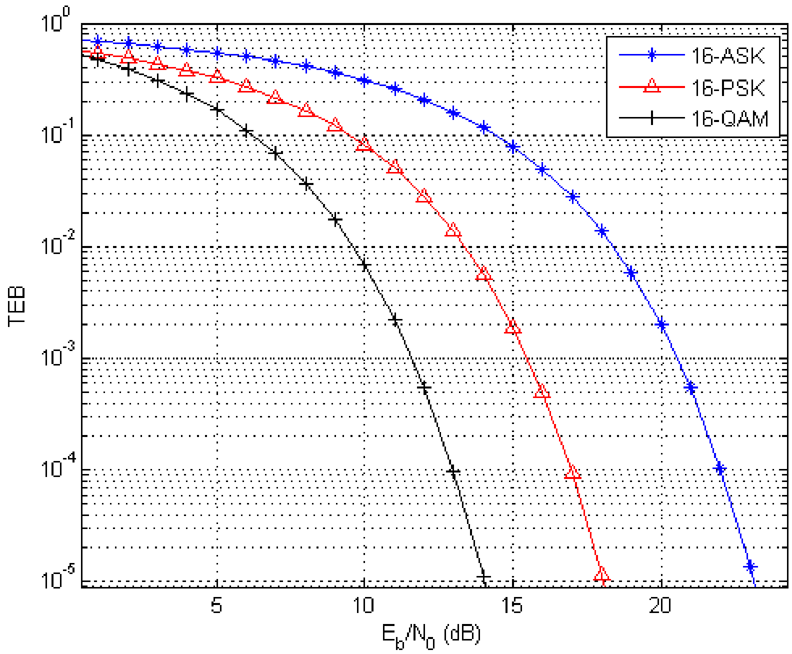

Fig. 19. Comparaison des TEB pour les modulations ASK, PSK et QAM dans le cas où $M = 16$

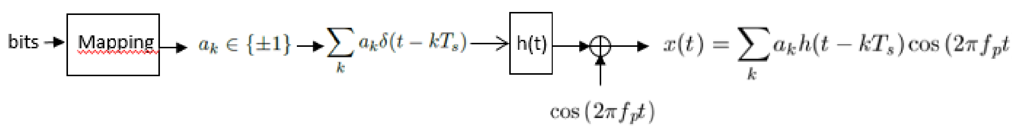

Fig. 20. Schéma d'un modulateur BPSK.

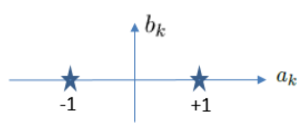

Fig. 21. Constellation BPSK.

i) Montrez que $G(f)$ satisfait le critère de Nyquist.
On utilise $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ pour arriver à :

$$G(f) = \begin{cases} \frac{T_s}{2} + \frac{T_s}{2}\cos(\pi f T_s) & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T_s} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{2}$$

On tombe sur un cosinus surélevé de roll off 1 qui permet de respecter le critère de Nyquist (se vérifie dans le domaine fréquentiel en traçant $G(f)$ et ses versions décalées $G\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$ et en les ajoutant pour voir que $\sum_k G\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = constante$).

ii) Quel est le choix optimal de $H(f)$ et $H_r(f)$ qui minimise le taux d'erreur symbole (TES) ?
Il faut respecter le critère de filtrage adapté (en plus du critère de Nyquist). Pour cela on prend :

$$H(f) = H_r(f) \begin{cases} \sqrt{T_s}\cos\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right) & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T_s} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{3}$$

iii) En considérant que le choix optimal a été effectué pour $H(f)$ et $H_r(f)$, exprimez le TEB de cette chaîne de transmission en fonction de E_b/N_0. On supposera les symboles émis équiprobables et indépendants.
S'il n'y a pas d'erreur de synhronisation dans le retour en bande de base, qu'on échantillonne aux instants optimaux et qu'on utilise un détecteur à seuil optimal (seuil en 0 ici) , on peut utiliser $TEB = TES = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$ car on est alors en présence d'une chaine BPSK avec des symboles à moyenne nulle et indépendants et qui respecte les critères de Nyquist et de filtrage adapté.

b) Dans le cas où on utilise les filtres d'émission $H(f)$ et de réception $H_r(f)$ donnés par :

$$H(f) = \begin{cases} T_s \cos^2\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right) & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T_s} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{4}$$

$$H_r(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T_s} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{5}$$

i) Montrez que $G(f) = H(f)H_r(f)$ satisfait le critère de Nyquist.
$G(f)$ n'a pas changé par rapport à la question précédente, le critère de Nyquist peut donc continuer à être respecté.

ii) Expliquez pourquoi le taux d'erreur binaire doit être supérieur à $Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$.
Le filtrage de réception n'est plus adapté à la forme d'onde reçue, le taux d'erreur binaire sera donc plus élevé que précédemment car le filtrage adapté permet de maximiser le SNR aux instants d'échantillonnage et donc de minimiser le TES (=TEB ici).

iii) Calculer le TEB de cette nouvelle chaîne de transmission en fonction de E_b/N_0.
On va utiliser pour cela la chaine passe-bas équivalente à la chaine de transmission sur porteuse donnée par la figure 22, où $x_e(t) = I(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s)$ représente l'enveloppe complexe associé au signal émis $x(t)$ (uniquement la voie en phase dans le cas d'une transmission BPSK) et $I_b(t)$ représente la voie en phase du bruit complexe équivalent au bruit réel ajouté par le canal de propagation (DSP égale à N_0).
On peut utiliser sur cette chaine passe-bas équivalente l'expression $TEB = TES = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma}\right)$ car les symboles émis sont indépendants et appartiennent à l'alphabet $\{\pm V\}$ avec $V = 1$, que $g(t) = h(t) * h_r(t)$ permet de respecter le critère de Nyquist si on échantillonne aux instants optimaux $t_0 + mT_s$ et que l'on utilise un détecteur à seuil avec seuil à 0. σ^2 représente la puissance du bruit en sortie du filtre de réception.
On calcule tout d'abord σ^2 : $\sigma^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = \frac{2N_0}{T_s}$
Puis l'énergie symbole E_s (attention c'est un paramètre physique, il s'agit de la véritable énergie reçue, pas celle calculée sur la chaine passe-bas équivalente) :
$E_s = P_{signal\ recu} T_s = P_x T_s = \frac{P_{x_e}}{2} T_s = \frac{1}{2}\sigma_a^2 \int_R |H(f)|^2 df = ... = \frac{3}{8} T_s$
En reportant dans l'expression du TEB on obtient : $TEB = Q\left(g(t_0)\sqrt{\frac{4E_s}{3N_0}}\right)$. On a ici $E_b = E_s$ (un bit codé par symbole) et $g(t_0) = 1$, d'où $TEB = Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{3N_0}}\right)$.

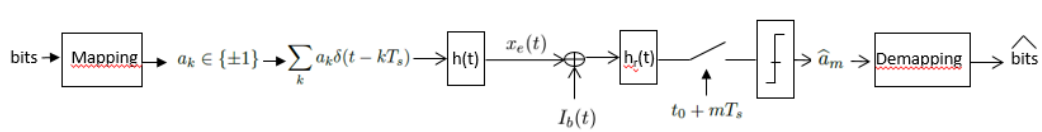

Fig. 22. Chaine passe-bas équivalent à une chaine de transmission BPSK.

iv) AN : Evaluer les TEBs obtenus aux questions a) et b) pour un E_b/N_0 de 10 dB.
Attention dans les expressions de TEBs déterminées précédemment le E_b/N_0 qui apparaît n'est pas en dB. Il faut le transformer en utilisant $\left[\frac{E_b}{N_0}\right]_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$.
Cela donne : $TEB = TES = Q\left(\sqrt{2}\right) = 0.0786$ pour la question a) (Nyquist + filtrage adapté).
$TEB = TES = Q\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 0.1241$ pour la question b) (Nyquist mais filtrage non adapté)

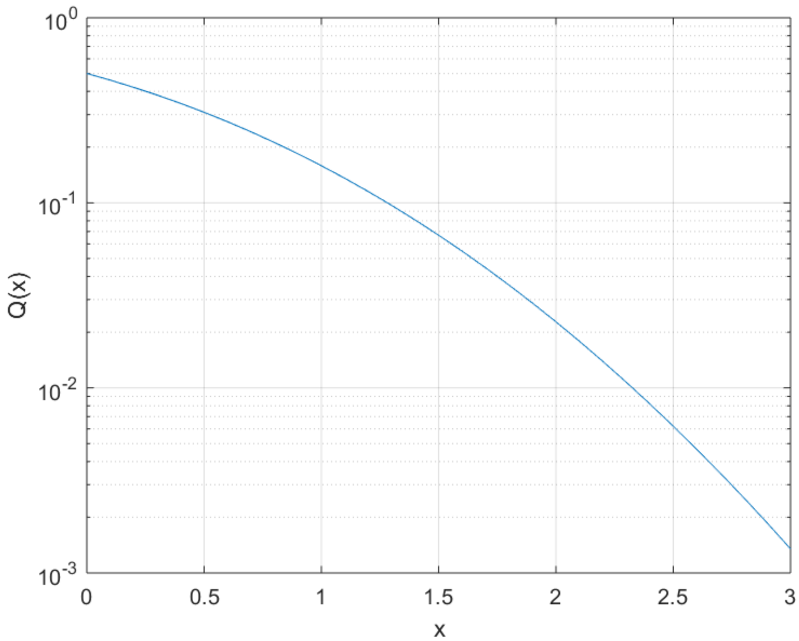

Fig. 23. Fonction $Q(x)$