Intégration et Applications

Chapitre 4 : Ensembles négligeables

Olivier Cots, Serge Gratton & Ehouarn Simon

3 octobre 2019

INP TOULOUSE ENSEEIHT

- Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On rappelle qu'un ensemble négligeable est un ensemble mesurable de mesure nulle, c-a-d un ensemble $N \in A$ t.q. $\mu(N) = 0$.

- Soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Au lieu d'écrire $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$ si f est nulle sauf sur un ensemble négligeable, on notera souvent

$$f = 0 \ \mu\text{-presque partout} \quad \text{ou} \quad f = 0 \ \mu\text{-p.p.},$$

ou encore $f = 0$ p.p., et on dira que f est μ-presque partout nulle.

- De manière générale, soit $N \in \mathcal{A}$ un ensemble négligeable, et soit une propriété $P(x)$ qui dépend de $x \in E$. Si

$$\{x \in E \mid P(x) \text{ est fausse}\} \subset N,$$

on dira que $P(x)$ est vraie "pour μ-presque tout x", ou encore que P est vraie μ-p.p.

Remarque. Il est possible dans certains contextes que P soit fausse sur un ensemble non mesurable, que l'on qualifiera tout de même d'ensemble négligeable s'il est inclus dans une partie mesurable de mesure nulle. Dans ce contexte, il est commode d'introduire la notion de **tribu complétée** à laquelle on ajoute (entres autres) tous les ensembles négligeables. **Dans ce cours, nous supposerons que l'ensemble est mesurable.**

Théorème

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Si $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est nulle p.p., c-a-d si $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$, alors

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$$

et la réciproque est vraie si $f \in \mathcal{F}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

- Nous avons démontré à la section 3.2 (version slides) que pour $f \in \mathcal{F}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0 \iff f = 0 \ \mu\text{-p.p.}$$

Or si $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est nulle p.p., alors $f^+ = f \mathbb{1}_{f>0}$ et $f^- = -f \mathbb{1}_{f<0}$ le sont aussi, et puisque f^+ et f^- sont positives alors leurs intégrales sont nulles. Ainsi, $f \in \mathcal{L}^1$ et

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int f^- \, \mathrm{d}\mu = 0. \quad \blacksquare$$

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $A \in \mathcal{A}$ un ensemble négligeable. Alors

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

- Par définition,

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu,$$

et par le théorème précédent, $\int_E f \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu = 0$. ■

Lemme. *Si $f = g$ μ-p.p., alors f est intégrable (resp. admet une intégrale) ssi g est intégrable (resp. admet une intégrale).*

- Comme $f = g$ μ-p.p., alors il est clair que $f^+ = g^+$ μ-p.p. et $f^- = g^-$ μ-p.p.

Il suffit donc de montrer que pour toutes f, g dans $\mathcal{F}_+$, si $f = g$ μ-p.p. alors

$$\int f \,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \text{ssi} \quad \int g \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

En fait, nous avons déjà démontré mieux (cf. Proposition de la section 3.2 du chapitre 3 sur slides) :

$\forall f, g \in \mathcal{F}_+$, si $f = g$ μ-p.p. alors on a l'égalité $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. ■

Proposition

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Soient $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $g \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. $f = g$ μ-p.p. Alors,

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

- D'après le lemme précédent, $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int f \, \mathrm{d}\mu - \int g \, \mathrm{d}\mu = \int (f - g) \, \mathrm{d}\mu.$$

La fonction $f - g$ est nulle presque partout donc d'après le théorème précédent,

$$\int (f - g) \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

■

Remarque. On retiendra que deux fonctions égales p.p. ont la même intégrale.

Bonus

Introduction à l'espace $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$

Définition

Soit F un espace vectoriel. Une fonction $N\colon F \to \mathbb{R}_+$ est appelée **norme** si

i) $\forall u \in F$: $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (**séparation**) ;

ii) $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times F$: $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$ (**absolue homogénéité**) ;

iii) $\forall (u, v) \in F^2$: $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ (**sous-additivité ou inégalité triangulaire**).

Si i) est remplacé par

$$\text{i')} \quad N(0_F) = 0,$$

alors on parle de **semie-norme**.

Remarque. On rappelle qu'une norme N sur un espace vectoriel F induit une topologie sur F, la topologie induite par la distance $d(u, v) := N(u - v)$.

On rappelle que l'espace $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$ (ou $\mathcal{L}^1$) est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui sont μ-intégrable, c-a-d t.q.

$$\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Pour toute $f \in \mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$, on pose

$$\|f\|_1 := \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition

L'espace $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_1)$ est un espace vectoriel semi-normé.

► Nous avons déjà démontré que $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel au chapitre 3, section 3.3. L'absolue homogénéité vient de la positive homogénéité de l'intégrale sur $\mathcal{F}_+$, l'inégalité triangulaire est donnée par la croissance + additivité de l'intégrale sur $\mathcal{F}_+$ et si $f = 0$ alors $|f| = 0$ donc son intégrale aussi. ■

Pour passer d'une semie-norme à une norme, on identifie les vecteurs u et v dans F t.q.

$$N(u - v) = 0.$$

Rigoureusement, on définit **l'espace quotient** de F par la relation d'équivalence

$$u \sim v \iff N(u - v) = 0,$$

c-a-d l'ensemble constitué des classes d'équivalences de $\sim$. Ainsi, pour toutes f, g dans $\mathcal{L}^1$

$$f \sim g \iff \|f - g\|_1 = 0 \iff |f - g| = 0 \ \mu\text{-p.p.} \iff f = g \ \mu\text{-p.p.}$$

Notation. On note $\overline{f} := \left\{ g \in \mathcal{L}^1 \;\middle|\; g = f \ \mu\text{-p.p.} \right\}$ la classe d'équivalence de $f \in \mathcal{L}^1$. Les opérations classiques s'étendent aux classes d'équivalence, avec $\overline{af} = a\overline{f}$ et $\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}$.

> **Remarque**. On fera l'abus de notation qui consiste à ne pas distinguer fonctions et classes d'équivalences, c-a-d qu'on utilisera le même symbole f pour la classe et la fonction. Ceci n'est bien entendu pas dangereux.

Définition

On note $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ou L^1, l'ensemble des classes d'équivalences des éléments de $\mathcal{L}^1$ par la relation d'équivalence $f \sim g \iff f = g$ μ-p.p..

On définit la fonction $\|\cdot\|_1$ sur L^1 par

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_1 : & L^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & \overline{f} & \longmapsto & \|\overline{f}\|_1 := \|f\|_1 \end{array}$$

où $f \in \overline{f}$ est n'importe quel représentant de la classe d'équivalence, car si $f \sim g$ alors $\|f\|_1 = \|g\|_1$.

Remarque. Bien entendu, $\|\cdot\|_1$ est une norme sur L^1.

Théorème

L'espace $(L^1(E, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_1)$ est un espace vectoriel normé.

Exemple. On note l^1 l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ où $m := \text{card}$ est la mesure de comptage. Soit $u \in l^1$, alors

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Il n'est pas besoin ici de quotienter $\mathcal{L}^1$ car $\|u\|_1 = 0$ implique $u = 0$.