T.D. Intégration et Applications
1ère année Sciences du Numérique

1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$

Exercice 1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle

$$x(t) = \left(1 - 2\,\frac{|t|}{A}\right)\Pi_A(t) \tag{Triangle}$$

où $\Pi_A(t) = \mathbb{I}_{[-A/2,A/2]}(t)$ est la fonction porte.

Exercice 2. Dans cet exercice on calcule la transformée de Fourier de $x(t) = e^{-at^2}$ $(a > 0)$ en résolvant une équation différentielle. Vérifier que X est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{df}(f) = -2\,\frac{\pi^2}{a} f X(f)$$

En déduire que

$$X(f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\pi^2 \frac{f^2}{a}}$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Exercice 3. Déterminer la transformée de Fourier de $x(t) = e^{-at}H(t)$ où $H(t) = \mathbb{I}_{[0,\infty[}(t)$ et $a > 0$. En utilisant les propriétés de dérivation de la TF, en déduire la TF de la fonction

$$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}U(t)$$

Exercice 4. Montrer que si la fonction x est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 4\pi^2 t^2 x(t) = 4\pi x(t)$$

alors sa TF (en supposant qu'elle existe et qu'elle possède les "bonnes propriétés") vérifie la même équation différentielle.

Exercice 5. Déterminer la TF de la fonction

$$\begin{cases} x(t) &= 1 - t^2 \quad \text{si } |t| < 1 \\ x(t) &= 0 \quad\quad\;\; \text{ailleurs} \end{cases}$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{(u\cos u - \sin u)}{u^3}\cos(ut)\,du$$

Exercice 6. En utilisant l'égalité de Parseval-Plancherel dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3}\,dt = \frac{3\pi}{4}$$

Exercice 7. Rappelons que l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dit *espace des fonctions de Schwartz* est constitué des fonctions x qui sont $\mathcal{C}^\infty$ et à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées, c.a.d.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| t^p x^{(q)}(t) \right| < \infty \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformée de Fourier, en montrant que pour $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

1. X est $\mathcal{C}^\infty$.
2. X est à décroissance rapide (Utiliser l'expression de $TF(x^{(k)})$).
3. $X^{(q)}$ est à décroissance rapide (Utiliser l'expression de la TF de : $(t^q x(t))^{(p)}$).

Exercice 8. Soient $x(t) = \frac{\sin \pi a t}{\pi t}$ et $y(t) = \frac{\sin \pi b t}{\pi t}$ avec $a > 0$ et $b > 0$. On rappelle que $\widehat{\mathbb{1}_{[-T;T]}}(f) = \sin_c(2\pi T f)$.

1. En utilisant les liens entre TF et produit de convolution, calculer $x * y(t)$.
2. En déduire les valeurs des intégrales

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin \pi a t \, \sin \pi b t}{\pi^2 t^2} \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$$

Exercice 9. Etude d'un filtre analogique standard: la cellulle RC.
On considère le système constitué d'un générateur fournissant une tension d'entrée $x(t)$, d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C. Le signal de sortie que l'on étudie est la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur. Cette tension $v(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$x(t) = v(t) + RCv'(t)$$

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$.

2. En supposant que $x(t)$ et $v(t)$ possèdent les bonnes propritétés (qu'on donnera), montrer en utilisant la transformée de Fourier que $v(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$v(t) = h * x(t)$$

Exercice 10. En supposant que les fonctions u et v ont toutes les propriétés pour justifier les calculs, chercher une solution $u(x, y)$ de l'équation de Poisson.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{pour } y > 0 \text{ et } \quad x \in \mathbb{R} \\ \text{avec } u(x,0) = v(x) & \text{et } \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0 \end{cases}$$

Pour cela, on utilisera la TF de u par rapport à la variable x soit

$$\widehat{u}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx.$$

Prendre alors la TF de l'équation aux dérivées partielles précédentes et traduire la condition initiale et la condition aux limites associées.
Vérifier que $u(x,y) = (g_y * v)(x)$ p.p. avec $g_y(x) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$.

Problème 1 : Filtres analogiques.

Questions préliminaires :

1. Soient $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(a) > 0$, et $u(t)$ la fonction échelon.Vérifier que pour $k \geqslant 0$, les fonctions $\frac{t^k}{k!}e^{-\varepsilon a t}u(\varepsilon t)$, pour $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$, sont bien intégrables, et calculer par récurrence leur transformée de Fourier.

2. En déduire les transformées de Fourier inverse dans $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions $\frac{1}{(a+2i\pi f)^{k+1}}$ et $\frac{1}{(-a+2i\pi f)^{k+1}}$ pour $k \geqslant 0$.

On considère un système qui à une fonction (un signal) d'entrée $x(t)$ appartenant à un espace de fonctions $\mathcal{X}$ fait correspondre une fonction (un signal) de sortie $y(t)$ appartenant à un espace de fonctions $\mathcal{Y}$.

On dit que ce système est un *filtre* si l'application $A : x \in \mathcal{X} \longmapsto y \in \mathcal{Y}$ est

- **linéaire**, c'est-à-dire $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$;
- **invariant par translation**, c'est-à-dire que si à l'entrée $x(t)$ correspond la sortie $y(t)$, alors à l'entrée $x(t-a)$ correspond la sortie $y(t-a)$;
- **continue**, c'est-à-dire que si $(x_n)_n$ est une suite de fonctions de $\mathcal{X}$ qui converge vers la fonction nulle dans $\mathcal{X}$, alors la suite correspondante $(y_n)_n$ converge vers la fonction nulle dans $\mathcal{Y}$.

On s'intéresse ici à un système qui à l'entrée $x(t)$ fait correspondre la sortie $y(t)$ solution de l'équation différentielle

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^{q} b_l x^{(l)}(t) \tag{1}$$

avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$, et où $x^{(l)}(t)$ est la dérivée d'ordre l de $x(t)$ (idem pour $y^{(k)}(t)$).

On considère ici le cas où la fonction $x(t)$ appartient à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et on cherche $y(t)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$).

1. On note P et Q les polynômes

$$\begin{aligned} P(u) &= \sum_{k=0}^{p} a_k u^k \\ Q(u) &= \sum_{l=0}^{q} b_l u^l \ . \end{aligned}$$

   En supposant que P n'admet pas de racine imaginaire pure, montrer (en justifiant les calculs) que la transformée de Fourier $Y(f)$ de $y(t)$ s'écrit sous la forme

$$Y(f) = H(f)X(f) \tag{2}$$

   où $X(f)$ est la transformée de Fourier de $x(t)$, et

$$H(f) = \frac{Q(2i\pi f)}{P(2i\pi f)}.$$

2. Montrer que si $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la fonction Y définie par (2) appartient à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; en déduire que l'équation (1) admet une solution unique y dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3. Montrer alors que l'application

$$A: \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$$
$$x \longmapsto y$$

définit bien un filtre (on utilisera le fait que si $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} 0$, alors $Gx_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} 0$ pour toute fonction G C^∞ telle que $Gx_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} 0$). La fonction $H(f)$ est alors appelée *fonction de tranfert* du filtre.

4. On suppose maintenant que $q < p$. Montrer que $H \in L^2(\mathbb{R})$. En déduire (en expliquant) qu'on peut exprimer y comme un produit de convolution que l'on explicitera (on admettra que y appartient bien à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

5. L'expression de y trouvée à la question précédente est-elle valable si $p \leqslant q$? Pourquoi ?

6. On admet que si $q < p$, et si le polynôme P n'admet que des racines (complexes) $(z_k)_{k=1,\dots,p}$ simples, on a :

$$H(f) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k}{2i\pi f - z_k}$$

A l'aide des résultats de la question préliminaire, déterminer la réponse impulsionnelle $h = TF^{-1}(H)$ du système en fonction des $(\alpha_k)_k$ et des $(z_k)_k$ (on séparera les racines z_k en 2 parties $K^+ = \{k \in \{1,\dots,p\} \text{ tel que } \mathrm{Re}(z_k) > 0\}$ et $K^- = \{k \in \{1,\dots,p\} \text{ tel que } \mathrm{Re}(z_k) < 0\}$).

7. **Application** : circuit RLC.

   On cherche la tension $v(t)$ aux bornes d'une cellule RLC régie par l'équation différentielle

$$LCv''(t) + RCv'(t) + v(t) = x(t)$$

   avec $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On suppose que $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

   Déterminer la fonction de transfert de ce filtre à l'aide du résultat de la question 1. De quel type de filtre il s'agit (passe-bas/passe-haut/passe-bande/coupe-bande) ?

8. Donner l'expression de la réponse impulsionnelle de ce filtre.

Problème 2 : Corrélations et spectres de signaux à énergie finie

On considère deux fonctions x et y de $L^2(\mathbb{R})$. On appelle *fonction d'intercorrélation* entre x et y la fonction notée $K_{x,y}$ définie par

$$K_{x,y}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt \tag{3}$$

1. Exprimer $K_{x,y}(\tau)$ comme un produit de convolution.

2. Montrer que $K_{x,y}(\tau)$ est définie pour tout τ, continue et bornée.

3. Comparer $K_{x,y}(\tau)$ et $K_{y,x}(\tau)$.

4. Pour $x = y$, la fonction $K_{x,y}(\tau)$ se note simplement $K_x(\tau)$: c'est la *fonction d'autocorrélation* de x. Ecrire $K_x(\tau)$ comme un produit de convolution. Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que

$$\begin{aligned} \forall\tau &\in \mathbb{R}, \quad |K_{xy}(\tau)|^2 \leqslant K_x(0)K_y(0) \\ \forall\tau &\in \mathbb{R}, \quad |K_x(\tau)| \leqslant K_x(0) \end{aligned}$$

5. On définit alors la *densité interspectrale d'énergie* entre x et y, notée $S_{xy}(f)$, et la *densité spectrale d'énergie*, notée $S_x(f)$, comme les transformées de Fourier respectives de K_{xy} et de K_x.

   En précisant en quel sens les transformées de Fourier sont utilisées (et en justifiant), montrer que

$$\begin{aligned} S_{xy}(f) &= X(f)Y^*(f) \\ S_x(f) &= |X(f)|^2 \end{aligned}$$

   où $X(f)$ et $Y(f)$ sont les transformées de Fourier de x et de y.

6. Déterminer la fonction d'autocorrélation $S_{x+y}(f)$ de la fonction $x+y$ en fonction de $S_x(f)$, $S_y(f)$, et $S_{xy}(f)$.

7. Soit $x(t) = 1_{[-T/2;T/2]}(t)$ avec $T > 0$ quelconque. Déterminer $S_x(f)$ de deux façons :

   - en appliquant directement la formule précédente ;
   - en calculant K_x et en déterminant sa transformée de Fourier (on pourra utiliser la formule $\sin^2\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{1-\cos u}{2}$).

8. On considère maintenant le problème de *modulation d'amplitude*. On souhaite émettre un signal x à énergie finie. On le module en amplitude, c'est-à-dire qu'on construit le signal

$$z(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

   où f_0 est une fréquence positive quelconque.

   Justifier que z est également à énergie finie.

   Déterminer la transformée de Fourier de z en fonction de celle de x, puis la densité spectrale d'énergie S_z en fonction de celle de S_x et de $X(f)$.

9. Dans le cas où $x(t) = 1_{[-T/2;T/2]}(t)$, représenter graphiquement $S_z(f)$ (approximativement). Quelle relation doit-il exister entre T et f_0 pour considérer que la composante en fréquences positives n'interfère pas avec la composantes en fréquences négatives ?

2 Distributions

Exercice 1. Montrer que l'expression suivante définit bien une distribution :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx$$

Exercice 2. On note h la fonction de Heaviside et h_σ la fonction symétrisée : $h_\sigma(x) = h(-x)$.

1. Déterminer au sens des distributions : h', h'_σ, $|x|'$, et $|x|''$.

2. Si f est une fonction C^∞ et T une distribution, montrer que l'on a :

$$(fT)' = f'.T + f.T'$$

3. Soit T la distribution définie par $|x| \sin(x)$. Déterminer T' et T''.

Exercice 3. Démontrer la formule

$$x^m.\delta^{(n)} = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \delta^{(n-m)} \quad m \leqslant n.$$

Qu'obtient-on pour $m = n$?
En déduire que la distribution: δ' est solution de l'équation $xT' = -T$.
Montrer que la distribution

$$T = c_0 \delta + \cdots + c_{n-1} \delta^{(n-1)} \quad \text{pour} \quad c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$$

est solution de l'équation: $x^n T = 0$.
Exercice 4. Soit ψ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant $\psi(0) = 0$.

1. En utilisant l'égalité
$$\psi(x) = \int_0^x \psi'(t) dt \ ,$$
montrer que ψ s'écrit :
$$\psi(x) = x\varphi(x) \quad \text{avec} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

2. En déduire que si T est solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $xT = 0$, alors il existe une réel c tel que $T = c\delta$.

3. De la même façon, vérifier que si T est solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de

$$(x-a)(x-b)T = 0 \ ,$$

avec $a \neq b$, alors

$$T = \lambda_a \delta_a + \lambda_b \delta_b \quad \text{avec} \quad \lambda_a,\ \lambda_b \in \mathbb{R}.$$

Problème 1 : solution de Green d'une équation différentielle

On veut illustrer dans ce qui suit l'utilisation des distributions dans la résolution d'équations différentielles. Beaucoup de phénomènes physiques sont régis par des équations différentielles linéaires du type

$$L_n\left(\frac{d}{dt}\right) x(t) = g(t) \tag{4}$$

où $L_n(p) = a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n$ $(a_n \neq 0)$ et où la notation $\left(\frac{d}{dt}\right)^k$ signifie $\frac{d^k}{dt^k}$. La fonction $g(t)$ est connue et est interprétée comme un *signal d'entrée.* Supposons que g soit une fonction test. On montre aussi que, sous des hypothèses généralement vérifiées d'invariance de la solution par translation du temps, la solution générale de (4) peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = H * g(t) \tag{5}$$

Formellement, en reportant (5) dans (4), on s'apreçoit qu'il suffit pour déterminer H de résoudre le système

$$L_n\left(\frac{d}{dt}\right) H = \delta \tag{6}$$

dont le second membre est une distribution. La fonction H est la *réponse impulsionnelle* du système à *l'impulsion de Dirac* en entrée. Elle est aussi appelée *solution fondamentale* ou *solution de Green* de l'équation (4). Physiquement, la solution de (6) doit également vérifier la condition de *causalité*: pas de réponse avant une entrée ou encore $H(t) = 0$ si $t < 0$. On va montrer comment les distributions permettent de construire une solution causale de (6). Pour celà, on passe par l'équation homogène avec les conditions initiales particulières suivantes:

$$\begin{cases} L_n\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) = 0 \\ y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-2)}(0) = 0 \text{ et } y^{(n-1)}(0) = 1/a_n \end{cases} \tag{7}$$

On pose alors

$$H(t) = y(t)\, U(t)$$

avec $U(t) = \mathbb{I}_{[0,\infty[}(t)$. Montrer alors que si $y(t)$ est solution de (7) alors $H(t)$ est une solution de Green causale. Grâce à la formule (5), montrer que l'on peut écrire

$$x(t) = y * g(t)$$

Application. On étudie l'oscillateur harmonique avec amortissement

$$x''(t) + 2\alpha x'(t) + \omega^2 x(t) = g(t). \quad \omega^2 > \alpha^2$$

Vérifier que la solution de l'équation homogène avec conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ s'écrit

$$y(t) = \frac{1}{\omega_1} e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t)$$

avec $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$. En déduire l'expression de $x(t)$.

Problème 2 : Filtres analogiques et distributions.

On considère un système qui à une fonction (un signal) d'entrée $x(t)$ appartenant à un espace de fonctions $\mathcal{X}$ fait correspondre une fonction (un signal) de sortie $y(t)$ appartenant à un espace de fonctions $\mathcal{Y}$.

On rappelle que ce système est un *filtre* si l'application $A : x \in \mathcal{X} \longmapsto y \in \mathcal{Y}$ est

- **linéaire**, c'est-à-dire $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$;
- **invariant par translation**, c'est-à-dire que si à l'entrée $x(t)$ correspond la sortie $y(t)$, alors à l'entrée $x(t-a)$ correspond la sortie $y(t-a)$;
- **continue**, c'est-à-dire que si $(x_n)_n$ est une suite de fonctions de $\mathcal{X}$ qui converge vers la fonction nulle dans $\mathcal{X}$, alors la suite correspondante $(y_n)_n$ converge vers la fonction nulle dans $\mathcal{Y}$.

On considère le système qui à l'entrée x fait correspondre la sortie y solution de l'équation différentielle

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y^{(k)} = \sum_{l=0}^{q} b_l x^{(l)} \tag{8}$$

avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. On suppose ici que x est une distribution tempérée ($x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$), et on cherche donc y dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si P n'a pas de racine imaginaire pure, on peut écrire

$$Y = HX$$

et que le problème (8) admet une solution unique y dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

On montre de plus que si P n'a que des racines simples, on a

$$H(f) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k}{2i\pi f - z_k} + \sum_{k=0}^{q-p} \lambda_k \left(2i\pi f\right)^k$$

en posant $\lambda_k = 0$ si $k < 0$ (**remarque** : lorsqu'on travaille sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on n'a pas besoin ici de faire la distinction $q < p$ ou $q \geqslant p$, contrairement au cas où on travaille sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

2. Déterminer la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de $\delta^{(k)}$.

3. En déduire la réponse impulsionnelle du système, en fonction des $(\alpha_k)_k$, $(\lambda_k)_k$, et des $(z_k)_k$ (on séparera en 2 parties $K^+ = \{k \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $\mathrm{Re}(z_k) > 0\}$ et $K^- = \{k \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $\mathrm{Re}(z_k) < 0\}$).

4. **Application** : on cherche à déterminer la sortie du système

$$y' + ay = x'' + x' + x$$

avec $a > 0$. Ecrire $H(f)$ sous la forme

$$H(f) = \lambda_0 + \lambda_1 2i\pi f + \frac{\alpha_1}{2i\pi f - z_1}$$

en exprimant λ_0, λ_1, α_1, et z_1 en fonction de a. Déterminer la réponse impulsionnelle h de ce système.

Problème 3 : Corrélations et spectres de signaux périodiques

Question préliminaire : soit $p(t)$ une fonction localement intégrale, périodique de période T. On peut écrire

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} m(t - kT)$$

où $m(t)$ est le *motif* de $p(t)$, c'est-à-dire :

$$m(t) = \begin{cases} p(t) & , t \in [0; T] \\ 0 & , t \notin [0; T] \end{cases}$$

En écrivant $p(t)$ comme un produit de convolution, exprimer la transformée de Fourier de $p(t)$ en fonction de celle de $m(t)$ (on admettra que pour toute fonction g localement intégrable à support compact, et toute distribution tempérée $T \in S'(\mathbb{R})$, $g * T$ est une distribution tempérée, et la formule $\widehat{g * T} = \widehat{g}\widehat{T}$ est bien valable).

On s'intéresse à définir les notions de fonction d'inter/auto-corrélation et de densité spectrale pour des fonctions périodiques. On considère donc des fonctions x et y périodiques de période T, dans l'espace $L^2([0;T])$ (c'est-à-dire que $\int_0^T |x(t)|^2\,dt$ est finie).

1. On définit pour ce type de fonctions les fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation par les formules suivantes

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y^*(t-\tau)dt \\ R_x(\tau) &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x^*(t-\tau)dt \end{aligned}$$

   Montrer que ces fonctions sont bien définies pour tout τ et qu'elles sont bornées (on utilisera l'inégalité de Cauchy-Schwarz), et qu'elles sont périodiques de période T.

2. Les fonctions périodique x et y peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^x e^{2j\pi kt/T} \\ y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^y e^{2j\pi kt/T} \end{aligned}$$

   où $(c_k^x)_k$ et $\left(c_k^y\right)_k$ sont les coefficients de Fourier de $x(t)$ et de $y(t)$ (l'égalité ayant lieu dans $L^2([0;T])$).

   En supposant que $\sum_k |c_k^x|$ et $\sum_k \left|c_k^y\right|$ sont finis, montrer que

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^x c_k^{y^*}\, e^{2j\pi k\tau/T} \\ R_x(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k^x|^2\, e^{2j\pi k\tau/T} \end{aligned}$$

   (on justifiera l'inversion $\int$ et $\sum$ en utilisant le théorème de Fubini).

3. Soit (T_n) une suite de distributions tempérées telle que $\sum_n T_n$ converge dans $S'(\mathbb{R})$ vers la distribution tempérée T (c'est-à-dire, $\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$, $\langle T, \varphi \rangle = \left\langle \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} T_n, \varphi \right\rangle = \lim_{N \to +\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{N} T_n, \varphi \right\rangle$). Montrer que

$$\widehat{T} = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{T}_n$$

4. La *densité interspectrale de puissance* entre x et y, notée S_{xy}, et la *densité spectrale de puissance*, notée S_x, sont définies comme les transformées de Fourier respectives de R_{xy} et de R_x.

   En supposant que $\sum_k |c_k^x|$ et $\sum_k \left|c_k^y\right|$ sont finis, déterminer alors ces transformées en fonction des $(c_k^x)_k$ et $\left(c_k^y\right)_k$.

5. Soit la fonction

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) + B \sin(2\pi f_0 t)$$

   avec A et B réels. Calculer et représenter graphiquement S_x.