Thème Logique des propositions

Vision sémantique
Modélisation et Résolution de problèmes

Exercice 1 Modéliser en logique des propositions, sous la forme de formules bien formées, les énoncés suivants :

1. S'il pleut alors il y a des nuages.
2. J'aime Marie ou j'aime Anne, et si j'aime Marie alors j'aime Anne.
3. Je me distrais si je vais au concert ou si je lis. Je ne vais pas au concert et je me distrais. Donc je lis.
4. Quand je suis énervé je fais du yoga ou de la relaxation. Un adepte du yoga fait de la relaxation. Donc quand je ne fais pas de relaxation, je suis calme.
5. Je ne sortirai que s'il fait beau. Or il pleut donc je reste chez moi.
6. À moins qu'il ne fasse beau, je ne sortirai pas.
7. Je ne sortirai qu'à condition qu'il fasse beau.

Exercice 2 Montrer que la formule proposée pour la question 4 de l'exercice 1 est valide ou non valide, consistante ou non consistante.

- en utilisant une table de vérité.
- en utilisant la relation d'équivalence sémantique des formules bien formées

Exercice 3 Trois personnes A,B et C, accusées d'un vol, déclarent respectivement :

- DA : B est coupable et C est innocent.
- DB : Si A est coupable alors C l'est aussi.
- DC : Je suis innocent mais au moins l'une des deux autres personnes est coupable.

Utiliser le formalisme du calcul des propositions pour modéliser les questions suivantes et donner la réponse pour chaque question :

1. Les trois déclarations sont-elles compatibles ?
2. L'un des témoignages peut-il se déduire des autres ? Lequel ?
3. Si tous sont innocents, lequel/lesquels a/ont menti ?
4. Si tous disent la vérité, qui est coupable ?
5. Si seuls les innocents disent la vérité, qui est innocent ?

Rappels de cours distribués lors de l'examen écrit.

1 Logique des propositions : Vision sémantique

1.1 Tables de vérité

La sémantique de $\top$ (respectivement $\perp$) est représenté par V (respectivement F).

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V

1.2 Relation d'équivalence sémantique des formules bien formées

$\varphi = \psi$ si et seulement si les deux formules bien formées φ et ψ ont la même table de vérité.

	$A \rightarrow B = \neg A \vee B$ $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
Idempotence	$A \wedge A = A$ $A \vee A = A$
	$A \wedge \neg A = \perp$ $A \vee \neg A = \top$ $A \wedge \perp = \perp$ $A \wedge \top = A$ $A \vee \perp = A$ $A \vee \top = \top$ $\neg\neg A = A$
Commutativité	$A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$
Associativité	$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
Distributivité	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
De Morgan	$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
Simplification	$A \vee (\neg A \wedge B) = A \vee B$ $A \wedge (\neg A \vee B) = A \wedge B$ $A \vee (A \wedge B) = A$ $A \wedge (A \vee B) = A$