Examen – Automatique

Session 2, mercredi 24 avril 2018

Documents autorisés : 1 pages A4 recto-verso manuscrite

▷ **Exercice 1.** (4 points) On considère le système

$$(S)\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m_1+m_2}x_1(t) - \frac{c}{m_1+m_2}x_2(t) + \frac{1}{m_2}x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = \omega x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = -\omega x_3(t) - 2\xi\omega x_4(t) + \omega u(t). \end{cases}$$

1.1. Écrire ce système sous la forme $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$. On donnera les matrices A et B.

1.2. Quelles conditions doivent vérifier les constantes définissant le système pour que celui-ci soit contrôlable ?

▷ **Exercice 2.** (6 points) On considère le système commandé dans $\mathbf{R}^2$ suivant

$$(S)\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = (x_1(t) - x_2(t))(1 - 2\cos(x_1(t))) + \sin(2x_1(t)) - u(t)\cos(x_2(t)). \end{cases}$$

2.1. Donner la fonction f définissant le système contrôlé (ensemble de départ, d'arrivée et application).

2.2. On considère le point de fonctionnement $(0, 0, 0)$. Donner des conditions sur k_1 et k_2 pour que le contrôle par retour d'état soit asymptotiquement stable.

▷ **Exercice 3.** (10 points) Soient $a, b, c, d > 0$ des constantes. Le modèle "prédateur-proie" de Volterra est défini par l'équation différentielle

$$(S)\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t). \end{cases}$$

où $x_1(t)$ représente le nombre de proies et $x_2(t)$ le nombre de prédateurs.

3.1. Déterminer les points d'équilibre de ce système.

3.2. Déterminer les matrices jacobiennes du système en ces points d'équilibres. Que peut-on en déduire quant-à la stabilité de ces points d'équilibre ?

3.3. On définit la fonction

$$\begin{array}{rcl} V : \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & dx_1 - c\log(x_1) + (bx_2 - a\log(x_2)). \end{array}$$

1. Montrer que cette fonction est constante le long les solutions de (S).
2. Montrer que cette fonction est convexe.

3.4. En admettant le théorème suivant

Théorème 0.1. *Soit x_e un point d'équilibre du système $\dot{x}(t) = f(x(t))$. Soit $W : U \to \mathbf{R}$ une fonction continue définie sur un voisinage U de x_e, dérivable sur $U \setminus \{x_e\}$ telle que*

1. *$W(x_e) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq x_e$;*
2. *$\frac{dW(x(t))}{dt} \leq 0$ dans $U \setminus \{x_e\}$.*

Alors x_e est stable.

Montrer que le système est stable au point d'équilibre.