TD — UE Spécifications formelles
TD3 Modélisation CSS

Exercice 1

a) $\rightarrow P \triangleq a.b.0 \xrightarrow{a} b.0 \xrightarrow{b} 0$

b) $\rightarrow P \equiv a.0 + b.0 \xrightarrow{a} 0$ (et $\xrightarrow{b} 0$)

c) $\rightarrow P \equiv \boxed{a.0} \parallel \boxed{b.0} \xrightarrow{b} a.0 \parallel 0 \equiv a.0$

réalisé par M1 — réalisé par M2

$\downarrow a$

$\underbrace{0}_{\text{M1 a fait}} \parallel \underbrace{b.0}_{\text{M2 a pas bougé}} \equiv b.0 \xrightarrow{b} 0 \xleftarrow{a}$ (juste car même état 0.)

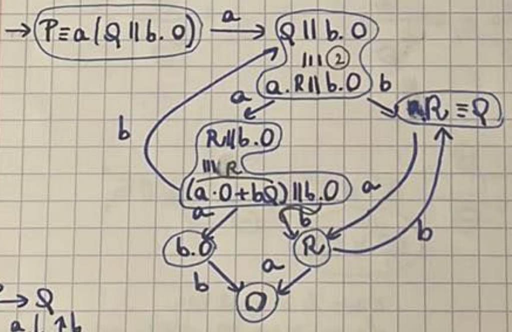
$0 \parallel b.0 \equiv b.0$ car 0 monoïde com. ≈ si on box une brique et une M à côté, la brique ne fait rien → reste q la M.

• le + → comme si on choisirait au random. • le ∥ → ≈ si on le donnait à s'exécuter à 2M en parallèles, donc fait un calcul pdt que l'autre ne bouge pas (car elles exécutent jms exactement au même tps).

On fait pas le cas où les 2M le font en même tps car hyp que c'est atomique les transitions et q les M n'ont pas les mêmes horloges internes.

d)

$P \equiv a.(Q \parallel b.0)$ ①
$Q \equiv a.R$ ②
$R \equiv a.0 + b.Q$ ③



Pour b) l'un ou l'autre est réalisé.
Pour c) les 2 sont réalisés (pas forcément en même tps)

Si +

$a.A + b.B$: $\xrightarrow{a}$ Ⓐ, $\xrightarrow{b}$ Ⓑ

Si ∥

$a.A \parallel b.B$: $\xrightarrow[M1]{a} b.B \xrightarrow[M2]{b}$ Ⓑ ; $\xrightarrow[M2]{b} a.A \xrightarrow[M1]{a}$ Ⓐ

$$\begin{tikzcd}
\rightarrow P \arrow[r, "a"] & Q \parallel b.0 \arrow[r, "b"] \arrow[d, shift left, "a"] & Q \arrow[d, shift left, "a"] \\
& R \parallel b.0 \arrow[r, "b"] \arrow[u, shift left, "b"] \arrow[d, "a"] & R \arrow[u, shift left, "b"] \arrow[d, "a"] \\
& b.0 \arrow[r, "b"] & 0
\end{tikzcd}$$

Exercice 2

$\rightarrow C_2 \equiv S_2^0 \underset{\ominus}{\overset{\oplus}{\rightleftarrows}} S_2^1 \underset{\ominus}{\overset{\oplus}{\rightleftarrows}} S_2^2$

$C_3 \equiv S_3^0 \underset{\ominus}{\overset{\oplus}{\rightleftarrows}} S_3^1 \underset{\ominus}{\overset{\oplus}{\rightleftarrows}} S_3^2 \underset{\ominus}{\overset{\oplus}{\rightleftarrows}} S_3^3$

(Bi)simulation forte.

$\xrightarrow{a} s_2' \xrightarrow{b} s_3'$

$\xrightarrow{a} s_1' \circlearrowleft b$

t une rela° de simu

$s, s' \rangle \in R$, il faut mq<

s_1' tq $s_1' \xrightarrow{b} s_1'$

x de S (s_0) sont

$s_0' \rangle \in R$?.

al, si on applique

$\Rightarrow s_2 \, (\in R)$

$\wedge \; s_1' \xrightarrow{a} s_2' \; (\in$

par S.

$\rangle, \langle s_2', s_1 \rangle,$

$C_2 \overset{\text{aut}}{\overset{\Delta}{=}} S_2^0$ $S_2^0 \overset{\Delta}{=} \oplus . S_2^1$ action à faire . Processus Destination

$S_2^1 \overset{\Delta}{=} \oplus . S_2^2 + \ominus . S_2^0$

$S_2^2 \overset{\Delta}{=} \ominus . S_2^1$

$C_3 \overset{\text{aut}}{\overset{\Delta}{=}} S_3^0$ $S_3^0 \overset{\Delta}{=} \oplus . S_3^1$

$S_3^1 \overset{\Delta}{=} \oplus . S_3^2 + \ominus . S_3^0$

$S_3^2 \overset{\Delta}{=} \oplus . S_3^3 + \ominus . S_3^1$

$S_3^3 \overset{\Delta}{=} \ominus . S_3^2$

Exercice 3

a) $P \,\|\, C_{i-1} \sim C_i$ Trouver P tq

$P = C_1$ rela° de bissimulation   Donné par le prof pour nous aider.

$C_1 \,\|\, C_{i-1} \sim C_i$

$\rightarrow C_1 \equiv S_i^0 \underset{\ominus}{\overset{\oplus}{\rightleftarrows}} S_i^1 \underset{\ominus}{\overset{\oplus}{\rightleftarrows}} \dots \; S_i^{i-1} \underset{\ominus}{\overset{\oplus}{\rightleftarrows}} S_i^i$

$\rightarrow C_1 \,\|\, C_{i-1}$

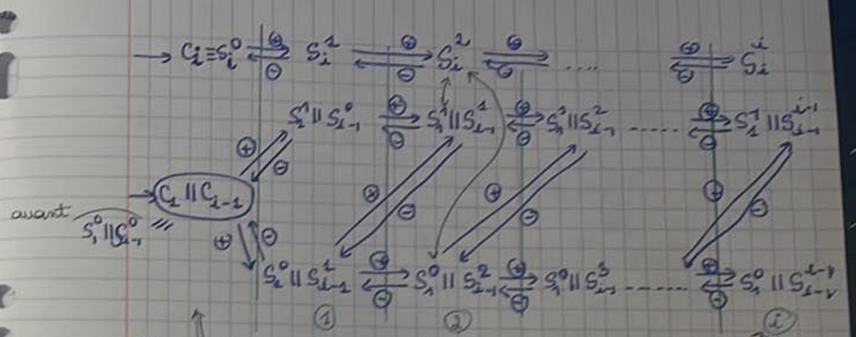
$\rightarrow C_1 \,\|\, C_{2-1} \underset{\ominus}{\overset{\oplus}{\rightleftarrows}} S_1^1 \,\|\, S_1^0 \underset{\ominus}{\overset{\oplus}{\rightleftarrows}} S_1^1 \,\|\, S_1^1$

$\equiv S_1^0 \,\|\, S_1^1$ m

Sur une opéra°, une M bouge et l'autre ne bouge pas. A chaque opération, on choisit celle qui s'exécute

Sur

c'est le m état car la mise en parallèle est commutative.



Soit $R = \{ \overbrace{\langle C_1 \| C_{i-1}, C_i \rangle}^{c}, \overbrace{\langle S_1^1 \| S_{i-1}^{i-1}, S_i^i \rangle}^{d} \}$ Pour $k=0$ et $k=i$ (flèches moins épaisses).

union a ($\cup \; \{ \langle S_1^0 \| S_{i-1}^k, S_i^k \rangle \mid k \in [\![1; i-1]\!] \}$ Pour la partie du las bas du cpt de bas.

b ($\cup \; \{ \langle S_1^1 \| S_{i-1}^{k-1}, S_i^k \rangle \mid k \in [\![1; i-1]\!] \}$ Pour la partie du haut bissimilaire au cpt de bas. → toutes flèches moins fines

alors $R' = R \cup R^{-1}$ est une rela° de bissimulation.

On essaye de montrer la rela° de bissimula° avec les petits carrés; ~ bets bisimilarité

$$\begin{array}{ccc} C_1 \| C_{i-1} & \overset{c}{\text{—}} & C_i \\ \oplus\downarrow & & \downarrow\oplus \\ S_1^1 \| S_{i-1}^0 & \overset{d(k=1)}{\text{—}} & S_i^1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_i & \overset{c}{\text{—}} & C_1 \| C_{i-1} \\ \oplus\downarrow & & \downarrow\oplus \\ S_i^1 & \overset{d(k=1)}{\text{—}} & S_1^1 \| S_{i-1}^0 \end{array}$$

les 2 cas de $\|$ pour le $\oplus$

$$\begin{array}{ccc} C_1 \| C_{i-1} & \overset{c}{\text{—}} & C_i \\ \oplus\downarrow & & \downarrow\oplus \\ S_1^0 \| S_{i-1}^1 & \overset{d(k=1)}{\text{—}} & S_i^1 \end{array}$$

a$(2 \le k \le i-2)$

$$\begin{array}{ccc} S_i^k & \overset{a}{\text{—}} & S_1^0 \| S_{i-1}^k \\ \oplus\downarrow & & \downarrow\oplus \\ S_i^{k+1} & \overset{a(k=k+1)}{\text{—}} & S_1^0 \| S_{i-1}^{k+1} \end{array}$$

pareil avec $\ominus$

$$\begin{array}{ccc} S_i^k & \overset{a}{\text{—}} & S_1^0 \| S_{i-1}^k \\ \ominus\downarrow & & \downarrow\ominus \\ S_i^{k+1} & \overset{a(k=k-1)}{\text{—}} & S_1^1 \| S_{i-1}^k \end{array}$$

on choisit d'? S_i^k pas choisi arbitraire car c'est fixé un $\exists k$ dont on a besoin, par terme de la case.

$\exists (k=2)$ (5 carrés)   a$(k = i-1)$ (5 carrés)

$$
\begin{tikzcd}
S_1^0 \parallel S_{i-1}^k \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\oplus"] & S_1^k \arrow[d, "\oplus"] \\
S_1^1 \parallel S_{i-1}^k \arrow[r, dash, "b"] & S_1^{k+1}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S_1^0 \parallel S_{i-1}^k \arrow[r, dash] \arrow[d, "\ominus"'] & S_i^k \arrow[d, "\ominus"] \\
S_1^0 \parallel S_{i-1}^{k-1} \arrow[r, dash, "a"] & S_i^{k-1}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
S_1^0 \parallel S_{i-1}^k \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, "\oplus"] & S_i^k \arrow[d, "\oplus"] \\
S_1^0 \parallel S_{i-1}^{k+1} \arrow[r, dash, "a"] & S_i^{k+1}
\end{tikzcd}
$$

b) $C_i' = \underbrace{C_1 \parallel \ldots \parallel C_1}_{i \text{ fois}}$

$C_i' \sim C_i$

$$\longrightarrow C_i' \underset{\ominus}{\overset{\oplus}{\rightleftarrows}} S_1^1 \parallel \underbrace{S_1^0 \parallel \ldots \parallel S_1^0}_{i-1 \text{ fois}} \underset{\ominus}{\overset{\oplus}{\rightleftarrows}} S_1^1 \parallel S_1^1 \parallel \underbrace{S_1^0 \parallel \ldots \parallel S_1^0}_{i-2 \text{ fois}} \underset{\ominus}{\overset{\oplus}{\rightleftarrows}} \ldots \underset{\ominus}{\overset{\oplus}{\rightleftarrows}} \underbrace{S_1^1 \parallel \ldots \parallel S_1^1}_{i \text{ fois}}$$

Exercice 4

a) $C_\infty' \text{"}\sim\text{"} \underbrace{S_1^0 \parallel \ldots \parallel S_1^0}_{\infty \text{ fois}}$

$\text{"}\sim\text{"}\ \oplus.(S_1^1 \parallel \underbrace{S_1^0 \parallel \ldots \parallel S_1^0}_{\infty \text{ fois}})$

$\text{"}\sim\text{"}\ \oplus.(S_1^1 \parallel C_\infty')$

$C_\infty' = \oplus.(S_1^1 \parallel C_\infty')$

On veut prouver $\ominus.0 \parallel C_\infty' \sim S_1^1 \parallel C_\infty'$.

$\{\langle \ominus.0 \parallel C_\infty' \parallel Term, S_1^1 \parallel C_\infty' \parallel Term \rangle \mid Term \in CCS\}$ (a)

$\cup \{\langle C_\infty' \parallel Term, S_1^0 \parallel C_\infty' \parallel Term \rangle \mid Term \in CCS\}$ (b)

$\cup \{\langle Term, Term \rangle \mid Term \in CCS\}$ (c)

On peut aussi trouver ses expre° avec l'algo à la fin du cours ou alors cela en faisant un brouillon.

$$
\begin{tikzcd}
\arrow[r] & C_\infty'' \arrow[r, shift left, "\oplus"] & \ominus \parallel C_\infty'' \arrow[l, shift left, "\ominus"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\arrow[r] & C_\infty' \arrow[r, "\oplus"] & S_1^1 \parallel C_\infty' \arrow[r, "\oplus"] \arrow[d, "\ominus"'] & S_1^1 \parallel S_1^1 \parallel C_\infty' \arrow[d, "\ominus"', "\oplus"] \\
& & S_1^0 \parallel C_\infty' & S_1^0 \parallel S_1^1 \parallel C_\infty' \arrow[d, "\ominus"'] \\
& & & S_1^0 \parallel S_1^0 \parallel C_\infty'
\end{tikzcd}
$$

$C_\infty'' = \oplus.(\ominus.0 \parallel C_\infty'')$