

Systèmes de transitions

Philippe Quéinnec, Xavier Thirioux, Aurélie Hurault

ENSEEIH

Département Sciences du Numérique

Contexte

- Système critique, dont la défaillance entraîne des conséquences graves (exemple : médical, transport)
- Système complexe, dont il est difficile de se convaincre de la correction (exemple : systèmes concurrents)

Pourquoi ?

- Nécessité de **prouver** qu'un algorithme / un système possède bien les propriétés attendues
- C'est dur \Rightarrow nécessité de cadres formels précis et d'outils

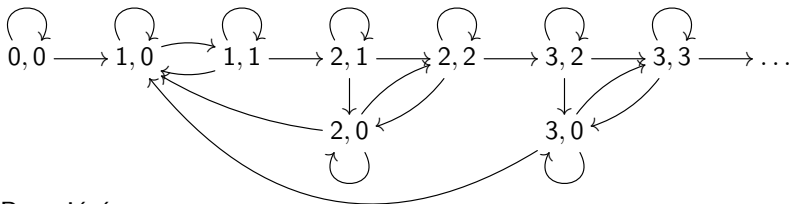
Comment ?

- Langage impératif classique :
état = valeurs des variables + *flot de contrôle implicite*
- Système de transitions :
état = valeurs des variables + *flot de contrôle explicite*

Soit trois processus exécutant concurremment (par entrelacement) :

boucle || boucle || boucle
 $x \leftarrow y + 1$ || $y \leftarrow x$ || $y \leftarrow 0$

❶ Description du système en termes d'états ?



❷ Propriétés :

- L'état 4, 2 est-il accessible ?
- Le système s'arrête-t-il ? Toujours, parfois ?
- Est-il toujours vrai que $y = 0 \vee 0 \leq x - y \leq 1$?
- Si $y = 6$, est-il possible/nécessaire que x devienne > 6 ?
- Est-il possible/nécessaire que y soit non borné ?

Temporal Logic of Actions

- ❶ Un langage de spécification logique (LTL / Logique temporelle linéaire) \approx quelles sont les propriétés attendues ?
- ❷ Un langage d'actions \approx un langage de spécification plus opérationnel \approx un langage de programmation
- ❸ (en fait, langage de spécification = langage d'actions)
- ❹ Cadre formel = système de transitions
- ❺ Outils : vérificateur automatique, assistant de preuve

Auteur principal : **Leslie Lamport**



Plan du cours

- 1 Systèmes de transitions
- 2 TLA^+ : les actions
- 3 Équité dans les systèmes de transitions
- 4 Logique temporelle linéaire LTL
- 5 TLA^+ : la logique et l'équité
- 6 Logique temporelle arborescente CTL



Ressources

- <http://queinnec.perso.enseeiht.fr/Ens/st.html>
supports de cours, TP, examens
- <http://lamport.azurewebsites.net/video/videos.html>
vidéos de L. Lamport sur TLA⁺
- <http://lamport.azurewebsites.net/tla/tla.html>
autres ressources (livre *Specifying Systems*)
- <https://learntla.com/>
guide d'introduction à TLA⁺ (exemples surtout en PlusCal)



Première partie

Systèmes de transitions



Introduction

Objectifs

Représenter les exécutions d'un algorithme en faisant abstraction de certains détails :

- les détails sont la cause d'une explosion du nombre d'états et de la complexité des traitements.
- ne conserver que ce qui est pertinent par rapport aux propriétés attendues.



Utilisation

Un système de transitions peut être construit :

- *avant* l'écriture du programme, pour explorer la faisabilité de celui-ci.
Le programme final est un raffinement en utilisant le système de transitions comme guide.
- *après* l'écriture du programme, par abstraction, en ne conservant que les aspects significatifs du programme réel.



Plan

- 1 Définitions
 - Système de transitions
 - Traces, exécutions
 - États, graphe
 - Système de transitions étiqueté
- 2 Représentations
 - Explicite
 - Implicite
- 3 Propriétés générales
 - Blocage
 - Réinitialisable
 - Bégaiement
- 4 Composition de systèmes de transitions



Système de transitions



Système de transitions (ST)

Un système de transitions est un triplet $\langle S, I, R \rangle$.

- S : ensemble d'états. Peut être fini ou infini.
- $I \subseteq S$: ensemble des états initiaux.
- $R \subseteq S \times S$: relation (de transitions) entre paires d'états.
 $(s, s') \in R$ signifie qu'il existe une transition faisant passer le système de l'état s à l'état s' .

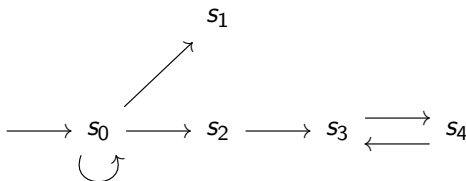


Exemple - système de transitions

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$I = \{s_0\}$$

$$R = \{(s_0, s_0), (s_0, s_1), (s_0, s_2), (s_2, s_3), (s_3, s_4), (s_4, s_3)\}$$



Séquences



Séquence

Soit S un ensemble.

$S^* \triangleq$ l'ensemble des séquences finies sur S .

$S^\omega \triangleq$ l'ensemble des séquences infinies sur S .

$\sigma_i \triangleq$ le $i^{\text{ème}}$ (à partir de 0) élément d'une séquence σ .

Conventions de représentation :

- Une séquence s est notée sous la forme : $\langle s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rangle$.
- $\langle \rangle$: la séquence vide.

Pour une séquence finie σ :

- $\sigma^* \triangleq$ l'ensemble des séquences finies produites par la répétition arbitraire de σ .
- $\sigma^+ \triangleq \sigma^* \setminus \{\langle \rangle\}$
- $\sigma^\omega \triangleq$ la séquence infinie produite par la répétition infinie de σ .



Traces finies



Traces finies

Soit $\langle S, I, R \rangle$ un système de transitions.

On appelle **trace finie** une séquence finie $\sigma \in S^*$ telle que :

- $\sigma = \langle s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_{n-1} \rightarrow s_n \rangle$
- $\forall i \in [0..n]: (s_i, s_{i+1}) \in R$

Traces finies maximales

Soit $\langle S, I, R \rangle$ un système de transitions.

Une trace finie $\langle s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_{n-1} \rightarrow s_n \rangle \in S^*$ est **maximale**
 \triangleq il n'existe pas d'état successeur à s_n , i.e. $\forall s \in S : (s_n, s) \notin R$.

Une trace maximale va le plus loin possible.



Traces infinies et traces issues d'un état



Traces infinies

Soit $\langle S, I, R \rangle$ un système de transitions, et $s_0 \in S$.

On appelle **trace infinie** à partir de s_0 un élément $tr \in S^\omega$ tel que :

- $tr = \langle s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \dots \rangle$
- $\forall i \in \mathbb{N} : (s_i, s_{i+1}) \in R$

Traces issues d'un état

Soit $\langle S, I, R \rangle$ un système de transitions, et $s \in S$.

$Traces(s) \triangleq$ l'ensemble des traces infinies ou finies maximales commençant à l'état s .



Exécutions



Exécutions

Soit $\mathcal{S} = \langle S, I, R \rangle$ un système de transitions.

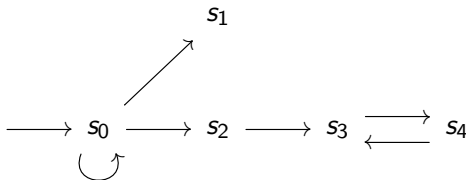
Une **exécution** $\sigma = \langle s_0 \rightarrow \dots \rangle$ est une trace infinie ou finie maximale telle que $s_0 \in I$.

$Exec(\mathcal{S}) \triangleq$ l'ensemble des exécutions de $\mathcal{S} = \bigcup_{s_0 \in I} Traces(s_0)$.

On a une (seule et unique) exécution vide $\langle \rangle$ ssi $I = \emptyset$.



Exemple - traces, exécutions



$s_0 \rightarrow s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3$ est une trace finie non maximale

$$\text{Traces}(s_1) = \langle s_1 \rangle$$

$$\text{Traces}(s_3) = \langle (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle$$

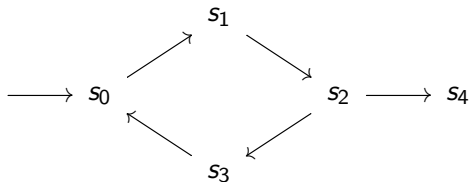
$$\text{Traces}(s_2) = \langle s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle$$

$$\text{Traces}(s_0) = \langle s_0^\omega \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_1 \rangle, \langle s_0^+ \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_4)^\omega \rangle$$

$$\text{Exec}(\mathcal{S}) = \text{Traces}(s_0)$$



Exemple 2 - traces, exécutions



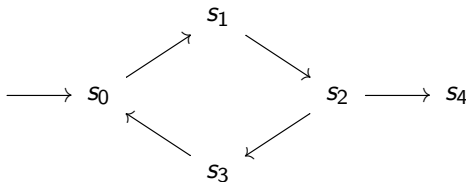
$Traces(s_2) =$

$Traces(s_0) =$

$Exec(\mathcal{S}) =$



Exemple 2 - traces, exécutions



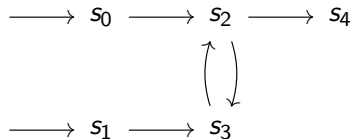
$$\begin{aligned} \text{Traces}(s_2) = & \langle s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2)^* \rightarrow s_4 \rangle, \\ & \langle (s_2 \rightarrow s_3 \rightarrow s_0 \rightarrow s_1)^\omega \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Traces}(s_0) = & \langle s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2)^* \rightarrow s_4 \rangle, \\ & \langle (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Exec}(\mathcal{S}) = \text{Traces}(s_0)$$



Exemple 3 - traces, exécutions



$$\text{Traces}(s_2) =$$

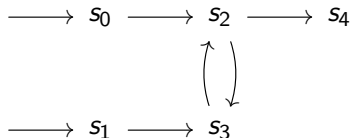
$$\text{Traces}(s_0) =$$

$$\text{Traces}(s_1) =$$

$$\text{Exec}(\mathcal{S}) =$$



Exemple 3 - traces, exécutions



$$Traces(s_2) = \langle s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_2)^* \rightarrow s_4 \rangle, \\ \langle (s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$$

$$Traces(s_0) = \langle s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_2)^* \rightarrow s_4 \rangle, \\ \langle s_0 \rightarrow (s_2 \rightarrow s_3)^\omega \rangle$$

$$Traces(s_1) = \langle s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow s_2 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_2)^* \rightarrow s_4 \rangle, \\ \langle s_1 \rightarrow (s_3 \rightarrow s_2)^\omega \rangle$$

$$Exec(\mathcal{S}) = Traces(s_0) \cup Traces(s_1)$$



États accessibles

État accessible

Soit $\mathcal{S} = \langle S, I, R \rangle$ un système de transitions.

$s \in S$ est un état **accessible** \triangleq il existe une exécution qui passe par s (ou équivalent, il existe un préfixe d'exécution qui aboutit à s).

$\text{Acc}(\mathcal{S}) \triangleq$ l'ensemble des états accessibles de \mathcal{S} .



Graphe des exécutions

Graphe des exécutions

Soit $\mathcal{S} = \langle S, I, R \rangle$ un système de transitions.

Le **graphe des exécutions** est le graphe orienté où :

- l'ensemble des sommets est $Acc(\mathcal{S})$;
- l'ensemble des arêtes orientées est R , restreint aux seuls états accessibles.

Il s'agit donc du graphe $\langle S \cap Acc(\mathcal{S}), R \cap (Acc(\mathcal{S}) \times Acc(\mathcal{S})) \rangle$.



Système de transitions étiqueté



ST étiqueté

Un système de transitions étiqueté est un quintuplet $\langle S, I, R, L, Etiq \rangle$.

- S : ensemble d'états.
- $I \subseteq S$: ensemble des états initiaux.
- $R \subseteq S \times S$: relation de transitions entre paires d'états.
- L : ensemble d'étiquettes.
- Etq : fonction qui associe une étiquette à chaque transition : $Etq \in R \rightarrow L$.

Un ST étiqueté se rapproche beaucoup des automates.
Mais : pas d'état terminal + exécution infinie.



Équivalence aux ST sans étiquette



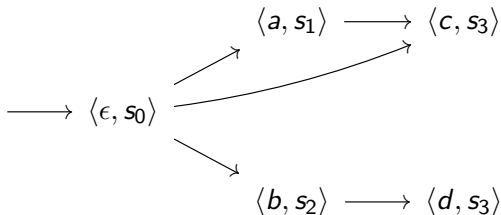
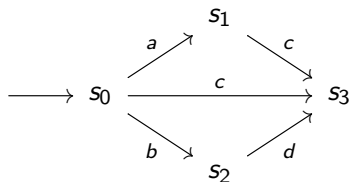
Un système de transitions étiqueté $\langle S, I, R, L, Etiq \rangle$ est équivalent au système sans étiquette $\langle S', I', R' \rangle$ défini par :

- $S' = (L \cup \{\epsilon\}) \times S$
- $I' = \{\epsilon\} \times I$
- $R' = \{(\langle I, s \rangle, \langle I', s' \rangle) \mid (s, s') \in R \wedge I' = Etiq(s, s')\}$

Une transition $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ devient $\langle -, s_1 \rangle \longrightarrow \langle a, s_2 \rangle$,
où $-$ est n'importe quelle étiquette.



Exemple - équivalence avec/sans étiquette



Différences entre système de transition et automate

Système de transitions \neq automate

- Pas d'étiquette sur les transitions (ou comme si)
- Une transition n'est pas causée par l'environnement
- Pas d'états terminaux
- Nombre d'états infini possible
- Exécution infinie possible



Plan

- 1 Définitions
 - Système de transitions
 - Traces, exécutions
 - États, graphe
 - Système de transitions étiqueté
- 2 Représentations
 - Explicite
 - Implicite
- 3 Propriétés générales
 - Blocage
 - Réinitialisable
 - Bégaiement
- 4 Composition de systèmes de transitions



Représentation en extension



Représentation en extension

Donnée en extension du graphe des exécutions, par exemple sous forme graphique ou par l'ensemble des sommets et arêtes.

Ne convient que pour les systèmes de transitions où le nombre d'états et de transitions est fini.



Représentation en intention



Représentation symbolique à l'aide de variables.

Système de transitions à base de variables

Un triplet $\langle V, Init, Trans \rangle$ où

- $V = \{v_1, \dots, v_n\}$: ensemble fini de variables.
- $Init(v_1, \dots, v_n)$: prédicat définissant les états initiaux et portant sur les variables v_i .
- $Trans(v_1, \dots, v_n, v'_1, \dots, v'_n)$: prédicat définissant les transitions, portant sur les variables v_i représentant l'état courant et les variables v'_i représentant l'état suivant.



Exemple : un compteur borné



```
i = 0;
while (i < N) {
    i = i+1;
}
```

En extension pour $N = 5$:

$\langle (0, 1, 2, 3, 4, 5), \{0\}, \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\} \rangle$

Graphe d'exécution pour $N = 5$:

$\longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$

Symboliquement (en intention) :

$$V \triangleq i \in \mathbb{N}$$

$$I \triangleq i = 0$$

$$T \triangleq i < N \wedge i' = i + 1 \quad \text{ou} \quad T \triangleq i' \leq N \wedge i' - i = 1$$



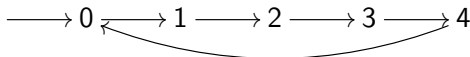
Exemple : un compteur cyclique

```
i = 0;
while (true) {
    i = (i+1) % N;
}
```

En extension pour $N = 5$:

$\langle (0, 1, 2, 3, 4, 5), \{0\}, \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 0)\} \rangle$

Graphe d'exécution pour $N = 5$.



Symboliquement :

$$V \triangleq i \in \mathbb{N}$$

$$I \triangleq i = 0$$

$$T \triangleq i' = (i + 1) \bmod N$$



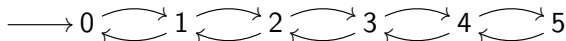
Exemple : un entier oscillant



```
i = 0;
while (true) {
    i > 0 -> i = i - 1;
    or i < N -> i = i + 1;
}
```

En extension pour $N = 5$: $\langle (0, 1, 2, 3, 4, 5), \{0\}, \{(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4)\} \rangle$

Graphe d'exécution pour $N = 5$.



Symboliquement :

$$V \triangleq i \in \mathbb{N}$$

$$I \triangleq i = 0$$

$$T \triangleq i > 0 \wedge i' = i - 1 \quad \text{ou} \quad T \triangleq |i' - i| = 1 \wedge 0 \leq i' \leq N \\ \vee i < N \wedge i' = i + 1$$



Système de transition correspondant



Pour une description symbolique $\langle V, Init, Trans \rangle$, le système de transitions correspondant est $\langle S, I, R \rangle$ où :

- $S = \prod_{i \in 1..n} D_i$,
 où D_1, \dots, D_n sont les domaines (types) des variables v_1, \dots, v_n
- $I = \{(v_1, \dots, v_n) \mid Init(v_1, \dots, v_n)\}$
- $R = \{((v_1, \dots, v_n), (v'_1, \dots, v'_n)) \mid Trans(v_1, \dots, v_n, v'_1, \dots, v'_n)\}$



Prédicats

Prédicat d'état

Un prédicat d'état est un prédicat portant sur les variables (d'état) d'un système donné en intention.

Un prédicat d'état peut être vu comme la fonction caractéristique d'une partie de S .

Prédicat de transition

Un prédicat de transitions est un prédicat portant sur les variables (d'état) primées et non primées.

Un prédicat de transitions peut être vu comme la fonction caractéristique d'une partie de $S \times S$.



Exemple - prédicats

$$V \triangleq n \in \mathbb{N}$$

$$I \triangleq -5 \leq n \leq 5$$

$$T \triangleq n \neq 1 \wedge \left(\begin{array}{l} (n' = n/2 \wedge n \equiv 0[2]) \\ \vee (n' = (3n+1)/2 \wedge n \equiv 1[2]) \end{array} \right)$$

Prédicats d'état : $I, n < 20$

Prédicats de transition : $T, n' - n > 3$



Plan

- 1 Définitions
 - Système de transitions
 - Traces, exécutions
 - États, graphe
 - Système de transitions étiqueté
- 2 Représentations
 - Explicite
 - Implicite
- 3 Propriétés générales
 - Blocage
 - Réinitialisable
 - Bégalement
- 4 Composition de systèmes de transitions



Blocage

Interblocage

Un système possède un interblocage (deadlock) \triangleq il existe un état accessible sans successeur par la relation R .

De manière équivalente un système possède un interblocage s'il existe des exécutions finies.

Pour les systèmes modélisant des programmes séquentiels classiques, l'interblocage est équivalent à la terminaison.



Réinitialisable

Réinitialisable

Un système est réinitialisable \triangleq depuis tout état accessible, il existe une trace finie menant à un état initial.

Cette propriété signifie qu'à n'importe quel moment, il existe une séquence de transitions pour revenir à l'état initial du système et ainsi redémarrer. Un tel système n'a que des exécutions infinies.



Bégaïement



Bégaïement

Un état s bégaie \triangleq l'état possède une boucle : $(s, s) \in R$.

Un système de transitions bégaie \triangleq tout état possède une boucle vers lui-même : $Id \subseteq R$.

Utilité :

- Modéliser l'avancement arbitraire : $\longrightarrow s_0 \longrightarrow s_1$
on peut aller en s_1 après être resté arbitrairement longtemps en s_0 .
- N'avoir que des exécutions infinies : tout état sans successeur (dans un système sans bégaïement) a un unique successeur avec bégaïement : lui-même. La terminaison (l'interblocage) $\dots \rightarrow s_i$ est alors $\dots \rightarrow s_i^\omega$.
- Composer plusieurs systèmes de transitions.



Plan

- 1 Définitions
 - Système de transitions
 - Traces, exécutions
 - États, graphe
 - Système de transitions étiqueté
- 2 Représentations
 - Explicite
 - Implicite
- 3 Propriétés générales
 - Blocage
 - Réinitialisable
 - Bégaiement
- 4 Composition de systèmes de transitions



Composition : produit libre



Produit libre

La composition des ST avec bégaiement $\langle V_1, I_1, T_1 \rangle$ et $\langle V_2, I_2, T_2 \rangle$ est $\langle V, I, T \rangle$ où :

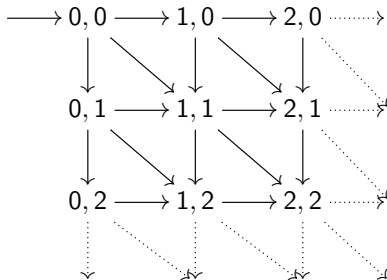
- $V \stackrel{\Delta}{=} V_1 \cup V_2$ (union des variables)
- $I \stackrel{\Delta}{=} I_1 \wedge I_2$ (chaque sous-système démarre dans un de ses états initiaux)
- $T \stackrel{\Delta}{=} T_1 \wedge T_2$ (chaque sous-système évolue selon ses transitions)

Comme T_1 et T_2 peuvent bégayer, $T_1 \wedge T_2$ signifie donc qu'on peut exécuter une transition de T_1 seule et T_2 bégayant, ou bien réciproquement, ou bien encore exécuter T_1 en même temps que T_2 .



Exemple - produit libre

$$\left(\begin{array}{l} V_1 \triangleq i \in \mathbb{N} \\ I_1 \triangleq i = 0 \\ T_1 \triangleq i' = i + 1 \\ \vee i' = i \end{array} \right) \otimes \left(\begin{array}{l} V_2 \triangleq j \in \mathbb{N} \\ I_2 \triangleq j = 0 \\ T_2 \triangleq j' = j + 1 \\ \vee j' = j \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} V \triangleq i, j \in \mathbb{N} \\ I \triangleq i = 0 \wedge j = 0 \\ T \triangleq \begin{array}{l} i' = i + 1 \wedge j' = j \\ \vee i' = i \wedge j' = j + 1 \\ \vee i' = i + 1 \wedge j' = j + 1 \\ \vee i' = i \wedge j' = j \end{array} \end{array} \right)$$



+bégaiement

Handwritten signature

Composition : produit synchronisé strict (ou fermé)



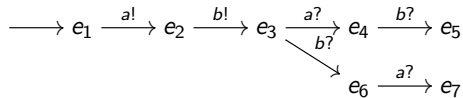
Produit synchronisé strict

Le produit synchrone des ST étiquetés $\langle S_1, I_1, R_1, L_1 \rangle$ et $\langle S_2, I_2, R_2, L_2 \rangle$ est $\langle S, I, R, L \rangle$ où :

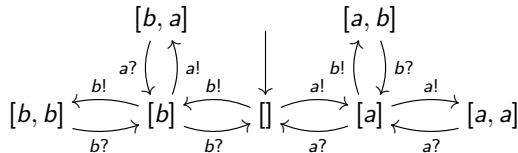
- $S \triangleq S_1 \times S_2$ (couple d'états)
- $I \triangleq I_1 \times I_2$
(chaque sous-système démarre dans un de ses états initiaux)
- $R \triangleq \{((s_1, s_2), (s'_1, s'_2)) \mid (s_1, s'_1) \in R_1 \wedge (s_2, s'_2) \in R_2 \wedge \text{Etiqu}((s_1, s'_1)) = \text{Etiqu}((s_2, s'_2))\}$
(les deux sous-systèmes évoluent selon des transitions portant les mêmes étiquettes)
- $L = L_1 \cap L_2$ (étiquettes communes seulement)



Exemple – produit synchronisé strict



Synchronisé strict avec LIFO 2 éléments (pile)

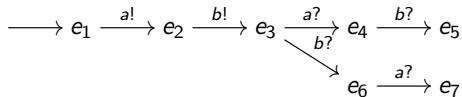


Donne

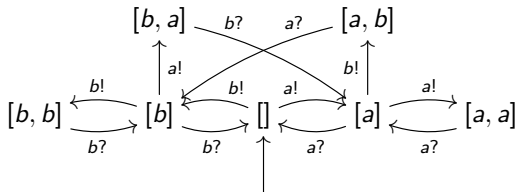
$$\longrightarrow (e_1, []) \xrightarrow{a!} (e_2, [a]) \xrightarrow{b!} (e_3, [a, b]) \xrightarrow{b?} (e_6, [a]) \xrightarrow{a?} (e_7, [])$$



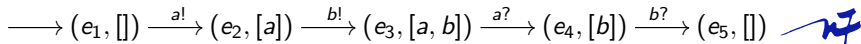
Exemple – produit synchronisé strict



Synchronisé strict avec FIFO 2 éléments (file)



Donne



Composition : produit synchronisé ouvert



Produit synchronisé ouvert

Le produit synchrone des ST étiquetés $\langle S_1, I_1, R_1, L_1 \rangle$ et $\langle S_2, I_2, R_2, L_2 \rangle$ est $\langle S, I, R, L \rangle$ où :

- $S \triangleq S_1 \times S_2$ (couple d'états)
- $I \triangleq I_1 \times I_2$
- $R \triangleq \left\{ \begin{array}{l} ((s_1, s_2), (s'_1, s'_2)) \mid (s_1, s'_1) \in R_1 \wedge (s_2, s'_2) \in R_2 \\ \quad \wedge \text{Etiqu}((s_1, s'_1)) = \text{Etiqu}((s_2, s'_2)) \\ ((s_1, s_2), (s'_1, s_2)) \mid (s_1, s'_1) \in R_1 \wedge \text{Etiqu}((s_1, s'_1)) \notin L_2 \\ ((s_1, s_2), (s_1, s'_2)) \mid (s_2, s'_2) \in R_2 \wedge \text{Etiqu}((s_2, s'_2)) \notin L_1 \end{array} \right\}$
- $L = L_1 \cup L_2$

Synchronisation sur étiquette commune, bégaiement sur étiquette absente.

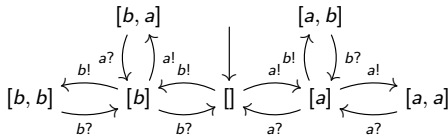


Exemple – produit synchronisé ouvert



$$\longrightarrow e_1 \xrightarrow{a!} e_2 \xrightarrow{a?} e_3$$

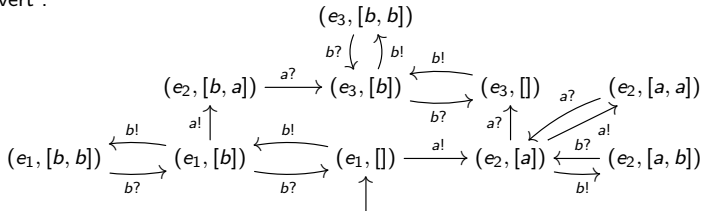
Synchronisé avec LIFO 2 éléments (pile)



Donne

• strict : $\longrightarrow (e_1, []) \xrightarrow{a!} (e_2, [a]) \xrightarrow{a?} (e_3, [])$

• ouvert :



Bilan

Cette séance a présenté :

- la définition de système de transitions (états, transitions)
- la notion de trace et d'exécution
- la représentation explicite (en extension) ou symbolique (en intention)
- quelques propriétés génériques, dont le bégaiement
- diverses formes de composition de systèmes de transition

