Modélisation et Programmation – Session 2 – 17/04/2020

1h30 – Documents autorisés – Sans calculatrice

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Lisez le sujet avant de commencer. Traitez les exercices dans votre ordre de préférence.
Dans tous les exercices, vous veillerez à justifier vos résultats, par exemple en faisant apparaître le nom des règles utilisées, il en sera tenu compte dans la notation.

Exercice 1 Modéliser en logique des propositions, sous la forme de formules bien formées, l'énoncé suivant : « Les animaux noctures dorment pendant la journée sauf s'ils sont perturbés. Si je croise un animal dans la journée, alors il est soit diurne, soit noctune perturbé. »

Exercice 2 Modéliser en logique des prédicats, sous la forme de formules bien formées, l'énoncé suivant : « Tous les animaux qui mangent de la viande sont carnivores ou omnivores. Le loup est carnivore alors il mange de la viande. »

Exercice 3 Soient A, B et C des variables propositionnelles, montrer, **en utilisant les propriétés des opérateurs de logique des propositions** rappelées en annexe A, que la formule suivante est une tautologie :

$$(A \to \neg B) \to ((C \to B) \to (A \to \neg C))$$

Exercice 4 Soient A, B et C des variables propositionnelles, montrer, **en utilisant la déduction naturelle constructive (c'est-à-dire sans les règles du tiers-exclu (TE dans le résumé de cours) et de l'absurde classique (A dans le résumé de cours))**, que la formule suivante est une tautologie :

$$((A \to C) \vee (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)$$

Exercice 5 Soient A, B et C des variables propositionnelles, montrer, **en utilisant la déduction naturelle classique (y compris les règles du tiers-exclu ou de l'absurde classique)**, que la formule suivante est une tautologie :

$$(A \to B) \to ((\neg C \to \neg B) \to (A \to C))$$

Exercice 6 Prouver la correction totale du triplet de Hoare suivant pour un programme calculant le carré `R` d'un entier positif `N`. Nous vous suggérons d'exploiter $\mathtt{R}+\mathtt{X}^2 = \mathtt{N}^2$ comme invariant et `X` comme variant. Vous compléterez l'invariant si nécessaire pour construire la preuve. Vous détaillerez sur la page suivante la preuve des obligations obtenues.
$\{\mathtt{N} \geq 0\}$

```
X := N;
R := 0;
while (X <> 0) do
        R := R + 2 * X - 1;
        X := X - 1;
od
```

$\{\mathtt{R} = \mathtt{N}^2\}$

Exercice 7 Nous considérons la spécification des entiers et des listes munie des équations étudiées en cours et travaux dirigés :

(a) $\forall n \in \mathtt{entier}.\ \text{somme}(\mathtt{Zero}, n) = n$
(b) $\forall n, m \in \mathtt{entier}.\ \text{somme}(\mathtt{Succ}(n), m) = \mathtt{Succ}(\text{somme}(n, m))$
(c) $\forall n_1, n_2, n_3 \in \mathtt{entier}.\ \text{somme}(n_1, \text{somme}(n_2,n_3)) = \text{somme}(\text{somme}(n_1, n_2), n_3)$
(d) $\forall l \in \mathtt{liste}(A).\ \mathtt{append}(\mathtt{Nil},l) = l$
(e) $\forall t \in A.\forall l, q \in \mathtt{liste}(A).\ \mathtt{append}(\mathtt{Cons}(t, q),l) = \mathtt{Cons}(t, \mathtt{append}(q,l))$
(f) $\forall l \in \mathtt{liste}(A).\ \mathtt{append}(l,\mathtt{Nil}) = l$
(g) $\forall l_1, l_2, l_3 \in \mathtt{liste}(A).\ \mathtt{append}(l_1,\mathtt{append}(l_2,l_3)) = \mathtt{append}(\mathtt{append}(l_1,l_2),l_3)$
(h) $\text{rev}(\mathtt{Nil}) = \mathtt{Nil}$
(i) $\forall t \in A.\forall q \in \mathtt{liste}(A).\ \mathtt{rev}(\mathtt{Cons}(t, q)) = \mathtt{append}(\mathtt{rev}(q),\mathtt{Cons}(t, \mathtt{Nil}))$
(j) $\forall l_1, l_2 \in \mathtt{liste}(A).\ \mathtt{rev}(\mathtt{append}(l_1,l_2)) = \mathtt{append}(\mathtt{rev}(l_2),\mathtt{rev}(l_1))$
(k) $\forall l \in \mathtt{liste}(A).\ \mathtt{rev}(\mathtt{rev}(l)) = l$

Nous complétons cette spécification par la fonction taille(l) qui calcule le nombre d'éléments de la liste l et renvoie l'entier correspondant.
Le comportement de cette fonction peut être modélisé par les équations suivantes :

(l) $\forall l \in \mathtt{liste}(A).\ \text{taille}(\mathtt{Nil}) = \mathtt{Zero}$
(m) $\forall t \in A, \forall q \in \mathtt{liste}(A),\ \text{taille}(\mathtt{Cons}(t, q)) = \mathtt{Succ}(\text{taille}(q)))$

En utilisant ces équations comme des axiomes et en introduisant si nécessaire des lemmes intermédiaires, montrer que ces opérations vérifient les propriétés suivantes :

$$\text{(n) } \forall l_1, l_2 \in \texttt{liste}(A).\ \ \text{taille}(\text{append}(l_1,l_2)) = \text{somme}(\text{taille}(l_1),\ \text{taille}(l_2))$$

$$\text{(o) } \forall l \in \texttt{liste}(A).\ \ \text{taille}(\text{rev}(l)) = \text{taille}(l)$$

Exercice 8 L'affichage d'un nombre complexe est composée de :

- Un nombre entier relatif, la partie réelle
- Un nombre entier relatif, la partie imaginaire, dont l'affichage est suivi du caractère `i`
- La partie réelle est affichée si elle n'est pas nulle ou si la partie imaginaire est nulle
- La partie imaginaire est affichée si elle n'est pas nulle
- Lorsqu'elles sont affichées, les parties réelles et imaginaires peuvent apparaître dans n'importe quel ordre et doivent être séparées par le caractère `+` ou le caractère `-` selon le signe de la partie affichée en second

L'affichage d'un nombre entier relatif est composé de :

- Une suite non vide de chiffres
- Précédé du caractère `-` si le nombre est strictement négatif
- Le chiffre `0` ne doit apparaître au début de l'affichage du nombre que si celui-ci est nul

1. Donner une expression régulière modélisant le langage des nombres complexes.
2. Donner une grammaire au format graphique de Conway modélisant ce langage.
3. Donner une grammaire au format des règles de production modélisant ce langage.

A Logique des propositions : Vision sémantique

A.1 Tables de vérité

La sémantique de $\top$ (respectivement $\bot$) est représenté par V (respectivement F).

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V

A.2 Relation d'équivalence sémantique des formules bien formées

$\varphi = \psi$ si et seulement si les deux formules bien formées φ et ψ ont la même table de vérité.

	$A \rightarrow B = \neg A \vee B$ $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \ \wedge \ (B \rightarrow A)$
Idempotence	$A \wedge A = A$ $A \vee A = A$
	$A \wedge \neg A = \bot$ $A \vee \neg A = \top$ $A \wedge \bot = \bot$ $A \wedge \top = A$ $A \vee \bot = A$ $A \vee \top = \top$ $\neg\neg A = A$
Commutativité	$A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$
Associativité	$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
Distributivité	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
De Morgan	$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
Simplification	$A \vee (\neg A \wedge B) = A \vee B$ $A \wedge (\neg A \vee B) = A \wedge B$ $A \vee (A \wedge B) = A$ $A \wedge (A \vee B) = A$

B Logique des propositions : Vision syntaxique

B.1 Déduction naturelle constructive

Hypothèse	$\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ \text{Hyp}$

Opérateur	Introduction	Elimination
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}\ I_{\rightarrow}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_{\rightarrow}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ I_{\wedge}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\wedge}^{G} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_{\wedge}^{D}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_{\vee}^{G} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_{\vee}^{D}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \chi \quad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}\ E_{\vee}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ I_{\neg}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ E_{\neg}$
$\bot$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ I_{\bot}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\bot}$

B.2 Déduction naturelle classique

Tiers-exclu	Preuve par l'absurde
$\dfrac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi}\ \text{TE}$	$\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ \text{Abs}$

C Logique des prédicats : Vision sémantique

C.1 Relation d'équivalence sémantique des formules bien formées

$\varphi = \psi$ si et seulement si les deux formules bien formées φ et ψ ont la même sémantique, c'est à dire sont valides sémantiquement pour les mêmes modèles $(\forall \mathcal{M}, (\mathcal{M} \models \varphi) \leftrightarrow (\mathcal{M} \models \psi))$.

$\mathcal{U} \neq \emptyset$	$\forall x.\, \varphi = \bigwedge_{x \in \mathcal{U}} \varphi$	$\exists x.\, \varphi = \bigvee_{x \in \mathcal{U}} \varphi$
$\mathcal{U} = \emptyset$	$\forall x.\, \varphi = \top$	$\exists x.\, \varphi = \bot$

$$
\begin{array}{rl}
\forall x.\, \varphi = \varphi & x \notin VL(\varphi) \wedge \mathcal{U} \neq \emptyset \\
\exists x.\, \varphi = \varphi & x \notin VL(\varphi) \wedge \mathcal{U} \neq \emptyset \\
\forall x.\, \varphi = \forall y.\, [y/x]\, \varphi & y \text{ inutilisée} \\
\exists x.\, \varphi = \exists y.\, [y/x]\, \varphi & y \text{ inutilisée} \\
\forall x.\, (\forall y.\, \varphi) = \forall y.\, (\forall x.\, \varphi) & \\
\exists x.\, (\exists y.\, \varphi) = \exists y.\, (\exists x.\, \varphi) & \\
\neg(\forall x.\, \varphi) = \exists x.\, (\neg \varphi) & \\
\neg(\exists x.\, \varphi) = \forall x.\, (\neg \varphi) & \\
\forall x.\, (\varphi \to \psi) = (\exists x.\, \varphi) \to \psi & x \notin VL(\psi) \\
\forall x.\, (\varphi \to \psi) = \varphi \to (\forall x.\, \psi) & x \notin VL(\varphi) \\
\exists x.\, (\varphi \to \psi) = (\forall x.\, \varphi) \to \psi & x \notin VL(\psi) \wedge \mathcal{U} \neq \emptyset \\
\exists x.\, (\varphi \to \psi) = \varphi \to (\exists x.\, \psi) & x \notin VL(\varphi) \wedge \mathcal{U} \neq \emptyset \\
\forall x.\, (\varphi \wedge \psi) = (\forall x.\, \varphi) \wedge (\forall x.\, \psi) & \\
\forall x.\, (\varphi \vee \psi) = (\forall x.\, \varphi) \vee \psi & x \notin VL(\psi) \\
\exists x.\, (\varphi \vee \psi) = (\exists x.\, \varphi) \vee (\exists x.\, \psi) & \\
\exists x.\, (\varphi \wedge \psi) = (\exists x.\, \varphi) \wedge \psi & x \notin VL(\psi)
\end{array}
$$

D Logique des prédicats : Vision syntaxique

D.1 Déduction naturelle constructive

Opérateur	Introduction	Elimination
$\forall.$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x.\, \varphi}\ I_\forall\ (x \notin VL(\Gamma))$	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x.\, \varphi}{\Gamma \vdash [t/x]\, \varphi}\ E_\forall$
$\exists.$	$\dfrac{\Gamma \vdash [t/x]\, \varphi}{\Gamma \vdash \exists x.\, \varphi}\ I_\exists$	$\dfrac{\Gamma \vdash \exists x.\, \varphi}{\Gamma \vdash [f(\vec{x})/x]\, \varphi}\ E_\exists^{SK}\ (\vec{x} = VL(\Gamma) \cup VL(\exists x.\, \varphi))$ $\dfrac{\Gamma \vdash \exists x.\, \varphi \qquad \Gamma,\, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_\exists^{MP}\ (x \notin VL(\Gamma) \cup VL(\psi))$

E Logique de Floyd/Hoare

$$\dfrac{}{\{\psi\}\,\text{skip}\,\{\psi\}}\ \text{skip} \qquad \dfrac{}{\{[E/x]\,\psi\}\ x := E\ \{\psi\}}\ \text{assign}$$

$$\dfrac{\{\varphi\}\, P\, \{\chi\} \qquad \{\chi\}\, Q\, \{\psi\}}{\{\varphi\}\, P\, ;Q\, \{\psi\}}\ \text{sequence}$$

$$\dfrac{\{\varphi \wedge C\}\, P\, \{\psi\} \qquad \{\varphi \wedge \neg C\}\, Q\, \{\psi\}}{\{\varphi\}\ \text{if } C \text{ then } P \text{ else } Q \text{ fi}\ \{\psi\}}\ \text{conditional}$$

$$\dfrac{\{\varphi \wedge C\}\, P\, \{\varphi\}}{\{\varphi\}\ \text{while } C \text{ invariant } \varphi \text{ do } P \text{ od}\ \{\varphi \wedge \neg C\}}\ \text{partial loop}$$

$$\dfrac{\{\varphi \wedge C \wedge E \in \mathbb{N} \wedge V = E\}\, P\, \{\varphi \wedge E \in \mathbb{N} \wedge V > E\}}{\{\varphi \wedge E \in \mathbb{N}\}\ \text{while } C \text{ invariant } \varphi \text{ variant } E \text{ do } P \text{ od}\ \{\varphi \wedge \neg C\}}\ \text{total loop}$$

$$\dfrac{\varphi \to \chi \qquad \{\chi\}\, P\, \{\psi\}}{\{\varphi\}\, P\, \{\psi\}}\ \text{weaken} \qquad \dfrac{\{\varphi\}\, P\, \{\chi\} \qquad \chi \to \psi}{\{\varphi\}\, P\, \{\psi\}}\ \text{strengthen}$$

F Expressions régulières : Equivalence sémantique

L'opérateur de concaténation/juxtaposition . est implicite pour ne pas surcharger l'écriture des expressions : $e_1.e_2$ est notée $e_1\, e_2$.

$$
\begin{array}{ll}
\emptyset\, e = e\, \emptyset = \emptyset & \Lambda\, e = e\, \Lambda = e \\
e \mid \emptyset = \emptyset \mid e = e & e \mid e = e \\
e_1\, (e_2\, e_3) = (e_1\, e_2)\, e_3 & e_1 \mid (e_2 \mid e_3) = (e_1 \mid e_2) \mid e_3 \\
e_1\, (e_2 \mid e_3) = (e_1\, e_2) \mid (e_1\, e_3) & (e_1 \mid e_2)\, e_3 = (e_1\, e_2) \mid (e_1\, e_3) \\
e_1 \mid e_2 = e_2 \mid e_1 & \emptyset^\star = \Lambda^\star = \Lambda \\
e^\star = \Lambda \mid e^+ & e^+ = e\, e^\star = e^\star\, e \\
e^\star\, e^\star = e^\star & e^{\star\star} = e^\star \\
e = e^\star \Leftrightarrow e = e\, e \wedge e \neq \emptyset & e\, e^\star = e^\star \Leftrightarrow \Lambda \in L(e) \\
(e_1^\star\, e_2^\star)^\star = (e_1 \mid e_2)^\star = (e_1^\star \mid e_2^\star)^\star & \\
(e_1^\star\, e_2)^\star\, (e_1^\star) = (e_1 \mid e_2)^\star = e_1^\star\, (e_2\, (e_1^\star))^\star &
\end{array}
$$