Intégration et Applications

Chapitre 3 : Intégrale des fonctions mesurables

Olivier Cots, Serge Gratton & Ehouarn Simon

1er octobre 2019

INP TOULOUSE ENSEEIHT

Le but de ce chapitre 3 est de définir l'intégrale (au sens de Lebesgue) d'une fonction mesurable f par rapport à une mesure μ sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$:

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu$$

Chapitre 3 : Intégrale des fonctions mesurables

- 3.1 Intégrale des fonctions étagées positives
- 3.2 Intégrale des fonctions mesurables positives
- 3.3 Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

3.1 Intégrale des fonctions étagées positives

Notation. On note $\mathcal{F}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ l'ens. des applications mesurables de $(E_1, \mathcal{A}_1)$ dans $(E_2, \mathcal{A}_2)$.

Définition – Fonction étagée

Une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite **étagée** si elle ne prend qu'un **nombre fini** de valeurs. Alors il existe une partition finie $(A_i)_{i\in I}$ de E, $\mathcal{A}$-mesurable (au sens où $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \in I$), et des nombres réels $(\alpha_i)_{i\in I}$ t.q. :

$$f = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

Notation.

- On notera $\mathcal{F}^o(\mathcal{A})$ (ou $\mathcal{F}^o$) l'ensemble des fonctions étagées de $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
- **On notera $\mathcal{F}^o_+(\mathcal{A})$ (ou $\mathcal{F}^o_+$) l'ensemble des fonctions positives de $\mathcal{F}^o(\mathcal{A})$.**

Remarque. Il existe une représentation canonique de $f \in \mathcal{F}^o$ sous la forme

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

où les α_i sont **2 à 2 distincts** et où $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\}) =: \{f = \alpha_i\}$.

Remarque. Notons que pour $x \in E$, on écrit

$$f(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x).$$

Exemple. Une fonction indicatrice est étagée car $\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{A^c}$.

Proposition

$\forall f,\ g$ dans $\mathcal{F}^o$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda f + g \in \mathcal{F}^o$, autrement dit $\mathcal{F}^o$ est un **espace vectoriel**.

De même fg, $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont dans $\mathcal{F}^o$.

- Sous forme canonique, on écrit

$$f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{et} \quad g = \sum_j \beta_j \mathbb{1}_{B_j}.$$

Alors

$$\bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j) = \left(\bigcup_i A_i\right) \cap \left(\bigcup_j B_j\right) = E \cap E = E,$$

donc $(A_i \cap B_j)_{i,j}$ est une partition finie de E et

$$\lambda f + g = \sum_{i,j} (\lambda \alpha_i + \beta_j)\, \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}, \quad fg = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j\, \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \ldots$$

■

Définition – Intégrale des fonctions étagées positives

On appelle **intégrale** (au sens de Lebesgue) d'une fonction étagée positive $f \in \mathcal{F}_+^o$ par rapport à la mesure μ sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{A})$, l'élément :

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \,\mu(f^{-1}(\{\alpha\})) \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0\,, +\infty],$$

avec la convention $0 \times \infty = 0$.

Si $\int_E f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, on dit que f est **intégrable**.

Remarque. L'intégrale ne dépend pas de la représentation. Si $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E \left(\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \right) \mathrm{d}\mu = \sum_i \alpha_i \,\mu(A_i).$$

Exemple. Pour $A \in \mathcal{A}$ on a $\int_E \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$ et pour $a \in \mathbb{R}_+$ on a $\int_E a \,\mathrm{d}\mu = a\mu(E)$.

Comparaison avec l'intégrale de Riemann. On se place sur l'espace mesuré

$$([a\,,b],\mathcal{B}([a\,,b]),\lambda)$$

pour $a < b \in \mathbb{R}$ donnés.

Soit $\{x_0 := a < x_1 < x_2 < x_3 := b\}$ une subdivision de $[a\,,b]$ et soit une fonction f en escalier sur cette subdivision t.q. f vaut 10 sur $[x_0\,,x_1[\cup[x_2\,,x_3]$ et vaut 30 sur $[x_1\,,x_2[$.

L'intégrale de Riemann est calculée ainsi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 10\cdot(x_1-x_0)+30\cdot(x_2-x_1)+10\cdot(x_3-x_2)$$

tandis que **l'intégrale de Lebesgue** est plutôt calculée comme cela

$$\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda = 10\cdot((x_1-x_0)+(x_3-x_2))+30\cdot(x_2-x_1).$$

Remarque. Bien sûr ces deux intégrales sont égales. L'intégrale de Lebesgue généralise celle de Riemann comme on le verra plus tard. Notons qu'une fonction en escalier est une fonction étagée (la preuve est laissée en exercice). Le contraire est faux : $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

Notation. On rappelle que $\{f = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$: $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \, \mu(\{f = \alpha\})$.

Proposition

$\forall f \in \mathcal{F}_+^o$:

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu < +\infty \Leftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) < +\infty.$$

- Soit $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \, \mathbb{1}_{A_i} \in \mathcal{F}_+^o$ sous forme canonique. Alors

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \, \mu(A_i) < +\infty \Leftrightarrow \forall i \in I : (\alpha_i \neq 0 \Rightarrow \mu(A_i) < +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \in I,\ \alpha_i \neq 0} \mu(A_i) < +\infty \Leftrightarrow \mu\left(\bigcup_{i \in I,\ \alpha_i \neq 0} A_i\right) = \mu(\{f \neq 0\}) < +\infty.$$

■

Notation. On pourra utiliser les notations

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu, \quad \int_E f(x) \, \mathrm{d}\mu(x), \quad \int_E f(x) \, \mu(\mathrm{d}x) \quad \text{ou} \quad \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

Proposition

L'application $f \mapsto \int_E f \, \mathrm{d}\mu$ du cône[1] $\mathcal{F}_+^o$ vérifie :

i) $\forall f, \ g \in \mathcal{F}_+^o$: $\int (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu$; **(additivité)**

ii) $\forall f \in \mathcal{F}_+^o, \ \forall a \geq 0$: $\int (af) \, \mathrm{d}\mu = a \int f \, \mathrm{d}\mu$; **(positive homogénéité)**

iii) $\forall f, \ g \in \mathcal{F}_+^o$: $f \leq g \Rightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu$. **(croissance)**

1. K est un cône si $\mathbb{R}_+^* K \subset K$, pointé si $0 \in K$ et épointé si $0 \notin K$.

i) $\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu$; **(additivité)**

► Sous forme canonique, si $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $g = \sum_j \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$ alors $E = \cup_i A_i = \cup_j B_j$ et donc $(A_i \cap B_j)_{i,j}$ est une partition finie de E. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j)\,\mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i,j} \alpha_i\,\mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} \beta_j\,\mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_i \alpha_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j) + \sum_j \beta_j \sum_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_i \alpha_i\,\mu(A_i \cap (\cup_j B_j)) + \sum_j \beta_j\,\mu((\cup_i A_i) \cap B_j) \\
&= \sum_i \alpha_i\,\mu(A_i) + \sum_j \beta_j\,\mu(B_j) = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

■

ii) $\forall a \geq 0 \;:\; \int (af)\,\mathrm{d}\mu = a \int f\,\mathrm{d}\mu\,;$ **(positive homogénéité)**

- Sous forme canonique, si $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors :

$$\begin{aligned}
\int_E (af)\,\mathrm{d}\mu &= \int_E \left(a \sum_i \alpha_i\, \mathbb{1}_{A_i} \right) \mathrm{d}\mu = \int_E \left(\sum_i a\, \alpha_i\, \mathbb{1}_{A_i} \right) \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_i a\, \alpha_i\, \mu(A_i) = a \sum_i \alpha_i\, \mu(A_i) \\
&= a \int_E f\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

■

iii) $\forall f,\ g \in \mathcal{F}_+^o\ :\ f \leq g \Rightarrow \int f\,\mathrm{d}\mu \leq \int g\,\mathrm{d}\mu.$ **(croissance)**

- En écrivant $g = f + (g - f)$ avec $g - f \in \mathcal{F}_+^o$, on a par la additivité i) :

$$\int_E g\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E (g - f)\,\mathrm{d}\mu \Rightarrow \int_E f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

■

Notation.

- On notera $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ (ou $\mathcal{F}$) l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$;
- On notera $\mathcal{F}_+(\mathcal{A})$ (ou $\mathcal{F}_+$) l'ensemble de fonctions positives de $\mathcal{F}(\mathcal{A})$;

Théorème – Lemme fondamental d'approximation

Toute fonction de $\mathcal{F}_+$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions de $\mathcal{F}_+^o$.

- Soit $f \in \mathcal{F}_+$. On définit

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n\,\mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$

Alors $\forall n$, f_n est une fonction étagée positive, *i.e.* $f_n \in \mathcal{F}_+^o$.

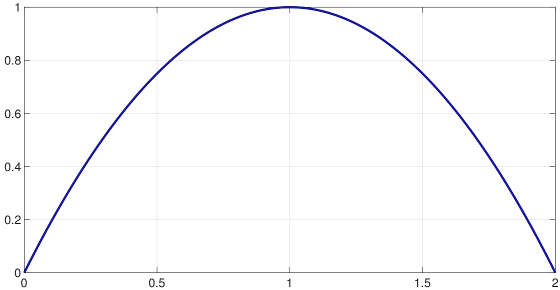
De plus, $\forall x \in E$ la suite $(f_n(x))$ est bien croissante et converge vers $f(x)$. En effet, si $f(x) = +\infty$, alors $f_n(x) = n \to +\infty$; sinon $\exists n_0$ t.q. $f(x) < n_0$, ce qui implique que $\forall n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n} \to 0$. ■

Illustration. On définit

$$f(x) := 1 - (1-x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n\,\mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$



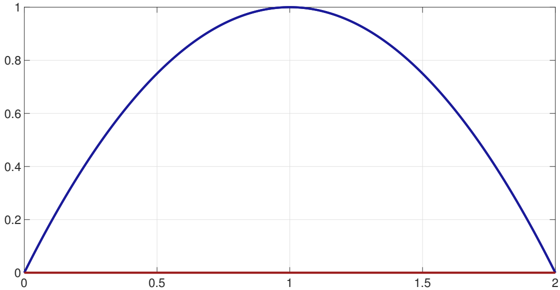
$f(x)$

Illustration. On définit

$$f(x) := 1 - (1-x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n\,\mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$



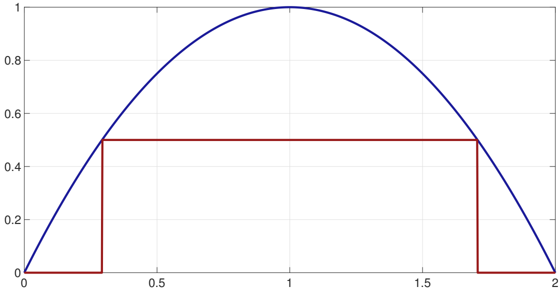
$f(x)$, $f_n(x)$, $n = 0$

Illustration. On définit

$$f(x) := 1 - (1-x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n\,\mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$



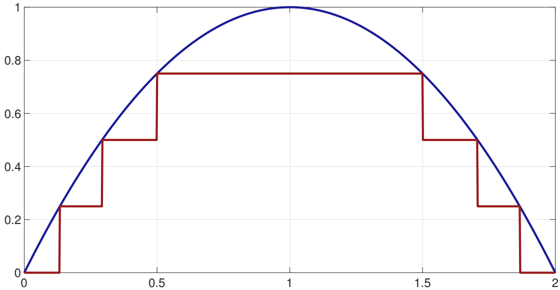
$f(x)$, $f_n(x)$, $n = 1$

Illustration. On définit

$$f(x) := 1 - (1-x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \le f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n\,\mathbb{1}_{\{f \ge n\}}.$$



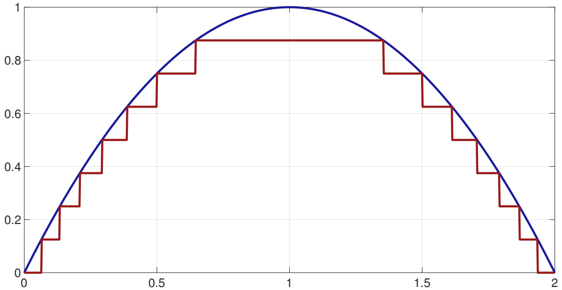
$f(x)$, $\quad f_n(x)$, $n = 2$

Illustration. On définit

$$f(x) := 1 - (1-x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n\,\mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$



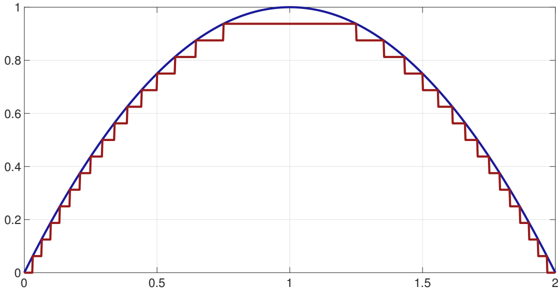
$f(x)$, $f_n(x)$, $n = 3$

Illustration. On définit

$$f(x) := 1 - (1-x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \le f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n\,\mathbb{1}_{\{f \ge n\}}.$$



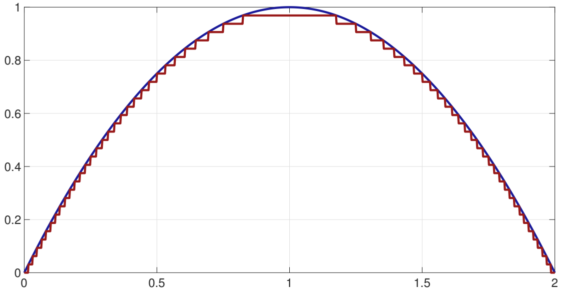
$f(x)$, $f_n(x)$, $n = 4$

Illustration. On définit

$$f(x) := 1 - (1-x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n\,\mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$



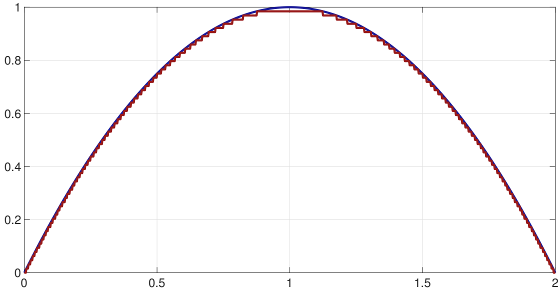
$f(x)$, $f_n(x)$, $n = 5$

Illustration. On définit

$$f(x) := 1 - (1-x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n\,\mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$



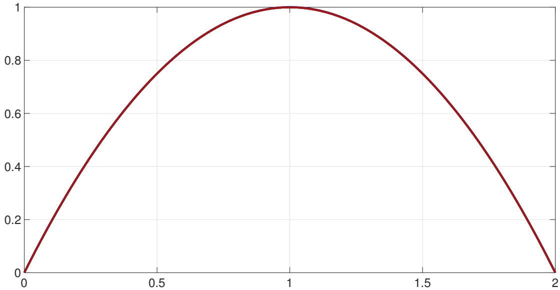
$f(x)$, $f_n(x)$, $n = 6$

Illustration. On définit

$$f(x) := 1 - (1-x)^2$$

et on rappelle que l'approximation est donnée par

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n\,\mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$



$f(x)$, $f_n(x)$, $n = 10$

3.2 Intégrale des fonctions mesurables positives

Définition – Intégrale des fonctions mesurables positives

On appelle **intégrale** (au sens de Lebesgue) d'une fonction mesurable positive $f \in \mathcal{F}_+$ par rapport à la mesure μ sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{A})$, l'élément :

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_E \varphi \,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, \varphi \in \mathcal{F}_+^o \text{ et } \varphi \leq f \right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0\,, +\infty].$$

Si $\displaystyle\int_E f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, on dit que f est **intégrable**.

Remarque. Si $\mu(E) = 0$ alors $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

Proposition – Croissance de l'intégrale

Soient f, g dans $\mathcal{F}_+$ telles que $f \leq g$, alors $\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_E g \, \mathrm{d}\mu$.

- Si $\varphi \in \mathcal{F}_+^o$ est telle que $\varphi \leq f$ alors $\varphi \leq g$. Ainsi

$$\{\varphi \in \mathcal{F}_+^o \mid \varphi \leq f\} \subset \{\varphi \in \mathcal{F}_+^o \mid \varphi \leq g\}$$

et donc

$$\sup \left\{ \int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu \,\middle|\, \varphi \in \mathcal{F}_+^o \text{ et } \varphi \leq f \right\} \leq \sup \left\{ \int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu \,\middle|\, \varphi \in \mathcal{F}_+^o \text{ et } \varphi \leq g \right\}$$

ce qui est l'inégalité recherchée. ■

Corollaire – Théoreme de comparaison

Soient f, g dans $\mathcal{F}_+$. Si $f \leq g$ et si g est intégrable, alors f est intégrable.

Corollaire

Si μ est **finie** alors pour toute $f \in \mathcal{F}_+$, si f est bornée alors elle est intégrable.

- $\exists a \geq 0$ t.q. $f \leq a\mathbb{1}_E$ et $\int_E a\mathbb{1}_E \,\mathrm{d}\mu = a\mu(E) < +\infty$. ■

Corollaire

Pour toute $f \in \mathcal{F}_+$: $\int_E f \,\mathrm{d}\mu < +\infty \Rightarrow \mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

- Soit $A := \{f = +\infty\}$. Par contraposée, si $\mu(A) > 0$ alors $\int_E f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_E f\mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu = +\infty \times \mu(A) = +\infty$. ■

Corollaire – Inégalité de Markov

Pour toute $f \in \mathcal{F}_+$ et pour tout $a > 0$,

$$\mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f \, \mathrm{d}\mu.$$

- Voir TD. ■

Théorème – de Beppo-Levi, ou de convergence monotone

Si (f_n) est une suite croissante de $\mathcal{F}_+(\mathcal{A})$, alors $f := \lim_n f_n \in \mathcal{F}_+(\mathcal{A})$ et

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Corollaire

L'intégrale $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$ est la limite des intégrales $\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$, où (f_n) est une suite **arbitraire** de fonctions étagées positives croissant vers f.

Remarque. On aurait pu définir $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$ comme la limite (et non la borne sup.) des intégrales de toute suite de fonctions étagées positives croissant vers f, mais alors il aurait fallu montrer que cette limite ne dépend pas de la suite de fonctions choisie.

- *(Preuve du théorème de Beppo-Levi).*

1. Montrons que $\lim_n \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$.

Puisque la suite (f_n) est croissante, sa limite est bien définie (les fonctions sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$) :

$$f := \lim_n f_n = \sup_n f_n,$$

et on a

$$\forall n \ : \ f_n \leq f.$$

Par **croissance de l'intégrale**,

$$\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu,$$

et donc par **passage à la limite**

$$\lim_n \int f_n \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu.$$

2. Montrons que $\int_E f \,\mathrm{d}\mu \leq \lim_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$.

Puisque par définition $\int f \,\mathrm{d}\mu = sup \left\{ \int \varphi \,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; \varphi \leq f,\ \varphi \in \mathcal{F}_+^o(\mathcal{A}) \right\}$, il suffit de montrer :

$$\forall \varphi \in \mathcal{F}_+^o(\mathcal{A}) \text{ t.q. } \varphi \leq f \;\; : \;\; \int \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \lim \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Supposons que l'on ait montré :

A) $\forall \varphi \in \mathcal{F}_+^o(\mathcal{A})$ t.q. $\varphi \leq f$ et $\forall a \in [0\,,1[$: $a \int \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \lim \int f_n \,\mathrm{d}\mu$.

Alors, puisque a est arbitrairement proche de 1, on peut conclure en passant à la limite.

Montrons : A) $\forall \varphi \in \mathcal{F}_+^o(\mathcal{A})$ t.q. $\varphi \leq f$ et $\forall a \in [0\,,1[$: $a \int \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \lim \int f_n \,\mathrm{d}\mu$.

Soit $\varphi \in \mathcal{F}_+^o(\mathcal{A})$ t.q. $\varphi \leq f$ et soit $a \in [0\,,1[$.

On pose $E_n := \{a\varphi \leq f_n\}$.

- Alors (E_n) est une suite croissante (car (f_n) croissante) dans $\mathcal{A}$ (car f_n et φ mesurables) t.q.

$$\lim E_n = \cup E_n = E.$$

En effet, si $x \in E$ est t.q. $f(x) = 0$, alors $x \in E_n$ pour tout n car $\varphi(x) = f_n(x) = 0$. Sinon, si $f(x) > 0$, alors

$$a\varphi(x) < f(x)$$

car φ ne prend que des valeurs finies. Il existe donc $N_x \in \mathbb{N}$ t.q. $x \in E_n$ pour tout $n \geq N_x$.

Montrons : A) $\forall \varphi \in \mathcal{F}_+^o(\mathcal{A})$ t.q. $\varphi \leq f$ et $\forall a \in [0\,,1[$: $a\int \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \lim \int f_n \,\mathrm{d}\mu$.

On a posé $E_n = \{a\varphi \leq f_n\}$ et on a $(E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ suite croissante t.q. $\cup E_n = E$.

- Sous forme canonique on écrit $\varphi = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$. Alors

$$\int a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \,\mathrm{d}\mu = a \int \left(\sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap E_n} \right) \mathrm{d}\mu = a \sum_{i\in I} \alpha_i \,\mu(A_i \cap E_n).$$

Par **continuité à gauche** de la mesure μ, $\lim_n \mu(A_i \cap E_n) = \mu(A_i)$ pour tout $i \in I$, donc en passant à la limite, I étant fini, on a

$$\lim \int a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \,\mathrm{d}\mu = \sup \int a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \,\mathrm{d}\mu = a \sum_{i\in I} \alpha_i \mu(A_i) = a \int \varphi \,\mathrm{d}\mu.$$

D'autre part, puisque $E_n = \{a\varphi \leq f_n\}$, alors $a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \leq f_n$ et donc

$$\int a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \,\mathrm{d}\mu \leq \int f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \lim \int f_n \,\mathrm{d}\mu \quad \text{(on rappelle que } (f_n) \text{ est croissante),}$$

et A) est démontrée en passant à la limite et en utilisant l'égalité précédente. ■

Exemple (Mesure de comptage). L'intégration par rapport à la mesure de comptage $m := \text{card}$ sur $\mathbb{N}$ est tout simplement la **sommation** de série. En effet,

$$u \in \mathcal{F}_+(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$$

est tout simplement une suite (u_n) de réels positifs, *i.e.* $u(n) = u_n$, et pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'application (qui est une suite)

$$\varphi_N := u\,\mathbb{1}_{\{n\leq N\}} = \sum_{n=0}^{N} u_n\,\mathbb{1}_{\{n\}}$$

est une **fonction étagée positive qui converge en croissant vers u** ;

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \lim_{N\to+\infty} \varphi_N(n) = u(n) = u_n \quad \text{et} \quad \varphi_N(n) \leq \varphi_{N+1}(n).$$

Par le théorème de Beppo-Levi, puisque (φ_N) est une suite croissante de $\mathcal{F}_+$ qui converge vers u, alors

$$\int_{\mathbb{N}} u\,\mathrm{d}m = \lim_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{N}} \varphi_N\,\mathrm{d}m = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n\, m(\{n\}) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Proposition

L'application $f \mapsto \int_E f \, \mathrm{d}\mu$ du cône $\mathcal{F}_+$ vérifie :

i) $\forall f,\ g \in \mathcal{F}_+$: $\int (f+g)\, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu$; **(additivité)**

ii) $\forall f \in \mathcal{F}_+,\ \forall a \geq 0$: $\int (af)\, \mathrm{d}\mu = a \int f \, \mathrm{d}\mu$; **(positive homogénéité)**

iii) $\forall f,\ g \in \mathcal{F}_+$: $f \leq g \Rightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu$. **(croissance)**

Remarque. Comparer à la proposition slide 11.

Nous avons déjà démontré la croissance de l'intégrale.

► *(Preuve de l'additivité / positive homogénéité, la croissance étant déjà démontrée).*

Puisque $f \in \mathcal{F}_+$, d'après le **lemme d'approximation**, il existe une suite (f_n) dans $\mathcal{F}_+^o$ croissante et convergeant simplement vers f.

i) Par la propriété de **positive homogénéité** sur $\mathcal{F}_+^o$, on a : $\int a\, f_n \,\mathrm{d}\mu = a \int f_n \,\mathrm{d}\mu$.

ii) Par le **théorème de Beppo-Levi**, on a

$$\lim_n \int a\, f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_n \left(a\, f_n\right) \,\mathrm{d}\mu = \int a\, f \,\mathrm{d}\mu$$

mais aussi

$$\lim_n a \int f_n \,\mathrm{d}\mu = a \lim_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu = a \int \lim_n \left(f_n\right) \,\mathrm{d}\mu = a \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Ainsi i) + ii) nous donne

$$\int a\, f \,\mathrm{d}\mu = a \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

L'additivité se montre de la même manière : **approximation** + **Beppo-Levi**. ■

Proposition – Intervertion limite et somme

Pour toute suite (f_n) de $\mathcal{F}_+$, nous avons $\sum_n f_n \in \mathcal{F}_+$ et surtout

$$\int_E \left(\sum_n f_n\right) \mathrm{d}\mu = \sum_n \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

► On pose $g_n := \sum_{k=0}^n f_k$. Puisque (g_n) est une suite croissante dans $\mathcal{F}_+$, d'après le **théorème de Beppo-Levi**, on a $\int \lim_n g_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \int g_n \, \mathrm{d}\mu$. Mais

$$\int \lim_n g_n \, \mathrm{d}\mu = \int \lim_n \left(\sum_{k=0}^n f_k\right) \mathrm{d}\mu = \int \left(\sum_n f_n\right) \mathrm{d}\mu$$

et

$$\lim_n \int g_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \int \left(\sum_{k=0}^n f_k\right) \mathrm{d}\mu = \lim_n \sum_{k=0}^n \int f_k \, \mathrm{d}\mu \qquad \textbf{(par additivité)}$$

$$= \sum_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

■

Corollaire – Mesure de densité

Pour toute $f \in \mathcal{F}_+(\mathcal{A})$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \nu : & \mathcal{A} & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ & A & \longmapsto & \displaystyle\int_E f \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu \end{array}$$

est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$ appellée mesure de **densité** f par rapport à μ.

- Voir TD. ■

Notation. On notera souvent $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ à la place de $\int_E f \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu$.

Proposition

Pour toute $f \in \mathcal{F}_+$: $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0 \Longleftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = 0$.

- Montrons le sens $\Rightarrow$.

On pose $A_n := \{f \geq 1/n\}$. Par l'inégalité de Markov, par positivité de la mesure et par hypothèse, $0 \leq \mu(A_n) \leq n \int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$. Or $A := \{f \neq 0\} = \lim_n A_n$, donc par continuité à gauche de μ, $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n) = 0$.

- Traitons maintenant le cas $\Leftarrow$.

Par additivité

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_{A^c} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$$

car $f = 0$ sur A^c, donc si $\mu(A) = 0$ alors $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$. ∎

Proposition

Pour toutes f, $g \in \mathcal{F}_+$: $\mu(\{f \neq g\}) = 0 \Longrightarrow \int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E g \,\mathrm{d}\mu$.

- On pose

$$h := \begin{cases} \max(f,g) - \min(f,g) \text{ sur } \{\min(f,g) < +\infty\} \\ 0 \text{ sur } \{f = g = +\infty\}. \end{cases}$$

Comme $\{f = g\} = \{h = 0\}$, par complémentaire $\{h \neq 0\} = \{f \neq g\}$, donc par hypothèse $\mu(\{h \neq 0\}) = 0$ et par la proposition précédente $\int_E h \,\mathrm{d}\mu = 0$. Puisque $\max(f,g) = \min(f,g) + h$, par additivité on a

$$\int_E \max(f,g) \,\mathrm{d}\mu = \int_E \min(f,g) \,\mathrm{d}\mu + \int_E h \,\mathrm{d}\mu = \int_E \min(f,g) \,\mathrm{d}\mu.$$

Mais comme $\min(f,g) \leq f, g \leq \max(f,g)$, par croissance de l'intégrale on a

$$\int_E \max(f,g) \,\mathrm{d}\mu = \int_E \min(f,g) \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E g \,\mathrm{d}\mu.$$

■

Proposition – Lemme de Fatou

Pour toute suite (f_n) de $\mathcal{F}_+(\mathcal{A})$, nous avons $\liminf_n f_n \in \mathcal{F}_+(\mathcal{A})$ et

$$\int_E \liminf_n f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Remarque. La suite n'est pas supposée croissante.

Remarque. Pour $f_n := \mathbb{1}_{A_n}$ où $A_n \in \mathcal{A}$, le lemme de Fatou se traduit par l'inégalité

$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n).$$

Proposition – Lemme de Fatou

Pour toute suite (f_n) de $\mathcal{F}_+(\mathcal{A})$, nous avons $\liminf_n f_n \in \mathcal{F}_+(\mathcal{A})$ et

$$\int_E \liminf_n f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

► Soient $g_n := \inf_{k \geq n} f_k$ et $g := \liminf_n f_n = \lim_n g_n$. Comme g est la limite simple de la suite croissante (g_n) dans $\mathcal{F}_+$, d'après le **théorème de Beppo-Levi**, on a

$$\int g \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int g_n \,\mathrm{d}\mu.$$

D'autre part, $g_n \leq f_n$ donc par **croissance de l'intégrale**, $\int g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int f_n \,\mathrm{d}\mu$ et donc

$$\liminf_n \int g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

D'après ce qui précède, $\liminf_n \int g_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int g_n \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$, ce qui permet de conclure. ■

3.3 Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

Remarque. On considère des fonctions mesurables de signe quelconque à valeurs dans $\mathbb{R}$ pour éviter les formes indéterminées comme

$$+\infty - +\infty.$$

Nous avons déjà noté $\mathcal{F}^o$ l'ensemble des fonctions étagées de $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{F}$ celui des fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, *i.e.* $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

Remarque. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Nous pouvons toujours écrire f sous la forme

$$f = f^+ - f^-$$

avec

$$f^+ := f\,\mathbb{1}_{f>0} \in \mathcal{F}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad f^- := -f\,\mathbb{1}_{f<0} \in \mathcal{F}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Définition – Intégrale d'une fonction de $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ **admet une intégrale** si f^+ ou f^- est intégrable.

Si f^+ et f^- sont intégrables alors on dit que f est **μ-intégrable** (ou **intégrable**).

Si f admet une intégrale, ce qui est le cas si f est intégrable, alors on définit **l'intégrale de f sur E par rapport à μ** par

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \int_E f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E f^- \, \mathrm{d}\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Définition

On notera $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1(\mu)$ ou $\mathcal{L}^1$, l'ensemble des fonctions intégrables.

Remarque. Bien noter $\mathcal{L}^1$ car la notation L^1 fera plus tard référence à un autre espace.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}^1$. Alors

$$\left|\int_E f \, \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Réciproquement, pour $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ si $|f|$ est intégrable alors f l'est aussi, *i.e.* $f \in \mathcal{L}^1$.

- Par définition, f^+ et f^- sont intégrables et

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int f^- \, \mathrm{d}\mu \leq \int f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int f^- \, \mathrm{d}\mu = \int |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty,$$

par additivité (on rappelle que $|f| = f^+ + f^-$). De même, on démontre que $-\int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int |f| \, \mathrm{d}\mu$. ■

Théorème

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

L'espace $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un **espace vectoriel** et l'application

$$T : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & T(f) := \int_E f \,\mathrm{d}\mu \end{array}$$

est une **forme linéaire croissante**.

Remarque. L'ensemble $\mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathrm{card})$ souvent noté l^1 est l'ensemble des suites dont la série est absolument convergente.

- Montrons que $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un **espace vectoriel**.

Soient f, g dans $\mathcal{L}^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque

$$|\lambda f + g| \leq |\lambda||f| + |g|$$

et puisque par **additivité et positive homogénéité** de l'intégrale sur $\mathcal{F}_+$

$$\int (|\lambda||f| + |g|) \,\mathrm{d}\mu = |\lambda| \int |f| \,\mathrm{d}\mu + \int |g| \,\mathrm{d}\mu,$$

alors par le **théorème de comparaison**, $|\lambda f + g|$ est intégrable, donc d'après la proposition précédente, $\lambda f + g \in \mathcal{L}^1$.

- Montrons que $\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu$ pour f, g dans $\mathcal{L}^1$.

Tout d'abord, par définition

$$f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Ainsi

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^- \geq 0$$

et donc par additivité de l'intégrale sur $\mathcal{F}_+$ on a

$$\int (f+g)^+\,\mathrm{d}\mu + \int f^-\,\mathrm{d}\mu + \int g^-\,\mathrm{d}\mu = \int (f+g)^-\,\mathrm{d}\mu + \int f^+\,\mathrm{d}\mu + \int g^+\,\mathrm{d}\mu$$

ce qui donne puisque toutes ces quantités sont finies

$$\int (f+g)^+\,\mathrm{d}\mu - \int (f+g)^-\,\mathrm{d}\mu = \int f^+\,\mathrm{d}\mu - \int f^-\,\mathrm{d}\mu + \int g^+\,\mathrm{d}\mu - \int g^-\,\mathrm{d}\mu$$

autrement dit

$$\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu.$$

- Montrons que $\int \lambda f \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int f \,\mathrm{d}\mu$ pour f dans $\mathcal{L}^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarquons que $\lambda f = \lambda(f^+ - f^-) = \lambda f^+ - \lambda f^-$ mais surtout que

$$\begin{aligned} \lambda > 0 \Rightarrow (\lambda f)^+ &= \ \ \lambda f^+ \quad \text{et} \quad (\lambda f)^- = \ \ \lambda f^-, \\ \lambda < 0 \Rightarrow (\lambda f)^+ &= -\lambda f^- \quad \text{et} \quad (\lambda f)^- = -\lambda f^+. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la **positive homogénéité** de l'intégrale sur $\mathcal{F}_+$, on a :

$$\lambda > 0 \Rightarrow \int \lambda f \,\mathrm{d}\mu = \int \lambda f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int \lambda f^- \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \lambda \int f^- \,\mathrm{d}\mu,$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow \int \lambda f \,\mathrm{d}\mu = \int -\lambda f^- \,\mathrm{d}\mu - \int -\lambda f^+ \,\mathrm{d}\mu = -\lambda \int f^- \,\mathrm{d}\mu - (-\lambda) \int f^+ \,\mathrm{d}\mu.$$

et donc dans les deux cas $\int \lambda f \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int f \,\mathrm{d}\mu$.

Les deux points précédents démontrent la linéarité de l'application T : $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$. Ainsi T est bien une forme linéaire, car définie sur un espace vectoriel et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Montrons que $\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$ pour f, g dans $\mathcal{L}^1$ si $f \leq g$, *i.e.* montrons que T est croissante.

En fait, T est une forme linéaire **positive** donc croissante.

En effet, posons $h := g - f$. Alors $h = h^+ \geq 0$ et puisque alors $h \in \mathcal{F}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ il vient que $T(h) \geq 0$ (T est donc positive).

Mais $T(h) = T(g) - T(f)$ par linéarité de T et donc $T(g) \geq T(f)$.

∎