



Département Sciences du Numérique

**Automatique**

**Systeme commandé**

0. Cots et J. Gergaud

17 septembre 2018

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction à la théorie des systèmes, Définitions</b>	<b>1</b>
I	Introduction historique . . . . .	1
I.1	300 avant J.C. : Grecs . . . . .	1
I.2	Années 800 – 1200 : ingénieurs Arabes (Al-Jazari, ...) . . . . .	1
I.3	Années 1600 – 1900 : révolution industrielle . . . . .	2
I.4	1940 – 1960 : formalisme mathématique et début de l’informatique . . . . .	2
I.5	1960 – 1980 : période moderne, développement de l’industrie aéronautique et spatiale et de l’informatique . . . . .	3
I.6	1980 → . . . . .	3
II	Théorie du contrôle . . . . .	3
II.1	Exemples simples . . . . .	3
II.2	Exemples industriels . . . . .	5
III	Définitions, objectifs . . . . .	5
III.1	Système commandé . . . . .	5
III.2	Questions . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Stabilité des systèmes dynamiques</b>	<b>9</b>
I	Introduction . . . . .	9
II	Cas des équations différentielles linéaires homogènes et autonomes . . . . .	9
II.1	Introduction . . . . .	9
II.2	Approche élémentaire . . . . .	9
II.3	Exponentielle de matrice . . . . .	10
II.4	Plan de phase pour $n = 2$ . . . . .	12
III	Équations différentielles linéaires avec second membre . . . . .	13
III.1	Introduction . . . . .	13
III.2	Résolvante . . . . .	13
III.3	Solution . . . . .	14
IV	Équations différentielles ordinaires non linéaires . . . . .	15
IV.1	Qu’est-ce qu’une solution ? . . . . .	15
IV.2	Existence de solution . . . . .	16
V	Stabilité . . . . .	16
V.1	Définitions . . . . .	16
V.2	Cas d’une edo linéaire et autonome . . . . .	17
V.3	Stabilité par la linéarisation . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Commande des systèmes</b>	<b>21</b>
I	Introduction . . . . .	21
II	Contrôlabilité . . . . .	22
III	Planification de trajectoires . . . . .	24
IV	Observabilité . . . . .	25
V	Stabilisation par retour d’état . . . . .	26
V.1	Introduction . . . . .	26
V.2	Cas d’un système linéaire et autonome . . . . .	26
V.3	Cas non linéaire . . . . .	27
VI	Représentation temporelle et par fonction de transfert . . . . .	28
VI.1	Introduction . . . . .	28
VI.2	Transformation de Laplace . . . . .	28

# Chapitre 1

## Introduction à la théorie des systèmes, Définitions

### I Introduction historique

#### I.1 300 avant J.C. : Grecs

Première pendule à eau ou clepsydre (Ctésibios d'Alexandrie en -270) connu avec une régulation de niveau par flotteur. C'est le même principe qui est utilisé aujourd'hui dans les chasses d'eau !

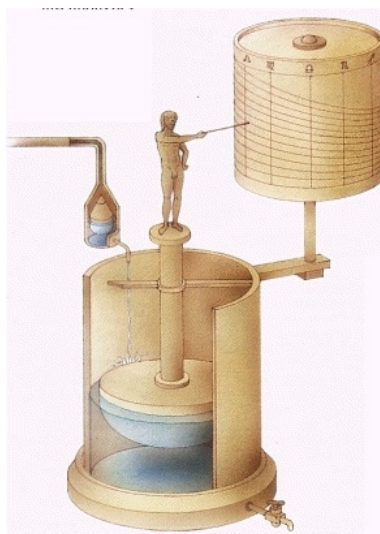


FIGURE 1.1 – *Clepsydre (Ctésibios d'Alexandrie en -270).*

#### I.2 Années 800 – 1200 : ingénieurs Arabes (Al-Jazari, ...)

”Il écrivit un important traité sur la mécanique et les pendules, le livre de la connaissance des procédés mécaniques (Kitab fi ma’rifat al-hiyal al-handasiyya) en 1206, qui lui a été commandé par le roi Nasser Eddine Mahmud ibn Mohamed ibn Qarra, un des sultans des Beni Irtaka à Diyarbekir, à l’époque du calife abbasside Nasser Dinullah Abu al-Abbas Ahmad, en 1181. Cet ouvrage a été achevé après vingt-cinq ans d’étude. C’est l’un des traités les plus importants de cette époque dans le monde musulman sur le sujet. Il existe des copies de ce livre à Topkapi à Istanbul, au Musée des Beaux-Arts à Boston, au Louvre à Paris et à la Bibliothèque d’Oxford.<sup>1</sup>.”

- Régulateur à flotteur pour des horloges à eau ;
- La pompe aspirante à double effet automatique ;
- ...

---

1. <http://fr.wikipedia.org/wiki/Al-Djazari>

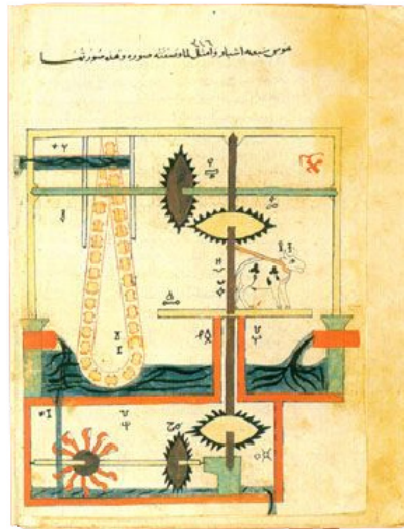


FIGURE 1.2 – *Manuscrit d'Al-Jazari, livre de la connaissance des procédés mécaniques (Kitab fi ma'rifat al-hiyal al-handasiyya) vers 1205.*

### I.3 Années 1600 – 1900 : révolution industrielle

- Régulation de la température ;
- Moulin à vent ;
- Soupape de sécurité de Papin ;
- Régulateur à boules de James Watt pour réguler la vitesse de rotation d'une machine à vapeur.
- 1800 – 1935 : début du formalisme mathématique
  - équations différentielles ordinaires ;
  - stabilité ;
  - contre réaction (feedback).

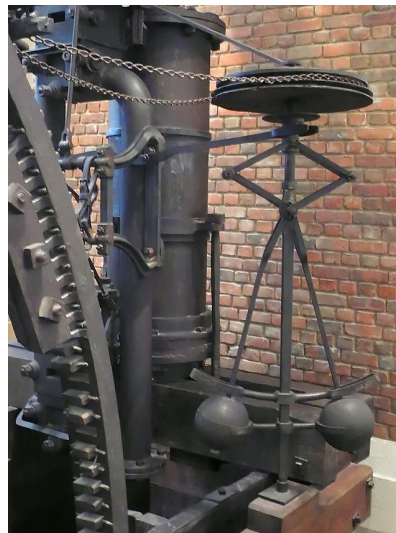


FIGURE 1.3 – *Boulton & Watt engine of 1788.*

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Steam\\_engine\\_in\\_action.gif](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Steam_engine_in_action.gif)

### I.4 1940 – 1960 : formalisme mathématique et début de l'informatique

- Servomécanismes dans le domaine fréquentiel.
- Analyse stochastique (Kolmogorov, Wiener, ...), théorie des processus stochastiques.
- Théorie de l'information de Shannon.

### I.5 1960 – 1980 : période moderne, développement de l'industrie aéronautique et spatiale et de l'informatique

- Théorie de la commande non linéaire.
- Théorie de la commande optimale ( Bellman, Kalman, Pontryagin, ...).
- Contrôlabilité, observabilité.

### I.6 1980 →

- Systèmes embarqués
- Commande robuste
- ...

## II Théorie du contrôle

### II.1 Exemples simples

#### Exemple II.1 (Pendule simple contrôlé, version 1)

On considère le pendule de la figure 1.4 contrôlé par un couple moteur  $u(t)$ . Les principes physiques de la mécanique classique donnent comme équation qui régit l'évolution du mouvement

$$ml^2\ddot{\alpha}(t) + mlg \sin(\alpha(t)) = u(t),$$

où  $\ddot{\alpha}(t)$  désigne la dérivée seconde de l'angle  $\alpha$  par rapport au temps  $t$ .

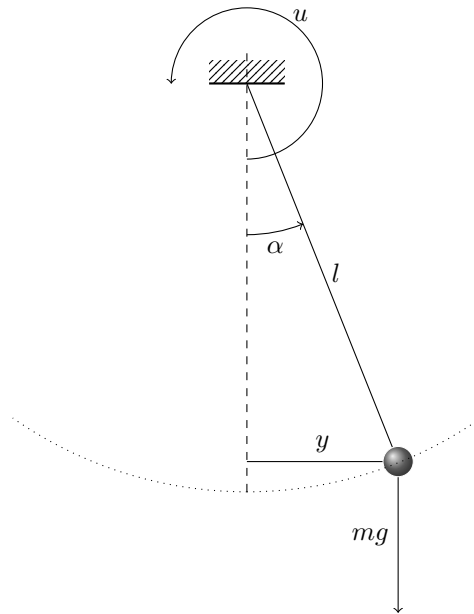


FIGURE 1.4 – Pendule simple contrôlé.

On prend ici comme variable d'état qui décrit le système  $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t))$ . Le système différentiel du premier ordre que l'on obtient s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{u(t)}{ml^2} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

Cette équation s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (z, v) &\longmapsto f(z, v) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(z_1) + \frac{v}{ml^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut en pratique avoir accès à différentes variables de sortie (mesurées) :

- $y(t) = \alpha(t) = x_1(t)$  ;
- $y(t) = x(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t))$  ;
- $y(t) = l \sin(\alpha(t)) =$  la distance entre la masse et l'axe des ordonnées.

On écrira ces variables de sortie sous la forme  $y(t) = g(x(t), u(t))$ .

### Exemple II.2 (Pendule simple contrôlé, version 2)

En pratique il y a des frottements. Une meilleure modélisation du système est donc

$$ml^2\ddot{\alpha}(t) + k\dot{\alpha}(t) + mlg \sin(\alpha(t)) = u(t).$$

Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{ml^2}x_2(t) - \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{u(t)}{ml^2} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

L'application  $f$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (z, v) &\longmapsto f(z, v) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\frac{k}{ml^2}z_2 - \frac{g}{l} \sin(z_1) + \frac{v}{ml^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Exemple II.3 (Pendule inversé contrôlé, version 1)

La question est de savoir comment faire tenir un balai sur le manche ! Ici le contrôle du pendule n'est plus le couple d'un moteur, mais la force de déplacement que l'on peut exercer horizontalement.

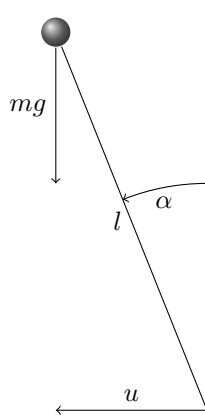


FIGURE 1.5 – Pendule inversé contrôlé, version 1.

Les équations qui régissent le système sont alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{u(t)}{l^2} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0. \end{cases}$$

L'application  $f$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (z, v) &\longmapsto f(z, v) = \begin{pmatrix} z_2 \\ \frac{g}{l} \sin(z_1) - \frac{v}{l^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Attention.** Dans toute la suite de ce cours, afin de ne pas surcharger les notations et en cohérence avec les notations habituelles, on notera les arguments de la fonction  $f$ ,  $x$  et  $u$ . Dans cet exemple on écrira donc l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  et la fonction  $f$

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, u) &\longmapsto f(x, u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{u}{l^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il ne faut donc pas confondre les fonctions  $x$  et  $u$  dans l'écriture  $f(x(t), u(t))$  et les variables  $x \in \mathbf{R}^2$  et  $u \in \mathbf{R}$  dans la définition de  $f$  ci-dessus. C'est le contexte qui fera la différence. Si l'on désire clairement désigner la fonction du temps  $x$  on écrira  $x(\cdot)$ .

#### Exemple II.4 (Robot Lego segway)

Nous décrivons ici le modèle du Robot Lego qui sera utilisé en TP.

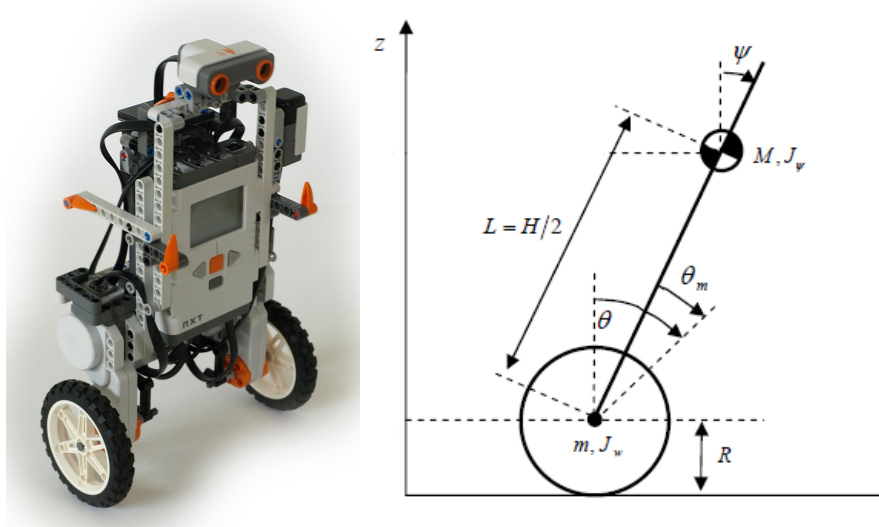


FIGURE 1.6 – Robot Lego segway.

## II.2 Exemples industriels

Voici d'autres exemples plus complexes :

- pilote automatique d'un avion ;
- contrôle des gouvernes d'un avion ;
- contrôle de freinage ABS ;
- contrôle de vol d'un drone ;
- pompe à insuline.
- ...

## III Définitions, objectifs

### III.1 Système commandé

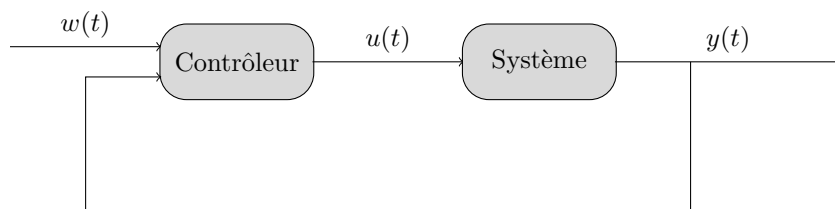


FIGURE 1.7 – Schéma fonctionnel simple d'un système en boucle fermée.

**Définition III.1 (État)** L'état du système est caractérisé par des variables dynamiques (des fonctions en terme mathématiques) appelées des variables d'états :  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbf{R}^n$ .

Nous ne considérerons dans ce cours que le cas où l'évolution en temps du système est régie par une équation différentielle ordinaire

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

**Définition III.2 (Contrôle)** On appelle contrôle, ou commande ou variable en entrée la fonction  $u(\cdot)$  qui permet d'agir sur le système.

**Définition III.3 (Variables de sortie)** Les variables de sortie sont les variables accessibles (en pratique grâce à des mesures) à la sortie du système.

**Définition III.4 (Consigne)** On appelle consigne, et on note  $w(t)$  un objectif à attendre. C'est par exemple atteindre un état d'équilibre du système.

**Définition III.5** On appelle équation d'état, l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$  et équation de sortie l'équation  $y(t) = g(t, x(t), u(t))$ .

#### Remarque III.6

(i)

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ (t, x, u) &\longmapsto f(t, x, u). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} g : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m &\longrightarrow \mathbf{R}^p \\ (t, x, u) &\longmapsto g(t, x, u). \end{aligned}$$

(iii) Très souvent les fonctions  $f$  et  $g$  ne dépendent pas de  $t$ . On dit alors que le système est autonome. On supprimera alors l'argument  $t$  dans les fonctions  $f$  et  $g$ .

(iv) Très souvent aussi on aura  $t_0 = 0$ .

Nous serons toujours dans la suite de ce cours dans le cas autonome et avec  $t_0 = 0$ .

#### Remarque III.7

Nous étudions ici les systèmes de commande en boucle fermée, dit aussi de commande à contre-réaction<sup>2</sup>. Il y a d'autres systèmes de commande dit en boucle ouverte donnés par le schéma de la figure 1.8. On peut par exemple rechercher la loi de commande (la poussée d'un moteur) d'un satellite pour réaliser un transfert d'orbite.

"les limitations de ce type de loi de commande sont cependant assez évidentes : la moindre erreur sur les données (la condition initiale par exemple) ne pourra être prise en compte. Par exemple une commande en boucle ouverte sur une voiture donnerait ceci : pour suivre une ligne droite, positionnez vos roues dans l'axe, tenez bien votre volant, et fermez les yeux ...<sup>[2]</sup> "

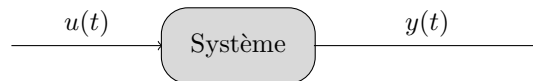


FIGURE 1.8 – Schéma fonctionnel simple d'un système en boucle ouverte.

#### Remarque III.8

La réalité est bien sur plus complexe, il y a des perturbations, on accède aux données de sortie  $y(t)$  par des mesures. Un schéma fonctionnel plus réaliste est le schéma de la figure 1.9 où  $d(t)$  est une perturbation extérieure du système.

### III.2 Questions

Si on a  $f(x_e, u_e) = 0$ , alors en prenant  $x(0) = x_e$  et  $u(t) = u_e$  pour tout  $t$ , l'état est  $x(t) = x_e$  pour tout  $t$ . D'où la

**Définition III.9 (Point de fonctionnement)** On appelle point de fonctionnement d'un système contrôlé un point  $(x_e, u_e)$  tel que  $f(x_e, u_e) = 0$ .

**Définition III.10 (Point d'équilibre)** On appelle point d'équilibre un point de fonctionnement où le contrôle est nul :  $f(x_e, 0) = 0$ .

---

2. feedback en anglais



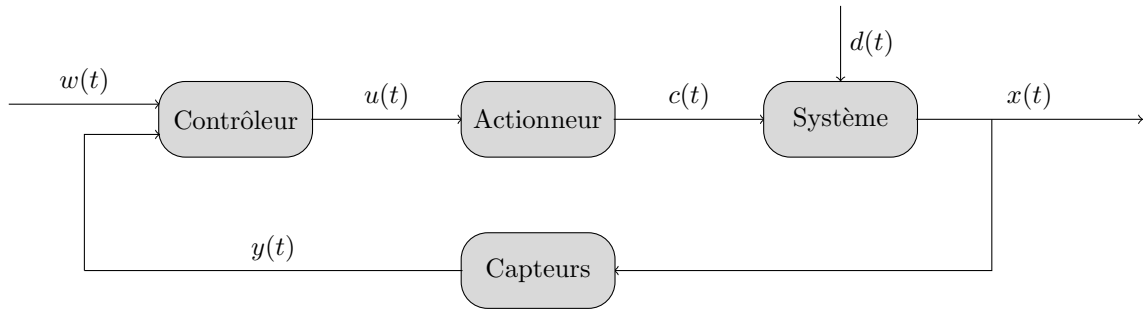


FIGURE 1.9 – Schéma fonctionnel complet d'un système en boucle fermée.

**Exemple III.11**

Pour le pendule simple on a pour  $u_e = 0$  deux points de fonctionnement :  $x_0 = (0, 0)$  et  $x_e = (\pi, 0)$ .

Une fois le modèle bien défini, plusieurs questions se posent :

- Sur l'analyse et le comportement dynamique du système
  - Commandabilité ou contrôlabilité du système. Existe-t-il un contrôle  $u(\cdot)$  qui amène le système d'un état initial donné  $x(0)$  à un état final  $x_f$  en un temps  $t = t_f$  fixé ?
  - Observabilité. Connaissant la variable de sortie  $y(t)$  et le contrôle  $u(t)$  pour tout  $t \in [0, \tau[$ , peut-on déterminer l'état  $x(t)$  pour tout  $t \in [0, \tau_u[$ , ou de manière équivalente  $x(0)$ .
- Sur la synthèse des lois de contrôle
  - Planification de trajectoires. Si le système est contrôlable, comment trouver un contrôle qui amène l'état de  $x(0)$  à  $x_f$  en un temps  $t_f$  fixé ?
  - Stabilisation. Comment construire un contrôle qui stabilise asymptotiquement le système autour d'un point d'équilibre  $x_e$ , c'est-à-dire tel que, pour toute condition initiale  $x(0)$ , on ait

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e?$$

- Synthèse d'observateurs. En cas de réponse positive à la question de l'observabilité, comment déterminer l'état  $x(\cdot)$  à partir de la connaissance de  $y(\cdot)$  et de  $u(\cdot)$  ?
- **Contrôle optimal.** Trouver le meilleur contrôle qui amène l'état de  $x(0)$  à  $x_f$  en un temps  $t_f$  fixé ou libre.



# Chapitre 2

## Stabilité des systèmes dynamiques

### I Introduction

Ce chapitre est très fortement inspiré des ouvrages [1, 2].

On s'intéresse dans ce chapitre à la stabilité autour d'un point d'équilibre d'un système dynamique autonome (équation différentielle ordinaire autonome)

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

**Définition I.1 (Point d'équilibre)** On appelle point d'équilibre tout point  $x_e$  de  $\mathbf{R}^n$  qui vérifie  $f(x_e) = 0$ .

Si  $x_0 = x_e$  alors on a trivialement comme solution  $x(t) = x_e$  pour tout  $t$ .

La question est ici de savoir s'il s'agit d'un point d'équilibre stable ou instable, c'est-à-dire de savoir si lorsque l'on s'écarte de ce point d'équilibre, on y revient ou on s'en écarte. Par exemple pour le pendule simple non contrôlé  $(0, 0)$  est un point d'équilibre stable, alors que  $(\pi, 0)$  est un point d'équilibre instable.

### II Cas des équations différentielles linéaires homogènes et autonomes

#### II.1 Introduction

On s'intéresse dans cette sous section à la solution du problème à valeur initiale

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Les points d'équilibre sont les éléments de  $\ker A$ . Si  $A$  est inversible, il n'y a qu'un seul point d'équilibre  $x_e = 0$ .

#### II.2 Approche élémentaire

##### Exemple II.1

On considère l'équation différentielle ordinaire linéaire scalaire

$$(IVP1) \begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda x(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où  $\lambda$  est un réel et  $x$  est une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ . On sait que la solution de cette équation, qui est unique, est donnée par

$$x(t) = e^{\lambda(t-t_0)} x_0.$$

On en déduit que cette solution est définie sur  $I = \mathbf{R}$  et que l'on a comme comportement asymptotique

- Si  $\lambda < 0$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$  ;
- Si  $\lambda = 0$  alors  $x(t) = x_0$  ;
- Si  $\lambda > 0$ 
  - Si  $x_0 < 0$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$  ;
  - Si  $x_0 = 0$  alors  $x(t) = 0$  ;
  - Si  $x_0 > 0$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$ .

**Exemple II.2**

Considérons maintenant un système de deux équations différentielles

$$(IVP2) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t) \\ x_1(t_0) = x_{0,1} \\ x_2(t_0) = x_{0,2}. \end{cases}$$

La solution est alors donnée par

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda_1(t-t_0)} x_{0,1} \\ x_2(t) = e^{\lambda_2(t-t_0)} x_{0,2}. \end{cases}$$

et le comportement asymptotique est

- si  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ ;
- si  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 > 0$  et  $x_{0,2} \neq 0$  alors  $|x_1(t)| \rightarrow 0$  et  $|x_2(t)| \rightarrow +\infty$ , et donc  $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$ , quand  $t \rightarrow +\infty$ ;
- ...

**Exemple II.3**

Si maintenant nous considérons le cas du système différentiel

$$(IVP3) \begin{cases} \dot{x}(t) = \Lambda x(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

avec

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

La solution est alors

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{(t-t_0)\lambda_1} x_{0,1} \\ \vdots \\ e^{(t-t_0)\lambda_n} x_{0,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(t-t_0)\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{(t-t_0)\lambda_n} \end{pmatrix} x_0 = e^{(t-t_0)\Lambda} x_0.$$

**Remarque II.4**

La notation  $e^{(t-t_0)\Lambda}$  sera clair au paragraphe suivant.

Le comportement asymptotique est alors

- si tous les  $\lambda_i$  sont strictement négatifs alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ ;
- si tous les  $\lambda_i$  sont négatifs ou nuls alors la solution est bornée quand  $t \rightarrow +\infty$ ;
- si au moins un  $\lambda_i$  est strictement positif et que  $x_{0,i} \neq 0$  alors  $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$ , quand  $t \rightarrow +\infty$ .

**Exemple II.5**

Soient maintenant  $A$  une matrice diagonalisable,  $A = P\Lambda P^{-1}$  et le système différentiel à valeur initiale

$$(IVP4) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

Posons  $z(t) = P^{-1}x(t)$ , alors  $z(t)$  est solution du système différentielle à valeur initiale

$$(IVP5) \begin{cases} \dot{z}(t) = P^{-1}\dot{x}(t) = P^{-1}P\Lambda P^{-1}x(t) = \Lambda z(t) \\ z(t_0) = P^{-1}x_0. \end{cases}$$

On a donc  $z(t) = e^{(t-t_0)\Lambda} P^{-1}x_0$  et  $x(t) = Pz(t) = (Pe^{(t-t_0)\Lambda} P^{-1})x_0$ . Par suite le comportement asymptotique est caractérisé par les valeurs propres de la matrice  $A$ .

**II.3 Exponentielle de matrice**

L'espace vectoriel normé  $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|)$ , est un espace de Banach. On considère ici une norme qui vérifie  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ . La série  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$  est alors normalement convergente (cf. Annexe ??) car

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}.$$

On peut donc donner la

**Définition II.6 (Exponentielle de matrice)** On appelle exponentiel de matrice l'application

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A &\longmapsto \exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}. \end{aligned}$$

**Théorème II.7**

L'exponentielle de matrice a les propriétés suivantes :

- (i)  $e^0 = I$  ;
- (ii) si  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  alors

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}; \quad (2.1)$$

- (iii) si  $P$  est inversible on a

$$\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}; \quad (2.2)$$

- (iv) si  $A$  et  $B$  sont deux matrices qui commutent alors

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B); \quad (2.3)$$

- (v) pour tout  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $e^{(\alpha+\beta)A} = e^{\alpha A} e^{\beta A}$  ;
- (vi) pour toute matrice  $A$ ,  $e^A$  est inversible et

$$(\exp(A))^{-1} = \exp(-A); \quad (2.4)$$

- (vii) pour toute matrice  $A$ , l'application  $t \rightarrow e^{tA}$  est  $C^\infty$  et

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A. \quad (2.5)$$

**Exemple II.8**

On considère le cas  $n = 2$  et on suppose que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbf{C}$  mais pas dans  $\mathbf{R}$ . Les valeurs propres complexes de  $A$  sont donc  $\lambda = \alpha + i\beta$  et  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ . On peut toujours supposer que  $\beta > 0$ . Si  $v = v_1 + iv_2$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$  alors  $\bar{v} = v_1 - iv_2$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\bar{\lambda}$ . On en déduit alors immédiatement que  $v_1, v_2$  est une base de  $\mathbf{C}^2$  et donc aussi une base de  $\mathbf{R}^2$ . Soit  $P$  la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbf{R}^2$  à cette base  $(v_1, v_2)$ . Comme

$$Av = \lambda v = A(v_1 + iv_2) = Av_1 + iAv_2 = (\alpha + i\beta)(v_1 + iv_2).$$

Par suite

$$A = PBP^{-1} \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Dans cette base le système  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  s'écrit donc  $\dot{z}(t) = Bz(t)$ . Mais

$$tB = t\alpha I + t\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = t\alpha I + t\beta C$$

Les matrices  $t\alpha I$  et  $t\beta C$  commutent, par suite

$$\exp(tB) = e^{\alpha t} \exp\left(t\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Mais

$$\exp\left(t\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\beta^2 t^2}{2} + \frac{\beta^4 t^4}{4!} - \dots & \beta t - \frac{\beta^3 t^3}{3!} + \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

En conclusion

$$z(t) = \exp(\alpha t) \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} z_0.$$

Par suite

— Si  $\alpha < 0$  alors  $z(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$  ;

- Si  $\alpha = 0$   $z(t)$  est borné ;
- Si  $\alpha > 0$  et  $z_0 \neq 0$  alors  $\|z(t)\| \rightarrow +\infty$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

**Exemple II.9**

On considère le cas  $n = 2$  et on suppose que  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathbf{C}$ . Alors l'unique valeur propre  $\lambda$  est réel, le sous espace propre est de dimension 1 et  $A$  est semblable à la matrice (décomposition de Jordan)

$$J \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

et dans cette base le système différentielle s'écrit  $\dot{z}(t) = Jz(t)$ . Mais

$$J = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

les matrices commutent et la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente. Par conséquent on a immédiatement

$$z(t) = e^{\lambda t} \left( I + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) z_0.$$

Une nouvelle fois donc, si  $\lambda < 0$  alors  $z(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$  ;

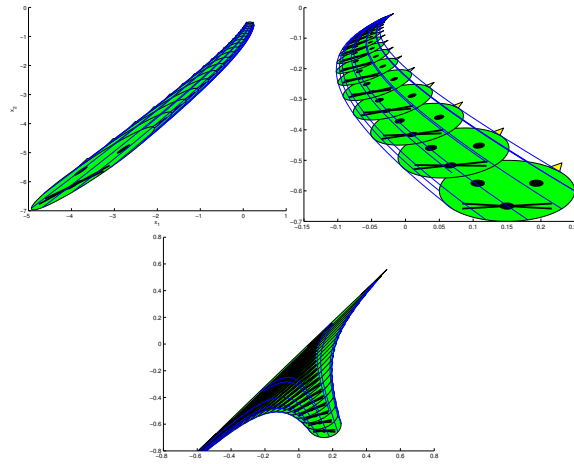
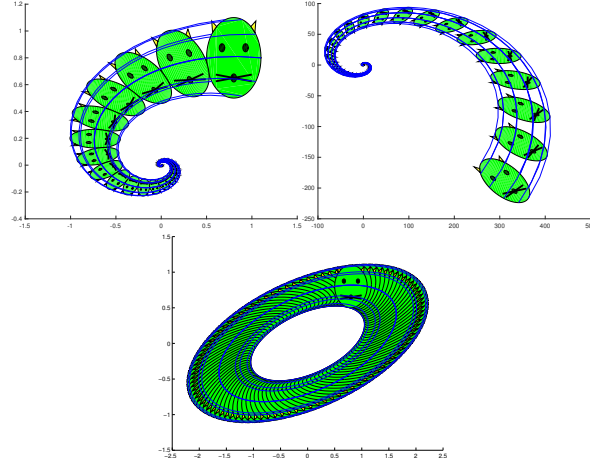
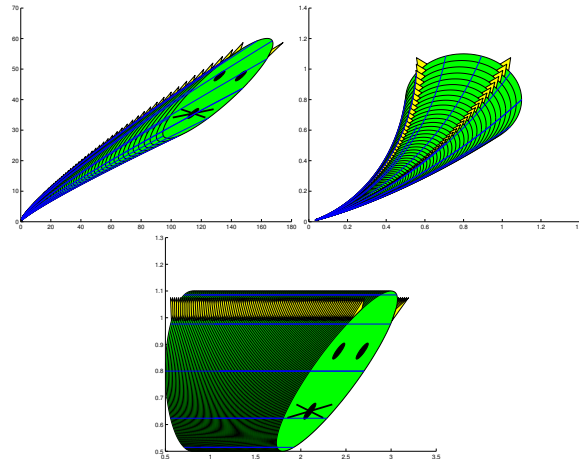
**II.4 Plan de phase pour  $n = 2$** 

FIGURE 2.1 –  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 3$ ;  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -3$ ;  $\lambda = \pm\sqrt{5}$


 FIGURE 2.2 –  $\lambda = 1 \pm 2i; \lambda = -1 \pm 2i; \lambda = \pm i\sqrt{3}$  *retour stabilité*

 FIGURE 2.3 –  $\lambda = 2; \lambda = -2; \lambda = 0$ 

### III Équations différentielles linéaires avec second membre

#### III.1 Introduction

On s'intéresse dans cette section aux équations différentielles linéaires à condition initiale

$$(IVP)_6 \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

Les fonctions  $A : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  et  $b : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  seront toujours supposées de classe  $C^k, k \geq 0$ .

#### III.2 Résolvante

On considère ici l'équation linéaire homogène

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \quad (2.6)$$

##### **Théorème III.1**

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire et homogène (2.6)  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .

*Démonstration*

On admettra l'existence et l'unicité de la solution sur  $I = \mathbf{R}$ . Le fait que  $\mathcal{E}$  soit un espace vectoriel est immédiat.

Considérons maintenant l'application

$$\begin{aligned} L_{t_0} : \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathcal{E} \\ x_0 &\longmapsto x(\cdot, t_0, x_0) \end{aligned}$$

où  $x(\cdot, t_0, x_0)$  est l'unique solution de l'équation différentielle (2.6) vérifiant  $x(t_0) = x_0$ . Il est évident que cette application est linéaire. L'existence et l'unicité de la solution implique que cette application est une bijection, d'où le résultat en ce qui concerne la dimension.  $\square$

**Définition III.2** On appelle résolvante de l'équation différentielle linéaire et homogène  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  l'application

$$\begin{aligned} R(t, t_0) : \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ x_0 &\longmapsto x(t, t_0, x_0). \end{aligned}$$

### Théorème III.3

- (i) On a  $R(t, t_0)x_0 = x(t, t_0, x_0)$ .
- (ii) Si le système est autonome on a  $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$ .
- (iii) Pour tout  $t_0$  fixé,  $R(\cdot, t_0)$  est la solution du problème de Cauchy

$$(IVP)_7 \begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = I_n. \end{cases}$$

- (iv) Pour tout  $t_0, t_1$  et  $t_2$  dans  $I$  on a

$$R(t_2, t_0) = R(t_2, t_1) \times R(t_1, t_0)$$

- (v) Pour tout  $t_0, t_1$  dans  $I$  on a  $R(t_0, t_1) = (R(t_1, t_0))^{-1}$ .

- (vi) Si  $A(\cdot)$  est  $C^k$ , alors  $R(\cdot, t_0)$  est  $C^{k+1}$ .

*Démonstration*

- (i) Le théorème d'existence et d'unicité de solution et la nature de l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ , implique que  $R(t, t_0)$  est une application linéaire et bijective, L'application  $R(t, t_0)$  est donc un isomorphisme de  $\mathbf{R}^n$  sur  $\mathbf{R}^n$  et on a  $x(t, t_0, x_0) = R(t, t_0)x_0$ .
- (ii) Évident.
- (iii) Dans le problème  $(IVP)_7$ ,  $X(t)$  est une matrice  $(n, n)$  et  $I_n$  est la matrice identité d'ordre  $n$ . La propriété provient immédiatement du fait que

$$\frac{\partial}{\partial t}(R(t, t_0)X_0) = A(t)(R(t, t_0)X_0),$$

et du fait que  $R(t_0, t_0) = I_n$  par définition.

- (iv) Il s'agit tout simplement de la composée de deux applications linéaires.
- (v) Il suffit de remarquer que  $R(t_0, t_1) \times R(t_1, t_0) = R(t_0, t_0) = I_n$ .
- (vi) Cela provient des propriétés des solutions d'une équation différentielle.

$\square$

## III.3 Solution

### Théorème III.4

La solution du problème de Cauchy linéaire

$$(IVP)_8 \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

s'écrit

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds. \quad (2.7)$$

### Remarque III.5

Dans le cas où l'équation différentielle est autonome on obtient

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds. \quad (2.8)$$



*Démonstration*

Nous allons appliquer la méthode de la variation de la constante. Posons  $z(t) = R(t, t_0)v(t)$ , nous avons alors

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \left( \frac{d}{dt} R(t, t_0) \right) v(t) + R(t, t_0) \dot{v}(t) \\ &= A(t) R(t, t_0) v(t) + R(t, t_0) \dot{v}(t) \\ &= A(t) z(t) + R(t, t_0) \dot{v}(t).\end{aligned}$$

Il suffit alors de poser  $R(t, t_0) \dot{v}(t) = b(t)$ , soit  $\dot{v}(t) = R(t_0, t) b(t)$ , pour que  $z$  vérifie l'équation linéaire. Si on pose maintenant  $v(t) = \int_{t_0}^t R(t_0, s) b(s) ds$ , on obtient pour  $z$  une solution qui vérifie  $z(t_0) = 0$ . En conclusion, si on prend

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + z(t),$$

nous aurons bien  $x(t_0) = x_0$  et

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t) R(t, t_0) x_0 + \dot{z}(t) \\ &= A(t) R(t, t_0) x_0 + \frac{d}{dt} (R(t, t_0) v(t)) \\ &= A(t) R(t, t_0) x_0 + A(t) R(t, t_0) v(t) + R(t, t_0) \dot{v}(t) \\ &= A(t) (R(t, t_0) x_0 + R(t, t_0) v(t)) + b(t) \\ &= A(t) x(t) + b(t)\end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'écrire

$$\begin{aligned}x(t) &= R(t, t_0)x_0 + R(t, t_0) \int_{t_0}^t R(t_0, s) b(s) ds \\ &= R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, t_0) R(t_0, s) b(s) ds \\ &= R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s) b(s) ds,\end{aligned}$$

pour conclure.  $\square$

## IV Équations différentielles ordinaires non linéaires

On considère l'équation autonome suivante

$$(IVP)_9 \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned}f : \Omega \in \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ x &\longmapsto f(x),\end{aligned}$$

$\Omega$  ouvert.

### IV.1 Qu'est-ce qu'une solution ?

La première question qui se pose est de savoir ce que l'on entend par une solution de  $(IVP)_9$ .

**Définition IV.1 (Définition classique)** On suppose  $f$  continue. On appelle solution classique de  $(IVP)_9$  tout couple  $(I, x)$ ,  $I$  intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ , contenant  $t_0$  et  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  dérivable en tout point et vérifiant

- (i)  $x(t) \in \Omega, \forall t \in I$
- (ii)  $\dot{x}(t) = f(x(t)), \forall t \in I$
- (iii)  $x(t_0) = x_0$ .

Une solution est aussi appelée courbe intégrale de l'équation différentielle.

#### Remarque IV.2

Si  $f$  est continue (respectivement  $C^k$ ) et  $(I, x)$  est une solution alors  $x$  est  $C^1$  (respectivement  $C^{k+1}$ ).

## IV.2 Existence de solution

**Définition IV.3 (Fonction localement lipschitzienne)** *L'application  $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\Omega$  ouvert, est localement lipschitzienne par rapport à la variable  $x$  si et seulement si pour tout  $x_0 \in \Omega$  il existe un voisinage  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  et une constante  $k \geq 0$  tels que*

$$\forall x_1 \in V, \forall x_2 \in V, \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|.$$

### Théorème IV.4

Si  $f$  est différentiable par rapport à  $x$  et si l'application

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} : \Omega &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) \\ x &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x) \end{aligned}$$

est continue alors  $f$  est localement lipschitzienne.

### Théorème IV.5 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\Omega$  ouvert de  $\mathbf{R}^n$ ,  $f$  continue et localement lipschitzienne par rapport à  $x$  alors pour tout  $x_0 \in \Omega$ , il existe une unique solution locale au problème de Cauchy

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

### Remarque IV.6

On entend par unicité de solution le fait que si on a deux solutions  $(I_1, x_1)$  et  $(I_2, x_2)$ , alors ces solutions coïncident sur  $I_1 \cap I_2$ . On peut donc définir la solution maximale. Cette solution est définie sur un intervalle  $]t_-(x_0), t_+(x_0)[$ .

*Démonstration*

Voir le cours d'équations différentielles ordinaires[3].  $\square$

**Définition IV.7 (Flot)** On appelle flot de l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{O} &\longrightarrow \Omega \\ (t, x_0) &\longmapsto \phi(t, x_0) \end{aligned}$$

où  $\phi(t, x_0)$  désigne la solution au temps  $t$  du problème de Cauchy (IVP) et  $\mathcal{O}$  est l'ouvert

$$\mathcal{O} = \{(t, x_0), t \in ]t_-(x_0), t_+(x_0)[\}.$$

## V Stabilité

### V.1 Définitions

**Définition V.1** Nous dirons qu'un équilibre  $x_e$  est stable si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \quad \text{et} \quad t > 0 \Rightarrow \|\phi(t, x_0) - x_e\| < \varepsilon$$

.

Ainsi, toute solution proche de  $x_e$  en reste proche.

### Remarque V.2

Toute solution dont la condition initiale est dans une boule  $B(x_e, \delta)$  reste dans la boule  $B(x_e, \varepsilon)$ , et donc dans un compact de  $\Omega$ , pour  $t > 0$  (on suppose  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que  $B_f(x_e, \varepsilon) \in \Omega$ ).

**Définition V.3** Nous dirons qu'un équilibre  $x_e$  est asymptotiquement stable si il est stable et si il existe un voisinage  $V$  de  $x_e$  tel que, pour tout  $x_0 \in V$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x_0) = x_e.$$

Dans ce cas toute solution proche de l'équilibre en reste proche et en plus converge vers lui. Notons que le fait que toute solution issue d'un voisinage  $V$  converge vers  $x_e$  n'implique pas la stabilité de cet équilibre : il existe des systèmes possédant un équilibre non stable  $x_e$  mais dont toutes les trajectoires convergent vers  $x_e$ .

**Remarque V.4**

En automatique, on appelle souvent points d'équilibre stable les points d'équilibre asymptotiquement stable !

**Exemple V.5 (Pendule simple non contrôlé)**

On considère le pendule de la figure 2.5 non contrôlé.

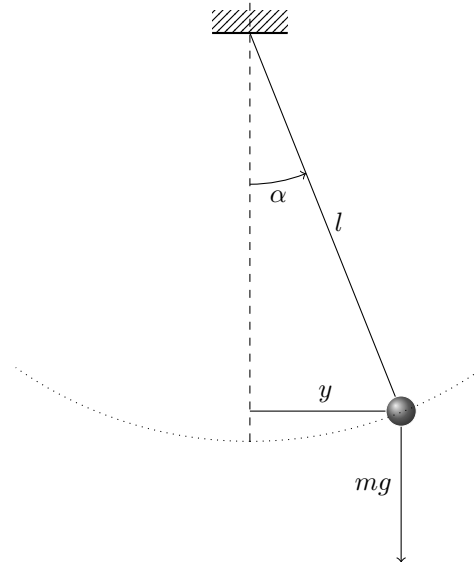


FIGURE 2.4 – Pendule simple.

Le système différentiel du premier ordre que l'on obtient s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

La figure ?? montre les trajectoires dans le plan de phase. On a un point d'équilibre stable, mais non asymptotiquement stable et un point d'équilibre instable. La figure ?? montre les trajectoires du pendule simple non contrôlé avec frottement. Le point d'équilibre stable devient alors un point d'équilibre asymptotiquement stable.

**V.2 Cas d'une edo linéaire et autonome****Théorème V.6**

- (i) L'origine est un équilibre asymptotiquement stable de  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle strictement négative.
- (ii) Si  $A$  possède au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'origine n'est pas un point d'équilibre stable de  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ .
- (iii) L'origine est un point d'équilibre stable de  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle négative ou nulle et si pour toute valeur propre de partie réelle nulle, les multiplicités algébriques et géométrique coïncident.

Dans le cas  $n = 2$  la visualisation de ces résultats se trouve au paragraphe **plan de phase dans le cas  $n = 2$** .

**Remarque V.7**

Considérons le cas d'une équation différentielle affine et autonome  $\dot{x}(t) = Ax(t) + b$  et  $x_e$  un point d'équilibre. Posons  $y(t) = x(t) - x_e$ , alors le système s'écrit en  $y$ ,  $\dot{y}(t) = Ay(t)$ . Ainsi, la stabilité et la stabilité asymptotique d'un équilibre de l'équation affine  $\dot{x}(t) = Ax(t) + b$  sont équivalents respectivement à celles de l'origine pour l'équation linéaire  $\dot{y}(t) = Ay(t)$ .

**V.3 Stabilité par la linéarisation**

Pour les démonstration des théorèmes voir [1, 2].

**Théorème V.8**

Soit  $x_e$  un point d'équilibre de  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ . Si toutes les valeurs propres de  $f'(x_e)$  sont à partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre  $x_e$  est asymptotiquement stable.

**Remarque V.9**

La condition est une condition suffisante mais non nécessaire. Si on considère par exemple l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = -x^3(t)$  de point d'équilibre  $x_e = 0$  on a  $f'(x_e) = 0$ . Ce point d'équilibre est cependant un point d'équilibre asymptotiquement stable car la solution pour une condition initiale  $x_0 \neq 0$  s'écrit

$$x(t) = \frac{\text{sign}(x_0)}{\sqrt{2t + 1/x_0^2}}.$$

**Théorème V.10**

Si  $x_e$  est un point d'équilibre stable, alors toutes les valeurs propres de  $f'(x_e)$  sont à partie réelle négative ou nulle.

**Remarque V.11**

La réciproque du théorème précédent est fausse. Considérons en effet les deux équations différentielles  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  et  $\dot{x}(t) = g(x(t))$  avec

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}.$$

Ces deux équations différentielles ont comme point d'équilibre  $x_e = (0, 0)$  et

$$f'(x_e) = g'(x_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $f'(x_e)$  sont donc  $\pm i$  qui ont une partie réelle nulle. Mais  $x_e$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour la première équation et instable pour la deuxième. En effet considérons la fonction  $\rho$  définie par  $\rho(x) = x_1^2 + x_2^2$ . Si  $x(\cdot)$  est une solution de  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , alors

$$\frac{d\rho(x(\cdot))}{dt}(t) = -2\rho^2(x(t)).$$

Ainsi  $\rho(x(\cdot)) = \|x(\cdot)\|^2$  est une fonction strictement décroissante. Comme elle est minorée par 0, on peut construire une suite  $(\rho_n)_n = \rho(x(t_n))$  avec  $(t_n)$  strictement croissante, qui tends vers  $+\infty$ , telle que  $(\rho_n)_n$  converge vers  $\rho^* \geq 0$ . Si  $\rho^* \neq 0$  alors pour tout  $n$ ,  $0 < \rho(x^*) < \rho(x_n) = \rho(x(t_n)) = \rho(x_0) + \int_0^{t_n} -2\rho(x(s))^2 ds < \rho(x_0) + \int_0^{t_n} -2\rho(x^*)^2 ds = \rho(x_0) - 2\rho(x^*)^2 t_n$ . Ce qui est impossible. On en déduit que le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Si maintenant on considère une solution de l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = g(x(t))$ , on obtient par un même raisonnement  $\|x(\cdot)\|^2$  strictement croissant, d'où le résultat.

**Remarque V.12**

En pratique on utilisera souvent la contraposée du théorème précédent : Si  $f'(x_e)$  possède une valeur propre à partie réelle strictement positive, alors le point d'équilibre  $x_e$  n'est pas stable.

**Définition V.13 (point d'équilibre hyperbolique)** Un point d'équilibre est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de  $f'(x_e)$  sont à partie réelle non nulle.

**Corollaire V.14**

Un point d'équilibre hyperbolique est soit asymptotiquement stable, soit non stable.

**Exemple V.15**

Considérons le cas du pendule simple amorti non contrôlé.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{ml^2}x_2(t) - \frac{g}{l}\sin(x_1(t)) \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0. \end{cases}$$

Les points d'équilibre sont points qui vérifie  $f(x) = 0$ , soit

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ -\frac{k}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1) &= 0. \end{aligned}$$

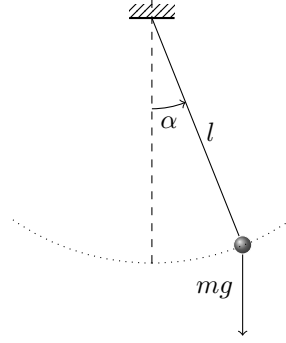


FIGURE 2.5 – Pendule simple.

Ce qui est équivalent à  $x_e = (0, 0)$  ou  $x_e = (\pi, 0)$ . La matrice jacobienne de  $f$  en  $x$  est

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(x_1) & -\frac{k}{ml^2} \end{pmatrix}$$

On vérifie alors immédiatement que les valeurs propres de

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{pmatrix}$$

sont à partie réelle strictement négatives. Par suite ce point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Par contre il y a toujours une valeur propre de

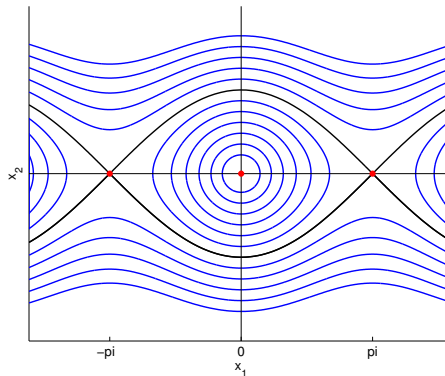
$$J_f(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{pmatrix}$$

qui est strictement positive. Donc le point d'équilibre haut est instable.

#### Remarque V.16

Le cas du pendule simple non amorti sans contrôle revient à poser  $k = 0$ . La conclusion est la même pour le point d'équilibre  $(\pi, 0)$ , mais l'étude des valeurs propres de la matrice jacobienne  $J_f(0, 0)$  ne permet pas de conclure car les valeurs propres sont imaginaires pures et que  $f$  est non linéaire. Pour prouver la stabilité, il faut utiliser les fonctions de Liapounov.

La figure ci-dessous montre les trajectoires dans le plan de phase. On a un point d'équilibre stable, mais non asymptotiquement stable et deux points d'équilibre instables. En présence de frottements, le point d'équilibre stable devient alors un point d'équilibre asymptotiquement stable.



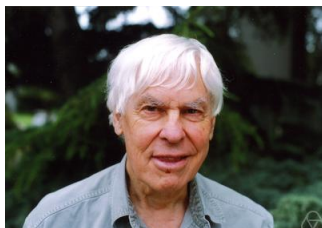


FIGURE 2.6 – *Stephen Smale, 1930 →, lauréat de la médaille Fields en 1966.*

FIGURE 2.7 – *Rudolf Kalman 1930 →.*

# Chapitre 3

## Commande des systèmes

### I Introduction

On s'intéresse ici à un système commandé  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  où  $f$  est une fonction de  $\Omega \times U$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ ,  $\Omega$  ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et  $U \subset \mathbf{R}^m$ . Si on se donne une fonction  $u : J \rightarrow U$ ,  $J$  intervalle ouvert contenant  $t_0$  et que l'on note  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = f_u(t, x(t))$ , il n'y a aucune raison que  $f_u$  soit continue. Il nous faut donc redéfinir ici ce qu'on entend par solution de l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ . Considérons donc le problème

$$(IVP)_1 \begin{cases} \dot{x}(t) = f_u(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Ceci fait appel à l'intégrale de Lebesgue (voir le cours d'intégration) et aux fonctions absolument continues.

**Définition I.1 (Fonction absolument continue)** Une fonction  $f$  de  $I = [a, b]$ ,  $a < b$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$  est absolument continue sur  $I$  si et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour toutes familles d'intervalles ouverts disjoints  $2$  à  $2$   $([a_i, b_i])_{i=1, \dots, N}$ ,  $a_i < b_i$ , on a

$$\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) \leq \eta \implies \sum_{i=1}^N \|f(b_i) - f(a_i)\| \leq \varepsilon.$$

#### Théorème I.2

$f : I = [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  est absolument continue si et seulement si  $f'$  existe presque partout, appartient à  $L^1([a, b])$  et que l'on ait

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

L'intégrale est pris au sens de Lebesgue.

**Définition I.3** Une fonction  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  est localement absolument continue si elle est absolument continue sur tout intervalle compact de  $I$ .

**Définition I.4 (Solution faible)** On appelle solution faible de  $(IVP)_1$  tout couple, s'il existe,  $(I, x)$ ,  $I \subset J$  intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$  contenant  $t_0$  et  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  localement absolument continue vérifiant

- (i)  $(t, x(t)) \in \Omega \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ ,  $J \times \Omega$  ouvert,  $\forall t \in I$
- (ii)  $\dot{x}(t) = f_u(t, x(t))$ , pour presque tout  $t \in I$
- (iii)  $x(t_0) = x_0$ .

#### Remarque I.5

Si  $f_u$  est continue et  $(I, x)$  est une solution faible alors l'application  $t \rightarrow f_u(t, x(t))$  est continue. Par suite la dérivée de  $x(t)$  qui existe presque partout est égale à une fonction continue. Donc  $\dot{x}(t)$  existe partout sur  $I$  et  $(I, x)$  est une solution classique.

#### Théorème I.6

$(I, x)$  est une solution faible de  $(IVP)$  si et seulement si  $(t, x(t)) \in \Omega$  pour tout  $t$  dans  $I$ , la fonction  $t \mapsto f_u(t, x(t))$  est localement intégrable et

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_u(s, x(s)) ds.$$

*Démonstration*

— Si  $(I, x)$  est une solution faible,  $x(\cdot)$  est absolument continue, alors (corollaire 2.41.5 de [5])

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{x}(s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f_u(s, x(s)) ds.$$

— Réciproque.

Si l'application  $t \mapsto f_u(t, x(t))$  est dans  $L^1$  et que l'on a

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_u(s, x(s)) ds,$$

alors (théorème 2.40.2 de [5])  $\dot{x}(t) = f_u(t, x(t))$  presque partout. Donc  $(I, x)$  est une solution faible.

□

Afin que les solutions du système différentiel soient bien définies, il nous faut donc, concernant le contrôle nous placer dans le bon espace fonctionnel qui est ici

$$\mathcal{U} = L^\infty([t_0, \tau], U),$$

l'espace des fonctions de  $[t_0, \tau]$  à valeurs dans  $U \subset \mathbf{R}^m$  essentiellement bornées, c'est-à-dire des fonctions vérifiant

$$\|u(\cdot)\|_\infty = \text{Supess}_{[t_0, \tau]} \|u(t)\| < +\infty.$$

### Remarque I.7

Pour simplifier, on peut prendre les fonctions  $u(\cdot)$  continues par morceaux.

On a alors le

### Théorème I.8

Soit  $f : \Omega \times U \rightarrow \mathbf{R}^n, C^1, \Omega$  ouvert de  $\mathbf{R}^n, U \subset \mathbf{R}^m, x_0 \in \Omega$ . Alors pour tout  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ , il existe une solution maximale unique au système différentiel à condition initiale

$$(IVP)_2 \begin{cases} \dot{x}(t) = f_u(t, x(t)) = f(x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

définie sur  $I = [t_0, \tau_u[$  ou  $[t_0, \tau]$ .

*Démonstration*

Voir le lemme 2.6.2 page 64 de [4] □

### Remarque I.9

On prendra toujours ici l'instant initial  $t_0 = 0$  et  $I = [0, \tau_u[$  et on notera  $x(\cdot, x_0, u(\cdot))$  la solution de  $(IVP)_2$ .

## II Contrôlabilité

On considère dans cette section un système contrôlé linéaire et autonome avec  $U = \mathbf{R}^m$  et on ne s'intéresse qu'à la relation entre l'entrée et l'état ( $y(t) = x(t)$ ).

$$(\Sigma)_1 \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

**Définition II.1** Étant donné  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ , on dit que l'état  $x_f \in \mathbf{R}^n$  est atteignable en temps  $\tau$  à partir de  $x_0$  s'il existe une commande  $u : [0, \tau] \rightarrow \mathbf{R}^m$  telle que  $x(\tau, x_0, u(\cdot)) = x_f$ . On note  $\mathcal{A}(\tau, x_0)$  l'ensemble des états atteignables à partir de  $x_0$  en temps  $\tau$  :

$$\mathcal{A}(\tau, x_0) = \{x(\tau, x_0, u(\cdot)), u(\cdot) \in \mathcal{U}\}.$$

### Théorème II.2

Soit  $u(\cdot)$  une commande et  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ , l'unique solution de  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0$  est

$$x(t, x_0, u(\cdot)) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$



*Démonstration*

Il suffit de poser  $b(t) = Bu(t)$  dans 2.(2.8).  $\square$

En particulier dans le cas où  $x_0 = 0$  on a  $x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s)ds$  et  $x(t)$  dépend linéairement de la commande  $u(\cdot)$ . Par suite  $\mathcal{A}(\tau, 0)$  est un espace vectoriel et  $\mathcal{A}(\tau, x_0)$  est l'espace affine  $e^{\tau A}x_0 + \mathcal{A}(\tau, 0)$ . Donc l'espace  $\mathcal{A}(\tau, x_0)$  est complètement caractérisé par l'ensemble  $\mathcal{A}_\tau = \mathcal{A}(\tau, 0)$ .

**Définition II.3** Le système  $(\Sigma)_1$  est contrôlable en temps  $\tau$  si  $\mathcal{A}(\tau, 0) = \mathbf{R}^n$ , ou de façon équivalente si tout état est atteignable en temps  $\tau$  à partir de n'importe quel état.

**Théorème II.4**

L'espace  $\mathcal{A}_\tau$  est égal à l'image de la matrice  $(n, nm)$  de contrôlabilité

$$C = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}.$$

**Remarque II.5**

- (i)  $\text{Im}C = \mathcal{R}(A, B) \subset \mathbf{R}^n$  avec  $\mathcal{R}(A, B)$  l'espace vectoriel engendré par les vecteurs  $A^i Bz, i \in \{0, \dots, n-1\}, z \in \mathbf{R}^n$ .
- (ii)  $\mathcal{A}_\tau$  est indépendant de  $\tau$ .
- (iii)  $\dim \mathcal{A}_\tau = \text{rang}(C)$ .

**Corollaire II.6 (Critère de contrôlabilité de Kalman)**

Le système  $(\Sigma)_1$  est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité est de rang  $n$ .

*Démonstration*

- (i) Montrons tout d'abord que  $\mathcal{A}_\tau \subset \mathcal{R}(A, B)$ . Soit donc  $v \in \mathcal{A}_\tau$ , alors il existe un contrôle  $u(\cdot)$  tel que  $v = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} Bu(s)ds$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  annule  $A$ , par suite  $A^n$  et toute puissance de  $A$  est une combinaison linéaire de  $I, A, \dots, A^{n-1}$ . On en déduit que pour tout  $i$   $A^i$  laisse invariant  $\mathcal{R}(A, B)$ . Il en est donc de même pour  $e^{(\tau-s)A}$  de part sa définition. Ceci a pour conséquence que pour tout  $s, e^{(\tau-s)A} Bu(s) \in \mathcal{R}(A, B)$  qui est un espace vectoriel, d'où  $v = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} Bu(s)ds \in \mathcal{R}(A, B)$ .
- (ii) Pour montrer l'inclusion  $\mathcal{R}(A, B) \subset \mathcal{A}_\tau$ , nous allons voir que  $\mathcal{A}_\tau^\perp \subset \mathcal{R}(A, B)^\perp$ . Soit donc  $w \in \mathbf{R}^n, w \perp \mathcal{A}_\tau$ , alors  $w \perp \tilde{w}$ , état atteignable par la commande  $u(t) = B^T(e^{(\tau-t)A})^T w$  qui est  $\tilde{w} = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} BB^T(e^{(\tau-t)A})^T w ds$ . D'où

$$\begin{aligned} 0 = \langle w, \tilde{w} \rangle &= \int_0^\tau w^T e^{(\tau-s)A} BB^T(e^{(\tau-t)A})^T w ds \\ &= \int_0^\tau ((e^{(\tau-s)A} B)^T w)^T ((e^{(\tau-s)A} B)^T w) ds \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout  $s, (e^{(\tau-s)A} B)^T w = 0$ . Dérivons maintenant par rapport à  $s$  une fois, deux fois, ..., alors  $(e^{(\tau-s)A} A^i B)^T w = 0$  et donc,  $s = \tau, (A^i B)^T w = 0$  pour tout  $i$ . On en déduit que pour tout  $z \in \mathbf{R}^m, \langle z, (A^i B)^T w \rangle = \langle (A^i B)z, w \rangle = 0$  et donc que  $w \in \mathcal{R}(A, B)^\perp$ .

$\square$

**Exemple II.7**

On considère le système contrôlé

$$(\Sigma)_2 \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t). \end{cases}$$

Alors

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$C$  est donc de rang 2 et le système est contrôlable.

**Exemple II.8**

On considère le système contrôlé

$$(\Sigma)_3 \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) + u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2\alpha x_2(t) + \beta_1 u_1(t) + \beta_2 u(t). \end{cases}$$

Alors

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & \alpha \\ \beta_1 & \beta_2 & 2\alpha\beta_1 & 2\alpha\beta_2 \end{pmatrix}.$$

$C$  est donc de rang 1 si et seulement si  $\beta_1 = \beta_2$  et  $\alpha = 0$ . Le système est contrôlable dans le cas contraire.

### III Planification de trajectoires

#### Théorème III.1

Soit  $G$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  définie par

$$G = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B B^T (e^{(\tau-s)A})^T ds,$$

alors  $\text{Im}(G) = \mathcal{A}_\tau$ . De plus si  $(\Sigma)_1$  est contrôlable alors  $G$  est bijective et le contrôle  $\bar{u}_v(\cdot) = [0, \tau] \rightarrow \mathbf{R}^m$  défini par  $\bar{u}_v(s) = (e^{(\tau-s)A} B)^T G^{-1} v$  envoie l'état  $x(0) = 0$  au temps  $t_0 = 0$  sur l'état  $x(\tau) = v$  au temps  $\tau$ .

*Démonstration*

(i) Pour  $w \in \mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned} Gw &= \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B B^T (e^{(\tau-s)A})^T w ds \\ &= \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B u_w(s) ds \end{aligned}$$

où on a posé  $u_w(s) = B^T (e^{(\tau-s)A})^T w$ . Par suite  $\text{Im}(G)$  est l'ensemble des point atteignable à l'instant  $\tau$  à partir des contrôle  $u_w(\cdot)$ , donc  $\text{Im}(G) \subset \mathcal{A}_\tau$ . La démonstration du théorème précédent montre que l'orthogonal de cet ensemble est contenu dans  $\mathcal{R}(A, B)$ . On en déduit l'égalité  $\text{Im}(G) = \mathcal{A}_\tau$ .

(ii) Si le système est contrôlable alors  $\text{Im}(G) = \mathbf{R}^n$  et  $G$  est bijective. Calculons

$$\begin{aligned} x(\tau, 0, \bar{u}_v(\cdot)) &= \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B (e^{(\tau-s)A} B)^T G^{-1} v ds \\ &= \left( \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B (e^{(\tau-s)A} B)^T ds \right) G^{-1} v \\ &= G G^{-1} v \\ &= v \end{aligned}$$

□

Le théorème qui suit montre de plus que le contrôle  $\bar{u}(\cdot)$  est celui qui minimise le coût "énergie".

#### Théorème III.2

Si  $u(\cdot)$  est un contrôle permettant d'amener l'état  $x(0) = 0$  à  $x(\tau) = v$  alors

$$E(u(\cdot)) = \int_0^\tau \|u(s)\|^2 ds \geq \int_0^\tau \|\bar{u}_v(s)\|^2 ds = E(\bar{u}_v(\cdot)).$$

*Démonstration*

On a

$$\begin{aligned} E(\bar{u}_v + (u - \bar{u}_v)) &= E(\bar{u}_v) + E(u - \bar{u}_v) + 2 \int_0^\tau \langle \bar{u}_v(s), u(s) - \bar{u}_v(s) \rangle ds \\ &= E(\bar{u}_v) + E(u - \bar{u}_v) + 2 \int_0^\tau \langle (e^{(\tau-s)A} B)^T G^{-1} v, u(s) - \bar{u}_v(s) \rangle ds \\ &= E(\bar{u}_v) + E(u - \bar{u}_v) + 2 \int_0^\tau \langle G^{-1} v, (e^{(\tau-s)A} B)(u(s) - \bar{u}_v(s)) \rangle ds \end{aligned}$$

Mais  $x(\tau) = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B u(s) ds = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B \bar{u}_v(s) ds = v$  et donc

$$\int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B (u(s) - \bar{u}_v(s)) ds = 0.$$

On en déduit immédiatement le résultat. □

## IV Observabilité

On s'intéresse maintenant sur l'intervalle  $[0, \tau]$ ,  $\tau > 0$ , au système contrôlé linéaire et autonome

$$(\Sigma)_4 \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases}$$

La question que l'on se pose ici est de savoir si connaissant  $y(t)$  et  $u(t)$  sur  $[0, \tau]$ , on peut retrouver l'état initial  $x_0$ .

### Remarque IV.1

(i) La connaissance de  $x(0) = x_0$  et de  $u(t)$  pour tout  $t$  est équivalente à celle de  $x(t)$ ,  $\forall t \in [0, \tau]$  car

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)u(s)ds.$$

(ii) On peut ici supposer que  $D = 0$ . En effet, connaître  $y(t)$  est équivalent à connaître  $z(t) = y(t) - Du(t)$ .

(iii) On peut aussi supposer que  $B = 0$ . Si on pose

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)u(s)ds = e^{tA}x_0,$$

alors  $\tilde{x}$  vérifie l'équation différentielle  $\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t)$ . Il suffit alors de prendre comme variable de sortie  $z(t) = y(t) - C \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)u(s)ds$  pour avoir  $z(t) = C\tilde{x}(t)$ . Ainsi l'observabilité se ramène à l'observabilité du système

$$(\Sigma)_5 \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) \\ z(t) = C\tilde{x}(t). \end{cases}$$

**Définition IV.2** On appelle espace d'inobservabilité  $\mathcal{I}_\tau$  du système  $(\Sigma)_7$ , l'ensemble des conditions initiales  $x(0) \in \mathbf{R}^n$  pour lesquelles  $y(t)$  est identiquement nulle sur  $[0, \tau]$ .

$$\mathcal{I}_\tau = \{x_0 \in \mathbf{R}^n, \text{ la solution de } (\Sigma)_7 \text{ avec } x(0) = x_0 \text{ et } y(t) = 0 \text{ pour tout } t\}$$

**Définition IV.3** Le système  $(\Sigma)_7$  est dit observable si l'espace d'inobservabilité est réduit à  $\{0\}$ .

### Théorème IV.4

Si le système  $(\Sigma)_1$  est observable, la connaissance de  $y(\cdot)$  et de  $u(\cdot)$  sur  $[0, \tau]$  déterminent de façon univoque  $x(0)$ .

*Démonstration*

Supposons le contraire. Soient donc 2 états initiaux  $x_0$  et  $\tilde{x}_0$  tels que  $y(t) = Ce^{tA}x_0 = Ce^{tA}\tilde{x}_0, \forall t \in [0, \tau]$ . On a alors  $Ce^{tA}(x_0 - \tilde{x}_0) = 0$ , pour tout  $t$  et donc  $x_0 - \tilde{x}_0 \in \mathcal{I} = \{0\}$ .  $\square$

### Théorème IV.5 (Critère d'observabilité de Kalman)

L'espace d'observabilité du système  $(\Sigma)_1$  est le noyau de la matrice  $(np, n)$

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Le système  $(\Sigma)_1$  est donc observable si et seulement si  $\ker O = \{0\}$ .

*Démonstration*

(i) Pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $Ce^{tA} \in \text{Vect}\{C, CA, \dots, CA^{n-1}\}$ . Par suite, si  $v \in \ker O \iff CA^j v = 0, j = 0, \dots, n-1$  alors  $Ce^{tA}v = 0$  et donc  $v \in \mathcal{I}_\tau$ .

(ii) Réciproquement, supposons que pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $Ce^{tA}v = 0$ , alors en dérivant  $j$  fois on obtient  $Ce^{tA}A^j v = 0$  et donc, en prenant  $t = 0$   $v \in \ker O$ .

$\square$

### Remarque IV.6

Le système  $(\Sigma)_1$  est observable si et seulement si  $\ker O = \{0\}$ . Ceci est équivalent à  $\text{Im}O^T = \mathbf{R}^n$ , où encore à  $\text{Im}(C^T A^T C^T \dots (A^T)^{n-1} C^T) = \mathbf{R}^n$ . Par suite le système  $(\Sigma)_7$  est observable si et seulement si le système dual

$$(\Sigma)_6 \begin{cases} \dot{x}(t) = A^T x(t) + C^T u(t) \end{cases}$$

est contrôlable.

## V Stabilisation par retour d'état

### V.1 Introduction

Rappelons les différences entre la boucle ouverte et la boucle fermée.

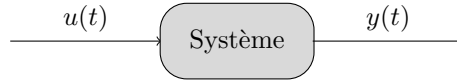


FIGURE 3.1 – Schéma fonctionnel simple d'un système en boucle ouverte.

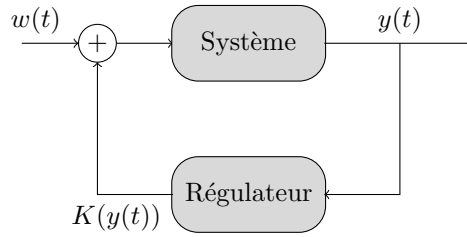


FIGURE 3.2 – Schéma fonctionnel simple d'un système en boucle fermée par retour de sortie.

En pratique, on veut bien sur réguler le système en boucle fermée. Si  $y(t) = x(t)$  alors  $u(t) = w(t) + K(x(t))$ . On parle alors de contrôle par retour d'état. On souhaite bien sûr avoir un contrôle qui stabilise asymptotiquement l'état, c'est-à-dire un contrôle qui ramène le système à un point de fonctionnement.

**Définition V.1 (Point de fonctionnement)** On appelle point de fonctionnement d'un système contrôlé un point tel que  $f(x_e, u_e) = 0$ .

Si  $(x_e, u_e)$  est un point de fonctionnement alors bien évidemment  $x(t) = x_e$  est une solution du problème de Cauchy

$$(IVP)_3 \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_e, \end{cases}$$

où le contrôle est  $u(t) = u_e$  pour tout  $t$ .

### V.2 Cas d'un système linéaire et autonome

On considère donc ici le cas de l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  et où le point de fonctionnement est le point d'équilibre du système non contrôlé, c'est-à-dire que  $(x_e, u_e) = (0, 0)$  ( $A$  est supposé inversible).

**Définition V.2** Le système contrôlé  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  est dit asymptotiquement stable par retour d'état s'il existe un contrôle  $u(t) = K(x(t))$  tel que l'origine soit un équilibre asymptotiquement stable de l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = Ax(t) + BK(x(t))$ , appelée équation du système bouclé.

On va ici chercher un contrôle de la forme  $u(t) = Kx(t)$ ,  $K$  une matrice  $(m, n)$ . On dit alors que l'on a une loi de contrôle proportionnelle. Dans ce cas si le système contrôlé est asymptotiquement stable, on aura donc  $x(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  pour toutes conditions initiales.

Le problème se ramène alors à trouver une matrice  $K$  tel que toutes les valeurs propres de  $A + BK$  soient à partie réelle strictement négative.

### Théorème V.3 (Théorème de placement de pôles)

Si les matrices  $A$  et  $B$  satisfont au critère de Kalman, c'est-à-dire si le système  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  est contrôlable, alors pour tout  $\rho \in \mathbf{R}$ , il existe une matrice  $K$  telle que les valeurs propres de  $A + BK$  soient à partie réelle strictement inférieure à  $\rho$ .

*Démonstration*

Voir l'annexe B.4 de [2].  $\square$

**Exemple V.4**

On considère le système contrôlé

$$(\Sigma)_7 \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t). \end{cases}$$

- (i) Les points de fonctionnement sont les points  $(x_e, u_e) = (x_{e1}, 0, 0)$   
(ii)  $u(t) = Kx(t)$  par suite  $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$  et

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}.$$

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - (A + BK)) = \lambda^2 - \lambda k_2 - k_1.$$

Pour avoir comme pôle  $-1$ , il faut que  $P(\lambda) = (\lambda + 1)^2$  et donc que  $k_1 = -1$  et  $k_2 = -2$ .

- (iii) Si  $u(t) = kx_1(t) = \begin{pmatrix} k & 0 \end{pmatrix} x(t) = Kx(t)$  alors

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite  $\det(\lambda I - (A + BK)) = \lambda^2 - k$ . On a donc 3 cas

- (a) Si  $k > 0$  alors  $\lambda = \pm\sqrt{k}$  et donc une valeur propre est strictement négative. Le système n'est donc pas stable.  
(b) Si  $k = 0$  alors l'unique valeur propre est nulle, mais  $\dim \ker(A + BK) = 1$ . Par suite le système n'est pas stable.  
(c)  $k < 0$ , les valeurs propres sont  $\pm i\sqrt{-k}$ . Le système est donc stable mais non asymptotiquement stable.

**V.3 Cas non linéaire**

On s'intéresse dans cette sous section au cas d'un système contrôlé non linéaire  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ . On désire stabiliser le système autour d'un point de fonctionnement par retour d'état proportionnel  $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$ . Le système bouclé est donc

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_e + K(x(t) - x_e)) = g(x(t)),$$

dont  $x_e$  est un point d'équilibre. Comme  $g(x) = f(x, u_e + K(x - x_e))$ ,

$$g'(x) \cdot \delta x = \frac{\partial f}{\partial x}(x, u_e + K(x - x_e)) \delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_e + K(x - x_e)) K \delta x.$$

Par suite

$$\begin{aligned} g'(x_e) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e) K \\ &= A + BK. \end{aligned}$$

Le théorème précédent dit qu'il suffit que les matrices  $A$  et  $B$  vérifient le critère de Kalman pour avoir l'existence d'un contrôle par retour d'état proportionnel permettant de stabiliser le système autour du point de fonctionnement.

**Exemple V.5**

<sup>1</sup> On considère un mélangeur dans lequel arrive un même produit, par deux entrées différentes, avec des concentrations respectivement  $c_1$  et  $c_2$  (constantes), et des débits  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ . Le volume dans le mélangeur est noté  $V(t)$  et la concentration  $c(t)$ . Le débit en sortie est  $d(t) = \gamma\sqrt{V(t)}$ , où  $\gamma$  est une constante. Les contrôles sont  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ . Un bilan volume-matière permet d'établir que l'on a le système

$$(S) \begin{cases} \dot{V}(t) = u_1(t) + u_2(t) - \gamma\sqrt{V(t)} \\ \dot{c}(t) = \frac{1}{V(t)}((c_1 - c(t))u_1(t) + (c_2 - c(t))u_2(t)) \end{cases}$$

- (i) Le système s'écrit  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  avec

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, u) &\longmapsto f(x, u) = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 - \gamma\sqrt{x_1} \\ \frac{1}{x_1}((c_1 - x_2)u_1 + (c_2 - x_2)u_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(ii)  $(x_e, u_e)$  est un point de fonctionnement si et seulement si

$$\begin{cases} u_1 + u_2 - \gamma\sqrt{x_1} = 0 \\ \frac{1}{x_1}((c_1 - x_2)u_1 + (c_2 - x_2)u_2) = 0 \end{cases}$$

Soit

$$\iff \begin{cases} u_{1e} + u_{2e} = d_e = \gamma\sqrt{V_e} \\ c_1 u_{1e} + c_2 u_{2e} = c_e d_e = c_e \gamma\sqrt{V_e} \end{cases}$$

(iii) On considère le contrôle  $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$ ;  $K$  est ici une matrice  $(2,2)$  et on se pose la question de savoir quelles conditions il faut sur les coefficient de  $K$  pour que le système contrôlé soit asymptotiquement stable. Calculons pour cela

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2\sqrt{x_{e1}}} & 0 \\ -\frac{1}{x_{e1}^2}((c_1 - x_{e2})u_{e1} + (c_2 - x_{e2})u_{e2}) & -\frac{u_{e1} + u_{e2}}{x_{e1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

et

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{c_1 - x_{e2}}{x_{e1}} & \frac{c_2 - x_{e2}}{x_{e1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

Il faut donc trouver les coefficient de  $K$  tels que les valeurs propres de  $A + BK$  soient à partie réelle strictement négative. Or

$$A + BK = \begin{pmatrix} k_{11} + k_{21} + \alpha & k_{12} + k_{22} \\ \beta_1 k_{11} + \beta_2 k_{21} & \beta_1 k_{12} + \beta_2 k_{22} + 2\alpha \end{pmatrix},$$

par suite, les conditions (voir le TD1) sont

$$\begin{cases} \det(A + BK) > 0 \\ \text{trace}(A + BK) < 0 \end{cases}.$$

#### Remarque V.6

Dans ce cas le système suivant appelé système linéarisé autour du point de fonctionnement

$$\dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t)$$

est contrôlable.

#### Remarque V.7

En pratique les contrôles sont contraints. Par exemple si le contrôle est l'intensité d'un courant il doit avoir une valeur positive ou nulle et doit être borné par une valeur maximale, par suite  $U \neq \mathbf{R}^m$ . La contrôlabilité, la stabilité, etc. sont alors plus difficiles à obtenir.

## VI Représentation temporelle et par fonction de transfert

### VI.1 Introduction

Lorsque l'on définit le système par les équations

$$(\Sigma)_8 \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases}$$

on dit que l'on a une représentation d'état du système. Les physiciens aiment dans ce cas avoir la représentation dite fréquentielle qui permet une meilleure appréhension des phénomènes physiques. Cette représentation fréquentielle est obtenue en utilisant la transformée de Laplace. L'un des intérêts de celle-ci est de permettre d'étudier facilement la relation entre une entrée (un contrôle) et la sortie. Nous allons voir ici très succinctement le lien entre ces 2 approches. Nous ne développerons pas non plus les mathématiques permettant de définir rigoureusement les choses.

### VI.2 Transformation de Laplace

**Définition VI.1** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $f(t) = 0$  pour tout  $t < 0$ , on appelle transformée de Laplace de  $f$  la fonction de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}$  définie par

$$F(p) = \mathcal{L}(f(\cdot))(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

**Remarque VI.2**

$F$  n'est pas a priori définie pour tout  $p \in \mathbb{C}$ .

**Proposition VI.3**

(i) Linéarité

$$\mathcal{L}(f(\cdot) + \alpha g(\cdot))(p) = F(p) + \alpha G(p).$$

(ii)  $\mathcal{L}(f(\cdot - \tau))(p) = e^{\tau p} F(p)$ .

(iii) Transformée de Laplace de la dérivée

$$\mathcal{L}(f'(\cdot))(p) = pF(p) - f(0^+).$$

(iv) Transformée de Laplace de l'intégrale

$$\mathcal{L}\left(\int_0^\cdot f(\tau) d\tau\right)(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

(v)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} F(p).$$

(vi) Transformée de Laplace du produit de convolution

$$\mathcal{L}(f(\cdot) * g(\cdot))(p) = \mathcal{L}\left(\int_0^\cdot f(\tau) g(\cdot - \tau) d\tau\right)(p) = F(p)G(p).$$

Si on prend la transformée de Laplace du système  $(\Sigma)_8$  avec comme condition initiale  $x(0) = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} pX(p) &= AX(p) + BU(p) \\ \Rightarrow (pI - A)X(p) &= BU(p) \\ \Rightarrow X(p) &= (pI - A)^{-1}BU(p). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} Y(p) &= (C(pI - A)^{-1}B + D)U(p) \\ &= \left( \frac{C \text{co}^T(pI - A)B}{\det(pI - A)} + D \right) U(p) \\ &= H(p)U(p), \end{aligned}$$

où  $\text{co}^T(M)$  désigne la transposée de la matrice des co-facteurs de  $M$ .

**Définition VI.4 (Fonction de transfert)** La fonction  $H$  s'appelle fonction de transfert et on représente le système par le schéma de la figure 3.3.

**Remarque VI.5**

**Attention**, la fonction de transfert suppose toujours que l'on a  $x(0) = 0$  comme condition initiale.

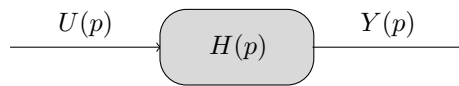


FIGURE 3.3 – Système représenté par sa fonction de transfert.

**Définition VI.6** La fonction de transfert  $H$  est une fonction rationnelle :  $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ . On appelle zéros de la fonction de transfert les zéros du numérateur  $N$  et pôles de la fonction de transfert les zéros du dénominateur  $D$ .

**Remarque VI.7**

Les pôles de la fonction de transfert sont les valeurs propres de la matrice  $A$ .

**Remarque VI.8**

(i) L'opérateur dérivée est représenté par le schéma de la figure 3.4.

(ii) L'opérateur d'intégration est représenté par le schéma de la figure 3.5.

On retrouvera ceci dans le langage graphique de SIMULINK.

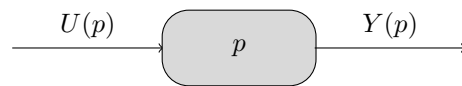


FIGURE 3.4 – Dérivée,  $Y(p)$  est la transformée de Laplace de la dérivée de  $u$ .

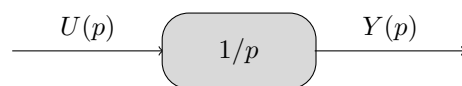


FIGURE 3.5 – Intégrateur,  $Y(p)$  est la transformée de Laplace de l'intégrale de  $u$ .



# Bibliographie

- [1] Morris W. Hirsh and Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1974.
- [2] Frédéric Jean. *Stabilité et Commande des Systèmes Dynamiques. Cours et exercices corrigés*. Coll. Les Cours, Les Presses de l'ENSTA, 200 pages, nov. 2011.
- [3] Gergaud Joseph. *Cours photocopié d'équations différentielles ordinaires*. 2016.
- [4] Eduardo D. Sontag. *Mathematical Control Theory : Deterministic Finite Dimensional Systems*. Number 6 in Textbooks in Applied Mathematics. Springer-Verlag, second edition, 1998.
- [5] C. Wagschal. *Dérivation, Intégration*. Hermann, 1999.