TD1 UE Spécifications formelles
TD1. Systèmes de transitions. (Bi)simulation forte.

Exercice 1 : Bisimulation

$\rightarrow s_0 \xrightarrow{a} s_1 \circlearrowleft b$ $\qquad$ $\rightarrow s_0' \xrightarrow{a} s_2' \xrightarrow{b} s_3'$, $\quad s_0' \xrightarrow{a} s_1' \circlearrowleft b$

"Tt ce qu'on sait faire depuis un état, il faut savoir le faire depuis l'autre"

1) Mq $\mathcal{S}$ est simulé par $\mathcal{S}'$

$R = \{ \overbrace{\langle s_0, s_0' \rangle}^{\text{états initiaux}}, \underbrace{\langle s_1, s_1' \rangle} \}$ est une rela° de simula°.

$$\begin{array}{ccc} s_0 & — & s_0' \\ a\downarrow & & \downarrow a \\ s_1 & — & s_1' \end{array}$$

Pour mq $\langle s_0, s_0' \rangle \in R$, il faut mq $\langle s_1, s_1' \rangle \in R$

$$\begin{array}{ccc} s_1 & — & s_1' \\ b\downarrow & & \downarrow b \\ s_1 & — & s_1' \end{array}$$

$\exists$ un état s_1' tq $s_1' \xrightarrow{b} s_1'$ sachant que $s_1 \xrightarrow{b} s_1$.

donc

Applica° T18 Cours① déf ⓔ + EI dedans.

$\Rightarrow$ et ts les états initiaux de S (s_0) sont simulés par un état initial de S' ($\langle s_0, s_0' \rangle \in R$).

Qd on atteint un état final, on applique la formule du cours

$\forall s_1, s_2 \in S, a \in L, s_1' \in S'$,

$\langle s_1, s_1' \rangle \in$ Simu $\wedge\ s_1 \xrightarrow{a} s_2$ ($\in R$)

$\Rightarrow$

$\exists s_2' .\ \langle s_2, s_2' \rangle \in$ Simu $\wedge\ s_1' \xrightarrow{a} s_2'$ ($\in R$)

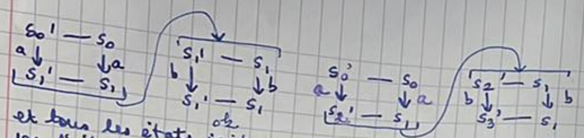
$\rightarrow$ le $\forall a \in L$ avec L ensemble de transi° possibles, ici à état final, $L = \emptyset$
$\rightarrow \forall a \in \emptyset$
$\rightarrow$ a est $\emptyset$
$\rightarrow$ rien à prouver
$\rightarrow$ c'est ok !

2) Mq S' est simulé par S.

$R = \{ \langle s_0', s_0 \rangle, \langle s_1', s_1 \rangle, \langle s_2', s_1 \rangle, \langle s_3', s_1 \rangle \}$ est une rela° de simulation.

servation de ces propriétés.
 système S ssi S' conserve toutes
S.

- raffinement d'une spécification par une implantation : exemple des annotations JML JAVA qui constituent une spécification.
- raffinement de données : la structure de liste est un raffinement (implantation) de la notion d'ensemble.



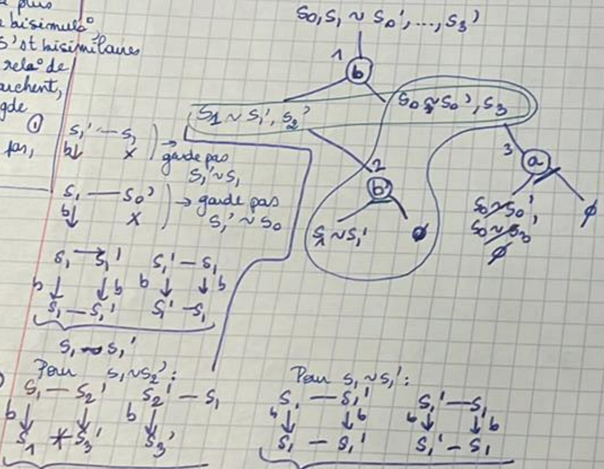
et tous les états initiaux de S' (s_0') sont simulés par l'état initial de S ($\langle s_0, s_0' \rangle \in R$).

Il n'y a pas de relaᵒ de bisimulaᵒ la plus gde → il n'y en a pas q marchent entre S et S' (Ĉ on veut mq cela ne marche pas, on regarde la plus gde relaᵒ de bisimulaᵒ car si S et S' st bisimilaires alors ttes les relaᵒ de bisimulaᵒ marchent, donc la plus gde aussi. Or ici elle ne marche pas, donc S≁S')

les EI de

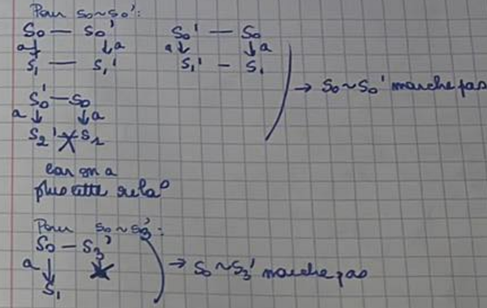
3) Calculons la plus grande relaᵒ de bisimulaᵒ entre S et S'.
$s_1 \sim s_1'$ est la plus grande relaᵒ de bisimulaᵒ entre S et S', donc S et S' n'est pas bisimilaires.
[Prend une lettre au pif.
À droite → on met tt ce qui n'est pas concerné par la lettre.
À gauche → on met les autres si les paires passent l'épreuve du petit carré.]

Manque des carrés pour ①



on ne faut pas faire $s_1 \sim s_3'$ car cette relaᵒ n'est pas ds les possibilités du noeud du dessus.

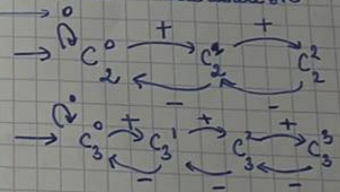
on garde car $s_1 \sim s_1'$ était ds le noeud précédent



m [La plus gde relaᵒ de bisimulaᵒ est U (résultats des feuilles)
$= U(s_1 \sim s_1', \emptyset, \emptyset, \emptyset) = s_1 \sim s_1'$.]

Exercice 2 - Modélisation

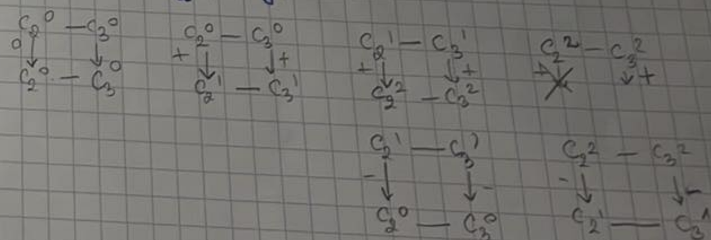
test zéro



Exercice 3 : Simulation

5 petits carrés

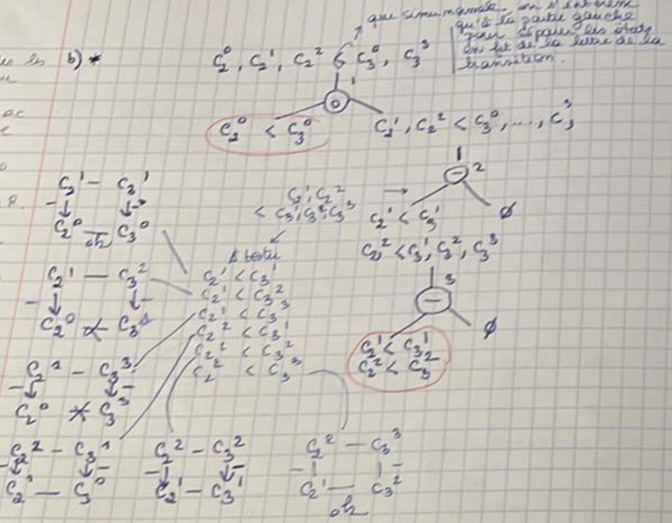
a) $\{\langle C_2^0, C_3^0 \rangle, \langle C_2^1, C_3^1 \rangle, \langle C_2^2, C_3^2 \rangle\}$ est une relation de simulation de C_2 par C_3.



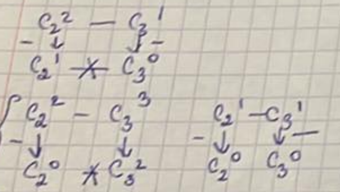
b) ✱

On part de tous les relaᵒ de simu possibles. Puis on teste ce 0 → on trouve que c'est ok pour certains → on a une partie de notre R. Puis on teste l'autre partie avec le ⊖ → on écrème alors de nouveau et on trouve les couples pour lesquels c'est ok, on continue.

que simultanément on s'intéresse qu'à la partie gauche pour départager les états en fct de la lettre de la transition.



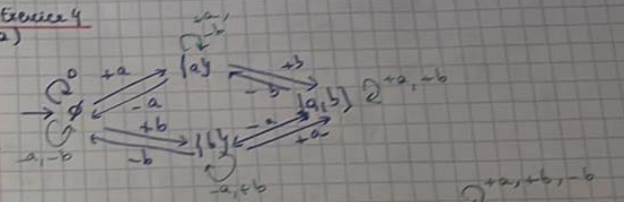
✱ La relaᵒ précédente est la plus grande relation de simulation de C_1 par C_3. ↳ $\{\langle C_2^0, C_3^0\rangle, \langle C_2^1, C_3^1\rangle, \langle C_2^2, C_3^2\rangle\}$



Pour pouvoir garder $C_2^2 < C_3^3$, il faudrait avoir la paire $C_2^0 < C_3^2$, or on ne l'a plus, on l'a enlevée auparavant ↓ on enlève $C_2^2 < C_3^3$

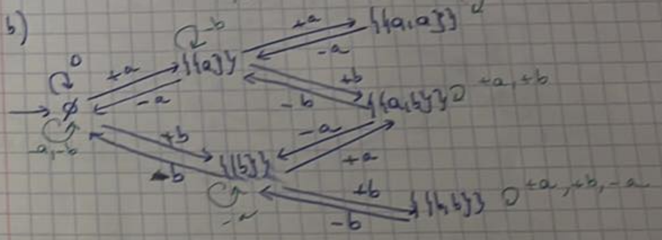
Exercice 4

a)



Ω^0 est ensemble vide c'est le seul état où on peut faire le test à 0.

b)



Exercice 5

a) L'ensemble est simulé par le multi-ensemble (inclusion à renommage près).

• $\mathcal{S} < \mathcal{S}' \Rightarrow Traces(\mathcal{S}) \subseteq Traces(\mathcal{S}')$ avec $\mathcal{S}$ simulé par $\mathcal{S}'$ ("plus petit" / "plus gd")

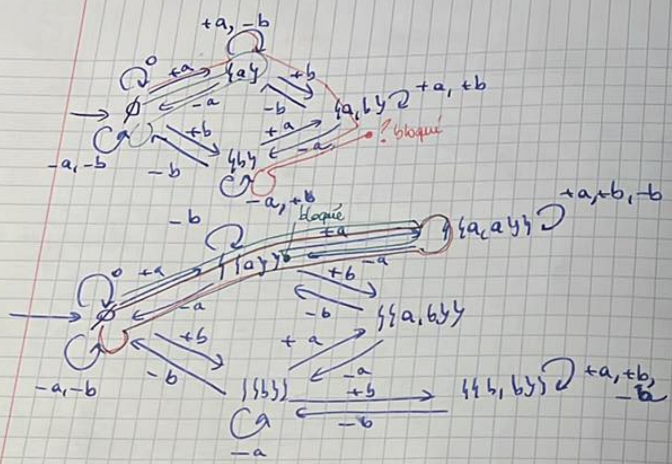
$Traces(\mathcal{S}) \not\subseteq Traces(\mathcal{S}') \Rightarrow \mathcal{S} \not< \mathcal{S}'$

→ +a +a est une trace du multi-ensemble mais pas de l'ensemble donc le multi-ensemble n'est pas simulé par l'ensemble.

b) on rajoute les évènements superflus (sauf 0, car énoncé pas bien spécifié). ▬ évènements superflus

• +a, +a, −a, 0 est une trace de l'ensemble mais pas du multi-ensemble donc ensemble $\not<$ multi-ensemble

→ en faisant +a +a −a 0 on revient peut faire 0 → c'est une trace de l'ens.
Ms en faisant +a +a −a on est sur {{a}} et on ne peut pas revenir sur 0 → cette trace +a +a −a 0 n'est pas une trace du multi-ens.
⇒ on vient de trouver ~~une trace~~ qqch qui peut être fait ds l'ens. mais pas ds le multi-ens.
⇒ l'ens. n'est pas simulé par le multi-ens.

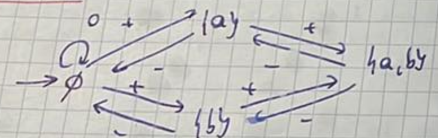


- $+a, +a, +b, -a, -a, 0$ est une trace de multi-ensemble mais pas de l'ensemble donc multi-ensemble $\not\leq$ ensemble

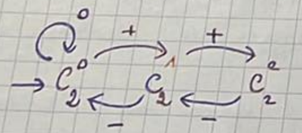
Même raisonnement que celui d'avant

On ignore l'élt de les ens + et − → au lieu de +a ou −b on met juste + ou −.

Exercice 6



d'après ex 4/5

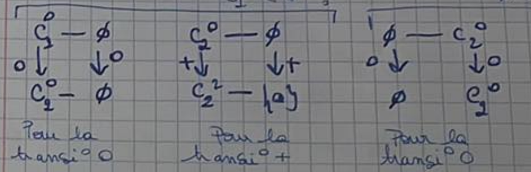


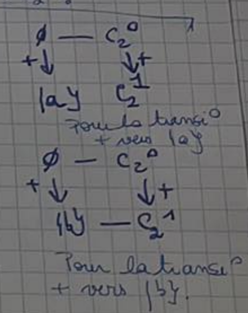
cpt 2 d'après exo 2

- Soit $R = \{\langle C_2^0, \emptyset\rangle, \langle C_2^1, \{a\}\rangle, \langle C_2^1, \{b\}\rangle, \langle C_2^2, \{a,b\}\rangle\}$

alors : $R \cup R^{-1}$ est une relation de bisimulation entre l'ensemble et C_2 :

$C_2^0 < \emptyset$? $\emptyset < C_2^0$?





(+ 9 autres carrés)