Intégration et Applications

Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

Olivier Cots, Serge Gratton & Ehouarn Simon

6 octobre 2019

Le but de ce chapitre 5 est :

- étendre les théorèmes de convergence déjà vus ("limites sous le signe intégrale"), et d'en proposer de nouveaux pour le cas d'une fonction mesurable f par rapport à une mesure μ sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

- faire le lien, quand il est possible, entre les intégrales de Lebesgue et Riemann ;

- étudier quelques propriétés d'intégrales dépendant de paramètres.

Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

- 5.1 Théorèmes de convergence
- 5.2 Liens avec l'intégrale de Riemann
- 5.3 Intégrales à paramètre

5.1 Théorèmes de convergence

Définition – Espace mesuré complet

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Il est appelé espace mesuré complet si

$$(N \subset A,\ \text{avec } A \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \mu(A) = 0) \Rightarrow N \in \mathcal{A}.$$

Remarque. Dans toute la suite, $(E, \mathcal{A}, \mu)$ sera supposé être un espace mesuré complet. Néanmoins, la suite du cours peut être étendue à un cadre plus général (*tribu complétée*).

Définition – Convergence μ-p.p.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans $\bar{\mathbb{R}}$.
On dit que (f_n) converge presque partout vers f (et on note $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.p.}}{\longrightarrow}} f$) si

$$\exists A \in \mathcal{A} \text{ négligeable tel que } [x \notin A] \Rightarrow [f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)].$$

Remarque. La convergence simple implique la convergence μ-p.p.

Proposition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\text{p.p.}}} f$, alors $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$.

► Par hypothèse, $f_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\text{p.p.}}} f$: $\exists A \in \mathcal{A}$ t.q. $\mu(A) = 0$ et $\forall x \in A^c, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Il vient,

$$\forall a \in \mathbb{R}, f^{-1}([-\infty\,, a]) = (f^{-1}([-\infty\,, a]) \cap A) \cup (f^{-1}([-\infty\,, a]) \cap A^c).$$

D'une part, $f^{-1}([-\infty\,, a]) \cap A \subset A$, avec $A \in \mathcal{A}$ t.q. $\mu(A) = 0$. Comme $(E,\mathcal{A},\mu)$ est un espace mesuré complet, il vient

$$f^{-1}([-\infty\,, a]) \cap A \in \mathcal{A}$$

D'autre part, on pose $g = \limsup_{n\to+\infty} f_n$. D'après le chapitre 2, $g \in \mathcal{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ et de plus, $\forall x \in A^c, f(x) = g(x)$ (et ainsi $f = g$ μ-p.p.).

Proposition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ telle que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.p.}} f$, alors $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$.

On a

$$\begin{aligned} f^{-1}([-\infty\,,a])\cap A^c &= \{x\in A^c, f(x)\in[-\infty\,,a]\} \\ &= \{x\in A^c, g(x)\in[-\infty\,,a]\} \\ &= g^{-1}([-\infty\,,a])\cap A^c \end{aligned}$$

Or, g mesurable de $(E,\mathcal{A})$ dans $(\bar{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})) \Rightarrow g^{-1}([-\infty\,,a])\in\mathcal{A}$ [a].
Par stabilité par passage au complémentaire et intersection finie,

$$f^{-1}([-\infty\,,a])\cap A^c \in \mathcal{A}.$$

Finalement, par stabilité par union finie, $\forall a\in\mathbb{R}, f^{-1}([-\infty\,,a])\in\mathcal{A}$, et f mesurable.
■

a. $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ est la tribu engendrée par les intervalles de la forme $[-\infty\,,a]$.

Théorème – Convergence monotone

Soit (f_n) une suite croissante de $\mathcal{F}_+(\mathcal{A})$, qui converge μ-p.p. vers f. Alors

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Remarque. Ce théorème étend le théorème de Beppo-Levi, vu au chapitre 3, au cadre de la convergence μ-p.p.

► *Idée :*

Appliquer le théorème de Beppo-Levi sur la partie de E sur laquelle la convergence simple a lieu. Le complémentaire de celle-ci étant de mesure nulle, les intégrales de f et des f_n sur ce dernier sont nulles.

► *(Preuve du théorème de convergence monotone).*

Par hypothèse, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.p.}} f$: $\exists A \in \mathcal{A}$ t.q. $\mu(A) = 0$ et $\forall x \in A^c, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

1. Montrons que $\lim\limits_n \int_{A^c} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_{A^c} f \,\mathrm{d}\mu$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \tilde{f}_n = f_n \mathbb{1}_{A^c}$. La suite $(\tilde{f}_n)$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{f}_n \in \mathcal{F}_+$ comme produit de fonctions mesurables positives ($A^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{1}_{A^c}$ mesurable) ;
- $(\tilde{f}_n)$ converge simplement vers $\tilde{f} := f\mathbb{1}_{A^c}$ par hypothèse sur la suite (f_n) ;
- la suite $(\tilde{f}_n)$ est croissante :

$$\forall x \in A, \tilde{f}_n(x) = 0 = \tilde{f}_{n+1}(x).$$

$$\begin{aligned} \forall x \in A^c, \tilde{f}_n(x) &= f_n(x) \\ &\leq f_{n+1}(x) \quad \text{par croissance de } (f_n) \\ &\leq \tilde{f}_{n+1}(x). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Beppo-Levi,

$$\lim_n \int_E \tilde{f}_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E \tilde{f} \,\mathrm{d}\mu \Leftrightarrow \lim_n \int_E f_n \mathbb{1}_{A^c} \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \mathbb{1}_{A^c} \,\mathrm{d}\mu.$$

2. Comme $\mu(A) = 0$, il vient

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0 \text{ (cf Chapitre 4) } .$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_{A^c} f \,\mathrm{d}\mu &= \int_{A^c} f \,\mathrm{d}\mu + \int_A f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_E f \mathbb{1}_{A^c} \,\mathrm{d}\mu + \int_E f \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_E f (\mathbb{1}_{A^c} + \mathbb{1}_A) \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_E f \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

On montre de même que $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_{A^c} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$, ce qui conduit au résultat. ■

Théorème – Convergence dominée

Soit (f_n) une suite de $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose que :

- $\exists g \in \mathcal{F}_+$ intégrable sur E telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ μ-p.p. ;
- $f_n \underset{n \to +\infty}{\xrightarrow{\text{p.p.}}} f$;

Alors, on a

i) $\displaystyle\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$,

ii) $\displaystyle\lim_n \int_E |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$,

iii) $\displaystyle\lim_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu$.

► *Idée :*

Appliquer le lemme de Fatou sur la partie de E sur laquelle les deux hypothèses sont valides. Le complémentaire de celle-ci est alors de mesure nulle, et les intégrales de f et des f_n sur ce dernier sont nulles.

► *(Preuve du théorème de Convergence dominée).*

Par hypothèses, on a

- $\exists g \in \mathcal{F}_+$ intégrable sur E telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ μ-p.p. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists A_n \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \mu(A_n) = 0 \text{ et } \forall x \in A_n^c, |f_n(x)| \leq g(x),$$

- $f_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\text{p.p.}}} f$: $\exists A \in \mathcal{A}$ t.q. $\mu(A) = 0$ et $\forall x \in A^c, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

On a

$$\begin{aligned}\mu((A^c \cap (\cap_n A_n^c))^c) &= \mu((A \cup (\cup_n A_n))) \\ &\leq \mu(A) + \sum_n \mu(A_n) \text{ (par sous } \sigma\text{-additivité)} \\ &\leq 0 \quad (\mu(A) = \mu(A_n) = 0)\end{aligned}$$

D'où $\mu((A^c \cap (\cap_n A_n^c))^c) = 0$ et $A \cup (\cup_n A_n)$ est négligeable.

Si de plus, $A^c \cap (\cap_n A_n^c) = \varnothing$, alors $\mu(A^c \cap (\cap_n A_n^c)) = 0$ et

$$\mu(E) = \mu(A^c \cap (\cap_n A_n^c)) + \mu((A^c \cap (\cap_n A_n^c))^c) = 0.$$

Auquel cas, toute intégrale sur E est nulle, ce qui démontre le théorème. Pour la suite, on suppose $\mu(E) > 0$, ce qui implique que $A^c \cap (\cap_n A_n^c) \neq \varnothing$.

i) Montrons que $\displaystyle\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$.

On a

$$\forall x \in A^c \cap (\cap_p A_p^c), \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x)| \leq g(x).$$

A la limite, il vient

$$\forall x \in A^c \cap (\cap_p A_p^c) \quad |f(x)| \leq g(x).$$

Comme $A \cup (\cup_p A_p)$ est négligeable, il vient que $|f| \leq g$ μ-p.p.

Or, g est intégrable, d'où $\displaystyle\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$.

ii) Montrons que $\lim_n \int_E |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$.

On a $\forall x \in A^c \cap (\cap_p A_p^c), \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)| + |f_n(x)| \leq 2g(x)$.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}, h_n = (2g - |f - f_n|)\mathbb{1}_{A^c \cap (\cap_p A_p^c)}$. On montre que (h_n) est une suite de fonctions de $\mathcal{F}_+$.
De plus, elle converge simplement vers $2g\mathbb{1}_{A^c \cap (\cap_p A_p^c)}$ et on a ainsi

$$\liminf_{n\to+\infty} h_n = 2g\mathbb{1}_{A^c \cap (\cap_p A_p^c)}.$$

D'après le lemme de Fatou,

$$\int_E 2g\mathbb{1}_{A^c \cap (\cap_p A_p^c)} \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E (2g - |f - f_n|)\mathbb{1}_{A^c \cap (\cap_p A_p^c)} \,\mathrm{d}\mu.$$

Or $\mu((A^c \cap (\cap_p A_p^c))^c) = 0$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{(A^c \cap (\cap_p A_p^c))^c} (2g - |f - f_n|) \,\mathrm{d}\mu = 0 = \int_{(A^c \cap (\cap_p A_p^c))^c} g \,\mathrm{d}\mu.$$

D'où,

$$\int_E 2g \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_E (2g - |f - f_n|) \, \mathrm{d}\mu \text{ [a]}.$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient

$$2 \int_E g \, \mathrm{d}\mu \leq 2 \int_E g \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n \to +\infty} \int_E |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu,$$

et $\limsup_{n \to +\infty} \int_E |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \leq 0$.

Finalement, $0 \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_E |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \leq \limsup_{n \to +\infty} \int_E |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \leq 0$,

$$\Rightarrow \lim_n \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

---

a. cf preuve du théorème de convergence monotone.

iii) Montrons que $\lim\limits_{n} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n intégrable (car $|f_n| \leq g$ μ-p.p. avec g intébrable). De même, d'après *i*), f est intégrable.
D'où,

$$\begin{aligned} \left| \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu - \int_E f \, \mathrm{d}\mu \right| &= \left| \int_E (f_n - f) \, \mathrm{d}\mu \right| \\ &\leq \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \\ &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par } ii) \,. \end{aligned}$$

■

Exemple (Convergence dominée).

Soit l'espace mesuré $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Soient les fonctions (pour $n \geq 1$)

$$\begin{array}{rcrcl} f_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & 1 - x^{1/n} \end{array}$$

Pour tout $x \in]0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $f_n(0) = 1$ pour tout $n \geq 1$. Or $\lambda(\{0\}) = 0$, d'où $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.p.}} f$ (sur $[0,1]$) avec f la fonction nulle.
Pour tout $n \geq 1$, $|f_n| \leq 1$ qui est une fonction intégrable sur $[0,1]$. En effet

$$\int_{[0,1]} 1 \, \mathrm{d}\lambda = \lambda([0,1]) = 1 < \infty \ .$$

Donc, par théorème de convergence dominée,

$$\int_{[0,1]} f_n \, \mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

5.2 Liens avec l'intégrale de Riemann

Théorème – Intégrale de Riemann sur un segment

Soit f mesurable sur $([a,b], \mathcal{B}([a,b]))$, $-\infty < a \leq b < +\infty$, et admettant une intégrale de Riemann sur $[a,b]$.
Alors f admet également une intégrale de Lebesgue sur $[a,b]$ et on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda$$

Remarque. En pratique, on pourra chercher à calculer des intégrales de Lebesgue en se ramenant à des segments sur lesquels les intégrales de Riemann et Lebesgue coïncident (cf TD).

- *Idée :*

On construit l'intégrale de Riemann depuis des fonctions en escalier, qui sont également des fonctions étagées, fonctions sur lesquelles on a construit l'intégrale de Lebesgue. On va ainsi revenir à des fonctions en escalier associées à l'intégrale de Riemann de f, les intégrer au sens de Lebesgue, et passer à la limite.

- *(Preuve du théorème sur l'intégrale de Riemann sur un segment).*

On définit la subdivision régulière

$$x(n,k) = a + (b-a)2^{-n}k, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k = 0, \ldots, 2^n.$$

On définit également

$$\forall k > 1, I(n,k) =]x(n,k-1), x(n,k)] \text{ et } I(n,1) = [x(n,0), x(n,1)].$$

On pose

$$u(n,k) = \inf_{x \in [x(n,k-1), x(n,k)]} f(x) \text{ et } v(n,k) = \sup_{x \in [x(n,k-1), x(n,k)]} f(x).$$

Enfin on définit (somme de Darboux)

$$g_n = \sum_{k=0}^{2^n} u(n,k)\,\mathbb{1}_{I(n,k)} \text{ et } h_n = \sum_{k=0}^{2^n} v(n,k)\,\mathbb{1}_{I(n,k)}.$$

On a alors

- (g_n) suite croissante de fonctions mesurables qui converge vers g, (h_n) suite décroissante de fonctions mesurables qui converge vers h,
- puisque f est Riemann integrable, f est bornée. Dans ce cas, g_n et h_n, qui sont de signe quelconque, sont majorées en valeur absolue par la fonction constante égale à $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ qui est Lebesgue intégrable sur $[a, b]$.
  D'après le théorème de convergence dominée,
  $$\int_{[a,b]} g_n \,\mathrm{d}\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\lambda \text{ et } \int_{[a,b]} h_n \,\mathrm{d}\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} h \,\mathrm{d}\lambda,$$
- les fonctions h_n et g_n sont à la fois étagées et en escalier. Leurs intégrales de Rieman et de Lebesgue sont les mêmes. Il vient
  $$\int_a^b g_n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\lambda \text{ et } \int_a^b h_n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} h \,\mathrm{d}\lambda,$$
- puisque f est Riemann intégrable (caractérisation par les sommes de Darboux) :
  $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b h_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Finalement, il vient

$$\int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} h \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x)dx,$$

et

$$\int_{[a,b]} (h-g) \,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

Finalement, f est intégrable, car majorée en valeur absolue (par la constante $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$, on a que

$$\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\lambda + \int_{[a,b]} (f-g) \,\mathrm{d}\lambda.$$

Or

$$0 \leq \int_{[a,b]} (f-g) \,\mathrm{d}\lambda \leq \int_{[a,b]} (h-g) \,\mathrm{d}\lambda = 0,$$

d'où

$$\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

■

Théorème – Intégrale de Riemann impropre

Soient $b \in \bar{\mathbb{R}}$ et $a < b$. Soit f mesurable sur $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$. On suppose que l'intégrale de Riemann impropre en b est convergente.
On a

$$\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x) dx$$

dans les deux cas suivants :

i) f est positive sur $[a, b]$,

ii) f n'est pas de signe constant sur $[a, b]$, mais l'intégrale de Riemann impropre en b est absolument convergente :

$$\int_a^b |f(x)| dx < +\infty.$$

► *Idée :* Soit (b_n) une suite croissante de $\mathbb{R}$ qui tend vers b. On se ramène à des intégrales sur des segments via la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n = f \mathbb{1}_{[a,b_n]}$.

► *(Preuve du théorème sur l'intégrale de Riemann impropre).*

Soit (b_n) une suite croissante de $\mathbb{R}$ qui tend vers b et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, a < b_n$.
On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = f\mathbb{1}_{[a,b_n]}.$$

$i)$ On suppose f positive sur $[a,b]$. Montrons que $\displaystyle\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x)dx$.

Alors (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge μ-p.p vers $f\mathbb{1}_{[a,b]}$ [a]. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda &= \int_{\mathbb{R}} f\mathbb{1}_{[a,b]} \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b_n]} f \,\mathrm{d}\lambda.$

---

a. cf preuve du théorème de convergence monotone

De plus, $\int_a^b f(x)dx$ est convergente par hypothèse. Comme f est positive sur $[a,b]$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\int_a^{b_n} f(x)dx| = \int_a^{b_n} f(x)dx$$
$$\leq \int_a^{b} f(x)dx < +\infty$$

car f est positive et par définition de la suite (b_n). f est ainsi Riemann-intégrable sur $[a, b_n]$, avec $n \in \mathbb{N}$. Elle est, de plus, mesurable par hypothèse. D'après le théorème précèdant, f est Lebesgue-intégrable sur $[a, b_n]$ et on a

$$\int_{[a,b_n]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^{b_n} f(x)dx.$$

D'où,

$$\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{b_n} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx.$$

ii) On suppose que f n'est pas de signe constant et que $\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$.

Alors $(|f_n|)$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge μ-p.p vers $|f|\mathbb{1}_{[a,b]}$ [a]. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} |f_n|\,\mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} |f|\,\mathrm{d}\lambda.$$

De plus $\int_a^b |f(x)|dx$ est absolument convergente, donc $|f|$ est Riemann-intégrable sur $[a, b_n]$ avec $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème précédant,

$$\begin{aligned}\int_a^{b_n} |f(x)|dx &= \int_{[a,b_n]} |f|\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f_n|\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

Il vient

$$\int_{[a,b]} |f|\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b |f(x)|dx < +\infty.$$

---

a. cf preuve du théorème de convergence monotone

D'où $|f|\mathbb{1}_{[a,b]}$ est Lebesgue-intégrable. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq |f|\mathbb{1}_{[a,b]}.$$

D'après le théorème de convergence dominée, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f\mathbb{1}_{[a,b]} \,\mathrm{d}\lambda \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b_n]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, f est Riemann-intégrable sur $[a, b_n]$ [a]. D'après le théorème précédant,

$$\int_a^{b_n} f(x)dx = \int_{[a,b_n]} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Finalement,

$$\int_a^{b} f(x)dx = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

■

a. car $|f|$ l'est

Exemple (Intégrale impropre).

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. Soit la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^{-x} \end{array}$$

f est continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}$, elle est donc mesurable. Soit $t > 0$, on a,

$$\begin{aligned} \int_0^t f(x)dx &= -[e^{-x}]_0^t \\ &= 1 - e^{-t}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty \quad (f \text{ positive}).$$

Finalement, f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_{\mathbb{R}_+} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Remarque. Par simplicité, on a supposé, dans les deux théorèmes faisant le lien entre les intégrales de Riemann et Lebesgue (sur un segment et intégrale de Riemann impropre), que la fonction f **est mesurable**. Cette hypothèse est souvent **vérifiée en pratique** (f continue, continue par morceaux, etc..).

Néanmoins, ces théorèmes restent valides, même sans cette hypothèse, dès lors que l'on se place sur la **tribu complétée** de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et que l'on intègre vis-à-vis de la **mesure complétée** de λ.

Théorème – Variante

Soit f intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, $-\infty < a \leq b < +\infty$.
Alors $\exists g \in \mathcal{L}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b])\lambda)$ telle que

i) $f = g$ μ-p.p.,

ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\lambda.$

Théorème – Tribu et mesure complétées

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
Il existe $\mathcal{B}$ une tribu sur E et ν une mesure sur $\mathcal{B}$ telles que

i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$,

ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = \nu(A)$,

iii) $\forall N \subset E$, t.q. $\exists A \in \mathcal{A}$ t.q. $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$, il vient

$$N \in \mathcal{B} \text{ et } \nu(B) = 0.$$

La tribu $\mathcal{B}$ est appelée la **tribu complété** de $\mathcal{A}$ et ν la **mesure complétée** de μ.

Définition – Intégrale de Lebesgue

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ le complété de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et f mesurable et intégrable sur E.
On appelle intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda$.

Par la suite, on la notera $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda$.

5.3 Intégrales à paramètre

Théorème – Continuité sous l'intégrale

Soit $f : \mathcal{I} \times E \to \mathbb{R}$, avec $\mathcal{I}$ intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, telle que

i) $\forall u \in \mathcal{I}$, $x \mapsto f(u,x) \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (mesurable),

ii) $\exists u_\infty \in \mathcal{I}$ tel que pour presque tout x, $u \mapsto f(u,x)$ est continue en u_∞,

iii) $\exists g \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive et intégrable telle que pour presque tout x, $\forall u \in \mathcal{I}$, $|f(u,x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction F définie par $F(u) = \displaystyle\int_E f(u,x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est définie en tout point $u \in \mathcal{I}$ et est continue en u_∞.

- *Idée :*

Prendre une suite qui converge vers u_∞ (hypothèse *ii*)) et appliquer le théorème de convergence dominée (hypothèses *i*) et *iii*)).

► *(Preuve du théorème de continuité sous l'intégrale).*

1. Montrons que F est bien définie sur $\mathcal{I}$.

Soit $u \in \mathcal{I}$. On pose $\forall x \in E, f_u(x) = f(u,x)$. Alors, f_u est mesurable par i). De plus, $|f_u| \leq g$ μ-p.p., avec g intégrable par iii). Donc f_u est intégrable et F est bien définie sur $\mathcal{I}$.

2. Montrons que F est continue en u_∞.

Soit (u_n) une suite de $\mathcal{I}$ qui converge vers u_∞. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, f_n(x) = f(u_n, x).$$

La suite (f_n) vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par i),
- $\exists g \in \mathcal{F}_+$ intégrable sur E telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ μ-p.p. par iii) ;
- $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.p.}} f_{u_\infty}$: d'après ii), $\exists A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0$ et $\forall x \in A^c, \quad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(u_\infty, x)$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E f_{u_\infty} \,\mathrm{d}\mu \Leftrightarrow \lim_n F(u_n) = F(u_\infty).$$

Corollaire – Continuité "globale" sous l'intégrale

Soit $f : \mathcal{I} \times E \to \mathbb{R}$, avec $\mathcal{I}$ intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, telle que

i) $\forall u \in \mathcal{I}$, $x \mapsto f(u,x) \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (mesurable),

ii) pour presque tout x, $u \mapsto f(u,x)$ est continue sur $\mathcal{I}$,

iii) $\exists g \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive et intégrable telle que pour presque tout x, $\forall u \in \mathcal{I}$, $|f(u,x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction F définie par $F(u) = \displaystyle\int_E f(u,x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est définie et continue sur $\mathcal{I}$.

Exemple (Convolution).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et continue. La convolée de f et ϕ est définie par

$$u \mapsto (f \star \phi)(u) := \int_{\mathbb{R}} \phi(u-x) f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

Pour tout x, $u \mapsto \phi(u-x)f(x)$ est continue. Pour tout u, $|\phi(u-x)f(x)| \leq \|\phi\|_\infty |f(x)|$ et $\int_{\mathbb{R}} \|\phi\|_\infty |f(x)|\,\mathrm{d}\lambda(x) < \infty$ par hypothèse. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi(u-x)f(x)$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables. Donc par le théorème de continuité globale, $f \star \phi$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème – Dérivation sous l'intégrale

Soit $f : \mathcal{I} \times E \to \mathbb{R}$, avec $\mathcal{I}$ intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, telle que

i) $\forall u \in \mathcal{I}$, $x \mapsto f(u,x) \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (mesurable),

ii) $\forall u \in \mathcal{I}$, $x \mapsto f(u,x)$ est intégrable,

iii) $\exists u_\infty \in \mathcal{I}$ tel que pour presque tout x, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)$ existe,

iv) $\exists g \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive et intégrable telle que pour presque tout x,

$$\forall u \in \mathcal{I}, |f(u,x) - f(u_\infty, x)| \leq g(x)|u - u_\infty|.$$

Alors la fonction F définie par $F(u) = \displaystyle\int_E f(u,x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est définie en tout point $u \in \mathcal{I}$ et est dérivable en u_∞. De plus,

$$F'(u_\infty) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

- *Idée :* idem continuité.

- *(Preuve du théorème de dérivation sous l'intégrale).*

- Les hypothèses *i*) et *ii*) assurent que F est bien définie sur $\mathcal{I}$.

- Montrons que F est dérivable en u_∞.

Soit (u_n) une suite de $\mathcal{I}$ qui converge vers u_∞ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq u_\infty$.
On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \phi_n(x) = \frac{f(u_n, x) - f(u_\infty, x)}{u_n - u_\infty}.$$

D'après *iv*), $|\phi_n| \leq g$ μ-p.p., avec g intégrable, et d'après *iii*), $\phi_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\text{p.p.}}{\longrightarrow}} \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, .)$:

$$\exists A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \text{ et } \forall x \in A^c, \phi_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x).$$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_n \int_E \phi_n \, \mathrm{d}\mu = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Soit $\lim\limits_n \dfrac{F(u_n) - F(u_\infty)}{u_n - u_\infty} = F'(u_\infty) = \displaystyle\int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) \, \mathrm{d}\mu(x)$ ■

Corollaire – Dérivation "globale" sous l'intégrale

Soit $f : \mathcal{I} \times E \to \mathbb{R}$, avec $\mathcal{I}$ intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, telle que

i) $\forall u \in \mathcal{I}$, $x \mapsto f(u,x) \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (mesurable),

ii) $\exists u_0 \in \mathcal{I}$, $x \mapsto f(u_0, x)$ est intégrable,

iii) pour presque tout x, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur $\mathcal{I}$,

iv) $\exists g \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive et intégrable telle que pour presque tout x,

$$\forall u \in \mathcal{I}, \quad |\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)| \leq g(x).$$

Alors la fonction F définie par $F(u) = \displaystyle\int_E f(u,x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est définie et dérivable sur $\mathcal{I}$. De plus,

$$\forall u \in \mathcal{I}, \quad F'(u) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

► *Idée :* Exploiter l'inégalité des accroissements finies, là où les hypothèses le permettent (à savoir μ-p.p.).

- *(Preuve du corollaire de dérivation "globale").*

1. Montrons que F est définie sur $\mathcal{I}$.

D'après *ii*), $\exists u_0 \in \mathcal{I}$ tel que $x \mapsto f(u_0, x)$ est intégrable.
Soit $u \in \mathcal{I}$. On a

$$\forall x \in E, \quad |f(u,x)| \leq |f(u_0,x)| + |f(u,x) - f(u_0,x)|.$$

Or, d'après *iii*), pour presque tout x, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur l'intervalle ouvert $](u,u_0)[$ et continue sur l'intervalle fermé $[(u,u_o)]$.
De plus, pour presque tout x, $\forall v \in](u,u_0)[, |\dfrac{\partial f}{\partial u}(v,x)| \leq g(x)$ d'après *iv*).
Par inégalité des accroissements finis, pour presque tout x,

$$|f(u,x) - f(u_0,x)| \leq g(x)|u - u_0|.$$

D'où g intégrable $\Rightarrow x \to f(u,x) - f(u_0,x)$ intégrable.
Finalement, $x \mapsto f(u,x)$ est intégrable, et ce $\forall u \in \mathcal{I}$, donc F est bien définie sur $\mathcal{I}$.

2. Montrons que F est dérivable sur $\mathcal{I}$ et que

$$\forall u \in \mathcal{I}, \quad F'(u) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u, x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Soit $(u, u_\infty) \in \mathcal{I}^2$.
On montre de même que, pour pour presque tout x,

$$|f(u, x) - f(u_\infty, x)| \leq g(x)|u - u_\infty|.$$

De plus, pour presque tout x, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)$ existe, par hypothèse *iii*).
En appliquant le théorème précédent, il vient que F est dérivable en u_∞, et que

$$F'(u_\infty) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

et ce $\forall u_\infty \in \mathcal{I}$.

$\blacksquare$