Couples de Variables Aléatoires Réelles

1. Définition

Soit (Ω, C, P) un espace probabilisé et (Ω', C') un espace probabilisable avec $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ et C' construit à partir des réunions et intersections finies ou dénombrables des pavés $(a,b) \times (c,d)$ de $\mathbb{R}^2$. Un couple (X,Y) de variables aléatoires réelles est une application mesurable de Ω dans Ω'.

On notera $P\left[(X,Y) \in \Delta\right], \Delta \subset \mathbb{R}^2$, la probabilité que le couple (X,Y) prenne ses valeurs dans Δ.

Dans la plupart des applications, on rencontre les couples de variables aléatoires suivants :

1-1 Les couples de va discrètes

La loi du couple (X,Y) est définie par l'ensemble des valeurs possibles du couple (qui est un ensemble fini ou dénombrable) noté $\{(x_i, y_j), i \in I, j \in J\}$ et par les probabilités associées $p_{ij} = P\left[X = x_i, Y = y_j\right]$, $i \in I, j \in J$ telles que $p_{ij} \geq 0$ et $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$.

1-2 Les couples de va continues

La loi du couple (X,Y) est définie par l'ensemble des valeurs possibles du couple (qui est un ensemble infini non dénombrable), en général une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}^2$, et par une densité de probabilité $f(x,y)$ telle que

$$\begin{aligned} f(x,y) &\geq 0 \\ \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy &= 1 \end{aligned}$$

et de manière plus générale

$$P\left[(X,Y) \in \Delta\right] = \int\int_{\Delta} f(x,y)dxdy$$

Remarque : signification de $f(x,y)$

2. Fonction de Répartition

Définition

$$F(x,y) = P\left[X < x, Y < y\right]$$

Remarques :

- C'est une fonction étagée lorsque (X,Y) est un couple de va discrètes
- C'est une fonction continue lorsque (X,Y) est un couple de va continues avec

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

d'où

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

3. Lois Marginales

Les lois marginales d'un couple (X, Y) sont les lois de X et de Y telles que

- **Cas discret**

$$P[X = x_i] = p_{i.} = \sum_{j\in J} p_{ij}$$

$$P[Y = y_j] = p_{.j} = \sum_{i\in I} p_{ij}$$

- **Cas continu**

densité de X : $$f(x, .) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy$$

densité de Y : $$f(., y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dx$$

ex p128

4. Lois Conditionnelles

Les lois conditionnelles d'un couple (X, Y) sont les lois de $X|\,Y = y$ et de $Y|\,X = x$ telles que

- **Cas discret**

$$P[X = x_i|\,Y = y_j] = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

$$P[Y = y_j|\,X = x_i] = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

- **Cas continu**

densité de $X|\,Y = y$: $$f(x|\,y) = \frac{f(x, y)}{f(., y)}$$

densité de $Y|\,X = x$: $$f(y|\,x) = \frac{f(x, y)}{f(x, .)}$$

5. Indépendance

On dit que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes si

$$P\left[X \in \Delta, Y \in \Delta'\right] = P\left[X \in \Delta\right] P\left[Y \in \Delta'\right], \forall \Delta, \forall \Delta'$$

De manière équivalente, X et Y sont des variables aléatoires indépendantes si

- **Cas discret**

$$p_{ij} = p_{i.}p_{.j} \qquad \forall i \in I, \forall j \in J$$

ou

$$P\left[X = x_i \middle| Y = y_j\right] = p_{i.} \qquad \forall i \in I, \forall j \in J$$

- **Cas continu**

$$f(x, y) = f(x, .)f(., y) \qquad \forall x, \forall y$$

ou

$$f(x|\, y) = f(x, .), \qquad \forall x, \forall y$$

Propriété : si X et Y sont des variables aléatoires et α et β sont des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes. La réciproque est vraie si α et β sont des applications bijectives. Par contre, dans le cas où α et β ne sont pas bijectives, la réciproque est fausse. On vérifiera par exemple que le couple $(X\, Y)$ de densité

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + xy) \text{ si } |x| < 1 \text{ et } |y| < 1 \\ \qquad\qquad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est tel que X^2 et Y^2 sont indépendantes alors que X et Y ne le sont pas.

Début cours 5

PROBABILITES

Chap 3

Couples de variables aléatoires réelles

I. Définition

$(\mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathcal{P})$ un triplet de probabilités et $(\mathcal{E}', \mathcal{C}')$ un espace probabilisable avec $\mathcal{E}' \subset \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C}'$ est construit par réunion et intersection finies ou dénombrables des pavés $(a,b) \times (c,d)$ de $\mathbb{R}^2$. Un couple (x,y) de va réelles est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ qui possède la propriété de mesurabilité.

On notera $P[(X,Y) \in \Delta]$, $\Delta \in \mathbb{R}^2$, la probabilité que le couple (X,Y) prenne ses valeurs dans Δ.

Les principaux couples de va sont les suivants :

1. Les couples de va discrètes

définis par $\{(x_i, y_j)\ i \in I, j \in J\}$ des valeurs possibles de (X,Y) et par $p_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j]$ avec $p_{ij} > 0$ et $\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} p_{ij} = 1$

2. Les couples de va continues

définis par l'ensemble des valeurs prises par le couple (en général une $\cup$ ou $\cap$ de pavés) et par une densité de probabilité $p(x,y)$ telle que $p(x,y) \geq 0$, $P[(X,Y) \in \Delta] = \iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy$

d'où : $P[(X,Y) \in \mathbb{R}^2] = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$P[X \in [x, x+dx[, Y \in [y, y+dy[\,] \underset{\substack{dx \text{ petit} \\ dy \text{ petit}}}{\approx} f(x,y)\,dx\,dy$

II Fonction de répartition

La fonction de répartition d'un couple (X,Y) est définie par

$F_{X,Y}(u,v) = P[X < u \overset{\text{"et"}}{,} Y < v]$

C'est une fonction étagée (constante sur des pavés) dans le cas discret

continue dans le cas continu avec $F_{XY}(u,v) = \int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{v} p_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

d'où $p_{X,Y}(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}[F_{X,Y}(u,v)] = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v)$

III Lois marginales et lois conditionelles.

Les lois marginales du couple (X,Y) sont les lois de X et de Y définies par:

CAS DISCRET $P[X=x_i] = P[\bigcup_j \{X=x_i, Y=y_j\}] = \sum_j P(X=x_i, Y=y_j]$

Notation: $p_{i.} = \sum_{j\in J} p_{ij}$

de même $p_{.j} = \sum_{i\in I} p_{ij}$

CAS CONTINU $\underbrace{f(x,.)}_{\text{densité de }X} = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x,y)}_{\text{densite du couple}(X,Y)} dy$ et $f(.,y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$.

(Preuve à voir)

Les lois conditionelles sont définies par:

CAS DISCRET $P[X=x_i | Y=y_j] = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$ $\left(= \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\right)$

$P[Y=y_j | X=x_i] = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$

CAS CONTINU Les lois de $Y|X=x$ et $X|Y=y$ sont des lois continues de densités:

$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x,.)}$ et $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(.,y)}$

⚠ $f(y|x)\,dy \underset{dy\text{ petit}}{\#} P[Y\in[y,y+dy[\,|X=x] = \frac{\overset{=0}{P[Y\in[y,y+dy[, X=x]}}{\underset{=0}{P[X=x]}}$

indétermination.

donc pour résoudre ce pb on utilise $f(y|x)dy = \lim_{dx\to 0} \frac{P[Y\in[y,y+dy[, X\in[x,x+dx[]}{P[X\in[x,x+dx[]}$

etc...

IV. Indépendance

On dit que X et Y sont deux va indépendantes si $P[X\in\Delta, Y\in\Delta'] = P[X\in\Delta]P[Y\in\Delta']$
$\forall \Delta\in\mathbb{R}\ \forall\Delta'\in\mathbb{R}$

(à rapprocher de $P(A\cap B) = P(A)P(B)$)

Cette définition peut se simplifier de la façon suivante :

CAS DISCRET X et Y indépendants $\Leftrightarrow$ $p_{ij} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j} \quad \forall i \forall j$

Rq : $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ind} \Leftrightarrow f_{i|j} = P[X = x_i | Y = y_j] = f_{i\cdot} \quad \forall i \forall j}$

en d'autres termes $f_{i|j}$ indépendant de j

CAS CONTINU X et Y indépendants $\Leftrightarrow$ $f(x,y) = f(x,\cdot) f(\cdot,y) \quad \forall x \forall y$ (voir TD3)

Rq : $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ind} \Leftrightarrow f(x|y) = f(x,\cdot) \quad \forall x \forall y}$

ie $f(x|y)$ indépendant de y

Propriété : Si X et Y sont indépendantes et si $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

alors en général $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$ sont des va indépendantes

V. Espérance mathématique

1. Définition.

De manière analogue au cas 1D, on définit l'espérance mathématique de $\alpha(X,Y)$, où α est une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$E[\alpha(X,Y)] = \begin{cases} \underline{\text{cas discret}} : \\ \sum_{i,j} \alpha(x_i,y_j)\, p_{ij} \\ \underline{\text{cas continu}} \\ \iint_{\mathbb{R}^2} \alpha(x,y) f(x,y)\, dx\, dy \\ \underline{\text{cas mixte}} : X \text{ discrète}, Y \text{ continue} \\ \sum_i \left(\int_{\mathbb{R}} \alpha(x_i,y) f(y)\, dy\right) P[X = x_i] = \sum_i \int_{\mathbb{R}} \alpha(x_i,y)\, f_i(y)\, dy \end{cases}$$

2. Propriétés.

- linéarité $E[a\alpha(X,Y) + b\beta(X,Y)] = a E[\alpha(X,Y)] + b E[\beta(X,Y)]$
- constante ou fonction déterministe $E[\text{cste}] = \text{cste}$, $E[\cos t] = \cos t$ (t = temps)
- $\underset{\text{cas continu}}{E[\alpha(X)]} = \iint_{\mathbb{R}^2} \alpha(x) f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy\right]}_{f(x,\cdot)} dx$

  la définition est cohérente avec le cas 1 variable.
- indépendance $E[\alpha(X).\beta(Y)] = E[\alpha(X)] E[\beta(Y)]$ si X et Y indépendantes alors

démo (cas continu)

$$E[\alpha(X)\beta(Y)] = \iint \alpha(x)\beta(y) f(x,y)\, dx\, dy \underset{X \text{ et } Y \text{ ind}}{=} \iint \alpha(x)\beta(y) f(x,\cdot) f(\cdot,y)\, dx\, dy$$

$$\overset{\text{var séparables}}{=} \int \alpha(x) f(x,\cdot)\, dx \int \beta(y) f(\cdot,y)\, dy = E[\alpha(X)] E[\alpha(Y)].$$

3. Exemples.

les moments centrés $\mu_{ij} = E[(X - E(X))^i (Y - E(Y))^j]$

les moments non centrés $m_{ij} = E[X^i Y^j]$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $\forall j \in \mathbb{N}$

Rq : pour $i=0$ ou $j=0$, on se ramène au cas 1D.
pour $i=1$ et $j=1$, on a $\mu_{11} = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$
μ_{11} s'appelle la covariance entre X et Y notée $Cov(X,Y)$

Calcul de Cov(X,Y) : $\mu_{11} = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

$$= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)]$$
$$= E[XY] - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)$$
$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Matrice de covariance (ou matrice des variances-covariances)

$$E\left[\underbrace{\begin{pmatrix} X-E(X) \\ Y-E(Y) \end{pmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{pmatrix} X-E(X) & Y-E(Y) \end{pmatrix}}_{{}^tV}\right] = \begin{pmatrix} Var X & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var Y \end{pmatrix}$$

Rq : si X et Y sont indépendantes, alors $Cov(X,Y) = 0$ et donc la matrice de covariance est diagonale.
la réciproque est fausse (voir TD)

Le coefficient de corrélation : $r_{XY} = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

avec σ_X = écart type de $X = \sqrt{Var X}$
σ_Y = ——————— $Y = \sqrt{Var Y}$

On va voir que $r_{X,Y}$ est une mesure imparfaite mais très pratique du lien existant entre X et Y.

propriétés : $-1 \leq r_{X,Y} \leq +1$

demo : on pose $g(\alpha) = E[((X-E(X)) + \alpha(Y-E(Y)))^2] \geq 0 \ \forall \alpha$
mais $g(\alpha) = Var X + 2\alpha\, cov(X,Y) + \alpha^2 Var Y \geq 0 \ \forall \alpha$
$\Rightarrow \Delta' \leq 0.$
$\Rightarrow \Delta' = cov(X,Y)^2 - Var X\, Var Y \leq 0$
$\Rightarrow \dfrac{cov(X,Y)^2}{Var X\, Var Y} \leq 1 \Rightarrow \boxed{r_{X,Y}^2 \leq 1}$

Rq : on montre que $\langle X,Y \rangle = E[XY]$ est un produit scalaire.
on applique Cauchy-Schwartz à $\tilde{X} = X - E(X)$, $\tilde{Y} = Y - E(Y)$
Inégalité de Cauchy-Schwartz : $|\langle X,Y \rangle|^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad X_i \begin{cases} \to 1 & p \\ \to 0 & q \end{cases} \qquad E[X_i] = p$$

$$E[Y] = np$$

si N v.a. aléatoire

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E\left[E\left[\sum X_i \mid N\right]\right] = E[Np] = pE(N) .$$

$$|cov(X,Y)|^2 \leqslant var X \; var Y$$

Que se passe-t-il lorsque $r_{XY} = \pm 1$?

alors $\Delta' = 0 \Rightarrow g(\alpha) = Var Y (\alpha - \alpha_0)^2$

$g(\alpha_0) = 0$.

d'où $E[((X - E(X)) + \alpha_0(Y - E(Y)))^2] = 0$

$X - E[X] + \alpha_0(Y - E(Y)) = 0$

$r_{XY} = \pm 1 \Rightarrow$ X et Y sont liés par une relation affine.

la réciproque est vraie (évident)

conclusion.

$\boxed{\begin{array}{l} X \text{ et } Y \text{ ind } \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} r_{XY} = 0 \\ X \text{ et } Y \text{ liés par une relation affine} \Leftrightarrow r_{XY} = \pm 1 \\ -1 \leqslant r_{XY} \leqslant +1 \end{array}}$

r_{XY} est une mesure imparfaite du lien entre X et Y

. Fonction caractéristique

Rappel (1D) $\phi_X(u) = E[e^{iuX}]$ $u \in \mathbb{R}$

La fonction caractéristique d'un couple est définie par :

$$\phi_{X,Y}(u_1, u_2) = E[e^{i(u_1 X + u_2 Y)}] \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$$

on pose souvent $u = \binom{u_1}{u_2}$ d'où $\phi_{X,Y}(u) = E[e^{i\,{}^t u \binom{X}{Y}}]$ $u \in \mathbb{R}^2$

Fin cours 5

4. Espérances conditionnelles

Thm: $\underset{(X,Y)}{E}[\alpha(X,Y)] = E_X[E_Y[\alpha(X,Y)|X]]$

Preuve

$\iint \alpha(x,y) f(x,y)\, dx\, dy =$

$\iint \alpha(x,y)\, f(y|x) f(x,\cdot)\, dx\, dy =$

$\int [\int \alpha(x,y) f(y|x) dy]\, f(x,\cdot)\, dx$

$E_X[\; E[\alpha(x,y)|x]]$

Exemple d'application : le "secteur"

$X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ Calculer plutôt $E[X^2|t]$

Modèle 1 $\left| \begin{array}{l} A = 220\sqrt{2} \\ f_0 = 50 Hz \end{array} \right.$

. autre exemple plus simple $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ $X_i \to 1 \; p$, $\to 0 \; q$, $N \sim P(\lambda)$

ϕ uniforme sur $[0, 2\pi[$ $f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} 1\!\!1_{[0,2\pi[}(\varphi)$

$E[X(t)] = \int_{\mathbb{R}} A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) f(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\, d\varphi = 0$.

Modèle 2 $\left| \begin{array}{l} A = 220\sqrt{2} \\ \phi \text{ uniforme sur } [0, 2\pi[\\ f_0 \text{ uniforme sur } [50 - \Delta f, 50 + \Delta f] \end{array} \right.$

(ϕ et f_0 en général indépendants)

$$E[X(t)] = E_{\varphi_0}[\underbrace{E_\varphi[X(t) \mid \varphi_0 \text{ fixe}]}_{0}] = E[\varphi_0] = 0.$$

VI Changements de variable de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Problème : étant donné un couple (X,Y) de loi connue, comment peut-on déterminer la loi de $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \alpha(X,Y)$ où α est une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et U, V deux fonctions de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

1. Cas discret

Si (X,Y) est un couple de va discrètes à valeur dans $\{(x_i, y_j)\ i\in I,\ j\in J\}$ alors (U,V) est aussi un couple de va discrètes à valeurs dans $\{\alpha(x_i,y_j),\ i\in I, j\in J\} = \{(u_k, v_\ell),\ k\in K, \ell\in L\}$ avec :

$$P\left[\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k \\ v_\ell \end{pmatrix}\right] = \sum_{\{(i,j)/\alpha(x_i,y_j) = \binom{u_k}{v_\ell}\}} \overbrace{P[X = x_i,\ Y = y_j]}^{p_{ij}}$$

c'est un cas "simple".

2. Cas continu

Théorème : si (X,Y) est un couple de va continues à valeurs dans un ouvert $\Delta \subset \mathbb{R}$ et si $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective continuement différentiable ainsi que son inverse α^{-1}, alors $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un couple de va continues à valeurs dans $\alpha(\Delta)$ de densité :

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}\left(\alpha^{-1}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}\right) |\det(J)|$$

avec J matrice Jacobienne $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial U} \\ \frac{\partial X}{\partial V} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{pmatrix}$

Exemple : $\left| \begin{array}{l} X \sim N(0,1) \\ Y \sim N(0,1) \\ X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \end{array} \right.$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{f(X,Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2}$

Quelle est la loi de $\begin{pmatrix} R \\ \Phi \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} X = R\cos\Phi \\ Y = R\sin\Phi \end{cases}$

On sait que le chgt de va est bijectif de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $]0,+\infty[\times [0, 2\pi[$

$J = \begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi \\ -R\sin\Phi & R\cos\Phi \end{pmatrix} \Rightarrow \det J = R$

d'où : $\boxed{f(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} r \quad (r,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[}$

Rq : si α est bijective par morceaux, on ajoute la contribution de chaque bijection.

3. Cas continu non bijectif

VII Changements de variables de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$U = \alpha(X,Y)$ $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Methode 1 : on ajoute une variable fictive $V = \beta(X,Y)$, de façon à rendre le changement de va bijectif (si possible), on détermine la loi de $\binom{U}{V}$ $f(u,v)$, puis celle de U grace à $f(u,.) = \int f(u,v)\,dv$ en général $V = X$ ou $V = Y$.

Ex : $X \sim U(0,1)$ $f(x,.) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

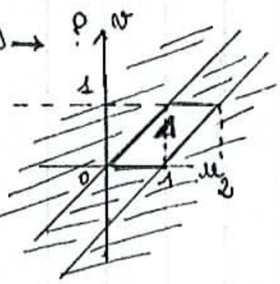
$Y \sim U(0,1)$ $f(y,.) = \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$

X et Y indep.

Quelle est la loi de $U = X+Y$?

on pose par exemple $V = X \Rightarrow \begin{cases} U = X+Y \\ V = X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = V \\ Y = U - V \end{cases}$

donc le chgt de variable est bijectif de $[0,1] \times [0,1] \to$?

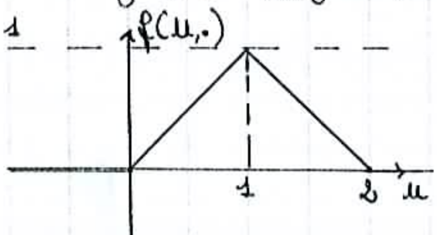


det de Δ : $\begin{cases} 0 \leq X \leq 1 \\ 0 \leq Y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq V \leq 1 \\ 0 \leq U - V \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} 0 \leq V \leq 1 \\ V \leq U \leq V+1 \end{cases}}$

$\det J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$\boxed{f(u,v) = \mathbb{1}_\Delta (u,v)}$

loi de U : $f(u,.) = \int_\mathbb{R} f(u,v)\,dv = \begin{cases} 0 \text{ si } u \leq 0 \text{ ou } u \geq 2 \\ \int_0^u 1\,dv \text{ si } u \in [0,1] \\ \quad \overset{\shortparallel}{u} \\ \int_{u-1}^1 dv = 2-u \text{ si } u \in [1,2] \end{cases}$



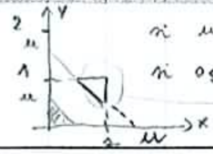
Rq : $\int_\mathbb{R} f(u,.)\,du = 1$

Methode 2 : on calcule directement la fonction de répartition de U

$F(u) = P[U<u] = P[\alpha(X,Y)<u] = P[(X,Y) \in D_u]$

$= \iint_{D_u} f(x,y)\,dx\,dy.$

ex précédent $F(u) = P[X+Y<u]$



si $u < 1$ $F(u) = \frac{1}{2}u^2$

si $0 \leq 1 \leq 2$ $F(u) = 1 - (1-(u-1))^2$

Méthode 3 pour $U = X+Y$, X et Y indépendants
utilisation des fonctions caractéristiques

Ex : $\begin{cases} X \sim N(m_1, \sigma_1^2) \\ Y \sim N(m_2, \sigma_2^2) \\ X \text{ et } Y \text{ indep.} \end{cases}$ loi de $U = X+Y$?

$$\phi_U(t) = E[e^{itU}] = E[e^{itX} e^{itY}] \underset{\substack{\uparrow \\ X \text{ et } Y \\ \text{indépendants}}}{=} E[e^{itX}]\, E[e^{itY}] = \phi_X(t)\, \phi_Y(t)$$

Dans les tables, on lit $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ $\phi_X(t) = \exp(i m_1 t - \frac{\sigma_1^2}{2} t^2)$

$Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ $\phi_Y(t) = \exp(i m_2 t - \frac{\sigma_2^2}{2} t^2)$

d'où $\phi_U(t) = \exp\left(i \underbrace{(m_1 + m_2)}_{m} t - \frac{1}{2} \underbrace{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}_{\sigma^2} t^2\right)$

$\Rightarrow \boxed{U \sim N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$