

## Troisième partie

# L'équité dans les systèmes de transitions



# Plan

- 1 Contraintes d'équité
- 2 Équité sur les états
  - Équité simple
  - Équité multiple
  - Équité conditionnelle
- 3 Équité sur les transitions
  - Équité faible
  - Équité forte
  - Équité sur les étiquettes



## Contraintes d'équité / *fairness*



Les contraintes d'équité spécifient que certains états (resp. certaines transitions) doivent être visités (resp. exécutés) **infiniment souvent** dans toute exécution du programme.

D'une façon générale, les contraintes d'équité servent à contraindre un programme ou son environnement à être **vivace**, sans entrer dans les détails concernant la réalisation pratique de ces contraintes.

Les contraintes d'équité **réduisent** l'ensemble des exécutions légales, en éliminant les exécutions qui ne respectent pas les contraintes d'équité.



# États récurrents



## Ensemble récurrent d'états

Soit  $\mathcal{S} = \langle S, I, R \rangle$  un système de transitions et  $\sigma = \langle s_0 \rightarrow \dots \rangle$  une exécution.

Un ensemble d'états  $P$  est **récurrent** dans  $\sigma$  si :

- cas  $\sigma$  infinie :  $\forall i \in \mathbb{N} : \exists j \geq i : s_j \in P$   
( $P$  apparaît une infinité de fois dans  $\sigma$ ).
- cas  $\sigma$  finie : l'état final de  $\sigma$  est dans  $P$ .

$\text{Inf}_{\mathcal{S}}(P, \sigma) \triangleq P$  est un ensemble récurrent d'états dans  $\sigma$ .

Note : on dit aussi *infiniment souvent présent* dans  $\sigma$ .



# Transitions récurrentes



## Ensemble récurrent de transitions

Soit  $\mathcal{S} = \langle S, I, R \rangle$  un système de transitions et  $\sigma = \langle s_0 \rightarrow \dots \rangle$  une exécution.

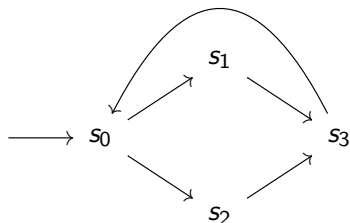
Un ensemble de transitions  $Q$  est **récurrent** dans  $\sigma$  si :

- cas  $\sigma$  infinie :  $\forall i \in \mathbb{N} : \exists j \geq i : s_j \rightarrow s_{j+1} \in Q$   
(des transitions de  $Q$  apparaissent une infinité de fois dans  $\sigma$ ).
- cas  $\sigma$  finie : la transition finale de  $\sigma$  est dans  $Q$   
( $\sigma = \langle s_0 \rightarrow \dots \rightarrow s \rightarrow s' \rangle \wedge s \rightarrow s' \in Q$ ).

$\text{Inf}_T(Q, \sigma) \triangleq Q$  est un ensemble récurrent de transitions dans  $\sigma$ .



## Exemple - états récurrents



$s_1$	récurrent dans	$\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$
$s_1$	récurrent dans	$\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$
$s_1$	pas récurrent dans	$\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3)^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$

$s_1 \rightarrow s_3$	récurrente dans	$\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$
$s_1 \rightarrow s_3$	pas récurrente dans	$\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3)^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$



# Plan

- 1 Contraintes d'équité
- 2 Équité sur les états
  - Équité simple
  - Équité multiple
  - Équité conditionnelle
- 3 Équité sur les transitions
  - Équité faible
  - Équité forte
  - Équité sur les étiquettes



# Équité simple sur les états



## Équité simple

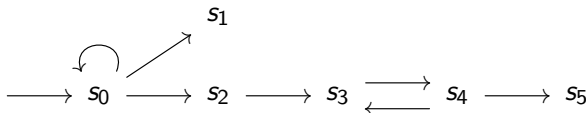
On se donne  $F \subseteq S$  un ensemble d'états équitables.  
Alors toute exécution  $\sigma$  doit être telle que  $\text{Inf}_S(F, \sigma)$ .

$F$  est récurrent dans  $\sigma$ , i.e.  $\sigma$  contient une infinité d'états dans  $F$  (cas  $\sigma$  infini), ou le dernier état de  $\sigma$  est dans  $F$  (cas  $\sigma$  fini).





## Exemple - équité simple

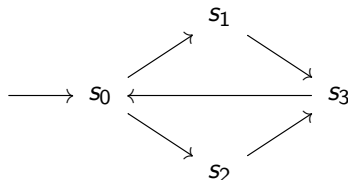


$$\begin{aligned} \text{Exec}(S) = & \langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \\ & \langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle \end{aligned}$$

Équité simple	Exécutions
$\{s_0\}$	$\langle s_0^\omega \rangle$
$\{s_1, s_4\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle$
$\{s_1, s_5\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$



## Exemple - équité simple



On fixe : équité simple sur  $\{s_1\}$ .

légale  $\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$

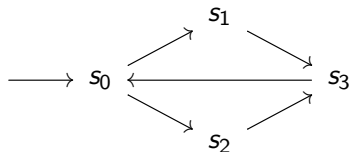
légale  $\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$

illégale  $\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3)^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$

légale  $\langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^*)^\omega \rangle$



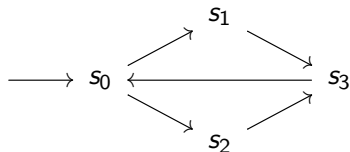
## Exemple - équité simple



$Exec(S) =$

Équité simple	
$\{s_1\}$	
$\{s_1, s_2\}$	

## Exemple - équité simple

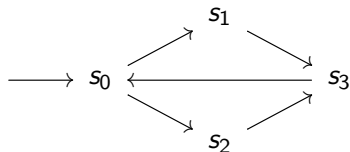


$$Exec(S) = \langle ((s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3)^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^*)^\omega \rangle$$

(au mot vide près)

Équité simple	
$\{s_1\}$	
$\{s_1, s_2\}$	

## Exemple - équité simple



$$Exec(S) = \langle ((s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3)^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^*)^\omega \rangle$$

(au mot vide près)

Équité simple	Exécutions
$\{s_1\}$	$\langle ((s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3)^+ \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^*)^\omega \rangle$
$\{s_1, s_2\}$	<i>toutes</i>

Note : avec équité simple sur  $\{s_1\}$ , l'exécution  $\langle ((s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3) \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^{10000})^\omega \rangle$  est légale, ainsi qu'une exécution où  $s_1$  serait de moins en moins souvent choisi par rapport à  $s_2$  : équité informatique  $\neq$  équité sociale !



# Équité multiple sur les états



## Équité multiple

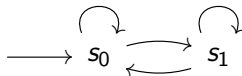
On se donne un ensemble dénombrable, indexable par un ensemble d'entiers  $J = \{0, 1, 2, \dots\}$ , d'ensembles équitables  $\{F_i\}_{i \in J}$ .  
Toute exécution  $\sigma$  doit être telle que  $\forall i \in J : \text{Inf}_S(F_i, \sigma)$ .

Exécutions vérifiant l'équité multiple = **intersection** des exécutions vérifiant l'équité simple sur chacun des  $F_i$ .

$\Rightarrow$  l'équité simple est un cas particulier de l'équité multiple.



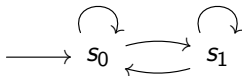
## Exemple - équité multiple



$Exec(S) =$

Équité simple/multiple	
$\{s_0\}$	
$\{s_0, s_1\}$	
$\{s_0\}\{s_1\}$	

## Exemple - équité multiple

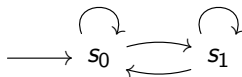


$$\begin{aligned}
 Exec(S) = & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^{\omega} \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^* \rightarrow s_0^{\omega} \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^* \rightarrow s_0^+ \rightarrow s_1^{\omega} \rangle
 \end{aligned}$$

Équité simple/multiple	
$\{s_0\}$	
$\{s_0, s_1\}$	
$\{s_0\}\{s_1\}$	



## Exemple - équité multiple



$$\begin{aligned}
 Exec(S) = & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^{\omega} \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^* \rightarrow s_0^{\omega} \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^* \rightarrow s_0^+ \rightarrow s_1^{\omega} \rangle
 \end{aligned}$$

Équité simple/multiple	Exécutions
$\{s_0\}$	$\langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^{\omega} \rangle,$ $\langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^* \rightarrow s_0^{\omega} \rangle$
$\{s_0, s_1\}$	<i>toutes</i>
$\{s_0\}\{s_1\}$	$\langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^{\omega} \rangle$

Note : avec équité multiple sur  $\{s_0\}\{s_1\}$ , l'exécution  $\langle (s_0^{10000} \rightarrow s_1)^{\omega} \rangle$  est légale, ainsi qu'une exécution où  $s_1$  serait de moins en moins souvent choisi par rapport à  $s_0$  : équité informatique  $\neq$  équité sociale !



# Équivalence équité multiple finie $\leftrightarrow$ simple



Cas simple :  $J$  est fini.  $|J|$  est la cardinalité de  $J$ .

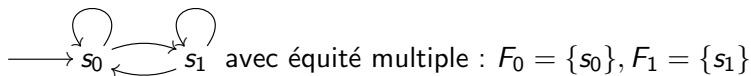
Le système  $\langle S', I', R' \rangle$  à équité simple suivant est équivalent (égalité des exécutions projetées sur  $S$ ) :

- $S' = S \times J$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \{(\langle s, j \rangle, \langle s', j+1 \bmod |J| \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s \in F_j\} \cup \{(\langle s, j \rangle, \langle s', j \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s \notin F_j\}$
- Équité simple  $F' = F_0 \times \{0\}$

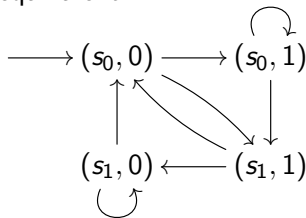
Le premier ensemble de  $R'$  est pour le cas où on visite un état de  $F_j$  et on cherche donc à visiter l'ensemble suivant ; le deuxième ensemble est pour le cas où on n'est pas en train de visiter un état de  $F_j$ , que l'on continue à attendre.



## Exemple équité multiple



ST en équité simple équivalent :



avec équité simple sur  $\{(s_0, 0)\}$

# Équivalence équité multiple $\leftrightarrow$ simple



Cas général ( $J$  potentiellement infini).

Le système  $\langle S', I', R' \rangle$  à équité simple suivant est équivalent :

- $S' = S \times J \times J$
- $I' = I \times \{0\} \times \{0\}$
- $R' =$ 

$$\begin{aligned} & \{(\langle s, i, i \rangle, \langle s', i \oplus 1, 0 \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s \in F_i\} \\ \cup & \{(\langle s, i, j \rangle, \langle s', i, j+1 \rangle) \mid j < i \wedge (s, s') \in R \wedge s \in F_j\} \\ \cup & \{(\langle s, i, j \rangle, \langle s', i, j \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge s \notin F_j\} \end{aligned}$$
- Équité simple  $F' = F_0 \times J \times \{0\}$

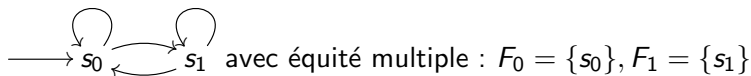
avec :  $i \oplus 1 \triangleq \begin{cases} i + 1 & \text{si } J \text{ est infini} \\ i + 1 \bmod |J| & \text{sinon} \end{cases}$

Une exécution typique des compteurs  $i, j$  forme un triangle :

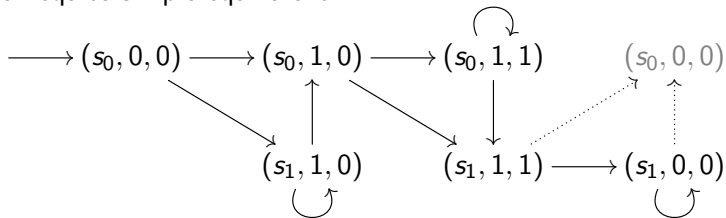
$\langle (0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 0) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 0) \rightarrow \dots \rangle$



## Exemple équité multiple



ST en équité simple équivalent :



avec équité simple sur  $\{(s_0, 0, 0), (s_0, 1, 0)\}$

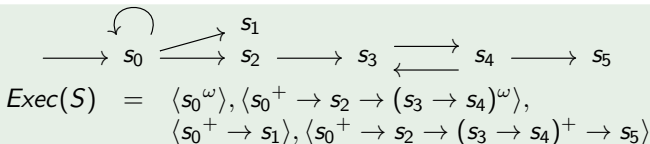
# Équité conditionnelle sur les états



## Équité conditionnelle

On se donne deux ensembles  $F$  et  $G$ . Toute exécution  $\sigma$  doit être telle que  $Inf_S(F, \sigma) \Rightarrow Inf_S(G, \sigma)$ .

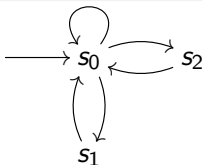
Si  $F$  est récurrent dans  $\sigma$ , alors  $G$  doit être récurrent dans  $\sigma$ .



Équité cond.	Exécutions
$\{s_0\} \Rightarrow \{s_5\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle,$ $\langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$
$\{s_3\} \Rightarrow \{s_4\}$	$\langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle,$ $\langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5 \rangle$



## Exemple - équité conditionnelle

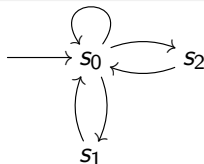


$Exec(S) =$

Équité cond.	
$\{s_1\} \Rightarrow \{s_2\}$	

*Handwritten signature*

## Exemple - équité conditionnelle



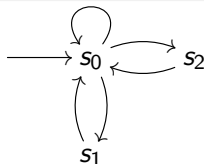
On note  $T \triangleq s_0^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_1)^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2)^* \setminus \langle \rangle$ .  
(le  $\setminus \langle \rangle$  garantit que  $T$  ne contient pas la séquence vide)

$$Exec(S) = \langle T^\omega \rangle$$

Équité cond.	
$\{s_1\} \Rightarrow \{s_2\}$	



## Exemple - équité conditionnelle



On note  $T \triangleq s_0^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_1)^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2)^* \setminus \langle \rangle$ .  
(le  $\setminus \langle \rangle$  garantit que  $T$  ne contient pas la séquence vide)

$$Exec(S) = \langle T^\omega \rangle$$

Équité cond.	Exécutions
$\{s_1\} \Rightarrow \{s_2\}$	$\langle T^* \rightarrow (s_0^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_1)^+ \rightarrow s_0^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2)^+ )^\omega \rangle$ , $\langle T^* \rightarrow (s_0^+ \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2)^* )^\omega \rangle$ , $\langle T^* \rightarrow (s_0^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2)^+ )^\omega \rangle$

# Équivalence équité conditionnelle $\leftrightarrow$ simple



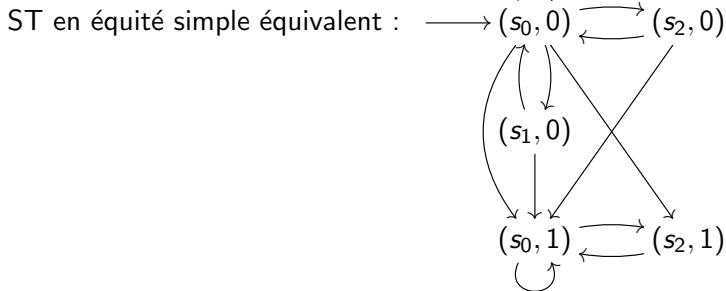
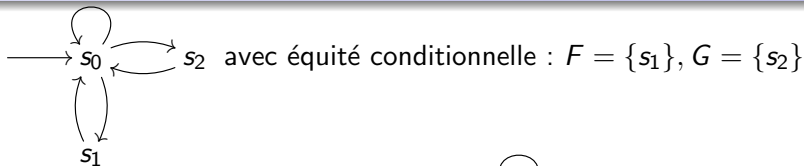
Soit un système  $\langle S, I, R \rangle$  avec équité conditionnelle  $F \Rightarrow G$ .  
Le système  $\langle S', I', R' \rangle$  à équité simple suivant est équivalent :

- $S' = (S \times \{0\}) \cup ((S \setminus F) \times \{1\})$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \{(\langle s, i \rangle, \langle s', j \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge 1 \geq j \geq i \geq 0\} \cap (S' \times S')$
- Équité simple  $F' = (G \times \{0\}) \cup ((S \setminus F) \times \{1\})$

Les états  $\langle s, 0 \rangle$  correspondent aux exécutions où  $G$  doit être infiniment souvent visité, alors que les états  $\langle s, 1 \rangle$  correspondent aux exécutions où  $F$  ne doit plus être visité du tout.



## Exemple équité conditionnelle



avec équité simple sur  $\{(s_2, 0), (s_0, 1), (s_2, 1)\}$



# Plan

- 1 Contraintes d'équité
- 2 Équité sur les états
  - Équité simple
  - Équité multiple
  - Équité conditionnelle
- 3 Équité sur les transitions
  - Équité faible
  - Équité forte
  - Équité sur les étiquettes



# Équité sur les transitions



L'équité sur les transitions est plus précise que l'équité sur les états. Informellement, une exécution infinie est **non équitable** vis-à-vis d'une transition si :

- la transition n'apparaît qu'un nombre fini de fois,
- et la transition est continûment faisable (équité faible) ou infiniment souvent faisable (équité forte).

Les définitions suivantes sont correctes aussi bien pour les exécutions finies que pour les exécutions finies maximales. Pour autant, les explications sont plus faciles sur les exécutions infinies. Le bégaiement est présent dans  $TLA^+$  et la majorité des méthodes outillées s'appuyant sur les systèmes de transition, ce qui justifie cette restriction.



# Équité faible sur les transitions



## Équité faible

Soit un ST  $\langle S, I, R \rangle$  et  $F \subseteq R$  un sous-ensemble des transitions.  
 $F$  est faiblement équitable ssi dans toute exécution  $\sigma$  :

$$Inf_S(S \setminus dom(F), \sigma) \vee Inf_T(F, \sigma)$$
  
(l'ensemble d'états  $S \setminus dom(F)$  est récurrent,  
ou l'ensemble de transitions  $F$  est récurrent)

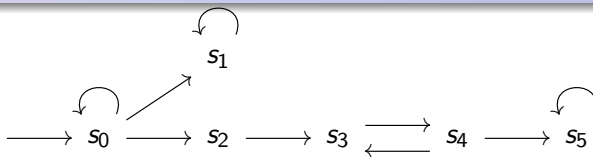
Ou, de manière équivalente :

$$\neg Inf_S(S \setminus dom(F), \sigma) \Rightarrow Inf_T(F, \sigma)$$
  
(si l'ensemble d'états  $S \setminus dom(F)$  n'est pas récurrent,  
alors l'ensemble de transitions  $F$  est récurrent)

L'équité faible exprime que l'on n'a pas le droit de rester indéfiniment dans un ensemble spécifié d'états alors qu'il existe toujours une transition en équité faible qui est exécutable.



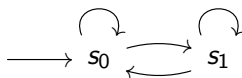
## Exemple - équité faible



$$\begin{aligned} \text{Exec}(S) = & \langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \\ & \langle s_0^+ \rightarrow s_1^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5^\omega \rangle \end{aligned}$$

Équité faible	Exécutions
$\{(s_0, s_1)\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle,$ $\langle s_0^+ \rightarrow s_1^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5^\omega \rangle$
$\{(s_0, s_1), (s_0, s_0)\}$	<i>toutes</i>
$\{(s_4, s_5)\}$	<i>toutes</i>

## Exemple - équité faible



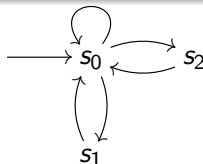
$$\begin{aligned}
 Exec(S) = & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^{\omega} \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^* \rightarrow s_0^{\omega} \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^* \rightarrow s_0^+ \rightarrow s_1^{\omega} \rangle
 \end{aligned}$$

Équité faible	Exécutions
$\{(s_0, s_1)\}$	$\langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^{\omega} \rangle,$ $\langle (s_0^+ \rightarrow s_1^+)^* \rightarrow s_0^+ \rightarrow s_1^{\omega} \rangle$
$\{(s_0, s_0)\}$	<i>toutes</i>
$\{(s_0, s_0), (s_0, s_1)\}$	<i>toutes</i>





## Exemple - équité faible

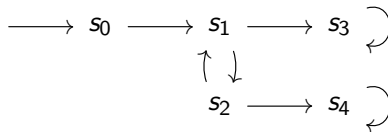


On note  $T \triangleq s_0^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_1)^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2)^* \setminus \langle \rangle$ .  
(le  $\setminus \langle \rangle$  garantit que  $T$  ne contient pas la séquence vide)

$$Exec(S) = \langle T^\omega \rangle$$

Équité faible	Exécutions
$\{(s_0, s_2)\}$	$\langle T^* \rightarrow (s_0^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_0^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_2)^+ )^\omega \rangle,$ $\langle T^* \rightarrow (s_0^* \rightarrow (s_0 \rightarrow s_1)^+ )^\omega \rangle$

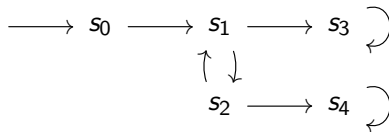
## Exemple - équité faible



$Exec(S) =$

Équité faible	
$\{(s_2, s_4)\}$ $\{(s_2, s_4), (s_1, s_3)\}$	

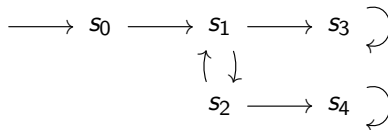
## Exemple - équité faible



$$\begin{aligned}
 \text{Exec}(S) = & \langle s_0 \rightarrow (s_1 \rightarrow s_2)^\omega \rangle, \\
 & \langle s_0 \rightarrow (s_1 \rightarrow s_2)^+ \rightarrow s_4^\omega \rangle, \\
 & \langle s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow (s_2 \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_3^\omega \rangle
 \end{aligned}$$

Équité faible	
$\{(s_2, s_4)\}$ $\{(s_2, s_4), (s_1, s_3)\}$	

## Exemple - équité faible

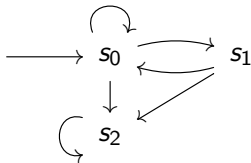


$$\begin{aligned}
 \text{Exec}(S) = & \langle s_0 \rightarrow (s_1 \rightarrow s_2)^\omega \rangle, \\
 & \langle s_0 \rightarrow (s_1 \rightarrow s_2)^+ \rightarrow s_4^\omega \rangle, \\
 & \langle s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow (s_2 \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_3^\omega \rangle
 \end{aligned}$$

Équité faible	Exécutions
$\{(s_2, s_4)\}$ $\{(s_2, s_4), (s_1, s_3)\}$	<i>toutes</i> $\langle s_0 \rightarrow (s_1 \rightarrow s_2)^+ \rightarrow s_4^\omega \rangle,$ $\langle s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow (s_2 \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_3^\omega \rangle\}$



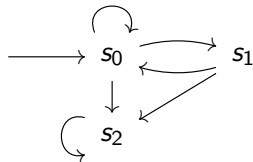
## Exemple - équité faible



$Exec(S) =$

Équité faible	
$\{(s_0, s_1)\}$	
$\{(s_1, s_2)\}$	
$\{(s_0, s_2), (s_1, s_2)\}$	

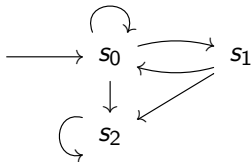
## Exemple - équité faible



$$\begin{aligned}
 Exec(S) = & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_0^\omega \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^+ \rightarrow s_2^\omega \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_0^+ \rightarrow s_2^\omega \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^\omega \rangle
 \end{aligned}$$

Équité faible	
$\{(s_0, s_1)\}$	
$\{(s_1, s_2)\}$	
$\{(s_0, s_2), (s_1, s_2)\}$	

## Exemple - équité faible



$$\begin{aligned}
 Exec(S) = & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_0^\omega \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^+ \rightarrow s_2^\omega \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_0^+ \rightarrow s_2^\omega \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^\omega \rangle
 \end{aligned}$$

Équité faible	Exécutions
$\{(s_0, s_1)\}$	$\langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^+ \rightarrow s_2 \rangle, \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_0^+ \rightarrow s_2^\omega \rangle, \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^\omega \rangle$
$\{(s_1, s_2)\}$	<i>toutes</i>
$\{(s_0, s_2), (s_1, s_2)\}$	$\langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^+ \rightarrow s_2 \rangle, \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_0^+ \rightarrow s_2^\omega \rangle$

# Équité faible $\rightarrow$ équité simple sur les états



Soit un système  $\langle S, I, R \rangle$  avec équité faible sur  $F$ .

Le système  $\langle S', I', R' \rangle$  à équité simple suivant est équivalent :

- $S' = S \times \{0, 1\}$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \{ \langle s, - \rangle, \langle s', 1 \rangle \mid (s, s') \in R \cap F \}$   
 $\cup \{ \langle s, - \rangle, \langle s', 0 \rangle \mid (s, s') \in R \setminus F \}$
- Équité simple  $F' = S \setminus \text{dom}(F) \times \{0, 1\} \cup S \times \{1\}$

Les états  $\langle s, 1 \rangle$  correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition de  $F$ , les états  $\langle s, 0 \rangle$  correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition qui n'est pas dans  $F$ .





# Équité forte sur les transitions



## Équité forte

Soit un ST  $\langle S, I, R \rangle$  et  $F \subseteq R$  un sous-ensemble des transitions.  
 $F$  est fortement équitable ssi dans toute exécution  $\sigma$  :

$\neg \text{Inf}_S(\text{dom}(F), \sigma) \vee \text{Inf}_T(F, \sigma)$   
l'ensemble d'états  $\text{dom}(F)$  n'est pas récurrent,  
ou l'ensemble de transitions  $F$  est récurrent.

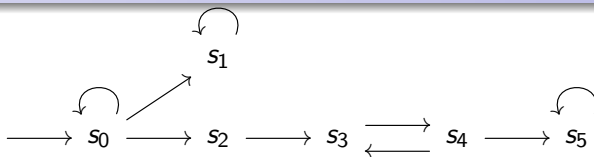
Ou, de manière équivalente :

$\text{Inf}_S(\text{dom}(F), \sigma) \Rightarrow \text{Inf}_T(F, \sigma)$   
si l'ensemble d'états  $\text{dom}(F)$  est récurrent,  
alors l'ensemble de transitions  $F$  est récurrent.

L'équité forte exprime que si l'on passe infiniment souvent dans un état où une transition de  $r$  est exécutable, alors une transition  $(s, s')$  de  $r$  finit par être exécutée.



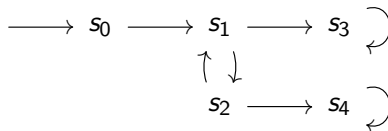
## Exemple - équité forte



$$\begin{aligned} \text{Exec}(S) = & \langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle, \\ & \langle s_0^+ \rightarrow s_1^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5^\omega \rangle \end{aligned}$$

Équité forte	Exécutions
$\{(s_0, s_1)\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle,$
$\{(s_4, s_5)\}$	$\langle s_0^+ \rightarrow s_1^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5^\omega \rangle$
$\{(s_3, s_4), (s_4, s_5)\}$	$\langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_1^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^+ \rightarrow s_5^\omega \rangle$
	<i>toutes</i>

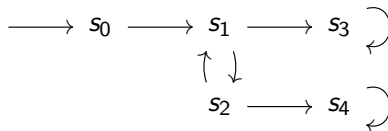
## Exemple - équité forte



$Exec(S) =$

Équité forte	
$\{(s_2, s_4)\}$	

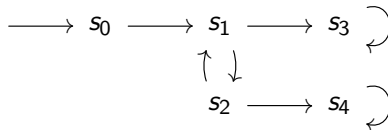
## Exemple - équité forte



$$\begin{aligned}
 Exec(S) = & \langle s_0 \rightarrow (s_1 \rightarrow s_2)^\omega \rangle, \\
 & \langle s_0 \rightarrow (s_1 \rightarrow s_2)^+ \rightarrow s_4^\omega \rangle, \\
 & \langle s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow (s_2 \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_3^\omega \rangle
 \end{aligned}$$

Équité forte	
$\{(s_2, s_4)\}$	

## Exemple - équité forte

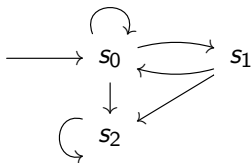


$$\begin{aligned}
 \text{Exec}(S) = & \langle s_0 \rightarrow (s_1 \rightarrow s_2)^\omega \rangle, \\
 & \langle s_0 \rightarrow (s_1 \rightarrow s_2)^+ \rightarrow s_4^\omega \rangle, \\
 & \langle s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow (s_2 \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_3^\omega \rangle
 \end{aligned}$$

Équité forte	Exécutions
$\{(s_2, s_4)\}$	$\langle s_0 \rightarrow (s_1 \rightarrow s_2)^+ \rightarrow s_4^\omega \rangle,$ $\langle s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow (s_2 \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_3^\omega \rangle$



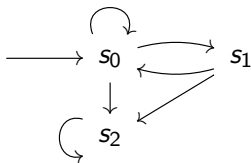
## Exemple - équité forte



$Exec(S) =$

Équité forte	
$\{(s_0, s_1)\}$	
$\{(s_1, s_2)\}$	
$\{(s_0, s_1), (s_1, s_2)\}$	

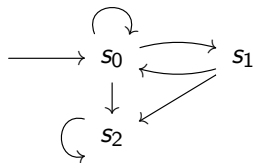
## Exemple - équité forte



$$\begin{aligned}
 Exec(S) = & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_0^\omega \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^+ \rightarrow s_2^\omega \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_0^+ \rightarrow s_2^\omega \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^\omega \rangle
 \end{aligned}$$

Équité forte	
$\{(s_0, s_1)\}$	
$\{(s_1, s_2)\}$	
$\{(s_0, s_1), (s_1, s_2)\}$	

## Exemple - équité forte



$$\begin{aligned}
 Exec(S) = & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_0^\omega \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^+ \rightarrow s_2^\omega \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_0^+ \rightarrow s_2^\omega \rangle, \\
 & \langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^\omega \rangle
 \end{aligned}$$

Équité forte	Exécutions
$\{(s_0, s_1)\}$	toutes sauf $\langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_0^\omega \rangle$
$\{(s_1, s_2)\}$	toutes sauf $\langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^\omega \rangle$
$\{(s_0, s_1), (s_1, s_2)\}$	toutes sauf $\langle (s_0^+ \rightarrow s_1)^* \rightarrow s_0^\omega \rangle$





## Équité forte $\rightarrow$ équité conditionnelle sur les états



Soit un système  $\langle S, I, R \rangle$  avec équité forte sur  $F$ .  
Le système  $\langle S', I', R' \rangle$  à équité conditionnelle suivant est équivalent :

- $S' = S \times \{0, 1\}$
- $I' = I \times \{0\}$
- $R' = \{ \langle s, - \rangle, \langle s', 1 \rangle \mid (s, s') \in R \cap F \}$   
 $\cup \{ \langle s, - \rangle, \langle s', 0 \rangle \mid (s, s') \in R \setminus F \}$
- Équité conditionnelle  $F' = \text{dom}(F) \times \{0, 1\}$   
 $G' = S \times \{1\}$

Les états  $\langle s, 1 \rangle$  correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition de  $F$ , les états  $\langle s, 0 \rangle$  correspondent aux états où l'on vient d'exécuter une transition qui n'est pas dans  $F$ .

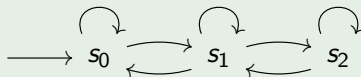


## Combinaisons d'équités faibles/fortes

En pratique, on se donne

- plusieurs ensembles de transitions en équité faible,
- plusieurs ensembles de transitions en équité forte.

Le système doit respecter toutes ces contraintes (la conjonction).



Équité faible sur  $\{(s_0, s_1)\}$  (interdit le bégaiement à l'infini)

Équité faible sur  $\{(s_1, s_2)\}$  (idem)

Équité faible sur  $\{(s_2, s_1)\}$  (idem)

Équité forte sur  $\{(s_1, s_2)\}$  (interdit de ne jamais aller en  $s_2$ )

Ici, équivalent à équité multiple sur  $\{\{s_1\}, \{s_2\}\}$  : toute exécution où  $s_1$  et  $s_2$  apparaissent infiniment souvent.

# Équité sur les étiquettes

Dans le cas d'un système de transitions étiqueté, on peut également définir l'équité (faible ou forte) sur un ensemble d'étiquettes  $F \subseteq L$ . Cela revient à l'équité sur les transitions  $Etq^{-1}(F)$ .



# Conclusion

- L'équité contraint des états / des transitions à être visité(e)s infiniment souvent.
- Les contraintes d'équité éliminent les exécutions non équitables, jugées sans intérêt.
- On utilise plutôt l'équité sur les transitions qui traduit que, si une action est toujours / infiniment souvent faisable, elle aura lieu : le système n'est pas injuste vis-à-vis de ces actions.

