ANALYSE DE FOURIER

Martial COULON

ENSEEIHT

Objectifs du cours

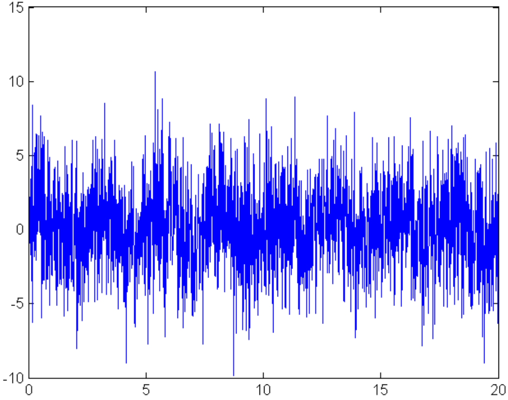
- connaitre et savoir manipuler les outils mathématiques d'analyse de Fourier utiles dans une formation d'ingénieur (résolution Equa-diff et EDP) ;
- savoir passer de la **représentation temporelle** d'un signal à sa **représentation fréquentielle**, et réciproquement ;
- introduire certaines notions (convolution, filtrage, distribution de Dirac,...) utiles dans d'autres cours (traitement du signal et des images, télécommunications)

Pré-requis pour le cours

- cours d'Intégration (intégrale de Lebesgue, théorème Fubini, ...)
- ...

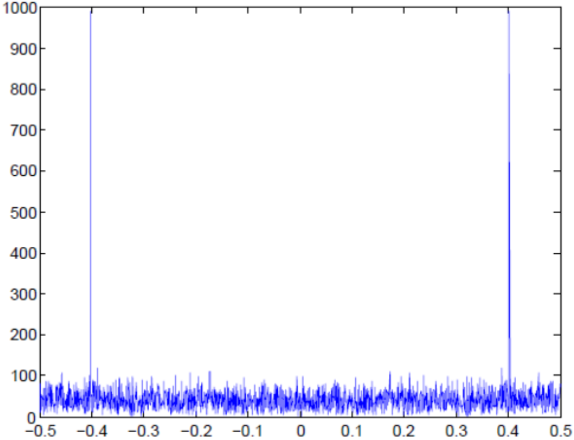
Pourquoi une représentation fréquentielle ?

Quel est ce signal, observé dans le domaine des **temps** ?



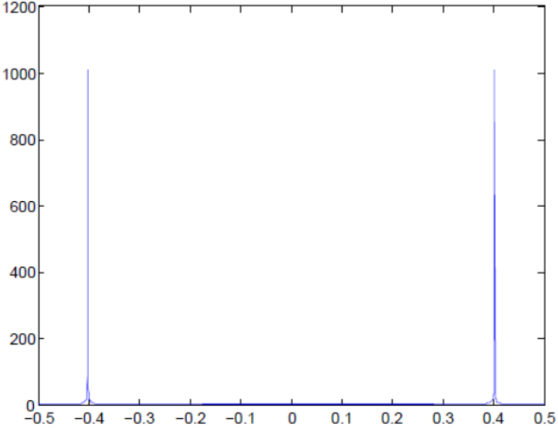
Pourquoi une représentation fréquentielle ?

... le même, observé dans le domaine des **fréquences** ?



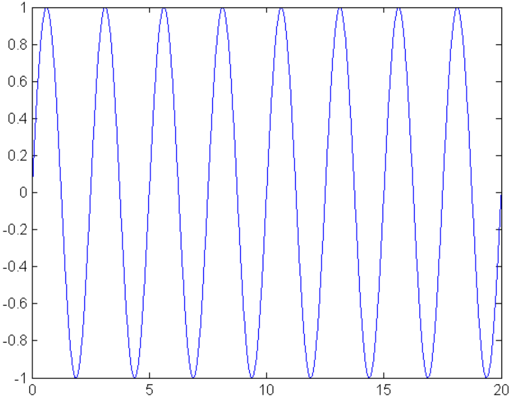
Pourquoi une représentation fréquentielle ?

... le même, sans bruit, observé dans le domaine des **fréquences** ?



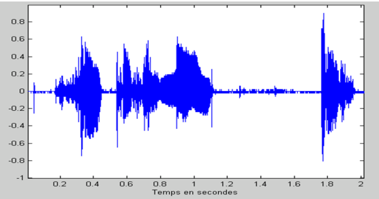
Pourquoi une représentation fréquentielle ?

... le même, sans bruit, observé dans le domaine des **temps** ?

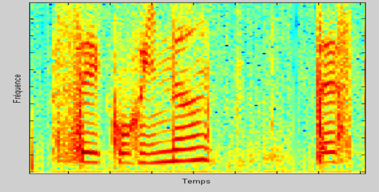


Autre exemple : signal de parole

Représentation temporelle

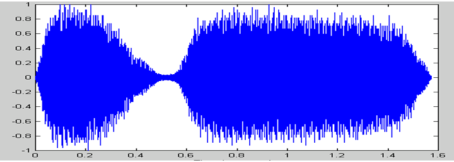


Représentation fréquentielle

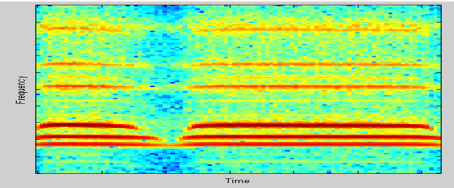


Autre exemple : sifflement d'un (vieux) train

Représentation temporelle

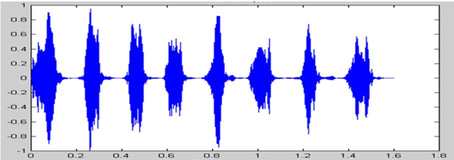


Représentation fréquentielle

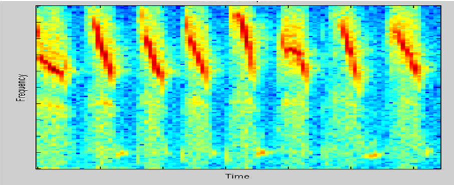


Autre exemple : chant d'oiseau

Représentation temporelle

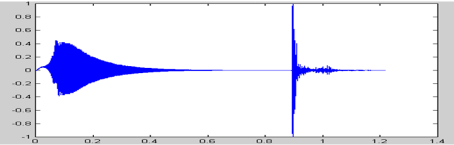


Représentation fréquentielle

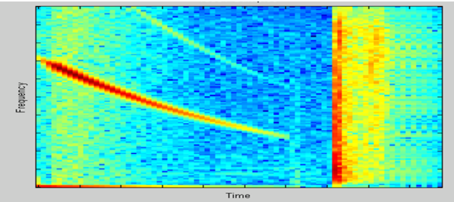


Autre exemple : l'oeuf qui tombe...

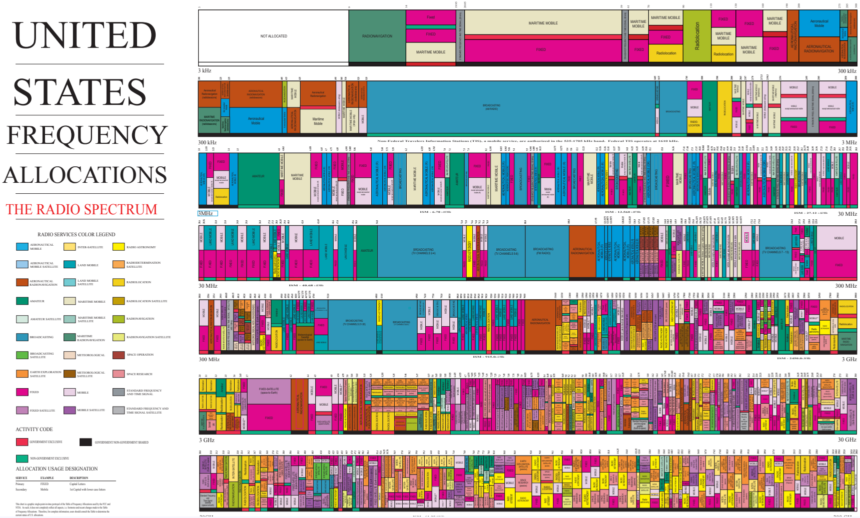
Représentation temporelle



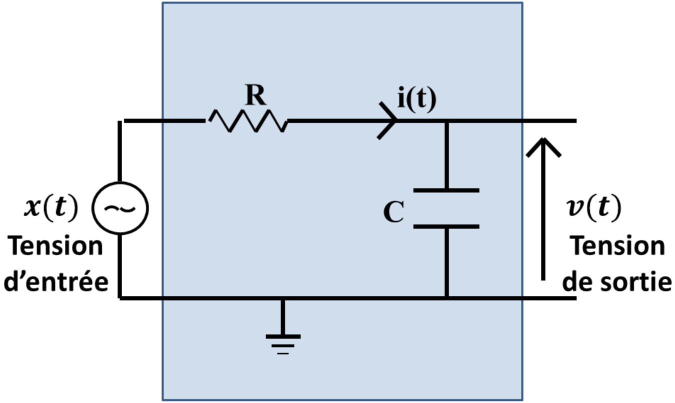
Représentation fréquentielle



Autre exemple : spectre radio (USA)



Autre exemple : étude d'un système par résolution d'équation différentielle



Système linéaire : $RCv'(t) + v(t) = x(t)$

Plan du cours

Plan du cours

Plan du cours

Espaces de fonctions

Définition : espaces L^p

Soit $p \geqslant 1$ et I un intervalle borné ou non de $\mathbb{R}$. On pose :

$$\begin{aligned} L^p(I) &= \left\{ x : I \to \mathbb{R} \text{ telle que } \int_I |x(t)|^p dt < +\infty \right\} \\ L^\infty(I) &= \{ x : I \to \mathbb{R} \text{ telle que } x \text{ bornée p.p. sur } I \} \end{aligned}$$

Normes

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\int_I |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \\ \|x\|_\infty &= \inf \{ \alpha \text{ tel que } |x(t)| \leqslant \alpha \text{ p.p. sur } I \} \end{aligned}$$

Propriété

Si I de **mesure finie**, on a
$L^\infty(I) \subset \ldots \subset L^{p+1}(I) \subset L^p(I) \subset \ldots \subset L^2(I) \subset L^1(I) \subset L^1_{\text{loc}}(I)$

Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

On se place dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Définition

Soit une fonction $x \in L^1(\mathbb{R})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La **transformée de Fourier** de x est définie par

$$\forall f \in \mathbb{R},\ \hat{x}(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi f t} dt$$

On note aussi parfois la transformée $X(f)$ ou $TF(x)(f)$.

Exemple

$x(t) = \mathbb{1}_{[a;b]}(t) \Rightarrow \hat{x}(f) = (b-a)\sin_c(\pi(b-a)f)e^{-j\pi(a+b)f}$.

Théorème

Soit une fonction $x \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

1. $\widehat{x}$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$ ☞ $\widehat{x} \in L^\infty(\mathbb{R})$;
2. l'application $x \mapsto \widehat{x}$ est linéaire continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
3. théorème de Riemann-Lebesgue :

$$\lim_{|f| \to +\infty} \widehat{x}(f) = 0$$

Injectivité de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

l'application $x \mapsto \widehat{x}$ est injective de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C^0(\mathbb{R})$, c'est-à-dire :

$$\forall f \in \mathbb{R},\ \widehat{x}(f) = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0 \text{ p.p. sur } \mathbb{R}$$

et donc

$$\forall f \in \mathbb{R},\ \widehat{x}(f) = \widehat{y}(f) \Leftrightarrow x(t) = y(t) \text{ p.p. sur } \mathbb{R}$$

Règles de calcul de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Théorème (de transfert)

Soit x et y deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. Alors

- $x\widehat{y}$ et $\widehat{x}y$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$;
- $$\int_{\mathbb{R}} x(t)\widehat{y}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}(t)y(t)dt$$

Théorème : transformée de Fourier et dérivation

1. si la fonction $t \mapsto t^k x(t)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, pour $k = 0, \ldots, n$, alors $\widehat{x}$ est n fois dérivable, et
$$\forall k = 1, \ldots, n,\ \widehat{x}^{(k)}(f) = (-2\widehat{j\pi t)^k} x(t)(f)$$
2. si $x \in C^n(\mathbb{R})$ et si $x^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, pour $k = 0, \ldots, n$, alors :
$$\forall k = 1, \ldots, n,\ \widehat{x^{(k)}}(f) = (2j\pi f)^k \widehat{x}(f)$$
3. si $x \in L^1(\mathbb{R})$ et si x est à support compact, alors $\widehat{x} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Propriétés : parité et conjugaison

Soit $x \in L^1(\mathbb{R})$.

1. si x est paire, $\widehat{x}$ est paire.
2. si x est impaire, $\widehat{x}$ est impaire.
3. si x est réelle paire, $\widehat{x}$ est réelle paire.
4. si x est réelle impaire, $\widehat{x}$ est imaginaire pure impaire.

Propriétés : transformée de Fourier et translation

Soit $x \in L^1(\mathbb{R})$.

1. soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors
$$x\widehat{(t-t_0)}(f) = e^{-2j\pi f t_0}\widehat{x}(f)$$
2. soit $f_0 \in \mathbb{R}$. Alors
$$e^{\widehat{2j\pi f_0 t}x}(t)(f) = \widehat{x}(f-f_0)$$

Transformée de Fourier inverse dans $L^1(\mathbb{R})$

Théorème de réciprocité

Si x **et** $\hat{x}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$. On pose

$$\check{\hat{x}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(f) e^{+2j\pi f t} df.$$

Alors

$$x(t) = \check{\hat{x}}(t) \text{ p.p. } t \in \mathbb{R}$$

et $x(t) = \check{\hat{x}}(t)$ en tout point t où x est continue.

Théorème : condition suffisante pour que $\hat{x} \in L^1(\mathbb{R})$

Si $x \in C^2(\mathbb{R})$, et si x, x', et x'' sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{x} \in L^1(\mathbb{R})$.

Comment faire si $\widehat{x} \notin L^1(\mathbb{R})$?

Dans ce cas, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \widehat{x}(f)e^{+2j\pi f t}df$ n'est pas définie, mais la limite

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{[-a;+a]} \widehat{x}(f)e^{+2j\pi f t}df$$

peut exister.

Théorème

Soit $x \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

1. il existe un nombre fini de réels $a_1, \ldots, a_p$ tels que x soit C^1 sur $]-\infty; a_1[,]a_1; a_2[, \ldots,]a_p; +\infty[$;
2. $x' \in L^1(\mathbb{R})$

Alors

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{[-a;+a]} \widehat{x}(f)e^{+2j\pi f t}df = \frac{1}{2}\left(x(t^+) + x(t^-)\right)$$

Exemple : $x(t) = \pi\mathbb{1}_{[-1/2\pi;+1/2\pi]}(t)$

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Position du problème

- $L^2(\mathbb{R})$: espace des fonctions **à énergie finie**.
- Problème : $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$.
- ☞ comment définir une transformée de Fourier pour une fonction de $L^2(\mathbb{R})$?

Définition

On dit qu'une fonction x est à **décroissance rapide** si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N},\ t^k x(t) \underset{|t| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions x de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telles que

1. x est C^∞ ;
2. $\forall k \in \mathbb{N}$, $x^{(k)}$ est à décroissante rapide.

Propriétés de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$, $\forall p \geqslant 1$;
2. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation ;
3. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par multiplication par un polynôme ;
4. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformée de Fourier.

Propriétés de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

L'application $x \mapsto \widehat{x}$ est linéaire, continue, **bijective** de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, c-à-d :

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathbb{R},\ \widehat{x}(f) &= \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi f t} dt \\ \forall t \in \mathbb{R},\ x(t) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}(f) e^{+2j\pi f t} df \end{aligned}$$

Propriétés de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

L'application $x \mapsto \widehat{x}$ est une **isométrie** de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour la norme définie sur $L^2(\mathbb{R})$. Donc, $\forall x, y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle_{L^2} &= \langle x, y \rangle_{L^2} \\ \|\widehat{x}\|_2 &= \|x\|_2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire (formules de Parseval-Plancherel)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}(f)\overline{\widehat{y}(f)}df &= \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t)}dt \\ \int_{\mathbb{R}} |\widehat{x}(f)|^2\, df &= \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2\, dt \text{ (conservation de l'énergie)} \end{aligned}$$

Propriété : densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est **dense** dans $L^2(\mathbb{R})$.

Définition de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

- L'isométrie $x \mapsto \widehat{x}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.
- Ce prolongement est la **transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$**.
- Soit $x \in L^2(\mathbb{R})$: sa transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ est notée $\mathcal{F}(x)$ (on note $\mathcal{F}^{-1}(x)$ la transformée inverse). On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= \lim_{n \to +\infty} X_n(\text{ dans } L^2(\mathbb{R})) \\ \text{où } X_n(f) &= \int_{[-n;+n]} x(t) e^{-2j\pi f t} dt \end{aligned}$$

Propriétés de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

1. si $x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, les transformées de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ et sur $L^2(\mathbb{R})$ coïncident, c-à-d $\widehat{x} = \mathcal{F}(x)$ p.p.
2. l'application $x \mapsto \mathcal{F}(x)$ est bijective de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, et on a :

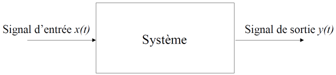
$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}),\ \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(x)\right) = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(x)\right) = x \text{ p.p.}$$

3. $\forall x, y \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(x)(f)\overline{\mathcal{F}(y)(f)}df &= \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t)}dt \\ \int_{\mathbb{R}} \left|\mathcal{F}(x)(f)\right|^2 df &= \int_{\mathbb{R}} \left|x(t)\right|^2 dt \end{aligned}$$

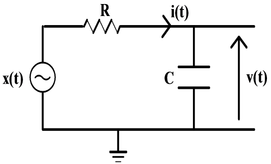
Principe de la convolution

Convolution et système linéaire



La sortie d'un système linéaire est reliée à l'entrée par un **produit de convolution**.
☞ intérêt du produit de convolution (entre autres) pour l'étude des systèmes linéaires.

Exemple : cellule RC



Définition de la convolution

Définition

Soient x et y deux fonctions. Le **produit de convolution** entre x et y en un point $t \in \mathbb{R}$ est défini par (si l'intégrale existe)

$$x * y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(u)y(t-u)du$$

Propriétés

- linéarité : $x * (ay_1 + by_2) = ax * y_1 + bx * y_2$
- commutativité : $x * y = y * x$
- associativité : $(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3)$

Exemple

- système intégrateur : $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)du$.
- $x(t) = \mathbb{1}_{[0;T]}(t)$. Calculer $x * x$. Conclusions ?

Propriété : support

Soient x et y deux fonctions telles que $x * y(t)$ existe pour tout t. Alors :

$$\mathrm{Supp}(x * y) \subseteq \overline{\mathrm{Supp}(x) + \mathrm{Supp}(y)}$$

avec $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$.

Interprétation physique de la convolution

- Dans tout système physique, ∃ diverses constantes de temps de l'appareil de mesures ☞ impossibilité à discerner deux impulsions très rapprochées (*résolution* finie du système)
- le produit de convolution $\simeq$ moyennage ☞ permet de prendre en compte ce phénomène
  En effet, $y(t) = x * h(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$ ☞ $y(t)$ est une moyenne de $x(\tau)$ pondéré par $h(t - \tau)$ ☞ "lissage" de $x(t)$

Conditions (suffisantes) d'existence du produit de convolution

Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

Soient $x, y \in L^1(\mathbb{R})$. Alors :

1. $x * y$ est défini p.p., et $x * y \in L^1(\mathbb{R})$;
2. la convolution est une application bilinéaire continue de $L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$, telle que

$$\|x * y\|_1 \leqslant \|x\|_1 \|y\|_1$$

Convolution dans $L^1(\mathbb{R})/L^2(\mathbb{R})$

Soient $x \in L^1(\mathbb{R})$ et $y \in L^2(\mathbb{R})$. Alors :

1. $x * y$ est défini p.p., et $x * y \in L^2(\mathbb{R})$;
2. la convolution est une application bilinéaire continue de $L^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, telle que

$$\|x * y\|_2 \leqslant \|x\|_1 \|y\|_2$$

Convolution dans $L^p(\mathbb{R})/L^q(\mathbb{R})$

Soient $x \in L^p(\mathbb{R})$ et $y \in L^q(\mathbb{R})$ avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Alors :

1. $x * y$ est défini **partout**, et est une fonction **continue** et **bornée** sur $\mathbb{R}$;
2. la convolution est une application bilinéaire continue de $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$, telle que

$$\|x * y\|_\infty \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$$

Cas particuliers :

- $p = 1$, $q = +\infty$;
- $p = q = 2$.

Liens entre convolution et transformée de Fourier

Convolution et transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Soient $x, y \in L^1(\mathbb{R})$. Alors :

1. Pour tout $f \in \mathbb{R}$:

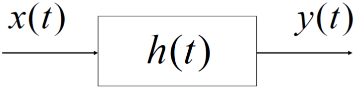
$$\begin{aligned} \widehat{x * y}(f) &= \hat{x}(f)\hat{y}(f) \\ \widecheck{x * y}(f) &= \check{x}(f)\check{y}(f) \end{aligned}$$

2. **si** $\hat{x}$ **et** $\hat{y}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $f \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \widehat{xy}(f) &= \hat{x} * \hat{y}(f) \\ \widecheck{xy}(f) &= \check{x} * \check{y}(f) \end{aligned}$$

Interprétation : filtrage

Soit un système linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$.



$$\begin{array}{ll} \text{domaine temporel :} & y(t) = h * x(t) \\ \text{domaine fréquentiel :} & \widehat{y}(f) = H(f)\widehat{x}(f) \end{array}$$

où $H = \widehat{h}$ est la **transmittance** ou **fonction de transfert** du système.
☞ atténuation/amplification/coupure de certaines composantes fréquentielles du signal d'entrée.
☞ **filtre**.

Exemple 1 : tension en créneau aux bornes d'une cellule RC

Filtre

- Réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(t)$$

- Fonction de transfert :

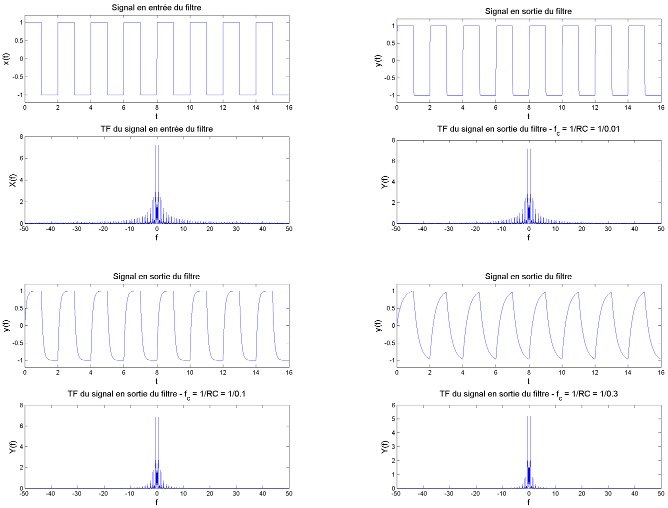
$$H(f) = \frac{1}{1 + 2j\pi \frac{f}{f_c}}$$

où $f_c = 1/RC$ est la fréquence de coupure (filtre passe-bas).

Signal en entrée

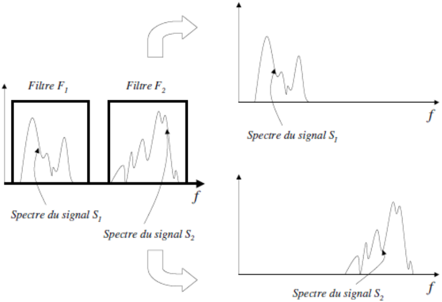
$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{L-1} m(t - 2kT) \text{ avec } m(t) = \mathbb{1}_{[0;T]}(t) - \mathbb{1}_{[T;2T]}(t) \\ \widehat{x}(f) &= 2jT \sin_c(\pi T f) \sin(\frac{3}{2}\pi T f) \frac{\sin(2\pi L T f)}{\sin(2\pi T f)} e^{-j(2L+1/2)\pi T f} \end{aligned}$$

Effets du filtrage suivant la valeur de la fréquence de coupure



Exemple 2 : séparation des *spectres*

- 2 signaux s_1 et s_2 mélangés dans le domaine temporel, mais dont les *spectres* (c-à-d $\hat{s}_1$ et $\hat{s}_2$) sont disjoints ;
- ☞ séparation des signaux par filtrage.



Convolution et transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Soient $x, y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors :

1. Pour tout $f \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \widehat{x * y}(f) &= \hat{x}(f)\hat{y}(f) \\ \widecheck{x * y}(f) &= \check{x}(f)\check{y}(f) \end{aligned}$$

2. Pour tout $f \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \widehat{xy}(f) &= \hat{x} * \hat{y}(f) \\ \widecheck{xy}(f) &= \check{x} * \check{y}(f) \end{aligned}$$

Convolution et transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Soient $x, y \in L^2(\mathbb{R})$. Alors :

1. Pour tout $f \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x * y(f) &= \mathrm{TF}^{-1}\left(\mathcal{F}(x)\mathcal{F}(y)\right)(f) \\ x * y(f) &= \mathrm{TF}\left(\mathcal{F}^{-1}(x)\mathcal{F}^{-1}(y)\right)(f) \end{aligned}$$

2. Pour tout $f \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{TF}(xy)(f) &= \mathcal{F}(x) * \mathcal{F}(y)(f) \\ \mathrm{TF}^{-1}(xy)(f) &= \mathcal{F}^{-1}(x) * \mathcal{F}^{-1}(y)(f) \end{aligned}$$

Convolution et dérivation

Régularisation par convolution

Soit $x \in L^1(\mathbb{R})$, et $y \in C^p(\mathbb{R})$ telle que $y^{(k)}$ **bornée** pour $k = 0, \ldots, p$. Alors

1. $$x * y \in C^p(\mathbb{R})$$
2. $$(x * y)^{(k)} = x * \left(y^{(k)}\right), \ \forall k = 0, \ldots, p$$

Transformée de Fourier discrète

Position du problème

Fonction à temps continu $x(t)$ remplacée par une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (échantillonnage : $x_n = x(nT_e)$ où T_e est la période d'échantillonnage)
En supposant que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n| < +\infty$ (càd $x \in L^1(\mathbb{Z}, \mu_d)$), on pose

$$\forall f \in \mathbb{R},\ X_d(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-2j\pi n f}$$

X_d est la **transformée de Fourier discrète** de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Autre expression

$$\forall f \in \mathbb{R},\ X_d(f) = X(z)\big|_{z=e^{2j\pi n f}}$$

avec

$$X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n z^{-n},\ z \in \mathbb{C}$$

X est la **transformée en Z** de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (notée aussi $TZ(x)$).

Utilisation de la théorie des fonctions de la variable complexe

(Non détaillée ici)

- Notion de domaine de convergence pour X ($|z| \in]R^-; R^+[$) ;
- Il existe une transformée en Z inverse (passage de $X(z)$ à x_n)

Propriétés

- $$TZ(x_{n-n_0}) = z^{-n_0} X(z)$$
- $$TZ(a^n x_n) = X\left(\frac{z}{a}\right),\ a \in \mathbb{C}$$

Produit de convolution

Soient 2 suites $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
Le **produit de convolution discret** est défini par

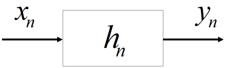
$$x * y(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k y_{n-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{n-k} y_k = y * x(n)$$

Lien entre TZ et produit de convolution discret

$$TZ(x * y)(z) = X(z)Y(z)$$

☞ même expression que lien TF/produit de convolution de fonctions

Interprétation : filtrage numérique



h_n : réponse impulsionnelle numérique du filtre
☞ $y_n = x * h(n)$ et $Y(z) = H(z)X(z)$

Plan du cours

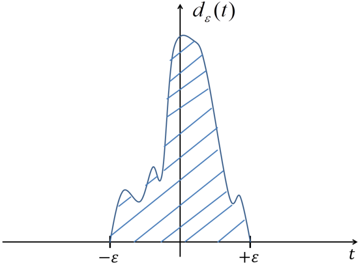
Naissance des distributions

- Laurent Schwartz : médaille Fields 1950
- objectif initial : résolution des équations aux dérivées partielles (par transformée de Fourier)
- généralisation des fonctions et des mesures
- définition rigoureuse de la notion d'impulsion

Problème de la modélisation d'une impulsion (ou de masse ponctuelle)

Principe de l'impulsion

- Emission d'une énergie non nulle pendant une durée infiniment petite.
- Densité (répartition) temporelle d'énergie d_ε :
  - $\forall t \in \mathbb{R}$, $d_\varepsilon(t) \geqslant 0$;
  - $d_\varepsilon(t) = 0$ pour $|t| > \varepsilon$;
  - $\forall \varepsilon > 0$, $\int_{\mathbb{R}} d_\varepsilon(t)dt = 1$.



Passage à la limite

Soit $d(t)$ la limite (ponctuelle) de d_ε lorsque $\varepsilon \to 0$. La fonction d vérifie-t-elle

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $d(t) \geqslant 0$;
- $d(t) = 0$ pour $t \neq 0$;
- $\int_{\mathbb{R}} d(t)dt = 1$?

Si cette fonction existait...

on aurait :

- $d(t)$ dérivée de la fonction d'Heaviside ;
- pour toute fonction f dérivable : $\int_{\mathbb{R}} d(t)f(t)dt = f(0)$.

... **mais elle n'existe pas** !

Comment faire ?

Il existe une distribution (à voir...) qui permet de retrouver (en un sens) ces propriétés...

Définition d'une distribution

L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions infiniment dérivables et à support compact sur $\mathbb{R}$.

Exemples

- ?

Définition : distribution

On appelle **distribution** sur $\mathbb{R}$ toute application T **linéaire** et **continue** de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
Notation :

$$\begin{array}{rccl} T : & \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C} \\ & \varphi & \mapsto & T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle \end{array}$$

On note $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions.

Convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

On dit qu'une suite $(\varphi_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge vers une fonction φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ **si et seulement si** :

1. il existe un **compact** $\mathcal{K}$ tel que $\forall n$, $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subset \mathcal{K}$.
2. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi_n^{(k)}$ **converge uniformément** vers $\varphi^{(k)}$.

Exemples

- Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\begin{array}{rcccl} \delta_a & : & \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C} \\ & & \varphi & \mapsto & \langle T, \varphi \rangle = \varphi(a) \end{array}$$

(distribution de Dirac en a)

- Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $(\lambda_n)_n$ une suite quelconque définie sur $\mathbb{Z}$. On pose :

$$\begin{array}{rcccl} \Delta_a & : & \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C} \\ & & \varphi & \mapsto & \langle T, \varphi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n \varphi(na) \end{array}$$

Distributions régulières

Définition

Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Alors, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $f\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. On pose alors :

$$\begin{array}{cccl} T_f & : & \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C} \\ & & \varphi & \mapsto & \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \end{array}$$

T_f est la **distribution régulière** associée à f.

Injectivité

L'application $f \mapsto T_f$ est **injective** de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et on a donc

$$T_f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p.}$$

Ainsi, on peut faire l'**identification** $f \leftrightarrow T_f$, et écrire

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$$

Exemples

- Distribution constante
- Distribution d'Heaviside
- Distribution en valeur principale

Contre-exemple

La distribution δ **n'est pas** une distribution régulière : il **n'existe pas de fonction** f telle que

$$\cancel{\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)}$$

Produit d'une distribution et d'une fonction

Position du problème

- Soit $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.
- Problème : $fg \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ *a priori* ☞ fg ne définit pas une distribution régulière.
- et si de plus g continue ?

Définition

Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors on définit **le produit de T par g** par :

$$\forall \varphi \in, \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$$

Exemples

- ?
- produit d'une fonction par un Dirac.

Dérivée d'une distribution

Cas d'une fonction telle que $f' \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$

Définition : dérivée d'une distribution

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution quelconque. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle \end{array}$$

est une distribution : c'est la dérivée d'ordre k de T.

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle$$

Exemples

- T une distribution constante ;
- $T = T_h$;
- $T = \delta_a$.

Lien entre $T_{f'}$ et T'_f pour une distribution régulière

Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, dérivable p.p., telle que $f' \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.
☞ quel lien existe-t-il entre $T_{f'}$ et T'_f ?

Cas où f est C^1 sur $\mathbb{R}$

On a alors

$$T'_f = T_{f'}$$

Cas où f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$

Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ telle que :

- il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de réels où f est C^1 sur $(]a_n; a_{n+1}[)_{n\in\mathbb{Z}}$
- les discontinuités $\sigma_n = f(a_n^+) - f(a_n^-)$ sont d'amplitudes finies pour tout n.

Alors :

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sigma_n \delta_{a_n}$$

Convergence d'une suite de distributions

Définition : convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

On dit qu'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution T si et seulement si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \langle T_n, \varphi\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi\rangle$$

Exemples

- $T_n = \delta_{a_n}$ avec $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$;
- $T_n = T_{f_n}$ avec $f_n(x) = n\mathbb{1}_{[-1/2n;+1/2n]}(x)$;
- $T_n = T_{f_n}$ avec $f_n(x) = \sin(2\pi n x)$.

Convergence dans $L^p(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$. Alors

$$T_{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T_f$$

Convergence ponctuelle et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers f, i.e. $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ p.p. S'il existe $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n,\ |f_n(x)| \leqslant g(x) \text{ p.p.},$$

Alors

$$T_{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T_f$$

Convergence des dérivées

$$\text{Si } T_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} T, \text{ alors : } \forall k \in \mathbb{N}, T_n^{(k)} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} T^{(k)}$$

Dérivée d'une série de distributions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues, dérivales p.p., et de dérivées localement intégrables, telle que
$(T_n)_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une suite quelconque de distributions. On pose

$$\sum_{n=0}^{N} f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{N} f_n' \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} T_f'$$

Série de Fourier de distributions

Position du problème

- Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\mathbb{C}$, et $a > 0$. On considère la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{j2\pi n \frac{x}{a}}$$

- Au sens des fonctions, une condition **nécessaire** de convergence est que $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si la série converge, elle est égale (dans $L^2(\mathbb{R})$) à une fonction périodique de période a.
- Qu'en est-il au sens des distributions ?

Distribution périodique

On dit qu'une distribution est périodique de période a si et seulement si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

où $\tau_a T$ est la translatée de T définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle$$

avec

$$\tau_{-a} \varphi(x) = \varphi(x + a)$$

Suite à croissance lente

On dit qu'une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est à **croissance lente** si et seulement si il existe $A > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |c_n| \leqslant A|n|^k$$

Convergence d'une série au sens des distributions

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\mathbb{C}$ à **croissance lente**, et $a > 0$. On pose

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{j2\pi n\frac{x}{a}}$$

Alors T_{f_N} converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution périodique de période a lorsque $N \to +\infty$.

Développement en série de Fourier du peigne de Dirac

Objectif : exprimer Δ_a sous la forme

$$\Delta_a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{j2\pi n\frac{x}{a}} \ (\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}))$$

Transformée de Fourier de distributions

Cas d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

- $\widehat{f}$ est continue, donc $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})_{\text{loc}}$ et définit une distribution régulière ;
- Formellement,
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \langle T_{\widehat{f}}, \varphi\rangle = \langle T_f, \widehat{\varphi}\rangle$$
- Cette expression a-t-elle un sens ?

Distributions tempérées

On appelle **distribution tempérée** sur $\mathbb{R}$ toute application T **linéaire** et **continue** de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions. On a :

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On pose :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$

Alors $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. $\hat{T}$ est la transformée de Fourier de T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Transformée de Fourier inverse dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On pose :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$$

Propriété de la Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

La transformée de Fourier est une application linéaire, bijective et bicontinue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et on a :

$$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}),\ \hat{\check{T}} = \check{\hat{T}} = T$$

Lien entre transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et dans $L^1(\mathbb{R})/L^2(\mathbb{R})$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ (ou $L^2(\mathbb{R})$). Alors T_f est tempérée, et

$$\widehat{T_f} = T_{\hat{f}}$$

Conséquence

La transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ ou de $L^2(\mathbb{R})$ peut être considérée indifféremment au sens des fonctions ou au sens des distributions.

Propriétés de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

- Pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, si $f \in L^p(\mathbb{R})$ alors

  $$T_f \textbf{ est une distribution tempérée},$$

  et admet donc une transformée de Fourier.
  ☞ toute fonction de $L^p(\mathbb{R})$ (y compris de $L^\infty(\mathbb{R})$) admet une transformée de Fourier au sens des distributions, même sans admettre de transformée de Fourier au sens des fonctions.
- Soit f une fonction à **croissante lente**, c'est-à-dire qu'il existe $A > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

  $$|f(x)| \leqslant A|x|^k, \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}$$

  Alors T_f **est une distribution tempérée**.

Exemple : transformée de Fourier de fonctions sinusoïdales

Soit $f_0 \in \mathbb{R}$. On pose : $f(x) = e^{j2\pi f_0 x}$.

Transformée de Fourier et dérivée dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N},\ \hat{T}^{(k)} &= \widehat{(-2j\pi x)}^k T \\ \forall k \in \mathbb{N},\ \widehat{T^{(k)}} &= (2j\pi f)^k \hat{T} \end{aligned}$$

Transformée de Fourier et translation dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_a T} &= e^{-2j\pi a f}\hat{T} \\ \tau_a \hat{T} &= \widehat{e^{2j\pi a x} T} \end{aligned}$$

Transformée de Fourier et convolution de distributions

Convolution de distributions

On peut définir le produit de convolution de distributions (non traité ici). Résultats :

- δ est l'élément neutre, c'est-à-dire, pour toute distribution T :

$$\delta * T = T$$

- translation : pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\delta_a * T = \tau_a T.$$

  et pour toute fonction f,

$$(\delta_a * f)(x) = (\tau_a f)(x) = f(x - a)$$

Lien entre transformée de Fourier et convolution de distributions

Dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})/\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Soient $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alors

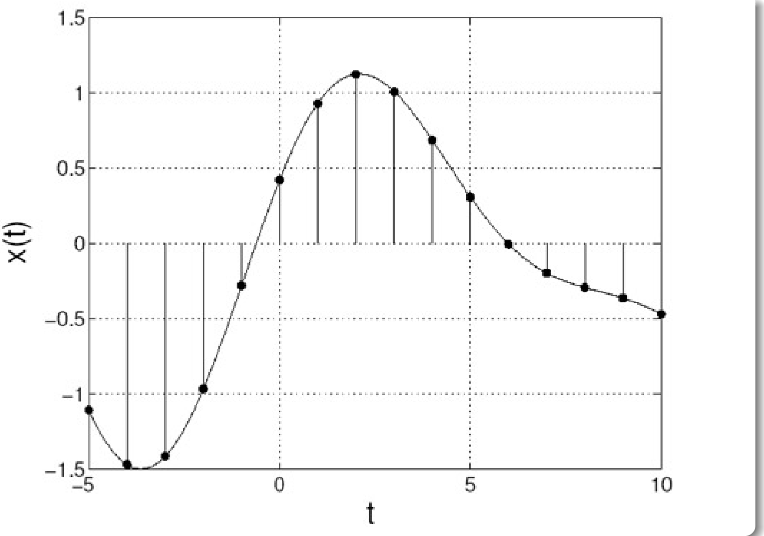
$$\begin{aligned} \widehat{\varphi * T} &= \hat{\varphi}\hat{T} \\ \widehat{\varphi T} &= \hat{\varphi} * \hat{T} \end{aligned}$$

Dans $L^2(\mathbb{R})$

Soient f et g dans $L^2(\mathbb{R})$. Alors, **au sens des distributions** :

$$\begin{aligned} \widehat{f * g} &= \hat{f}\hat{g} \\ \widehat{fg} &= \hat{f} * \hat{g} \end{aligned}$$

Application à l'échantillonnage d'un signal



Application à l'échantillonnage d'un signal

Signal échantillonné

Soit $s(t)$ un signal (une fonction) intégrable sur $\mathbb{R}$, à bande limitée, c'est-à-dire telle que

$$\mathrm{Supp}(\widehat{s}) \subset [-B; +B].$$

Donc $s \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Soit $T_e > 0$. Le **signal échantillonné** à la période T_e est défini par

$$s_e = s\Delta_{T_e} = s\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{kT_e} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} s(kT_e)\delta_{kT_e}$$

Transformée de Fourier du signal échantillonné

2 expressions de $\widehat{s_e}$:

- transformée de Fourier discrète :

$$\widehat{s_e}(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} s(kT_e)e^{-j2\pi kT_e f}$$

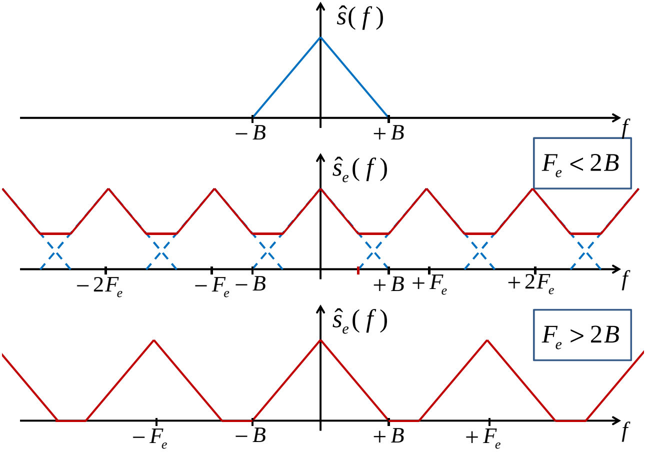
- $$\widehat{s_e}(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{s}(f - kF_e)$$

$F_e = 1/T_e$: fréquence d'échantillonnage.
☞ échantillonner le signal revient à périodiser sa transformée de Fourier.

2 situations possibles

- $F_e < 2B$: les différents courbes de $\widehat{s}(f)$ se superposent : **recouvrement** ☞ on ne parvient pas à retrouver la forme de $\widehat{s}(f)$ ☞ on ne peut pas reconstituer $s(t)$.
- $F_e \geqslant 2B$: les courbes ne se superposent pas : **pas de recouvrement** ☞ on peut retrouver $\widehat{s}(f)$ par filtrage ☞ on peut reconstituer $s(t)$.

Exemple de (non-)recouvrement



Théorème d'échantillonnage (Nyquist)

un signal à bande limitée $[-B; B]$ *peut être complètement reconstitué par ses échantillons* $(s(kT_e))_{k\in\mathbb{Z}}$ *si* $F_e \geqslant 2B$.

Formule d'interpolation de Shannon

Par filtrage du signal échantillonné s_e, on obtient :

$$s(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} s(kT_e)\frac{\sin\left(\pi F_e(t-kT_e)\right)}{\pi F_e(t-kT_e)}$$