Intégration et Applications

Chapitre 6 : Mesure produit et théorèmes de Fubini

Olivier Cots, Serge Gratton & Ehouarn Simon

10 octobre 2019

INP Toulouse ENSEEIHT

Le but de ce chapitre 6 est :

- de poser le cadre des intégrales "multiples" depuis la théorie construite dans les chapitres précédents.

$$\int_{E_1 \times E_2} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)$$

Chapitre 6 : Mesure produit et théorèmes de Fubini

- 6.1 Tribu et mesure produits
- 6.2 Théorèmes de Fubini
- 6.3 Changement de variables

6.1 Tribu et mesure produits

Définition – Tribu produit

Soient $(E_1, \mathcal{A}_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables. On appelle tribu produit sur $E_1 \times E_2$, que l'on note $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, la plus petite tribu contenant les ensembles de la forme $A_1 \times A_2$ avec $\forall i \in \{1, 2\}, A_i \in \mathcal{A}_i$:

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\{A_1 \times A_2, A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}).$$

Le couple $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ est appelé espace mesurable produit.

Remarque. En général, $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{A_1 \times A_2, A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ n'est pas une tribu.

Proposition – Cas borélien

Soient $(E_1, \mathcal{O}_1)$ et $(E_2, \mathcal{O}_2)$ deux espaces topologiques. On a

i) $\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2) \subset \mathcal{B}(E_1 \times E_2)$.

ii) Si E_1 et E_2 sont à bases dénombrables d'ouverts, alors

$$\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2) = \mathcal{B}(E_1 \times E_2).$$

Corollaire – Cas particulier $E_i = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\forall d \in \mathbb{N}, d \geq 2, \quad \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{d \text{ fois}} =: \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

► Idée : $\mathbb{R}$ est à base dénombrable d'ouverts (admis). ■

Remarque.

- $\mathcal{B}(E_1 \times E_2)$ est une tribu sur $E_1 \times E_2$: c'est la plus petite tribu contenant les ouverts de $E_1 \times E_2$.
- Une topologie $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ contient $\emptyset$ et E, et est stable par réunions quelconques et intersections finies. De plus, $\sigma(\mathcal{O}) =: \mathcal{B}(E)$
- E est à base dénombrable d'ouverts s'il existe (O_n) famille dénombrable d'ouverts de E telle que tout ouvert A de E soit une réunion (dénombrable) d'éléments de (O_n).

Théorème – Mesure produit

Soient $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. On suppose que μ_1 et μ_2 sont σ-finies sur $(E_1, \mathcal{A}_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2)$ respectivement :

$$\forall i \in \{1,2\}, \exists (A_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telles que } \forall n \in \mathbb{N}, A_n^i \in \mathcal{A}_i, \mu_i(A_i) < +\infty \text{ et } E_i = \cup_n A_n^i.$$

Alors, il existe une unique mesure m sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ vérifiant

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \quad m(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

Cette mesure est σ-finie et est appelée mesure produit. On la note

$$m = \mu_1 \otimes \mu_2.$$

Remarque.

- Le théorème précédent est faux lorsque μ_1 ou μ_2 n'est pas σ-finie.
- Cas $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$: la mesure $\lambda \otimes \lambda$ mesure les aires, la mesure $\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda = \lambda^{\otimes 3}$ les volumes, etc..

6.2 Théorèmes de Fubini

Théorème – Fubini-Tonelli

Soient $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés.
Soit $f : E_1 \times E_2 \to [0, +\infty]$ mesurable positive.
On définit les fonctions ϕ et ψ sur E_1 et E_2 respectivement par

$$\phi(x) = \int_{E_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_2(y), \;\; \psi(y) = \int_{E_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_1(x).$$

Ces fonctions sont mesurables positives et vérifient

$$\int_{E_1} \phi\,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{E_1 \times E_2} f\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{E_2} \psi\,\mathrm{d}\mu_2$$

(et cette quantité $\in [0, +\infty]$).

Remarque. On retient que pour des fonctions mesurables positives, on peut intervertir l'ordre des intégrations.

Exemple. Soit

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & [0,1]\times[0,1] & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & (x,y) & \mapsto & e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{x+y\leq 1} \end{array}.$$

Cette fonction est mesurable positive. On a

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]\times[0,1]} f \,\mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda) &= \int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y) \text{ (Fubini-Tonelli)} \\ &= \int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]} e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{x+y\leq 1}\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y}\left(\int_{[0,1-y]} e^{-x}\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y) \end{aligned}$$

Exemple. Soit

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & [0,1]\times[0,1] & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & (x,y) & \mapsto & e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{x+y\leq 1} \end{array} .$$

Cette fonction est mesurable positive. On a

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]\times[0,1]} f \,\mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda) &= \int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y) \text{ (Fubini-Tonelli)} \\ &= \int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]} e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{x+y\leq 1}\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y}\left(\int_{[0,1-y]} e^{-x}\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y}\left(\int_0^{1-y} e^{-x}dx\right)\mathrm{d}\lambda(y) \text{ (Eq. R-L sur un segment)} \end{aligned}$$

Exemple. Soit

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & [0,1]\times[0,1] & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & (x,y) & \mapsto & e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{x+y\leq 1} \; . \end{array}$$

Cette fonction est mesurable positive. On a

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]\times[0,1]} f \,\mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda) &= \int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y) \text{ (Fubini-Tonelli)}\\
&= \int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]} e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{x+y\leq 1}\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y)\\
&= \int_{[0,1]} e^{-y}\left(\int_{[0,1-y]} e^{-x}\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y)\\
&= \int_{[0,1]} e^{-y}\left(\int_0^{1-y} e^{-x}dx\right)\mathrm{d}\lambda(y) \text{ (Eq. R-L sur un segment)}\\
&= \int_0^1 e^{-y}\left(1-e^{-(1-y)}\right)dy \text{ (Eq. R-L sur un segment)}\\
&= \int_0^1 e^{-y}-e^{-1}dy = 1-\frac{2}{e}.
\end{aligned}$$

Exemple. Interversion somme - intégrale
Soit $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}^+$ mesurable positive. Nous supposons dans cet exemple que

$$(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathrm{card}).$$

Comme déjà vu, pour toute fonction g positive sur E_2,

$$\int_{E_2} g \, \mathrm{d}\mu_2 = \sum_{k \geq 0} g(k) \ .$$

Par Fubini-Tonelli, nous avons alors

$$\int_{E_1} \left(\sum_{k \geq 0} f(x, k) \right) \mathrm{d}\mu_1(x) = \sum_{k \geq 0} \left(\int_{E_1} f(x, k) \, \mathrm{d}\mu_1(x) \right) \ .$$

Théorème – Fubini (ou Fubini-Lebesgue)

Soient $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. Soit $f : E_1 \times E_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable.
On définit les fonctions f_1 et f_2 sur E_1 et E_2 respectivement par

$$f_1(x) = \int_{E_2} |f(x,y)| \,\mathrm{d}\mu_2(y), \;\; f_2(y) = \int_{E_1} |f(x,y)| \,\mathrm{d}\mu_1(x) \ .$$

i) Si l'une des fonctions f_1 ou f_2 est intégrable alors l'autre l'est aussi et dans ce cas, f, ϕ et ψ sont intégrables. De plus, nous avons alors

$$\int_{E_1} \phi \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{E_1 \times E_2} f \,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{E_2} \psi \,\mathrm{d}\mu_2.$$

ii) Si f est intégrable (contre la mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$) alors f_1 et f_2 sont intégrables et nous avons encore l'égalité ci-dessus.

Remarque. Il est possible de vérifier l'intégrabilité de $|f|$ par rapport à $\mu_1 \otimes \mu_2$ par le Théorème de Fubini-Tonelli : il suffit de vérifier que l'intégrale de f_1 ou f_2 est finie.

6.3 Changement de variables

Définition – $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ϕ de U dans V est une bijection ϕ $(U \to V)$ qui est $\mathcal{C}^1$ et telle que ϕ^{-1} est également $\mathcal{C}^1$.

Définition – Matrice Jacobienne

Si ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans V (deux ouverts de $\mathbb{R}^d$), on appelle matrice jacobienne la matrice suivante (fonction de $(u_1, \ldots, u_d)$)

$$J_\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1}(u_1, \ldots, u_d) & \ldots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_d}(u_1, \ldots, u_d) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1}(u_1, \ldots, u_d) & \ldots & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_d}(u_1, \ldots, u_d) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \phi_d}{\partial u_1}(u_1, \ldots, u_d) & \ldots & \frac{\partial \phi_d}{\partial u_d}(u_1, \ldots, u_d) \end{bmatrix}$$

Théorème – Inversion globale (cadre $\mathbb{R}^d$)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\phi : U \to \mathbb{R}^d$.
ϕ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $V = \phi(U)$ si et seulement si ϕ satisfait les trois conditions suivantes :

i) ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur U,

ii) ϕ est injective,

iii) $\forall u \in U, J_\phi(u) \neq 0$.

Remarque. En pratique, on est souvent confrontés aux cas suivants :

- On sait que ϕ est une bijection de U sur V et on connait U, V (ouverts) et ϕ^{-1}. Il suffit alors de vérifier que ϕ et ϕ^{-1} sont $\mathcal{C}^1$.

- On ne sait pas inverser ϕ. On applique alors le théorème d'inversion globale. La difficulté réside souvent dans la détermination de $V = \phi(U)$.

Théorème – Changement de variables

Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$.
Soit $\phi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ borélienne sur V et intégrable.

Alors la fonction $f \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ est intégrable et

$$\int_V f \,\mathrm{d}\lambda = \int_U (f \circ \phi) |\det(J_\phi)| \,\mathrm{d}\lambda.$$

Remarque.

- Attention à ne pas oublier la valeur absolue dans les calculs.
- On a encore

$$\int_V f \,\mathrm{d}\lambda = \int_U (f \circ \phi) |\det(J_\phi)| \,\mathrm{d}\lambda.$$

si $f : V \to \mathbb{R}$ borélienne sur V et positive (avec $\phi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme).

Remarque. Dimension 1 : lien avec le changement de variables (Riemann)

Soient $]a, b[$ et $]c, d[$ deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.
Soit $\phi :]a, b[\to]c, d[$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. On a que ϕ' ne peut s'annuler sur $]a, b[$ et est de signe constant.
Supposons $\phi' > 0$. Alors la formule du changement de variable pour les intégrales de Riemann donne

$$\int_c^d f(x)dx = \int_a^b (f \circ \phi)(y)\phi'(y)dy = \int_a^b (f \circ \phi)(y)|\phi'(y)|dy.$$

Si $\phi' < 0$, alors

$$\begin{aligned}\int_c^d f(x)dx &= \int_b^a (f \circ \phi)(y)\phi'(y)dy \\ &= -\int_a^b (f \circ \phi)(y)\phi'(y)dy \\ &= \int_a^b (f \circ \phi)(y)|\phi'(y)|dy.\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule du changement de variables pour l'intégrale de Lebesgue.

Exemple. Coordonnées polaires

Soit

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathbb{R}_+^* \times]0, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ & & (\rho, \theta) & \to & (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \ . \end{array}$$

L'application ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféormorphisme (admis), de matrice Jacobienne

$$\forall (\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, \frac{\pi}{2}[, \quad J_\phi(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Il vient

$$|\det J_\phi(\rho, \theta)| = |\rho \cos^2(\theta) + \rho \sin^2(\theta)| = |\rho|.$$

Soit

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \to & e^{-(x^2+y^2)}. \end{array}$$

f est mesurable (car continue) et positive.

Exemple. Coordonnées polaires

D'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda)(x,y) &= \int_{[0,+\infty]}\int_{[0,+\infty]} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int_{[0,+\infty]} e^{-x^2}\left(\int_{[0,+\infty]} e^{-y^2}\,\mathrm{d}\lambda(y)\right)\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \left(\int_{[0,+\infty]} e^{-y^2}\,\mathrm{d}\lambda(y)\right)\times\int_{[0,+\infty]} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \left(\int_{[0,+\infty]} e^{-y^2}\,\mathrm{d}\lambda(y)\right)^2.
\end{aligned}$$

Exemple. Coordonnées polaires

En utilisant la formule du changement de variables, il vient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda)(x,y) &= \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda)(x,y) \\
&= \int_{]0,+\infty[\times]0,\pi/2[} e^{-\rho^2}|\rho|\,\mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda)(\rho,\theta) \\
&= \int_{[0,+\infty]\times[0,\pi/2]} e^{-\rho^2}|\rho|\,\mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda)(\rho,\theta).
\end{aligned}$$

Exemple. Coordonnées polaires

En utilisant la formule du changement de variables, il vient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda)(x,y) &= \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda)(x,y)\\ &= \int_{]0,+\infty[\times]0,\pi/2[} e^{-\rho^2}|\rho|\,\mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda)(\rho,\theta)\\ &= \int_{[0,+\infty]\times[0,\pi/2]} e^{-\rho^2}|\rho|\,\mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda)(\rho,\theta).\end{aligned}$$

Par Fubini-Tonelli, il vient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(\lambda\otimes\lambda)(x,y) &= \int_{[0,+\infty]}\left(\int_{[0,\pi/2]} e^{-\rho^2}|\rho|\,\mathrm{d}\lambda(\theta)\right)\,\mathrm{d}\lambda(\rho).\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}_+}\rho e^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\lambda(\rho)\end{aligned}$$

Exemple. Coordonnées polaires

Or, l'intégrale de Riemann impropre $\int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho$ est convergente (et vaut $1/2$), avec $\rho \to \rho e^{-\rho^2}$ mesurable positive sur $\mathbb{R}_+$.
Il vient que $\rho \to \rho e^{-\rho^2}$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \rho e^{-\rho^2} \, \mathrm{d}\lambda(\rho) = \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\left(\int_{[0,+\infty]} e^{-y^2} \, \mathrm{d}\lambda(y) \right)^2 = \frac{\pi}{4},$$

soit

$$\int_{[0,+\infty]} e^{-y^2} \, \mathrm{d}\lambda(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{1}$$

Exemple. Convolution

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et intégrables. Rappelons que la convolée de f et g est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) \, \mathrm{d}\lambda(y).$$

Montrons que cette fonction est bien définie (c'est à dire que $f \star g < \infty$ p.p.).

Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |(f \star g)(x)| \, \mathrm{d}\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) \, \mathrm{d}\lambda(y) \right| \mathrm{d}\lambda(x) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)| \, \mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x) \\
\text{(par Fubini-Tonelli)} \quad &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)| \, \mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)| \, \mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y).
\end{aligned}$$

Exemple. Convolution

Pour y fixé, soit le changement de variable en dimension 1 ($u = x - y$, $x = u + y$) :

$$\begin{array}{cccccc} \phi & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \rightarrow & u + y \end{array}$$

ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et $\forall u \in \mathbb{R}, |\det(J_\phi)| = |\phi'(u)| = 1$.

Il vient

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x - y)| \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |g(u)| \,\mathrm{d}\lambda(u).$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |(f \star g)(x)| \,\mathrm{d}\lambda(x) & \leq & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(u)| \,\mathrm{d}\lambda(u) \right) \mathrm{d}\lambda(y) \\ & \leq & \displaystyle\left(\int_{\mathbb{R}} |g(u)| \,\mathrm{d}\lambda(u) \right) \times \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) \right) \\ (f \text{ et } g \text{ intégrables}) & < & +\infty. \end{array}$$

Il vient $|f \star g|$ est finie μ-p.p., et donc $f \star g$ est finie μ-p.p.

Exemple. Convolution

Fixons x et opérons un changement de variable $y = x - u$ dans l'intégrale :

$$\begin{array}{rcccc} \phi & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & u & \to & x - u \end{array}$$

ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et $\forall u \in \mathbb{R}, |\det(J_\phi)| = |\phi'(u)| = 1$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}\lambda(u)$$

Finalement,

$$f \star g = g \star f \ .$$