Intégration et Applications

Chapitre 7 : Perspectives probabilistes

Olivier Cots, Serge Gratton & Ehouarn Simon

10 octobre 2019

Le but de ce chapitre 7 est :

- d'exposer brièvement les liens entre les probabilités, et les théories de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue (A. Kolmogorov).

Chapitre 7 : Perspectives probabilistes

- 7.1 Cadre mathématique
- 7.2 Loi discrète
- 7.3 Loi à densité

7.1 Cadre mathématique

Définition – Espace "probabilisé"

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace mesuré avec

- Ω : espace fondamental de l'épreuve (espace des "éventualités"),
- $\mathcal{A}$: tribu sur Ω des "évenements" (ensemble d'éventualités).
- P : mesure de probabilité sur $\mathcal{A}$.

Définition – Variable aléatoire réelle

Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
X est une variable aléatoire réelle si X est mesurable.

Remarque. Notations
On parlera de v.a.r. pour variable aléatoire réelle. Soit X une v.a.r.. Alors $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. On adoptera les notations

$$(X \in B) := X^{-1}(B) \text{ et } P(X \in B) := P(X^{-1}(B)).$$

Définition – Loi de X

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace "probabilisé" et X une v.a.r. On définit

$$P_X \quad : \quad \begin{array}{rl} \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to & \bar{\mathbb{R}}_+ \\ B \to & P(X^{-1}(B)) \end{array}.$$

P_X est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, appelé loi de la variable X.

Remarque. La loi de la variable X est en fait la mesure image de P par X (cf TD 1).

Définition – Fonction de répartition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace "probabilisé" et X une v.a.r. P_X est une mesure de probabilité. Elle est caractérisée par ses valeurs sur les intervalles de la forme $]-\infty, t]$ avec $t \in \mathbb{R}$. On définit ainsi sa fonction de répartition, notée F_X par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) := P_X(]-\infty, t]) = P((X^{-1}(]-\infty, t])) = P(X \leq t).$$

Définition – Espérance mathématique

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace "probabilisé" et X une v.a.r. positive ou intégrable (c.a.d $\int_{\Omega} |X| \,\mathrm{d}P < +\infty$). On définit l'espérance mathématique de X, notée $E[X]$, par

$$E[X] = \int_{\Omega} X \,\mathrm{d}P.$$

Remarque. Cette formule de l'espérance n'est pas forcément pratique pour son calcul. Il s'agit de l'intégrale sur l'espace fondamental Ω vis-à-vis de la mesure P, ce qui renvoie à un cadre plutôt abstrait. On va donc chercher à se ramener à des espaces mesurés pour lesquels on maitrise mieux les calculs.

Théorème – Mesure image

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace "probabilisé", X une v.a.r. et $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\phi(X)$ est intégrable. Alors

$$E[\phi(X)] = \int_\Omega \phi(X)\,\mathrm{d}P = \int_\mathbb{R} \phi\,\mathrm{d}P_X.$$

Idée : Revenir aux fonctions étagées mesurables positives, puis passer à la limite.

Corollaire – Cas particulier

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace "probabilisé" et X une v.a.r. positive ou intégrable. On a

$$E[X] = \int_\mathbb{R} x\,\mathrm{d}P_X(x).$$

- *(Preuve du théorème de la mesure image).*

i) On suppose que $\phi = \mathbb{1}_B$ avec $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. ϕ est mesurable (positive) et on a

$$\phi(X) = \mathbb{1}_B \circ X = \mathbb{1}_{X^{-1}(B)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} E[\phi(X)] &= \int_\Omega \mathbb{1}_{X^{-1}(B)} \,\mathrm{d}P \\ &= P(X^{-1}(B)) \\ &= P_X(B) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B \,\mathrm{d}P_X \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi \,\mathrm{d}P_X. \end{aligned}$$

ii) On suppose que $\phi \in \mathcal{F}_+^0$. On note $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{B_i}$ avec $\forall i = 1 : n, a_i \geq 0, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

ϕ est mesurable (positive) et on a

$$\begin{aligned}
E[\phi(X)] &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i (\mathbb{1}_{B_i} \circ X) \, \mathrm{d}P \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_\Omega \mathbb{1}_{B_i} \circ X \, \mathrm{d}P \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B_i} \, \mathrm{d}P_X \quad \text{(par } i\text{))} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{B_i} \, \mathrm{d}P_X \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi \, \mathrm{d}P_X .
\end{aligned}$$

iii) On suppose que que $\phi \in \mathcal{F}_+$.
Alors $\exists(\phi_n)$ une suite croissante de fonctions étagées mesurables positives qui converge simplement vers ϕ. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n \,\mathrm{d}P_X = \int_{\mathbb{R}} \phi \,\mathrm{d}P_X.$$

De même, la suite $(\phi_n(X))$ est une suite croissante de fonctions étagées mesurables positives qui converge simplement vers $\phi(X)$. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega} \phi_n(X) \,\mathrm{d}P = \int_{\Omega} \phi(X) \,\mathrm{d}P.$$

D'après *ii*), on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{\Omega} \phi_n(X) \,\mathrm{d}P = \int_{\mathbb{R}} \phi_n \,\mathrm{d}P_X$. A la limite, il vient

$$E[\phi(X)] = \int_{\Omega} \phi(X) \,\mathrm{d}P = \int_{\mathbb{R}} \phi \,\mathrm{d}P_X.$$

iv) On suppose que que $\phi \in \mathcal{F}$. Le résultat suit en appliquant *iii*) aux parties positive et négative de ϕ.

$\blacksquare$

7.2 Loi discrète

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace "probabilisé". X une v.a.r. est de loi discrète si elle est à valeurs dans une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$. Dans la suite on supposera que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Proposition – Mesure image

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace "probabilisé", X une v.a.r. de loi discrète. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(X = n) = P_X(\{n\})).$$

On a

$$P_X = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_n.$$

P_X est ainsi la mesure de probabilité discrète.

- Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a

$$
\begin{aligned}
P_X(B) &= P(X \in B) \\
&= P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}) \\
&= P(\cup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B \cap \{n\}\}) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B \cap \{n\}\}) \quad \text{(éléments disjoints 2 à 2)} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N} \cap B} \underbrace{P(X = n)}_{= p_n} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \mathbb{1}_B(n) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_n(B).
\end{aligned}
$$

■

Proposition – Mesure image

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace "probabilisé", X une v.a.r. de loi discrète. On a

$$E[X] = \sum_{n\in\mathbb{N}} n p_n.$$

De plus, $\forall \phi$ définie sur $\mathbb{N}$ et mesurable, on a

$$E[\phi(X)] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi(n) p_n.$$

- On a

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\mathbb{R}} x \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \,\mathrm{d}\delta_n(x) \quad \left(= \int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{d}P_X(x)\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{d}\delta_n(x) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n n \quad \left(\text{car } \int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{d}\delta_n(x) = n, \text{ cf TD2}\right) \end{aligned}$$

7.3 Loi à densité

Définition – Mesure à densité

Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
μ est dite avoir pour densité la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ (par rapport à λ) si

$$\forall \phi \in \mathcal{F}_+, \quad \int_{\mathbb{R}} \phi \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} \phi f \, \mathrm{d}\lambda.$$

En particulier $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mu(B) = \displaystyle\int_B f \, \mathrm{d}\lambda.$

Remarque. Soit P une mesure de probabilité ayant pour densité la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\lambda = P(\mathbb{R}) = 1.$$

Dans le **cadre des probabilités**, on dit que X v.a.r. admet pour densité f si $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X(B) = \int_B f \, \mathrm{d}\lambda$, avec f mesurable positive telle que $\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\lambda = 1$.
C'est un **abus de langage** : ce n'est pas X qui admet une densité, mais la mesure image P_X, qui dépend naturellement de X.

Proposition – Mesure image

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace "probabilisé", X une v.a.r. positive ou intégrable "admettant" une densité f. On a

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

De plus, $\forall \phi \in \mathcal{F}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\phi(X)$ est intégrable, on a

$$E[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

- La preuve est similaire à celle du théorème de la mesure image. ■

Remarque. S'étant ramené à l'intégrale vis-à-vis de la mesure de Lebesgue, les calculs se feront en pratique via les liens entre les intégrales de Riemann (impropres) et Lebesgue sur des segments et intervalles. On aura ainsi

$$E[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)dx.$$