Intégration et Applications

Motivations

Olivier Cots, Serge Gratton & Ehouarn Simon

1er octobre 2019

INP TOULOUSE ENSEEIHT

Les objectifs :

- Construire l'intégrale au sens de Lebesgue :

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu \ ;$$

- Calculer des intégrales par passage à la limite, changement de variables, etc.

L'intégrale de Riemann d'une fonction bornée $f\colon [a\,,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a < b$ dans $\mathbb{R}$, se construit à partir de la notion de fonction en escalier :

Définition – Subdivision

On appelle *subdivision* de $[a\,,b]$ toute suite finie du type :

$$\Delta := \{x_0 = a < x_1 \cdots < x_n = b\}.$$

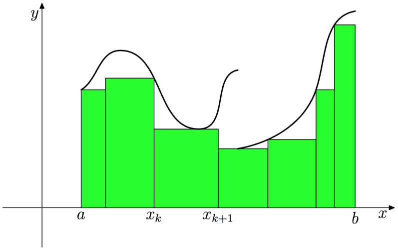
Définition – Fonction en escalier

Une fonction $f\colon [a\,,b] \to \mathbb{R}$ est dite en *escalier* s'il existe une subdivision $\Delta := \{x_0 = a < x_1 \cdots < x_n = b\}$ de $]a\,,b[$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_k\,,x_{k+1}[$.

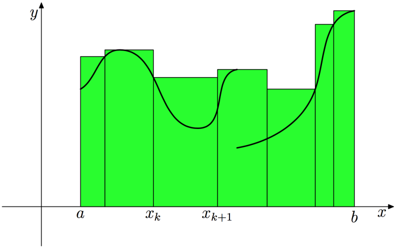
Pour une fonction bornée $f\colon [a\,,b] \to \mathbb{R}$, on définit ses *sommes de Darboux inférieure* $S_\Delta(f)$ et *supérieure* $S^\Delta(f)$ par :

$$S_\Delta(f) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f, \qquad S^\Delta(f) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f.$$

Voici une illustration :



$S_\Delta(f)$



$S^\Delta(f)$

Les *intégrales de Riemann inférieure* $I_*(f)$ et *supérieure* $I^*(f)$ sont définies par :

$$I_*(f) \coloneqq \sup_{\Delta} S_{\Delta}(f), \qquad I^*(f) \coloneqq \inf_{\Delta} S^{\Delta}(f),$$

le supremum et l'infimum étant pris sur toutes les subdivisions Δ de $[a\,,b]$.

On a alors :

Définition – Intégrale de Riemann

On dit que $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ bornée est *Riemann intégrable* si $I_*(f) = I^*(f)$. Dans ce cas, on définit son *intégrale au sens de Riemann* par :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \coloneqq I_*(f) = I^*(f).$$

Proposition

Soit f une fonction en escalier sur $[a\,,b]$ et $\{x_0 = a < x_1 \cdots < x_n = b\}$ une subdivision associée à f, la valeur constante de f sur $]x_{k-1}\,,x_k[$ étant notée c_k. Alors f est Riemann intégrable sur $[a\,,b]$ et on a :

$$\int_a^b f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\,c_k.$$

Proposition

Toute fonction $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, bornée et continue sauf en un nombre fini de points est Riemann intégrable.

Proposition

Si f est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$, alors f est elle-même Riemann intégrable sur $[a, b]$.

Exemple (Une fonction bornée non R-intégrable). Soit $E := [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ et $f := \mathbb{1}_E$.

- L'intégrale de Lebesgue que nous allons construire dans ce cours au chapitre 3 généralise celle de Riemann.

De plus :

- L'espace de départ n'est pas nécaisserement $\mathbb{R}$: on découpe l'espace d'arrivée et on introduit pour cela la notion de fonction étagée, cf. 3.1 (dans le poly).

Remarque : si $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier alors elle est étagée sur l'espace mesuré $([a\,,b], \mathcal{B}([a\,,b]), \lambda)$, où $\mathcal{B}([a\,,b])$ est la tribu des boréliens de $[a\,,b]$, cf. 2.1, et où λ est la mesure de Lebesgue, cf. 2.2.

- Pour l'intégrale de Riemann, on a

$$\int_a^b \mathrm{d}x = b - a = \lambda([a\,,b]) = \text{" mesure de Lebesgue de l'intervalle } [a\,,b] \text{ ",}$$

i.e. ici sa longueur. On va généraliser la notion de mesure au chapitre 2.2 (utile en probabilités par exemple).

▪ L'ensemble des fonctions Lebesgue intégrable est beaucoup plus grand que celui de fonctions R-intégrable. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est Lebesgue intégrable pour la mesure de Lebesgue.

Remarque : On devra introduire la notion de fonction mesurable, cf. 2.3.

▪ Les théorèmes de passage à la limite que nous présenterons au chapitre 5 sont généraux et sous des hypothèses (convergence simple + domination) plus pratique que l'hypothèse de convergence uniforme.

Passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

▪ L'ensemble des fonctions (de carré) intégrables au sens de Lebesgue est complet ce qui en fait un espace approprié pour la géométrie, l'optimisation, etc.

- On a vu en cours d'automatique :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad \text{avec } f \ \mathcal{C}^0 \Rightarrow \text{la solution } x(\cdot) \text{ est } \mathcal{C}^1,$$

$$\dot{x}(t) = f_u(t, x(t)) = f(x(t), u(t)), \quad \text{avec } f \ \mathcal{C}^0 \text{ et } u \in L^\infty \Rightarrow \text{la solution } x(\cdot) \text{ est AC},$$

où AC signifie absolument continue, et donc dans ce cas la solution est dérivable presque partout. Cette notion sera détaillée au chapitre 4.

Dans L^2 et de dérivée faible L^2

(Lipschitz) (Absolument continue)

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{C}^1 & \subset & \mathrm{Lip} & \subset & H^1 & \subset & AC & \subset & \mathcal{C}^0 \\ \Big\downarrow \scriptstyle\text{fort} & & \Big\downarrow \scriptstyle\text{faible} & & \Big\downarrow \scriptstyle\text{faible} & & \Big\downarrow \scriptstyle\text{faible} & & \\ \mathcal{C}^0 & & L^\infty & & L^2 & & L^1 & & \end{array}$$

AU SENS

(essentiellement bornée) (de carré intégrable) (intégrable au sens de Lebesgue)

Il y aura 6 séances de cours.

- Chapitre 1. Quelques rappels (laissés aux étudiants)
- Chapitre 2. Théorie de la mesure : tribus, mesures, fonctions mesurables
- Chapitre 3. Intégrales des fonctions mesurables
- Chapitre 4. Ensembles négligeables
- Chapitre 5. Théorèmes limites et applications
- Chapitre 6. Mesure produit et théorème de Fubini

Il y aura 4 séances de TD et 3 sujets :

- TD1. Fonctions mesurables, mesures
- TD2. Intégrales de fonctions mesurables positives : convergence monotone, lemme de Fatou. . .
- TD3. Intégrales de fonctions mesurables : convergence dominée, Fubini, changement de variables, intégrales à paramètres. . .