CSAD
CM2.1

Décomposition en valeurs singulières et applications

I/ SVD d'une matrice

"SVD" $\rightsquigarrow$ singular value decomposition.
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $rg(A) = r \geq 1$.

A - Propriétés de A^TA

Propriété : i) A^TA est symétrique semi-définie positive
ii) les valeurs propres de A^TA sont dans $\mathbb{R}_+$ et A^TA est orthodiagonalisable
iii) $\ker A^TA = \ker A$
$\operatorname{Im} A^TA = \operatorname{Im} A^T$
iv) A^TA inversible $\Leftrightarrow rg(A) = n$

preuve : iii) $\ker A \subset \ker A^TA$ (clair)
Soit $x \in \ker A^TA$ alors $A^TAx = 0 \Rightarrow x^TA^TAx = 0 = \|Ax\|^2$
D'où $\|Ax\| = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \ker A$. Donc $\ker A^TA = \ker A$.
$\operatorname{Im} A^TA \subset \operatorname{Im} A^T$ (clair)
D'après le théorème du rang $\dim \underbrace{\ker A^TA}_{\ker A} + rg(A^TA) = n$
D'où $rg(A^TA) = n - \dim \ker A = rg(A) = rg(A^T)$. D'où $\operatorname{Im} A^TA = \operatorname{Im} A^T$
iv) A^TA inversible $\Leftrightarrow \ker A^TA = \{0\}$
$\Leftrightarrow \ker A = \{0\}$ par iii)
$\Leftrightarrow rg A = n$ par thm du rang.

B - Construction de la SVD de A.

On a $rg(A^TA) = \dim \operatorname{Im} A^TA = \dim \operatorname{Im} A^T$
$= rg(A^T) = rg(A) = r$.
et $\dim \ker A^TA = n - r$.
Donc 0 est valeur propre de A^TA de multiplicité $n-r$
Notons $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les vp de A^TA classées par ordre décroissant ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n = 0$).
Soit $(v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une BON de $\vec{vp}$ associés $\mathcal{E} = (\underbrace{v_1 \dots v_r}_{\text{BON de } \ker(A^TA)^\perp} \underbrace{v_{r+1} \dots v_n}_{\text{BON de } \ker(A^TA) = \ker A})$
$= (\ker A)^\perp$

Posons $V = [v_1 \dots v_n] \in O_n(\mathbb{R})$ ($V^TV = I_n$).
On pose $\forall i \in [\![1,r]\!]$ $u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Av_i$

On a $\forall i \in [\![1,r]\!]$ $(u_i, u_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}} (Av_i, Av_j)$.

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}} (\underbrace{A^TAv_i}_{\lambda_i v_i}, v_j) \text{ car } (\lambda_i, v_i) \text{ couple propre de } A^TA.$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} \underbrace{(v_i, v_j)}_{=\delta_{ij}} \text{ car } (v_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \text{ BON}.$$

$$= \delta_{ij}$$

$(u_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ FON de $\mathbb{R}^n$ (famille orthonormée).
De plus, $\operatorname{Vect}(u_i)_{i\in[\![1,r]\!]} \subset \operatorname{Im} A$. et $rg(u_i) = card(u_i) = r = rg(A)$
$\Rightarrow \operatorname{vect}(u_i)_{i\in[\![1,r]\!]} = \operatorname{Im} A$ et $(u_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ BON de $\operatorname{Im} A$.
On complète $(u_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ en une BON de $\mathbb{R}^m$ par $(v_{r+1}, \dots v_m)$ BON de $(\operatorname{Im} A)^\perp$
On pose $\mathcal{F} = (\underbrace{u_1, \dots u_r}_{\text{BON Im} A}, \underbrace{v_{r+1} \dots v_m}_{\text{BON de } (\operatorname{Im} A)^\perp})$ $U = [u_1 \dots u_m] \in O_m(\mathbb{R})$: $U^TU = I_m$.

$\forall i \in [\![1,r]\!]$ AA^Tu_i avec $\forall i \in [\![1,r]\!]$ $u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Av_i$

$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A \underbrace{A^TAv_i}_{\lambda v_i} = \sqrt{\lambda_i} Av_i$

$= \lambda_i u_i$ et u_i vp de AA^T associé à λ

$U^TAV = U^TA [v_1, \dots v_r \, v_{r+1} \dots v_n]$

$= U^T [\underset{\sqrt{\lambda_1}u_1}{Av_1} \dots \underset{\sqrt{\lambda_r}u_r}{Av_r} \, \underset{0}{Av_{r+1}} \dots \underset{0}{Av_m}]$

$= \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_r^T \\ u_{r+1}^T \\ u_m^T \end{bmatrix} [\sqrt{\lambda_1}u_1 \dots \sqrt{\lambda_r}u_r \; 0 \dots 0] = \left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{\lambda_1}u_1^Tu_1 & \dots & \sqrt{\lambda_r}u_1^Tu_r & \\ & \ddots & & \\ \sqrt{\lambda_1}u_r^Tu_1 & & \sqrt{\lambda_r}u_r^Tu_r & 0 \\ \hline \sqrt{\lambda_1}u_{r+1}^Tu_1 & & \sqrt{\lambda_r}u_{r+1}^Tu_r & \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \sqrt{\lambda_1}u_m^Tu_1 & & \sqrt{\lambda_r}u_m^Tu_r & \end{array}\right)$

Or $\forall (i,j) \in [\![1,m]\!]^2$ $(u_i, u_j) = u_i^Tu_j$

D'où $U^TAV = \begin{array}{c} \quad \overset{r}{\longleftrightarrow} \qquad\qquad \overset{m-r}{\longleftrightarrow} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{\lambda_1} & & (0) & \\ & \ddots & & (0) \\ (0) & & \sqrt{\lambda_r} & \\ \hline & (0) & & (0) \end{array}\right) \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow m-r \end{array} \end{array} = \Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Finalement $A = U\Sigma V^T$

Définition Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $rg(A) = r \geq 1$

- La relation $A = U\Sigma V^T$, avec $U \in O_m(\mathbb{R})$, $V \in O_n(\mathbb{R})$ et $\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ définies comme précédement est appelée décomposition en valeurs ~~singuli~~ singulières de A.
- Les scalaires $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$ $\forall i \in [\![1,r]\!]$ sont appelés les valeurs singulières de A et correspondent aux valeurs propres non nulles de A^TA.

Remarque: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$

Propriétés: Autres expressions

i) $A = U\Sigma V^T = [U_1 \, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$ avec $U_1 = [u_1, \dots u_r] \in \mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{R})$ tq $U_1^TU_1 = I_r$

$U_2 = [u_{r+1}, \dots, u_m] \in \mathcal{M}_{m,m-r}(\mathbb{R})$ tq $U_2^TU_2 = I_{m-r}$.

♡

avec $V_1 = [v_1 \dots v_r] \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ tq $V_1^T V_1 = I_r$
$V_2 = [v_{r+2}, \dots v_n] \in \mathcal{M}_{n,n-r}(\mathbb{R})$ tq $V_2^T V_2 = I_{n-r}$

$\Sigma_r = \mathrm{Diag}(\sigma_1 \dots \sigma_r) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$.

Remarque : $U_i U_i^T \neq I_{m-r}$ $\forall i \in [1,r]$ $\rightarrow$ projection orthogonale sur le sous-espace
$V_i V_i^T \neq I_{n-r}$ $\forall i \in [\![1,r]\!]$ engendré par les colonnes de la matrice U_i (V_i)

$$A = [U_1 \; U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_r V_1^T \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{U_1 \Sigma_r V^T}$$ "Forme réduite" (F° SVD Matlab)

ii) $A = U_1 \Sigma_r V_1^T = [u_1 \dots u_r] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{bmatrix}$

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T}$$

II / Matrice pseudo-inverse

A - Définitions et propriétés

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $rg(A) \geq 1$.
On appelle matrice pseudo-inverse de A (ou inverse généralisée) la matrice, notée A^+, suivante :

$A^+ = V \Sigma^+ U^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ avec $A = U \Sigma V^T$ la SVD de A.

et
$$\Sigma^+ = \left(\begin{array}{ccc|c} 1/\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1/\sigma_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & m-r \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array}$$

Théorème : Caractérisation de Moore Penrose

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de $rg(A) = r \geq 1$
La matrice A^+, pseudo-inverse de A, est l'unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ du système :

$$(MP) = \begin{cases} AXA = A & (1) \\ XAX = X & (2) \\ (AX)^T = AX & (3) \\ (XA)^T = XA & (4) \end{cases}$$

Preuve : A^+ est solution est solution de (MP)

(1) $AA^+A = U\Sigma \underbrace{V^T V}_{I_n} \Sigma^+ \underbrace{U^T U}_{I_m} \Sigma V^T = U \Sigma \Sigma^+ \Sigma V^T$

or $\Sigma \Sigma^+ \Sigma = \Sigma$

$AA^+A = U \Sigma V^T = A$

On vérifie que A^+ est s° de (2), (3), (4) de la même manière

Unicité de la solution de (MP)

Soient $(X_1, X_2) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})^2$ s° de (MP).

On a $AX_1 = (AX_1)^T = X_1^T A^T = X_1^T (AX_2A)^T$
par ③ app à X_1 par ④ app à X_2

$AX_1 = X_1^T A^T X_2^T A^T$
$= (AX_1)^T (AX_2)^T$
$= AX_1 AX_2 = A$ ③ app à X_1 et X_2
$= AX_2$ par ① app à X_1

On montre de même que $X_1 A = X_2 A$.

$AX_1 = AX_2 \Rightarrow X_1 AX_1 = X_1 AX_2$
$\overset{\shortparallel}{X_1}$ par ② app à X_1

D'où $X_1 = X_1 AX_2 = X_2 AX_2 = X_2$ par ② app à X_2.

Donc (MP) admet au plus une solution. Finalement A^+ est l'unique sol. de (MP) → Permet de montrer qu'un candidat est la pseudo-inv.

Théorème : 2nd caractérisation.
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de $rg(A) = r \geq 1$.
$\forall b \in \mathbb{R}^m$. $A^+ b$ est la solution de norme minimale du problème : $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$.

preuve : $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\nabla f(x) = A^T(Ax - b)$
$\nabla^2 f(x) = A^T A$. semi def pos $\Rightarrow f$ convexe sur $\mathbb{R}^n$ conv.
D'où toute solution de $\nabla f(x) = 0$ est un minimum global de f.
$\nabla f(A^+ b) = A^T(AA^+ b - b) = (A^T AA^+ - A^T) b$
or $A^T AA^+ = V\Sigma^T U^T U \Sigma V^T V \Sigma^+ U^T = V \Sigma^T \Sigma \Sigma^+ U^T$
$= V \Sigma^T U^T$
$= A^T$

et $\nabla f(A^+ b) = (A^T - A^T) b = 0$.

D'où $A^+ b$ est un minimum global de f.

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$ mini global de f. On a $\mathbb{R}^n = \ker A \overset{\perp}{\oplus} (\ker A)^\perp$
$\exists! (x_0, x_1) \in \ker A \times (\ker A)^\perp$ tq $x = x_0 + x_1$
$A^T A x = A^T A x_1$ car $x_0 \in \ker A$.
$= A^T b$ car $\nabla f(x) = 0$ $= A^T(AA^+ b)$ car $\nabla f(A^+ b) = 0$

CSAD
CM 2.3

$\Rightarrow A^TA(x_\perp - A^+b) = 0$

$\Rightarrow x_\perp - A^+b \in \ker A^TA = \ker A$

et $x_\perp - A^+b \in \ker A$

Or $A^+b = V\Sigma^+U^Tb = [V_1 V_2]\begin{pmatrix}\Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}U_1^T \\ U_2^T\end{bmatrix} b$

$= V_1\Sigma_r^{-1}U_1^Tb \in \operatorname{Im} V_1 = \operatorname{Vect}(v_1, \dots v_r)$

car $(v_1, \dots v_r)$ BON de $(\ker A)^\perp$

$A^+b \in (\ker A)^\perp$ or $x_\perp \in (\ker A)^\perp$ il vient $x_\perp - A^+b \in (\ker A)^\perp$

D'où $x_\perp - A^+b \in \ker A \cap (\ker A)^\perp = \{0\}$

D'où $x_\perp = A^+b$

D'où $x = A^+b + x_0$ $\quad \|x\|^2 = \|A^+b\|^2 + \|x_0\|^2$ par pythagore

$\|x\|^2 \geq \|A^+b\|^2$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$ mini global de F.

D'où A^+b est la solution de norme minimale de (P)

Corollaire : Equations normales

$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $rg(A) = r \geq 1$.

$\forall b \in \mathbb{R}^m \quad (A^TA)A^+b = A^Tb$.

Propriété : $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $rg(A) = r \geq 1$

On a $(A^T)^+ = (A^+)^T$

preuve : on vérifie (MP)

① $A^T(A^+)^TA^T = (\underbrace{AA^+A}_{=A})^T = A^T$ par ① app à A

② $(A^+)^TA^T(A^+)^T = (A^+AA^+)^T = A^+ = (A^T)^T$

③ $(A^T(A^+)^T)^T = ((A^+A)^T)^T = A^+A = A^T(A^+)^T$ ④ app A

④ $((A^+)^TA^T)^T = ((AA^+)^T)^T = (A^+)^TA^T$ ③ app A

D'où $(A^+)^T$ est sol de (MP) associé à A^T : c'est la pseudo-inv de A^T $\quad (A^+)^T = (A^T)^+$.

Propriété. ~~Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$~~ Cas particuliers.

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $rg(A) = r \geq 1$

i. Si $r = n = m$. $A^+ = A^{-1}$

ii. Si $r = n$ $(m \geq n)$ $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$

iii. Si $r = m$ $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$.

preuve i) $A^+ = V \Sigma^+ U^T$ avec $\Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sigma_n \end{pmatrix}$

$= V \Sigma^{-1} U^T$

$= A^{-1}$

ii) Si $r = m$ alors $A^T A$ est inversible

De plus, d'après les équations normales : $\forall b \in \mathbb{R}^m$

$(A^T A) A^+ b = A^T b$.

D'où $A^+ b = (A^T A)^{-1} A^T b$

$\Rightarrow A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.

iii) Si $rg(A) = m$.

On pose $B = A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ avec $rg(B) = m$.

D'où B vérifie ii)

$B^+ = (B^T B)^{-1} B^T \Leftrightarrow (A^T)^+ = (A A^T)^{-1} A$.

Or $(A^T)^+ = (A^+)^T$

Il vient $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$.

Propriété : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $rg(A) = r \geq 1$

On a $A A^+ = \Pi_{\mathrm{Im} A}$ (projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, A$.

$A^+ A = \Pi_{(\ker A)^\perp}$ (projection $\perp$ sur $(\ker A)^\perp$ // à $\ker A$

B - Applications.

exercice 1 : Estimation linéaire par moindres carrés.

$a \to \boxed{\text{Modèle}} \to b$ hypothèse : A et b mesurables.

$b = f(a, x)$ avec . f connue . a, b : scalaires, valeurs, matrices.

. x : paramètres inconnus.

objectif : Estimer x ayant à notre disposition des mesures de a et b.

Cas particulier : moindres carrés linéaires.

$a \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ avec $b = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

CSAD

Ex 2.4 On a à notre disposition m mesures :

m mesures de $a \in \mathbb{R}^n$. $\forall k \in [\![1, m]\!]$ $b_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i$

$\Longleftrightarrow Ax = b$ avec $A = [a_{ki}]_{(k,i) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

En pratique, $m >> n$ et le système peut être incompatible ($b \notin \operatorname{Im} A$), auquel cas le système n'admet pas de solution au sens classique.

L'évènement ($b \notin \operatorname{Im} A$) étant très probable en pratique, on cherche plutôt à trouver $x \in \mathbb{R}^n$ qui minimise la norme du résidu $e(x) = Ax - b$

$$(P) : \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|e(x)\|^2 = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$$

$x = A^+ b$ est la solution de norme minimale de (P)

exercice 2 : Résolution de systèmes linéaires. (cf feuille)

III / Meilleure approximation d'une matrice par une matrice de rang fixe.

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $rg(A) = r \geq 2$

On pose $\forall k \in [\![1, r-1]\!]$

$$\mathcal{M}_{m,n}^k(\mathbb{R}) = \{ X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ tq } rg(X) = k \}.$$

Remarque : La somme de 2 matrices de rang k n'est pas nécessairement de rang k.

$\Rightarrow \mathcal{M}_{m,n}^k(\mathbb{R})$ n'est pas un sev de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

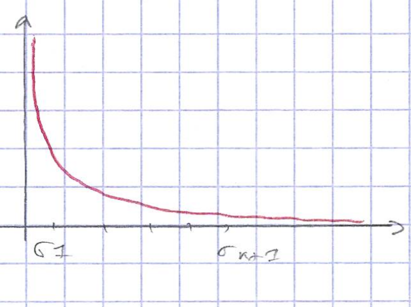
- On cherche à résoudre le problème suivant : existence de $A_k \in \mathcal{M}_{m,n}^k(\mathbb{R})$ tq $\|A - A_k\| = \inf_{X \in \mathcal{M}_{m,n}^k(\mathbb{R})} \|A - X\|$ avec $\|.\|$ une norme sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

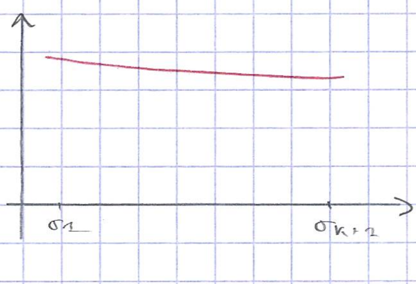
Propriété : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $rg(A) = r \geq 2$.

On note $A = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T$ la SVD de A avec $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.

La matrice $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$ avec $k \in [\![1, r-1]\!]$ est une solution du problème (P_2) :

(P_2) : $\inf_{X \in \mathcal{M}_{m,n}^k(\mathbb{R})} \|A - X\|_2$ On a de plus $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$





Preuve : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $rg(A) = r \geq 2$.

Soit $k \in [\![1, r-1]\!]$

On pose $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$ avec $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$ et $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$

- Mq $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$ $\quad A - A_k = \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad (A - A_k)x = \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T x$

Or $(v_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ BON de $\mathbb{R}^n$ $\exists! (\alpha_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ tq $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$

et $\forall i \in [\![k+1, r]\!]$. $v_i^T x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_i^T v_j = \alpha_i \underbrace{\|v_i\|_2^2}_{=1} = \alpha_i$.

D'où $(A - A_k)x = \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i \alpha_i u_i$.

et $\|(A - A_k)x\|_2^2 = \|\sum_{i=k+1}^{r} \alpha_i \sigma_i u_i\|_2^2 = \sum_{i=k+1}^{r} \alpha_i^2 \sigma_i^2 \|v_i\|_2^2$ (Pyth gén)

$\leq \sigma_{k+1}^2 \underbrace{\sum_{i=k+1}^{r} \alpha_i^2}$ (u_i) BON car (σ_i) ordonée décroissant

$\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \|x\|_2^2$

$\leq \sigma_{k+1}^2 \|x\|_2^2$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \frac{\|(A - A_k)x\|_2}{\|x\|_2} \leq \sigma_{k+1}$

$\Rightarrow \|A - A_k\|_2 \leq \sigma_{k+1} \quad \left(\|B\|_2 = \sup \frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2} \right)$

Or $(A - A_k) v_{k+1} = \sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T v_{k+1} = \sigma_{k+1} u_{k+1}$

Et $\|A - A_k v_{k+1}\|_2 = \sigma_{k+1} \|u_{k+1}\|_2 = \sigma_{k+1}$

$\Rightarrow \underline{\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}}$. erreur d'approximation

- Supposons $\exists B \in \mathcal{M}_{m,n}^{k}(\mathbb{R})$ tq $\|A - B\|_2 < \sigma_{k+1}$

$B \in \mathcal{M}_{m,n}^{k}(\mathbb{R}) \Rightarrow rg(B) = k \Rightarrow \dim \ker B = n - k$

D'où $\ker B \cap Vect(v_1 \dots v_{k+1}) \neq \{0\}$.

En effet, sinon $\ker B \oplus Vect(v_1 \dots v_{k+1}) \in \mathbb{R}^n$

et $\dim \ker B + rg(v_1 \dots v_{k+1}) \leq n$.

$\Leftrightarrow n - k + k + 1 \leq n$. $\quad (v_1 \dots v_{k+1}$ FON$)$

$\Rightarrow n + 1 \leq n$ (contradiction

$\exists z \in \ker B \cap Vect(v_1 \dots v_{k+1})$ tq $\|z\|_2 = 1$.

D'où $\|(A - B)z\|_2^2 = \|Az\|_2^2$ car $z \in \ker B$. $= \|\sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T z\|_2^2$.

· Application de la S.V.D. à la résolution des systèmes linéaires :

$$Ax = b \;,\; A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \;,\; x \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \;,\; b \in M_{m,1}(\mathbb{R})$$

$A = U \Sigma V^T$ SVD de A

ordre (m,n) du système.	rang du système : $r = rg(A)$	Compatibilité du système : C = cptble, NC = non cptble	Pseudo-Inverse A^+	Ensemble S_c des solutions classiques : $S_c = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\} = A^{-1}(\{b\})$	Ensemble S_{mc} des sol. au sens des moindres carrés. $S_{mc} = \{x \in \mathbb{R}^n / A^TAx = A^Tb\} = A^{-1}(\{b_{ImA}\})$	Résidu : $\Vert p(x) \Vert_{2,\mathbb{R}^m}$
$\boxed{m = n}$	$r = m$: A bijectif $ImA = \mathbb{R}^m$	C S.L de CRAMER	$A^+ = A^{-1}$	$S_c = \{A^{-1} . b\}$	$S_{mc} = S_c$	0
	$r < m$: A non injectif, A non surjectif $(ImA \subsetneq \mathbb{R}^m)$	C $(b \in ImA)$	$A^+ = V \Sigma^+ U^T$	S_c ∞ desol (si x sol. $x_A \in \ker A$. $x + x_A$ sol)	$S_{mc} = S_c$ A^+b de norme min.	0
		NC $(b \notin ImA)$	$A^+ = V \Sigma^+ U^T$	$S_c = \emptyset$	S_{mc} ∞ A^+b de n.m	>0
$\boxed{n < m}$	$r = n$: A injectif, A non surjectif $(ImA \subsetneq \mathbb{R}^m)$	C $(b \in ImA)$	$A^+ = (A^TA)^{-1} . A^T$	$S_c = \{A^+ b\}$	$S_{mc} = S_c$	0
		NC $(b \notin ImA)$	$A^+ = (A^TA)^{-1} . A^T$	$S_c = \emptyset$	$S_{mc} = \{A^+ b\}$	>0
	$r < n$: A non injectif, A non surjectif $(ImA \subsetneq \mathbb{R}^m)$	C $(b \in ImA)$	$A^+ = V \Sigma^+ U^T$	S_c ∞	$S_{mc} = S_c$ A^+b de n.m	0
		NC $(b \notin ImA)$	$A^+ = V \Sigma^+ U^T$	$S_c = \emptyset$	S_{mc} ∞ A^+b de n.m	>0
$\boxed{m < n}$	$r = m$: A non injectif, A surjectif $(ImA = \mathbb{R}^m)$	C	$A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$	S_c ∞	$S_{mc} = S_c$ A^+b de n.m	0
	$r < m$: A non inj., A non surj. $(ImA \subsetneq \mathbb{R}^m)$	C $(b \in ImA)$	$A^+ = V \Sigma^+ U^T$	S_c ∞	$S_{mc} = S_c$ A^+b de n.m	0
		NC $(b \notin ImA)$	$A^+ = V \Sigma^+ U^T$	$S_c = \emptyset$	S_{mc} ∞ A^+b de n.m	>0

Or $z \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{k+1})$

$\exists (\alpha_j)_{j \in [\![1, k+1]\!]} \in \mathbb{R}^{k+1}$ tq $z = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j v_j$.

et $\forall i \in [\![1, r]\!]$ $v_i^T z = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j v_i^T v_j$

$v_i^T z = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i \in [\![1, k+1]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\|(A-B)z\|_2^2 = \|\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i \alpha_i u_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2 \alpha_i^2 \underbrace{\|v_i\|_2^2}_{=1}$ (Pyth gen).

$= \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2 \alpha_i^2$

$\geq \sigma_{k+1}^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i^2}_{\|z\|_2^2 = 1}$ car $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{k+1}$

$\geq \sigma_{k+1}^2$

$\|A-B\|_2 \geq \sigma_{k+1}$ par déf.

Or $\|A-B\| < \sigma_{k+1}$ par hyp (Contradiction)

D'où $\forall B \in \mathcal{M}_{m,n}^k(\mathbb{R})$, $\|A-B\|_2 \geq \sigma_{k+1} = \|A-A_k\|_2$

$\Rightarrow \|A-A_k\|_2 = \inf_{X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \|A-X\|_2$. et (A_k) sol de P_2

Propriété : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $rg(A) = r \geq 2$

Soit $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$ la SVD de A avec $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

$\forall k \in [\![1, r-1]\!]$, la matrice $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$ est une solution du problème (P_F) : $\inf_{X \in \mathcal{M}_{m,n}^k(\mathbb{R})} \|A - X\|_F$

On a de plus $\|A - A_k\|_F^2 = \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2$

preuve : admis

Remarque : $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{tr(A^* A)}$

$(\mathbb{R})$, $\|A\|_F =$ —— $= \sqrt{tr(A^T A)}$

A^* : conjuguée transposée.

exemple : $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ matrice de "données". Colonnes de A correspondent à des images (stockées vectoriellement), des s° d'EDP ...

$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$ avec $r = rg(A)$

On veut "compresser" le stockage de A sans perdre "trop" d'info

$\Rightarrow$ meilleure approximation de A de rang k

- choix de k : k tq $\frac{\|A - A_k\|_2^2}{\|A\|_2} \leq tol$

$\Leftrightarrow \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_1} \leq tol$

- Stockage k vecteurs $(u_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$, $(v_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ et k scalaires $(\sigma_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$

$\Rightarrow$ $k(m+n+1)$ réels.

⚠ Intérêt si $k(m+n+1) \leq mn$ (dimensions de A).

$\Rightarrow$ Dépends de k, et des valeurs singulières $(\sigma_i)_{i \in [\![1,r]\!]}$.

<u>exercice 1</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r_A \geq 1$.

Soit $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang $r_B \geq 1$.

A-t-on $(AB)^+ = B^+ A^+$? Non sauf si A, B inversible

exercice 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $rg(A) \geq 1$.

On pose $B = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2m,n}(\mathbb{R})$

Mq $B^+ = \alpha \, [A^+ \; A^+] \in \mathcal{M}_{n,2m}(\mathbb{R})$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à déf.

↳ Mq avec Penrose