# Intégration et Applications

## Chapitre 2 : Théorie de la mesure

Olivier Cots, Serge Gratton & Ehouarn Simon

1er octobre 2019

INP TOULOUSE ENSEEIHT

Le but de ce chapitre 2 est de fournir les briques de base pour la construction de **l'intégrale au sens de Lebesgue** :

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu$$

- $E$ : un ensemble quelconque sur lequel on va définir des **ensembles mesurables**, cf. **Partie 2.1 sur les tribus**. La famille de ces ensembles mesurables s'appellera une **tribu**, et sera généralement notée $\mathcal{A}$.

- $\mu$ : la **mesure** $\mu$ nous permettra de quantifier les ensembles mesurables, cf. **Partie 2.2 sur les mesures**.

- $f$ : la **fonction** $f$ pour avoir une chance d'être intégrable, devra tout d'abord être **mesurable**, cf. **Partie 2.3 sur les fonctions mesurables**.

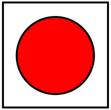
- $\int$ : l'intégrale (au sens de Lebesgue) d'une fonction mesurable $f$ par rapport à une mesure $\mu$ sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ sera définie au chapitre suivant.

Chapitre 2 : Théorie de la mesure

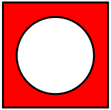
- 2.1 Tribus
- 2.2 Mesures
- 2.3 Fonctions mesurables

## 2.1 Tribus

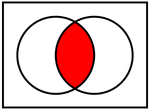
$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$



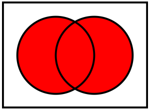
Ensemble : $A \in E$



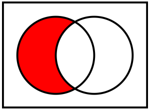
Complémentaire : $A^c := E \setminus A$



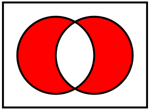
Intersection : $A \cap B$



Union : $A \cup B$



Différence : $A \setminus B = A \cap B^c$



Différence symétrique :
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

**Définition – Tribu**

Soit $E$ un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de $E$. $\mathcal{A}$ est une **tribu** si :

i) $E \in \mathcal{A}$ ;

ii) $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : $A \subset E \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = E \backslash A \in \mathcal{A}$ ;

iii) $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable : $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup_n A_n \in \mathcal{A}$.

**Exemple**. $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, E\}$ pour $A \subset E$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ sont des tribus.

**Définition – Espace mesurable**

Soit $E$ un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur $E$.

Le couple $(E, \mathcal{A})$ s'appelle un **espace mesurable**.

Une tribu est stable par :

- $\cap$ : intersection $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$.
- $\setminus$ : différence. $A \setminus B = A \cap B^c$.
- $\Delta$ : différence symétrique. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- $\cap_n$ : intersection au plus dénombrable.

▶ Soient $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$. On note $B_n := A_n^c$. Par définition d'une tribu,

$$\forall\, n \geq 0 \,:\, B_n \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\geq 0} B_n \in \mathcal{A}.$$

Mais,

$$\bigcap_{n\geq 0} A_n = \bigcap_{n\geq 0} B_n^c = \left( \bigcup_{n\geq 0} B_n \right)^c \in \mathcal{A}.$$

■

**Proposition**

i) L'intersection d'une famille quelconque de tribus est une tribu ;

ii) Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, on appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$, notée $\sigma(\mathcal{C})$, l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$ : c'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$ ;

iii) Si $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ dans $\mathcal{P}(E)$ alors $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$.
Si $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ et si $\mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ alors $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2)$ ;

iv) Si $(E, \mathcal{O})$ est un *espace topologique*, [1] alors $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{F}) =: \mathcal{B}(E)$, $\mathcal{F}$ étant l'ensemble des fermés de $E$.

**Méthodologie** : pour montrer que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, on montre que $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{C})$ et que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$.

**Définition**

On appelle $\mathcal{B}(E)$ la **tribu des boréliens** de $E$.

1. Une topologie $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ contient $\emptyset$ et $E$, et est stable par réunions quelconques et intersections finies.

i) L'intersection d'une famille quelconque de tribus est une tribu.

- On note $\mathcal{A} := \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ l'intersection des tribus.

1) $\forall\, i \in I : E \in \mathcal{A}_i \;\Rightarrow\; E \in \mathcal{A}\,;$
2) $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \forall\, i \in I : A \in \mathcal{A}_i \quad \Rightarrow \quad \forall\, i \in I : A^c \in \mathcal{A}_i \quad \Rightarrow \quad A^c \in \mathcal{A}\,;$
3) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$ : faire comme en 2.

■

ii) Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, on appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$, notée $\sigma(\mathcal{C})$, l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$ : c'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$.

- Soit $\mathcal{A}$ une tribu contenant $\mathcal{C}$. Alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$ par définition. ■

iii) Si $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ dans $\mathcal{P}(E)$ alors $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$.

- Tout d'abord $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ puisque par définition $\sigma(\mathcal{C}_2)$ contient $\mathcal{C}_2$. Ainsi, puisque $\sigma(\mathcal{C}_1)$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}_1$ et puisque $\sigma(\mathcal{C}_2)$ est une tribu, on a $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$. ■

Si $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ et si $\mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ alors $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2)$.

- On a

$$\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2) \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$$

et de manière similaire

$$\mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$$

ce qui permet de conclure que $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2)$. ■

iv) Si $(E, \mathcal{O})$ est un espace topologique,[2] alors $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{F}) =: \mathcal{B}(E)$, $\mathcal{F}$ étant l'ensemble des fermés de $E$.

- Montrons que $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{F})$ et que $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{O})$.

Soit $O \in \mathcal{O}$. On a

$$F := O^c \in \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F}) \Rightarrow O = F^c \in \sigma(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{F}).$$

On montre de même que $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{O})$ et on conclut à l'aide du résultat précédent. ∎

2. Une topologie $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ contient $\emptyset$ et $E$, et est stable par réunions quelconques et intersections finies.

**Exercice** (Exo 2.1.10 du poly). Soit $\mathcal{C} := \left\{ ]a\,,b[ \;\middle|\; a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} =: \overline{\mathbb{R}} \right\}$. Montrer que $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la valeur absolue.

Qu'allons-nous montrer ?

**Exercice** (Exo 2.1.10 du poly). Soit $\mathcal{C} := \left\{ ]a\,,b[ \;\middle|\; a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} =: \overline{\mathbb{R}} \right\}$. Montrer que $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la valeur absolue.

- Montrons que $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{O})$ et que $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{C})$.
  - Soit $I := ]a\,,b[ \in \mathcal{C}$. On a
  $$I \in \mathcal{C} \subset \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad I \in \sigma(\mathcal{O}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{O}).$$
  - Soit $O \in \mathcal{O}$. On suppose pour le moment que l'on peut écrire $O$ sous la forme
  $$O = \bigcup_n ]a_n\,,b_n[, \quad \text{avec} \quad \forall n : ]a_n\,,b_n[ \in \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C}).$$
  Puisque $\sigma(\mathcal{C})$ est stable par réunion dénombrable, $O \in \sigma(\mathcal{C})$ et donc $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{C})$.

**Exercice** (Exo 2.1.10 du poly). Soit $\mathcal{C} := \left\{ ]a\,,b[ \;\middle|\; a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} =: \overline{\mathbb{R}} \right\}$. Montrer que $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la valeur absolue.

Il reste à montrer que l'on peut écrire $O$ sous la forme

$$O = \bigcup_n ]a_n\,, b_n[, \quad \forall n : ]a_n\,, b_n[ \in \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C}).$$

On introduit $\mathcal{C}_O := \{]a\,,b[ \mid a < b \in \mathbb{Q} \text{ et } ]a\,,b[ \subset O\}$. $\mathcal{C}_O$ est dénombrable car s'injecte dans $\mathbb{Q}^2$. Montrons que $O = \cup_{I \in \mathcal{C}_O} I$.

- Soit $x \in \cup_{I \in \mathcal{C}_O} I$. Alors $\exists a < b \in \mathbb{Q}$ t.q. $x \in ]a\,,b[ \subset O$ donc $x \in O$.
- Soit $x \in O$.
  $O$ est un ouvert donc $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $]x - \varepsilon\,, x + \varepsilon[ \subset O$.
  Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $\exists a < b$ dans $\mathbb{Q}$ t.q. $x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon$, *i.e.* $]a\,,b[ \subset ]x - \varepsilon\,, x + \varepsilon[ \subset O$ et $x \in ]a\,,b[$, donc $]a\,,b[ \in \mathcal{C}_O$ et $x \in \cup_{I \in \mathcal{C}_O} I$.

$\blacksquare$

**Définition**

On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ (ou tribu de Borel) engendrée par les intervalles ouverts. La tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des parties de $\overline{\mathbb{R}}$ prenant l'une des formes suivantes : $A$, $A \cup \{+\infty\}$, $A \cup \{-\infty\}$ ou $A \cup \{-\infty, +\infty\}$, où $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

**Proposition**

Soit $S$ une partie dense de la droite réelle[3] et $a \in S$.

Alors $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par les intervalles du type

$$1)\ [a\,,+\infty[,\qquad 2)\ ]a\,,+\infty[,\qquad 3)\ ]-\infty\,,a[,\qquad 4)\ ]-\infty\,,a].$$

Il en est de même pour $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ avec les intervalles du type $[a\,,+\infty]$...

3. C'est-à-dire telle que tout nombre réel est limite d'une suite à valeurs dans $S$ ; par exemple $S = \mathbb{Q}$.

## 2.2 Mesures

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

### Définition – Mesure

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On appelle **mesure** sur $(E, \mathcal{A})$ une application

$$\mu \colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

telle que

i) $\mu(\emptyset) = 0$ ;

ii) pour tous $A_1, A_2, \cdots$ dans $\mathcal{A}$ 2 à 2 **disjoints** :

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n) \quad \sigma\text{-}\textbf{additivité}.$$

### Définition – Espace mesuré

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mu$ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

On dit que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un **espace mesuré**.

**Définition**

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

i) Une mesure $\mu$ est dite **finie** si $\mu(E) < +\infty$ ;

ii) Une mesure $\mu$ est dite **de probabilité** si $\mu(E) = 1$ ;

iii) Une mesure $\mu$ est dite **$\sigma$-finie** si

$$\exists (A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \text{ t.q. } E = \cup_n A_n \text{ et } \mu(A_n) < +\infty \ \forall n.$$

**Remarque**. Si $\mathcal{A}$ est une tribu alors les ensembles $A \in \mathcal{A}$ sont appelés des **ensembles mesurables**.

**Remarque**. **Une mesure permet d'attribuer à un ensemble mesurable une valeur**. Pour pouvoir définir par la suite l'intégrale de "fonctions mesurables" pour un large ensemble de fonctions, il est nécessaire d'avoir à la base une grande quantité d'ensembles mesurables. Ceci explique pourquoi une tribu est stable par de nombreuses opérations, contrairement par exemple à une topologie.

**Exemple** (Mesure de Dirac). Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $a \in E$. On définit

$$\begin{array}{rccl} \delta_a : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \bar{\mathbb{R}}_+ \\ & A & \longmapsto & \delta_a(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } a \notin A \\ 1 \text{ si } a \in A. \end{cases} \end{array}$$

- Montrons que $\delta_a$ vérifie les deux propriétés de la définition.
  - $\delta_a(\emptyset) = 0$ ;
  - Soit $A_1, A_2, \cdots$ dans $\mathcal{A}$ 2 à 2 disjoints. Si $a$ appartient à l'un des $A_n$ alors

$$\delta_a(\cup_n A_n) = \sum_n \delta_a(A_n) = 1,$$

sinon

$$\delta_a(\cup_n A_n) = \sum_n \delta_a(A_n) = 0.$$

■

**Remarque**. $\delta_a$ est une mesure de probabilité.

**Exemple** (Mesure de comptage). Soit l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On définit

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{card}: & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & A & \longmapsto & \mathrm{card}(A) = \begin{cases} \#A \text{ si } A \text{ est fini} \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases} \end{array}$$

où $\#A$ désigne le nombre d'éléments d'un ensemble fini.

- Montrons que card vérifie les deux propriétés de la définition.
  - $\mathrm{card}(\emptyset) = 0$ ;
  - Si $A_1, A_2, \cdots$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont 2 à 2 disjoints alors

$$\mathrm{card}(\cup_n A_n) = \sum_n \mathrm{card}(A_n).$$

■

**Proposition**

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

i) Soient $A$, $B$ dans $\mathcal{A}$ t.q. $B \subset A$. Alors

$$\mu(B) \leq \mu(A) \qquad \textbf{(croissance de } \mu\textbf{)}$$

et si $\mu(B) < +\infty$ alors $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

ii) Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vérifie $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n$, alors

$$\mu(\cup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \sup_n \mu(A_n) \qquad \textbf{(continuité à gauche)}$$

iii) Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vérifie $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n$ et si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, alors

$$\mu(\cap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \inf_n \mu(A_n) \qquad \textbf{(continuité à droite)}$$

iv) Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ alors

$$\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n) \qquad \textbf{(sous } \sigma\textbf{-additivité)}$$

i) Soient $A$, $B$ dans $\mathcal{A}$ t.q. $B \subset A$. Alors

$$\mu(B) \leq \mu(A) \quad : \textbf{croissance de } \mu$$

et si $\mu(B) < +\infty$ alors $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

- On a
$$\mu(A) = \mu(B \cup (A \setminus B)) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$$
ce qui permet de conclure. ■

ii) Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vérifie $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n$, alors

$$\mu(\cup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \sup_n \mu(A_n) \quad : \textbf{continuité à gauche}$$

- On pose $B_0 := A_0$ et $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \mu(\cup_n A_n) &= \mu(\cup_n B_n) && \text{par définition des } B_n \\ &= \sum_n \mu(B_n) && \text{car les } B_n \text{ sont 2 à 2 disjoints.} \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\sum_n \mu(B_n) = \lim_n \sum_{k=0}^n \mu(B_k) = \lim_n \mu(\cup_{k=0}^n B_k) = \lim_n \mu(A_n)$$

car $\cup_{k=0}^n B_k = A_n$, ce qui permet de conclure pour la première égalité. La croissance de $\mu$ nous donne la seconde égalité : $(\mu(A_n))_n$ est une suite croissante. ■

iii) Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vérifie $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n$ et si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, alors

$$\mu(\cap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \inf_n \mu(A_n) \quad : \textbf{continuité à droite}.$$

- On pose $B_n := A_{n_0} \setminus A_n$ pour tout $n \geq n_0$.

La suite $(B_n)_n$ est croissante, majorée par $A_{n_0}$ et $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ donc

$$\mu(\cup_n B_n) = \lim_n \mu(B_n) = \lim_n (\mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)) = \mu(A_{n_0}) - \lim_n \mu(A_n).$$

D'autre part, on a

$$\cup_n B_n = \cup_n (A_{n_0} \cap A_n^c) = A_{n_0} \cap (\cup_n A_n^c) = A_{n_0} \cap (\cap_n A_n)^c = A_{n_0} \setminus (\cap_n A_n),$$

donc on a aussi

$$\mu(\cup_n B_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu(\cap_n A_n)$$

ce qui permet de conclure pour la première égalité. La croissance de $\mu$ nous donne la seconde égalité : $(\mu(A_n))_n$ est une suite décroissante. ■

iv) Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ alors

$$\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n) \quad : \textbf{sous } \sigma\textbf{-additivité}.$$

- On pose $B_0 := A_0$ et $B_n := A_n \setminus \cup_{k=0}^{n-1} B_k$ pour $n \geq 1$.

Les $B_n$ sont 2 à 2 disjoints, $A_n = \cup_{k=0}^{n} B_k$ et $B_n \subset A_n$.

On a

$$\begin{aligned} \mu(\cup_n B_n) &= \sum_n \mu(B_n) && \text{car les } B_n \text{ sont 2 à 2 disjoints} \\ &\leq \sum_n \mu(A_n) && \text{car } B_n \subset A_n. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\cup_n A_n = \cup_n B_n$$

car $B_n \subset A_n \subset \cup_n A_n$ et $A_n = \cup_{k=0}^{n} B_k \subset \cup_n B_n$. ■

L'exercice suivant utilise les propriétés générales présentées ci-avant.

**Exercice**. Soit $p$ une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0\,,1] \\ & t & \longmapsto & F(t) = p(]-\infty\,,t]). \end{array}$$

1) Montrer que $F$ est croissante et continue à droite.
2) Calculer (si existence) $\lim_{t\to\pm\infty} F(t)$.

► La correction est donnée en TD. ■

**Proposition**

La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est la tribu engendrée pas la classe des pavés ouverts[4], mais est aussi la tribu engendrée par la classe des pavés ouverts à extrémités dans $\mathbb{Q}$ ou dans toute autre partie dense de $\mathbb{R}$.

**Théorème – Mesure de Lebesgue**

Il existe une unique mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ telle que la mesure de tout pavé $\prod_{i=1}^{d} ]a_i\,, b_i[$ soit égale au produit $\prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)$.

Cette mesure est appelée **mesure de Lebesgue** et est ordinairement notée $\lambda_d$, voire $\lambda$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension.

4. pavé = produit d'intervalles ; pavé ouvert = produit d'intervalles ouverts.

Liste de propriétés de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ :

- $\forall x \in \mathbb{R} : \lambda(\{x\}) = 0$ ;

- $\forall a < b \in \mathbb{R} : \lambda(]a\,,b[) = \lambda(]a\,,b]) = \lambda([a\,,b[) = \lambda([a\,,b]) = b - a$

(voir ex. 2.2.12 du poly) ;

- $\forall a < b \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} : \lambda([a + x\,, b + x]) = \lambda([a\,,b])$ ;

- $\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Z}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$ ;

- La mesure de Lebesgue d'un ensemble au plus dénombrable est nulle :
$\lambda(\mathbb{Q} \cap [0\,,1]) = 0$.

**Définition**

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

On dit que $N \in \mathcal{A}$ est un **ensemble négligeable** (ou $\mu$-négligeable) si $\mu(N) = 0$.

**Remarque**. La terminologie vient du fait que les ensembles négligeables "ne sont pas vus" par la mesure. Attention, cela ne veut pas dire nécessairement qu'ils soient "petits", tout dépend de la mesure.

Par exemple, si $\mu = \delta_0$, la masse de Dirac en 0 sur $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{R}^*$ est $\mu$-négligeable.

Si $\mu = \lambda$, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{Q}$ est $\mu$-négligeable.

Si $\mu = \text{card}$, la mesure de comptage, alors le seul ensemble $\mu$-négligeable est l'ensemble vide.

## 2.3 Fonctions mesurables

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Lors de l'intégration d'une fonction, 2 obstacles peuvent se présenter :

- la fonction peut être "trop grande" ;
- la fonction peut ne pas être assez régulière.

**La mesurabilité des fonctions s'intéresse à la question de la régularité.**

**Définition – Application et fonction mesurable**

Soient $(E_1, \mathcal{A}_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables et $f$ une application de $E_1$ dans $E_2$

i) On dit que $f$ est **mesurable** de $(E_1, \mathcal{A}_1)$ dans $(E_2, \mathcal{A}_2)$ si $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$, c-a-d si :

$$\forall B \in \mathcal{A}_2,\ f^{-1}(B) = \{x \in E_1 \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{A}_1 \ ;$$

ii) Si $E_1$ et $E_2$ sont des espaces topologiques et si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont les tribus de Borel correspondantes, on dit alors que $f$ est **borélienne** ;

iii) Si $(E_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on parle alors de **fonction mesurable**.

**Remarque**. On rappelle que si $\mathcal{A}$ est une tribu alors les ensembles $A \in \mathcal{A}$ sont appelés des ensembles mesurables.

- La fonction indicatrice $\mathbb{1}_A : (E, \mathcal{A}) \to (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$ est mesurable ssi $A$ est mesurable, *i.e.* ssi $A \in \mathcal{A}$.

► Montrons que l'image réciproque de tout ensemble mesurable de $\mathcal{P}(\{0,1\})$ est mesurable ssi $A \in \mathcal{A}$. On a :

- $\mathbb{1}_A^{-1}(\{0\}) = A^c$ ;
- $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) = A$ ;
- $\mathbb{1}_A^{-1}(\{0,1\}) = E$ ;
- $\mathbb{1}_A^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

■

- Toute fonction constante de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.

Un petit retour aux tribus

Soit $f : E_1 \to E_2$.

**Proposition**

Si $\mathcal{A}_2$ est une tribu sur $E_2$, alors

$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) := \left\{ f^{-1}(B) \subset E_1 \;\middle|\; B \in \mathcal{A}_2 \right\}$$

est un tribu sur $E_1$, appelée **tribu image réciproque** de $\mathcal{A}_2$ par $f$.

**Proposition**

Si $\mathcal{A}_1$ est une tribu sur $E_1$, alors

$$\mathcal{B} := \left\{ B \subset E_2 \;\middle|\; f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1 \right\}$$

est un tribu sur $E_2$, appelée **tribu image** de $\mathcal{A}_1$ par $f$.

**Remarque**. La tribu image n'est pas $f(\mathcal{A}_1)$ qui n'est en général pas une tribu.

Soit $f : E_1 \to E_2$.

**Proposition**

Si $\mathcal{A}_2$ est une tribu sur $E_2$, alors

$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) := \left\{ f^{-1}(B) \subset E_1 \;\middle|\; B \in \mathcal{A}_2 \right\}$$

est un tribu sur $E_1$, appelée **tribu image réciproque** de $\mathcal{A}_2$ par $f$.

- Montrons que $f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ est une tribu. On a
  - $E_1 = f^{-1}(E_2) \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ ;
  - Si $A = f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ alors $A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c) \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ car $B^c \in \mathcal{A}_2$ ;
  - Si $(A_n = f^{-1}(B_n))_n \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)^{\mathbb{N}}$ alors $\cup_n A_n = \cup_n f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\cup_n B_n) \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ car $\cup_n B_n \in \mathcal{A}_2$.

$\blacksquare$

Soit $f : E_1 \to E_2$.

**Proposition**

Si $\mathcal{A}_1$ est une tribu sur $E_1$, alors

$$\mathcal{B} := \left\{ B \subset E_2 \,\middle|\, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1 \right\}$$

est un tribu sur $E_2$, appelée **tribu image** de $\mathcal{A}_1$ par $f$.

- Laisser en exercice. ■

**Remarque**. La tribu image n'est pas $f(\mathcal{A}_1)$ qui n'est en général pas une tribu.

**Théorème – Lemme de transport**

Soient une application $f : E_1 \to E_2$ et une classe de parties de $E_2$ notée $\mathcal{C}$. Alors

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

**Remarque**. On ne suppose pas l'application mesurable.

**Théorème – Lemme de transport**

Soient une application $f : E_1 \to E_2$ et une classe de parties de $E_2$ notée $\mathcal{C}$. Alors

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

- Montrons que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$. On a

$$\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \Rightarrow \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$

car $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ est la tribu image réciproque de $\sigma(\mathcal{C})$ par $f$.

**Théorème – Lemme de transport**

Soient une application $f : E_1 \to E_2$ et une classe de parties de $E_2$ notée $\mathcal{C}$. Alors

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

Montrons que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. Soit $\mathcal{A}_2$ la tribu image de $\mathcal{A}_1 := \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ par $f$ :

$$\mathcal{A}_2 = \left\{ B \subset E_2 \;\middle|\; f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1 \right\}.$$

On a

$$\forall B \in \mathcal{C} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1 \quad \text{car} \quad f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})),$$

donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_2$. Ainsi $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}_2$ et donc

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\mathcal{A}_2).$$

Mais,

$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \left\{ f^{-1}(B) \;\middle|\; B \in \mathcal{A}_2 \right\} \subset \mathcal{A}_1$$

donc en conclusion $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. ■

Fin du petit retour aux tribus.

On revient aux fonctions mesurables.

**Proposition – Critère de mesurabilité**

i) Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties d'un ensemble $F$, *i.e.* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$. On note $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{C})$. Alors

$$f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B}) \textbf{ mesurable } \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A} \ ;$$

ii) Soient $f_1 : (E_1, \mathcal{A}_1) \to (E_2, \mathcal{A}_2)$ et $f_2 : (E_2, \mathcal{A}_2) \to (E_3, \mathcal{A}_3)$.

Si $f_1$ et $f_2$ sont **mesurables** alors

$$f_2 \circ f_1 : (E_1, \mathcal{A}_1) \to (E_3, \mathcal{A}_3)$$

est **mesurable** ;

iii) Soient $E$, $F$ deux **espaces topologiques**.

Si $f : (E, \mathcal{B}(E)) \to (F, \mathcal{B}(F))$ est **continue** alors elle est **mesurable** (*i.e.* borélienne).

i) Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties d'un ensemble $F$, *i.e.* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$. On note $\mathcal{B} \coloneqq \sigma(\mathcal{C})$.

Alors

$$f \colon (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B}) \text{ **mesurable** } \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}.$$

- $f$ est mesurable ssi $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$,

mais $f^{-1}(\mathcal{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ d'après le lemme de transport,

et $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset \mathcal{A}$ ssi $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$. ■

ii) Soient $f_1 : (E_1, \mathcal{A}_1) \to (E_2, \mathcal{A}_2)$ et $f_2 : (E_2, \mathcal{A}_2) \to (E_3, \mathcal{A}_3)$.

Si $f_1$ et $f_2$ sont **mesurables** alors

$$f_2 \circ f_1 : (E_1, \mathcal{A}_1) \to (E_3, \mathcal{A}_3)$$

est **mesurable**.

- On a
$$\forall A_3 \in \mathcal{A}_3 \ : \ (f_2 \circ f_1)^{-1}(A_3) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(A_3)) \in \mathcal{A}_1$$
car $f_1$ mesurable et $f_2^{-1}(A_3) \in \mathcal{A}_2$ puisque $A_3 \in \mathcal{A}_3$ et $f_2$ mesurable. ■

iii) Soient $E$, $F$ deux **espaces topologiques**.

Si $f : (E, \mathcal{B}(E)) \to (F, \mathcal{B}(F))$ est **continue** alors elle est **mesurable** (*i.e.* borélienne).

- On note $\mathcal{B}(E) := \sigma(\mathcal{O}_1)$ et $\mathcal{B}(F) := \sigma(\mathcal{O}_2)$.

Montrons que $f^{-1}(\mathcal{O}_2) \subset \mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O}_1)$.

Puisque $f$ est continue, on a

$$\forall O_2 \in \mathcal{O}_2 \ : \ f^{-1}(O_2) \in \mathcal{O}_1 \subset \sigma(\mathcal{O}_1)$$

autrement dit $f^{-1}(\mathcal{O}_2) \subset \sigma(\mathcal{O}_1)$. ■

**Proposition**

Si $f_1, \cdots, f_d$ sont des fonctions réelles mesurables sur $(E, \mathcal{A})$ et $g$ une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^d$, alors $h\colon (E,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $h(x) := g(f_1(x), \cdots, f_d(x))$, est **mesurable**.

- On pose

$$f\colon \begin{array}{ccc} (E,\mathcal{A}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ x & \longmapsto & f(x) := (f_1(x), \cdots, f_d(x)) \end{array}$$

de telle sorte que $h = g \circ f$. Il suffit de montrer que $f$ est mesurable.
On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{C})$ avec $\mathcal{C} := \left\{ \prod_{i=1}^d ]a_i\,, b_i[ \;\middle|\; a_i < b_i \text{ réels} \right\}$.
Montrons que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$. Soit $I := \prod_{i=1}^d ]a_i\,, b_i[ \in \mathcal{C}$. Alors,

$$f^{-1}(I) = \bigcap_{i=1}^{d} \underbrace{f_i^{-1}(\underbrace{]a_i\,, b_i[}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})})}_{\in \mathcal{A} \text{ car } f_i \text{ mesurable}} \in \mathcal{A} \text{ car stable par intersection,}$$

ce qui permet de conclure. ■

**Exemple**. Si $f_1, \cdots, f_d$ sont des fonctions réelles mesurables sur $(E, \mathcal{A})$ alors les fonctions suivantes sont mesurables :

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} a_i\, f_i,\ a_i \in \mathbb{R}$ ;

ii) $\min(f_1, \cdots, f_d)$, $\max(f_1, \cdots, f_d)$.

De plus les ensembles

$$\{x \in E \mid f_1(x) = f_2(x)\}, \quad \{x \in E \mid f_1(x) \leq f_2(x)\}, \quad \ldots$$

sont mesurables, *i.e.* des éléments de $\mathcal{A}$, **cf. TD**.

**Proposition**

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

i) Les fonctions

$$\sup_n f_n \quad \text{et} \quad \inf_n f_n$$

sont **mesurables** ;

ii) Les fonctions

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} f_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} f_k$$

sont **mesurables** ;

iii) Si $(f_n)_n$ **converge simplement** vers une fonction $f$ (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$), alors $f$ est **mesurable**.

**Remarque**. Rappelons que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les $]-\infty\,, a]$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ par les $[-\infty\,, a]$, pour $a \in \mathbb{R}$.

i) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Les fonctions

$$\sup_n f_n \quad \text{et} \quad \inf_n f_n$$

sont **mesurables**.

- On pose $g := \sup_n f_n$. On a

$$\forall a \in \mathbb{R} \;:\; g^{-1}([-\infty\,, a]) = \bigcap_n f_n^{-1}([-\infty\,, a]) \in \mathcal{A}$$

car

$$\begin{aligned} x \in g^{-1}([-\infty\,, a]) &\Leftrightarrow g(x) \leq a \\ &\Leftrightarrow \forall n \;:\; f_n(x) \leq a \\ &\Leftrightarrow \forall n \;:\; x \in f_n^{-1}([-\infty\,, a]) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_n f_n^{-1}([-\infty\,, a]). \end{aligned}$$

De même $h^{-1}([a\,, -\infty]) = \cap_n f_n^{-1}([a\,, -\infty])$, avec $h := \inf_n f_n$. ∎

ii) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Les fonctions

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} f_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} f_k$$

sont **mesurables**.

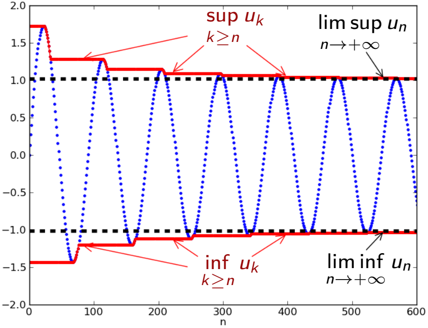



Illustration : $u_n := f_n(x)$ pour un certain $x \in E$. (Bleu) $(u_n)_n \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$.

ii) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Les fonctions

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} f_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} f_k$$

sont **mesurables**.

- Puisque $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont mesurables et en remarquant que

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n = \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} f_k$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} f_k$$

alors on peut conclure. ■

iii) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si $(f_n)_n$ **converge simplement** vers une fonction $f$ (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$), alors $f$ est **mesurable**.

- Si $f_n \to f$ alors $f = \limsup_n f_n$ qui est mesurable. ■

## Chapitre 3 : Intégrales des fonctions mesurables

Le but du chapitre 3 est de définir l'intégrale (au sens de Lebesgue) d'une fonction mesurable $f$ par rapport à une mesure $\mu$ sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ :

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

À suivre...