CHAPITRE 1

Le modèle probabiliste

Voici les premières phrases d'un manuel ([1]) : "La théorie des probabilités est une science mathématique étudiant les lois régissant les phénomènes aléatoires. Un phénomène est aléatoire si, reproduit maintes fois, il se déroule chaque fois un peu différemment, de sorte que le résultat de l'expérience change d'une fois à l'autre d'une manière aléatoire, imprévisible."

L'usage même du mot expérience sous-entend que le phénomène aléatoire est observé par le biais d'un critère bien défini, et que le résultat de cette observation peut être décrit sans ambiguïté. L'expérience peut aussi être répétée, et on suppose que chacun des résultats possibles est observé avec une certaine fréquence dont la valeur se stabilise si on répète l'expérience maintes et "maintes fois". C'est cette "loi" que présuppose l'existence d'un modèle probabiliste.

Ce premier chapitre est une rapide présentation du cadre formel des *modèles probabilistes.*

1- Evènements

Etant donnée une expérience aléatoire, on note Ω l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience.

Un singleton de Ω est appelé *évènement élémentaire.*

Un sous-ensemble A de Ω est appelé un *évènement* . Un évènement A est donc un ensemble constitué de résultats possibles de l'expérience. Si le résultat d'une expérience est dans A, on dit que A est réalisé.

Exemple 1-1 : On détermine le sexe d'un nouveau-né. On posera :

$$\Omega = \{f,\, g\}$$

Le résultat f signifie que le nouveau-né est une fille et g que c'est un garçon.

Exemple 1-2 : Sept étudiants, qu'on nomme ici a, b, c, d, e, f, g, doivent passer un oral d'examen. On leur distribue un numéro d'ordre. On pose :

$$\Omega = \{\textit{tous les alignements des sept noms}\; a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f,\, g\}$$

Le résultat $cfabdeg$ signifie que l'étudiant c est le premier, a le second, ...

L'ensemble A des arrangements qui commencent par cf est un évènement.

Exemple 1-3 : L'expérience consiste à déterminer la dose d'anésthésique minimale (exprimée en ml) à administrer à un patient pour l'endormir. On choisit :

$$\Omega =]0,\, +\infty[$$

L'évènement $A =]2, 3]$ est réalisé si la dose minimale à administrer est comprise entre 2 et 3, c'est-à-dire si une quantité supérieure ou égale à 3 suffit à endormir le patient, mais une quantité inférieure à 2 est insuffisante.

Dans le cadre de la théorie des probabilités, un évènement est généralement défini comme l'ensemble des résultats ayant une propriété donnée. La plupart du temps, l'ensemble A est noté comme la propriété qui le définit. Donnons quelques exemples de telles assimilations :

[1] H.Ventsel : Théorie des probabilités. (Ed.MIR, traduction française 1973).

Ω	:	évènement certain
$\emptyset$	:	évènement impossible
$A \cup B$	:	évènement ($A\, ou\, B$)
$A \cap B$	:	évènement ($A\, et\, B$)
$\overline{A}$	:	($non\, A$), évènement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	:	les évènements A et B sont incompatibles

Exercice 1-1 : Soit Ω l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire, et soient A, B et C des évènements. Traduire en termes ensemblistes les évènements :

a) les trois évènements A, B et C sont réalisés

b) aucun des évènements A, B ou C n'est réalisé

c) au moins un des évènements est réalisé

d) deux au plus des évènements est réalisé.

2- Loi de probabilité, espace de probabilité

On tire une boule dans une urne contenant 2 boules blanches, 1 noire, 4 vertes, 5 rouges, et on regarde sa couleur. Si on répète cette expérience, la fréquence avec laquelle on obtient une boule rouge se stabilise peu à peu sur une valeur, égale ici à $5/12$. On dit couramment qu'on a 5 chances sur 12 de tirer une boule rouge. Dans le cadre d'un modèle mathématique de cette expérience aléatoire, on dira que l'évènement "tirer une boule rouge" a la probabilité $5/12$. Plus généralement, dans un modèle probabiliste, chaque évènement est pondéré par un nombre compris entre 0 et 1, sa probabilité. Ces probabilités doivent respecter certaines règles de compatibilité, naturelles si on les interprète en termes de "nombre de chances sur 100". L'additivité est la principale de ces règles. Appliquée à un cas particulier dans notre exemple, elle exprime simplement que, puisqu'on a 5 chances sur 12 de tirer une boule rouge et 2 chances sur 12 de tirer une blanche, on a 5+2 chances sur 12 de tirer une boule soit rouge soit blanche. L'autre règle dit seulement que si on tire une boule, on a 100% de chances de ... tirer une boule...

Définition 1-1 : Soit Ω un ensemble. Une *loi de probabilité* P sur Ω est une fonction qui à tout évènement A associe un nombre réel $P(A)$, et qui a les trois propriétés :

a) $0 \leq P(A) \leq 1$

b) $P(\Omega) = 1$

c) Pour toute famille finie ou dénombrable A_1, A_2, ..., A_n, ... d'évènements *deux à deux disjoints*,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n ...) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) + ...$$

En particulier, si A et B sont disjoints, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(Ω, P) s'appelle un *espace de probabilité.*

Exemple 1-4 : On lance un dé et on observe la face du dessus. On posera :

$$\Omega = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\}$$

et on supposera que le dé est parfaitement équilibré, de sorte que la probabilité de chaque face est la même :

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = 1/6$$

Remarquons qu'alors, la probabilité de tout évènement est calculable en utilisant la propriété c) de la définition. Par exemple, comme $\{1,\, 3,\, 4\}$ est la réunion des trois ensembles 2 à 2 incompatibles $\{1\}$, $\{3\}$ et $\{4\}$, on a :

$$P(\{1,\, 3,\, 4\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2$$

Exemple 1-5 : Plus généralement, soit Ω un ensemble fini :

$$\Omega = \{\omega_1,\, \omega_2,\, ...,\, \omega_n\}$$

Définir une loi de probabilité P sur Ω revient à se donner n réels positifs ou nuls p_1, p_2, ..., p_n tels que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, et à poser, pour tout indice k, $P(\{\omega_k\}) = p_k$. La loi de probabilité sur Ω est alors complètement déterminée car, étant donné un évènement A, $P(A)$ est calculable en additionnant les probabilités p_k de chacun des évènements élémentaires $\{\omega_k\}$ qui composent A.

Il en est de même si Ω est un ensemble dénombrable, les sommes finies sont alors remplacées par les sommes de séries.

Proposition 1-1 : Soit (Ω, P) un espace de probabilité.

a) Si A est un évènement, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

b) Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$.

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

d) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

e) Plus généralement, pour toute famille finie ou dénombrable A_1, A_2, ..., A_n, ... d'évènements,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n ...) \leq P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) + ...$$

f) Si $(A_n)_{n=1,\,2,\,...,\,n,\,...}$ est une suite croissante d'évènements, c'est-à-dire si $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n ...$

$$P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$$

g) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements, c'est-à-dire si $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n ...$

$$P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$$

3- Le cas où les évènements élémentaires sont équiprobables

Soit (Ω, P) un espace de probabilité correspondant à une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possibles est fini :

$$\Omega = \{\omega_1,\, \omega_2,\, ...,\, \omega_n\}$$

Supposons que chaque résultat “a autant de chances d'être réalisé qu'un autre”, soit, en termes probabilistes, que P est telle que :

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \; ... = P(\{\omega_n\})$$

Comme la somme de ces n nombres est 1, leur valeur commune est égale à $1/n$. Soit maintenant un évènement A. Sa probabilité est :

$$P(A) = \sum_{k\,/\omega_k \in I} P(\{\omega_k\}) = card(A)\,.\,\frac{1}{n} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Cette loi de probabilité est souvent appelée *loi uniforme* sur Ω. Calculer des probabilités par une méthode directe dans ce cas revient donc à dénombrer des ensembles.

Exercice 1-2 : Un jeune enfant qui ne sait pas lire prend les 6 jetons d'un jeu de Scrabble qui composaient le mot “CARTON”. Il réaligne ces jetons au hasard. Avec quelle probabilité recompose-t-il ce mot ? Même question s'il a pris les 8 jetons qui composaient le mot “INSTITUT”.

Exercice 1-3 : 20 sujets sont au programme d'un oral d'examen. Le candidat tire au sort 3 de ces sujets et traite l'un de ces trois. Combien doit-il avoir révisé de sujets pour avoir au moins 9 chances sur 10 de pouvoir traiter un sujet qu'il a révisé ?

Remarque sur le choix du modèle probabiliste

Comme dans tout problème de modélisation, il n'y a pas d'automatisme qui permette d'associer un espace de probabilité à une expérience aléatoire “concrète”. Même dans des cas d'école, il n'y a jamais un seul “bon” choix : reprenons l'exemple de l'urne introduisant la section 2. Deux modèles peuvent être considérés comme naturels :

- On peut distinguer les 12 boules contenues dans l'urne en posant :

$$\Omega = \{B1,\ B2,\ N,\ V1,\ V2,\ V3,\ V4,\ R1,\ R2,\ R3,\ R4,\ R5\}$$

On munit alors Ω de la probabilité uniforme.

- On peut aussi choisir de ne représenter que la couleur de la boule tirée, en posant :

$$\Omega = \{B,\ N,\ V,\ R\}$$

et en définissant P par :

$$P(\{B\}) = \frac{2}{12}\ \ ,\ P(\{N\}) = \frac{1}{12}\ \ ,\ P(\{V\}) = \frac{4}{12}\ \ ,\ P(\{B\}) = \frac{5}{12}$$

Il est clair cependant qu'il est difficile de justifier le deuxième modèle sans faire appel à l'idée d'équiprobabilité des tirages, idée qui par contre est clairement exprimée dans le premier modèle.

Dans des cas concrets de modélisation, les hypothèses sur lesquelles repose la définition du modèle doivent être clairement énoncées, de telle sorte qu'elles puissent être commentées et éventuellement remises en question, soit directement, soit par leurs implications théoriques, soit par une confrontation avec des données expérimentales.

4- Exercices

Exercice 1-4 : Soit (Ω, P) un espace de probabilité. Soient A, B et C trois évènements. On dispose des données :

a) $P(A\,et\,B) = 0.17$	b) $P(A\,et\,C) = 0.16$	c) $P(B\,et\,C) = 0.26$
d) $P(A) = 0.30$	e) $P(B) = 0.42$	f) $P(C) = 0.71$
g) $P(A\,et\,B\,et\,C) = 0.11$		

Ces données permettent-elles de calculer la probabilité de réalisation :

- des deux évènements A et B uniquement ?

- d'aucun des trois évènements ?

- d'exactement 2 des 3 évènements ?

Exercice 1-5 : On jette 3 dés bien équilibrés. Avec quelle probabilité obtient-on :

a) 3 faces identiques

b) exactement deux faces identiques

c) 3 faces différentes

Exercice 1-6 : Deux personnes sont tirées au sort dans un groupe de 30 composé de 10 femmes et 20 hommes. Avec quelle probabilité ces deux personnes sont-elles des femmes ? Avec quelle probabilité sont-elles des hommes ?

Exercice 1-7 : Deux amis font partie d'un groupe de n personnes, auxquelles on a distribué au hasard des numéros d'ordre pour constituer une file d'attente.

a) Avec quelle probabilité sont-ils les deux premiers ?

b) Avec quelle probabilité sont-ils distants de r places, c'est-à-dire séparés par $r - 1$ personnes. Représenter ces probabilités par un diagramme en bâtons.

Exercice 1-8 : Un tiroir contient en vrac les 20 chaussettes de 10 paires différentes. On en sort au hasard 4 chaussettes. Avec quelle probabilité obtient-on :

a) 2 paires

b) au moins une paire

Exercice 1-9 : Dans un groupe de 20 personnes, quelle est la probabilité pour que deux personnes (au moins) aient leur anniversaire le même jour ? Et dans un groupe de 50 personnes ? (on fera comme si toutes les années avaient 365 jours).

CHAPITRE 2

Probabilités conditionnelles

1- Définition

Lançons un dé parfaitement équilibré. Un bon modèle probabiliste en est donné par :

$$\Omega = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\}$$

muni de la loi de probabilité P uniforme.

Notons A l'évènement "le dé donne au moins 4 points" et B l'évènement "le résultat est impair". Supposons qu'on ne retienne le résultat du lancer que s'il est dans B. Dans cette nouvelle expérience, l'évènement A est réalisé quand on obtient un 5, et c'est avec la *probabilité relative* $\frac{P(\{5\})}{P(\{1,3,5\})} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$. Plus généralement la probabilité relative de A sous la condition que B est réalisé est $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$. On l'appelle aussi probabilité de A sachant que B, ou probabilité conditionnelle de A relative à B, etc...

Définition 2-1 : Soit (Ω, P) un espace de probabilité, et soit B un évènement tel que $P(B) \neq 0$. La *probabilité de A sachant que B* est notée $P(A|B)$, et est définie par :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exercice 2-1 : a) Soit B un évènement tel que $P(B) \neq 0$. Que vaut $P(B|B)$?

b) Donner une propriété de A qui implique $P(A|B) = 1$, qui implique $P(A|B) = 0$, qui implique $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$.

Exercice 2-2 : Un couple a deux enfants.

a) Sachant que l'aîné est un garçon, avec quelle probabilité le couple a-t-il un fils et une fille ?

b) Sachant que l'un des enfants est un garçon, avec quelle probabilité le couple a-t-il un fils et une fille ?

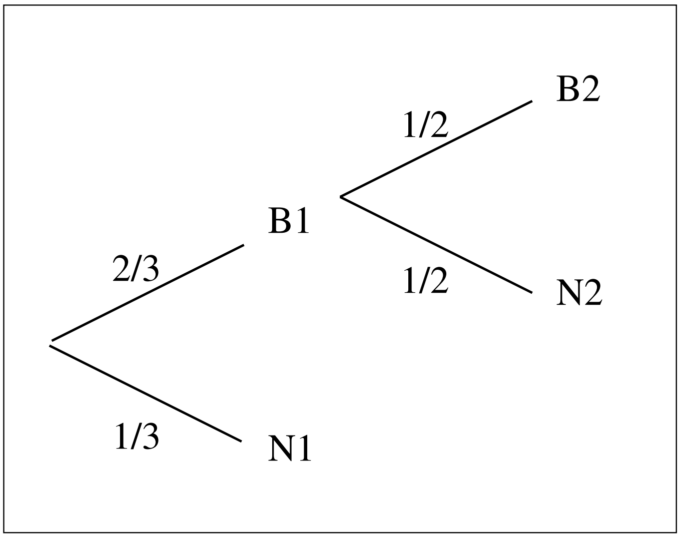
2- Deux résultats de décomposition

Les deux résultats de ce paragraphe utilisent "à l'envers" la définition 2-1, c'est-à-dire donnent un moyen de calcul de probabilités connaissant des probabilités conditionnelles. Ils sont très utiles dans la pratique.

Exemple 2-1 : Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. Une personne tire une boule et la garde, une deuxième personne tire une boule. Avec quelle probabilité les deux boules tirées sont-elles blanches ? On peut répondre à cette question en utilisant la définition 2-1. En effet, notons B_1 l'évènement "la première personne a tiré une boule blanche" et B_2 l'évènement "la deuxième personne a tiré une boule blanche". D'après la définition,

$$P(B_1 \,et\, B_2) = P(B_2|B_1)P(AB)$$

Mais $P(B_1)$ est connue, c'est $2/3$. $P(B_2|A_1)$ est aussi connue : c'est $1/2$ car, la première personne ayant tiré une boule blanche, la deuxième personne tire une boule au hasard dans une urne qui contient une boule blanche et une boule noire. Ainsi, $P(B_1 \,et\, B_2)$ vaut $(2/3).(1/2) = 1/3$.



La proposition suivante, parfois appelé “théorème des probabilités composées”, généralise ce procédé de calcul :

Proposition 2-1 : Soit (Ω, P) un espace de probabilité, et soient A_1, A_2, ..., A_n des évènements. On a :

$$P(A_n \, et \, A_{n-1} \, et \ldots et \, A_1) = P(A_n | A_{n-1} \, et \, .. \, et \, A_1) \, P(A_{n-1} | A_{n-2} \, et \ldots et \, A_1) \ldots P(A_2 | A_1) \, P(A_1)$$

Cet énoncé est constamment utilisé dans le contexte des “chaînes de Markov”, qui interviennent naturellement dans les problèmes concrets où A_1, A_2, ..., A_n représente une succession (temporelle) d'évènements, la probabilité de réalisation du n-ième évènement A_n étant conditionnée par “le passé” (probabilité sachant que $A_1 \, et \, .. \, et \, A_{n-1}$ ont eu lieu).

Exercice 2-3 : Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve de la nourriture qu'il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience élémentaire est répétée jusqu'à ce que le rat trouve le bon couloir. Sous chacune des hypothèses suivantes :

(H1) le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures,

(H2) le rat se souvient de l'expérience immédiatement précédente,

(H3) le rat se souvient des deux expériences précédentes,

avec quelle probabilité la première tentative réussie est-elle la première ? la deuxième ? la troisième ? la k-ième ?

Soient C_1, C_2, ..., C_n n évènements deux à deux disjoints et dont la réunion est l'ensemble de tous les résultats possibles Ω. En termes ensemblistes, C_1, C_2, ..., C_n est donc une *partition* de Ω ; en termes probabilistes, on l'appelle un *système complet d'évènements* . Soit A un évènement. On a :

$$A = (A \cap C_1) \cup (A \cap C_2) \cup \ldots \cup (A \cap C_n)$$

et les ensembles $(A \cap C_1)$, $(A \cap C_2)$, ..., $(A \cap C_n)$ sont deux à deux disjoints. Ainsi :

$$P(A) = P(A \cap C_1) + P(A \cap C_2) + \ldots + P(A \cap C_n)$$

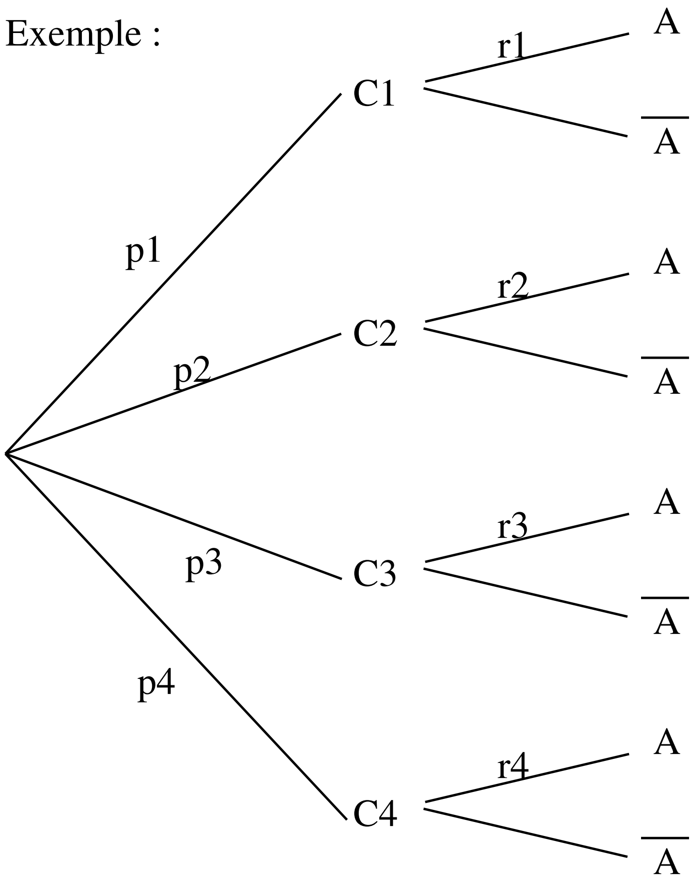
et en utilisant la définition 2-1, on obtient le résultat :

Proposition 2-2 : Soit (Ω, P) un espace de probabilité, et soit C_1, C_2, ..., C_n un système complet d'évènements. Soit A un évènement. On a :

$$P(A) = P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \ldots + P(A|C_n)P(C_n)$$

(Remarquons sans démonstration que ce résultat se généralise à un système complet dénombrable d'évènements.)

Exemple :



P(A) = r1 p1 + r2 p2 + r3 p3 + r4 p4

Exercice 2-4 : En 2004 (enquête emploi INSEE), la population active en France comprend 46,2% de femmes. Le taux de chômage ou de sous-emploi chez les hommes est 11% ; il est chez les femmes 18,6% . On tire au sort une personne parmi les actifs.

a) Avec quelle probabilité est-elle au chômage ou en sous-emploi ?

b) Sachant qu'elle est au chômage ou en sous-emploi, avec quelle probabilité est-ce une femme ?

Proposition 2-3 (formule de Bayes, ou théorème de la probabilité des causes) : Sous les hypothèses de la proposition 2-2 :

$$P(C_1|\,A) = \frac{P(A|C_1)P(C_1)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + ... + P(A|C_n)P(C_n)}$$

3- Evènements indépendants

Il est naturel de poser que, du point de vue de leur probabilité de réalisation, deux évènements A et B sont indépendants si le fait de savoir que B est réalisé n'apporte pas d'information sur les chances de réalisation de A, c'est-à-dire si la probabilité de A sachant que B est égale à $P(A)$, et donc si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Posons la définition suivante :

Définition 2-2 : Soit (Ω, P) un espace de probabilité. Soient A et B deux évènements. On dit que A et B sont ***indépendants*** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Plus généralement, soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements. On dit que ces évènements sont ***indépendants dans leur ensemble*** si, quel que soit le sous-ensemble d'indices i_1, i_2, ..., i_k pris dans I,

$$P(A_{i_1} \, et \, A_{i_2} \, et \, ... \, et \, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \, P(A_{i_2}) \, ... \, P(A_{i_k})$$

Exercice 2-5 : Soit (Ω, P) un espace de probabilité, et soient A, B et C trois évènements. Ecrire les quatre conditions qui doivent être vérifiées pour que A, B et C soient indépendants dans leur ensemble.

Proposition 2-4 : a) Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

Cette propriété se généralise au cas d'une famille finie d'évènements indépendants dans leur ensemble : par exemple, si les évènements A, B, C sont indépendants dans leur ensemble, alors

$$P(\overline{A} \, et \, B) = P(\overline{A}) \, P(B) \quad P(\overline{A} \, et \, B \, et \, \overline{C}) = P(\overline{A}) \, P(B) \, P(\overline{C}) \quad etc.$$

Exercice 2-6 : Deux évènements A et B incompatibles sont-ils indépendants ?

Remarque : Lançons deux dés, chacun parfaitement équilibré. L'ensemble des résultats possibles est :

$$\Omega = \{(i, \, j), \, 1 \leq i \leq 6, \, 1 \leq j \leq 6\} = \{1, \, ..., \, 6\} \times \{1, \, ..., \, 6\}$$

Notons A l'évènement "le premier dé donne 4". Comme le premier dé est parfaitement équilibré, la probabilité de A est $1/6$. Notons B l'évènement "le deuxième dé donne 6". Comme le deuxième dé est parfaitement équilibré, la probabilité de B est $1/6$. De plus, nous pouvons sans difficulté supposer que les évènements A et B sont indépendants. Donc, la probabilité de $(A \, et \, B)$, c'est-à-dire de l'évènement élémentaire $\{(4, 6)\}$, est égale à $(1/6).(1/6) = 1/36$, et de même bien sûr pour tout autre couple $(i, \, j)$. Ce raisonnement confirme le choix de la loi uniforme sur Ω pour représenter l'expérience aléatoire du lancer de deux dés.

Exercice 2-7 : On lance deux dés. Avec quelle probabilité la somme des points obtenus est-elle égale à 11 ? à 10 ?

Plus généralement, considérons une expérience aléatoire dont $(\Omega_0, \, P_0)$ est un modèle probabiliste. Si cette expérience est répétée n fois de façon indépendante, on choisira comme ensemble de résultats $\Omega = (\Omega_0)^n$, qu'on munira de la ***probabilité produit***, c'est-à-dire telle que, quels que soient les sous-ensembles A_1, A_2, ..., A_n de Ω_0 :

$$P(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) = P_0(A_1) \, P_0(A_2) \, ... \, P_0(A_n)$$

4- Exercices

Exercice 2-8 : Un joueur a dans sa poche 3 pièces d'apparences identiques :

- la pièce A est normale et parfaitement équilibrée,

- la pièce B est truquée : si on la lance, on obtient "face" avec la probabilité $2/3$, "pile" avec la probabilité $1/3$,

- la pièce C est aussi truquée : si on la lance, on obtient "face" avec la probabilité $1/3$, "pile" avec la probabilité $2/3$.

Le joueur a pris au hasard une pièce dans sa poche. Il l'a lancée une première fois et a obtenu "face". Il l'a relancée et a obtenu "face". Il l'a lancée une troisième fois et a obtenu "pile". Avec quelle probabilité est-ce la pièce A qu'il a lancée ?

Exercice 2-9 : Pour décider d'un traitement thérapeutique, on utilise un test qui est positif 99 fois sur 100 si une personne est effectivement malade. Mais si une personne n'est pas malade, le test est positif une fois sur 100. On sait par ailleurs que 5 personnes sur 100 ont cette maladie.

a) Si le test d'une personne est positif, avec quelle probabilité cette personne est-elle effectivement malade ?

b) Si le test d'une personne est négatif, avec quelle probabilité cette personne n'est-elle effectivement pas malade ?

Calculer ces probabilités quand on sait que 5 personnes sur 1000 ont cette maladie.

Exercice 2-10 : On transmet un message composé de n symboles binaires '0' ou '1'. Lors de la transmission, chaque symbole est perturbé avec la probabilité p et se transforme alors en symbole opposé. Par précaution, le message est transmis deux fois. Si les deux messages transmis coïncident, l'information est considérée comme correcte.

a) Avec quelle probabilité le i-ième symbole du premier message transmis est-il identique au i-ième symbole du deuxième message transmis ?

b) Avec quelle probabilité les deux messages transmis sont-ils identiques ?

c) Trouver la probabilité pour que, malgré la coïncidence des deux messages, l'information s'avère erronée.

Exercice 2-11 : Un candidat d'un jeu télévisé américain est face à trois portes. Derrière l'une d'elles se trouve le prix, - une voiture -. Le candidat se place devant la porte de son choix. Le présentateur de l'émission, qui lui sait où se trouve la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes et indique au candidat que la voiture ne s'y trouve pas. Le candidat peut à son tour ouvrir une porte. S'il découvre la voiture, il la gagne.

Un candidat décide d'adopter l'une des trois stratégies suivantes :

a) ouvrir la porte devant laquelle il s'est placé à l'issu de son premier choix,

b) ouvrir l'autre porte,

c) tirer à pile ou face et, s'il obtient pile, ouvrir la porte devant laquelle il s'est placé à l'issu de son premier choix, ouvrir l'autre porte s'il obtient face.

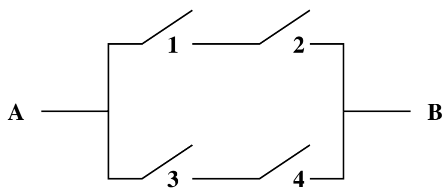
L'une de ces trois stratégies est-elle préférable aux autres ?

Exercice 2-12 : La probabilité de fermeture du relai i des circuits décrits ci-dessous est p_i. Tous les relais fonctionnent indépendamment. Dans chacun des cas suivants, quelle est la probabilité pour que le courant passe entre les points A et B ?

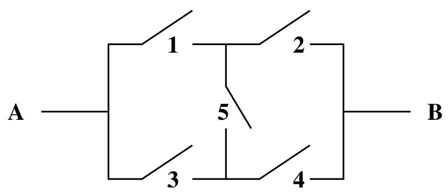
a) A et B sont séparés par n relais reliés en série.

b) A et B sont séparés par n relais reliés en parallèle.

c)



d)



CHAPITRE 3

Variables aléatoires : généralités

1- Définition

Dans beaucoup de situations, le détail du résultat d'une expérience aléatoire ne nous intéresse pas, mais seulement une valeur numérique fonction de ce résultat. Par exemple, on peut se demander quel est le nombre de pannes d'un ordinateur sur une durée d'un an, sans être intéressé par les dates auxquelles ont lieu ces pannes. Etudions un exemple plus simple :

Exemple 3-1 : On lance deux dés, et on regarde la somme des points obtenus. On choisit pour modèle probabiliste du lancer des deux dés

$$\Omega = \{(i,\, j)\,,\, 1 \leq i \leq 6,\, 1 \leq j \leq 6\}$$

muni de la loi de probabilité P uniforme, qui affecte à chaque évènement élémentaire $(i,\, j)$ la probabilité $P(i,\, j) = 1/36$. Avec quelle probabilité la somme des points obtenus est-elle égale, par exemple, à 5 ? C'est la probabilité de l'ensemble des évènements élémentaires $(i,\, j)$ qui réalisent cette condition.

Introduisons l'application S de Ω dans $\mathbb{R}$, qu'on dira être une *variable aléatoire* , définie par

$$\forall (i,\, j)\, \in \Omega \quad S(i,\, j) = i + j$$

La question posée est le calcul de la probabilité de l'évènement $\{(i,\, j)\,,\, S(i,\, j) = 5\}$, c'est-à-dire de l'évènement $\{(1,4),\, (2,3),\, (3,2),\, (4,1)\}$. On notera cet évènement, de façon simplifiée, $\{S = 5\}$. On trouve

$$P(\{S = 5\}) = P(\{(i,\, j)\,,\, S(i,\, j) = 5\}) = P(\{(1,4),\, (2,3),\, (3,2),\, (4,1)\}) = 4/36$$

Remarquons que S prend ses valeurs dans $\{2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6,\, 7,\, 8,\, 9,\, 10,\, 11,\, 12\}$ et que, par conséquent

$$\sum_{k=2}^{12} P(\{S = k\}) = P(\bigcup_{k=2}^{12} \{S = k\}) = P(\Omega) = 1$$

Abordons maintenant le cas général, dans lequel l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire n'est pas forcément fini ou dénombrable :

Définition 3-1 : On appelle *variable aléatoire* une application X définie sur un espace de probabilité (Ω, P) et à valeurs réelles.

2- Variables aléatoires indépendantes

Définition 3-2 : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, P). On dit qu'elles sont indépendantes si pour tous sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$, les évènements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants, c'est-à-dire si

$$P(X \in A \; et \; Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

Plus généralement, soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires. On dit que ces variables aléatoires sont ***indépendantes*** si, quel que soit le sous-ensemble d'indices i_1, i_2, ..., i_k pris dans I, quels que soient les sous-ensembles A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k} de $\mathbb{R}$,

$$P(X_{i_1} \in A_{i_1} \; et \; X_{i_2} \in A_{i_2} \; et \ldots et \, X_{i_k} \in A_{i_k}) = P(X_{i_1} \in A_{i_1})\, P(X_{i_2} \in A_{i_2}) \ldots P(X_{i_k} \in A_{i_k})$$

Exercice 3-1 : a) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, P), à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$.

a) On suppose dans cette question

$$P(X=-1 \; et \; Y=0) = P(X=1 \; et \; Y=0) = P(X=0 \; et \; Y=-1) = P(X=0 \; et \; Y=1) = 1/4$$

Que vaut $P(X=0 \, et \, Y=0)$? Quelle est la loi de X ? de Y ? X et Y sont-elles indépendantes ?

b) On suppose ici que $P(X=-1) = P(X=1) = 1/4$, $P(X=0) = 1/2$, que Y a la même loi que X, et que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Calculer $P(X=-1 \; et \; Y=0)$, $P(X=0 \; et \; Y=0)$.

On peut montrer, par exemple, que si $(X_1, X_2, ..., X_{10})$ est une famille de variables aléatoires indépendantes, alors $(X_1+X_2+X_3\,,\ \cos(X_5+X_7)\,,\ 2X_6-1)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 3-1 : Soit $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes. Soient $I_1, I_2, ..., I_k$ des sous-ensembles de I *deux à deux disjoints*. Alors, une famille de variables aléatoires constituée d'une fonction des X_i $(i \in I_1)$, d'une fonction des X_i $(i \in I_2)$, ..., d'une fonction des X_i $(i \in I_k)$, est une famille de variables aléatoires indépendantes.

3- Fonction de répartition

Définition 3-3 : Soit X une variable aléatoire. La *fonction de répartition* F de X est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par

$$F(x) = P(\{X \leq x\})$$

Exercice 3-2 : Représenter la fonction de répartition de la variable aléatoire S de l'exemple 3-1.

Propriété : On peut montrer que si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire :

a) F est croissante,

b) F est continue à droite en tout point,

c) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

et inversement, mais la démonstration n'est plus élémentaire, qu'une fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés a), b) et c) est la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

On déduit de la proposition 1-1-f le résultat suivant :

Proposition 3-2 : Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. Alors

$$P(\{X < a\}) = \lim_{x\to a^-} F(x) = F(a^-)$$

Exercice 3-3 : Soit X une variable aléatoire, et soit F sa fonction de répartition. Pour a et b réels $(a < b)$, exprimer en fonction de F :

a) $P(X > a)$, $\quad P(a < X \leq b)$

b) $P(X \geq a)$, $\quad P(X = a)$, $\quad P(a \leq X < b)$, $\quad P(a < X < b)$, ...

Cet exercice montre que la connaissance de la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X permet de calculer, pour n'importe quel intervalle I de $\mathbb{R}$, la probabilité $P(\{X \in I\})$. On peut démontrer qu'elle permet aussi, - en principe tout du moins -, de calculer la probabilité $P(\{X \in B\})$ pour n'importe quel sous-ensemble B de $\mathbb{R}$. On dit en résumé que la fonction de répartition de X détermine la ***loi*** ou la ***loi de probabilité de*** X. (Ce vocabulaire est justifié par le fait que l'application qui à un sous-ensemble B de $\mathbb{R}$ associe $P(\{X \in B\})$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$).

Exercice 3-4 : Soit X une variable aléatoire. On suppose que sa fonction de répartition F est donnée par

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && si\, x < 0 \\ &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}(1 - e^{-x}) && si\, x \geq 0 \end{aligned}$$

a) Dessiner le graphe de F.

b) Calculer $P(X > -2),\ \ P(1 - 1/n < X \leq 1),\ \ P(X = 1),\ \ P(X \leq 0),\ \ P(X = 0)$

4- Variables aléatoires discrètes

Définition 3-4 : Une variable aléatoire X qui prend ses valeurs dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$, $\{x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n\}$ ou dénombrable, $\{x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n,\, ...\}$ est dite *discrète*.

La variable aléatoire S de l'exercice 3-1, la somme des points obtenus en lançant deux dés, est un exemple de loi discrète.

Exercice 3-5 : On lance 2 dés. On définit la variable aléatoire X qui vaut 1 si on obtient une somme de points supérieure ou égale à 10, et vaut 0 sinon. Que valent $P(X = 1)$, $P(X = 0)$? Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

Proposition 3-3 : Soit X une variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans $\{x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n\}$, où les x_i sont tous distincts. Notons

$$P(X = x_i) = p_i$$

Alors

$$0 \leq p_i \leq 1 \qquad et \qquad p_1 + p_2 + \, ... + p_n = 1$$

et la donnée des réels p_i vérifiant ces conditions définit complètement la *loi de la variable aléatoire* X. En effet, pour tout sous-ensemble B de $\mathbb{R}$, on a

$$P(\{X \in B\}) = \sum_{i\ /\ x_i \in B} p_i$$

En particulier, la fonction de répartition F de X s'exprime, pour tout réel a, par

$$F(a) = P(\{X \leq a\}) = \sum_{i\ /\ x_i \leq a} p_i$$

F est constante par morceaux, ses discontinuités sont situées aux points d'abscisse x_i, la hauteur du saut correspondant étant p_i.

(Cette proposition se généralise au cas où X prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable.)

Proposition 3-4 : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace de probabilité (Ω, P). Supposons que X prend ses valeurs dans le sous-ensemble $\{(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n)\}$de $\mathbb{R}$, et que Y prend ses valeurs dans le sous-ensemble $\{(y_1,\, y_2,\, ...,\, y_m)\}$de $\mathbb{R}$. Alors, X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout couple $(i,\, j)$ $(i = 1,\, ...,\, n,\ \ j = 1,\, ...,m)$

$$P(X = x_i \ et\ Y = y_j) = P(X = x_i)\, P(Y = y_j)$$

Cette proposition se généralise à un nombre fini de variables aléatoires discrètes.

5- Variables aléatoires à densité

Définition 3-5 : On dit qu'une variable aléatoire X est *à densité* s'il existe une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, positive ou nulle, et telle que, pour tout sous-ensemble B de $\mathbb{R}$

$$P(\{X \in B\}) = \int_B f(x)\, dx$$

On appelle cette fonction f la *fonction de densité de probabilité* de la variable aléatoire X.

Exercice 3-6 : On fait tourner une aiguille autour d'un axe et on repère la position sur laquelle elle s'arrête par un angle Θ compris entre 0 et 2π.

a) Quelles valeurs aimerait-on pouvoir donner à $P(0 \leq \Theta \leq \pi)$, $P(\pi \leq \Theta \leq 2\pi)$, $P(\pi/4 \leq \Theta \leq \pi/2)$? Et à $P(\{\Theta \in I\})$ lorsque I est un sous-intervalle de longueur l de $[0,\, 2\pi[$?

b) Peut-on proposer une fonction f qui soit la densité de la loi Θ et réalise ces conditions ?

Proposition 3-5 : Soit X une variable aléatoire à densité. Sa densité f vérifie nécessairement :

$$f \geq 0 \quad et \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

et la donnée d'une fonction f vérifiant ces conditions définit complètement la ***loi de la variable aléatoire*** X. Quels que soient a et b ($a < b$),

$$P(X = a) = 0,\ \ P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

La fonction de répartition F de X est donnée par

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$$

et elle est continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$f = F'$$

Exercice 3-7 : Dessiner le graphe de la fonction de répartition de la variable aléatoire Θ de l'exercice 3-6.

Exercice 3-8 : Soit X une variable aléatoire à densité f définie par :

$$\begin{aligned} f(x) &= cx && si\, 1 < x < 4 \\ &= 0 && sinon \end{aligned}$$

a) Calculer la valeur de c.

b) Que vaut $P(1 \leq X \leq 2)$?

c) Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

Remarquons qu'une variable aléatoire peut n'être ni discrète, ni à densité, mais *mixte* : le cas proposé dans l'exercice 3-4 en est un exemple (F n'est ni constante par morceaux, ni continue sur $\mathbb{R}$).

Pour exprimer l'indépendance de variables aléatoires à densité, on utilise la caractérisation suivante, qui est en fait valide pour des variables aléatoires quelconques, discrètes, à densité, ou mixtes :

Proposition 3-6 : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, P), de fonctions de répartitions F_X et F_Y. X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tout réels x et y

$$P(X \leq x \ et\ Y \leq y) = F_X(x)\, F_Y(y)$$

autrement dit, si et seulement

$$P(X \leq x \ et\ Y \leq y) = P(X \leq x)\, P(Y \leq y)$$

Cette proposition se généralise à un nombre fini de variables aléatoires.

5- Exercices

Exercice 3-9 : On lance 2 dés. On note X le résultat du premier dé, Y le résultat du deuxième dé. Calculer $P(X + Y = 3)$, $P(X - Y = 0)$, $P(X + Y = 3 \ et\ X - Y = 0)$. Les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 3-10 : Exprimée en heures, la durée de vie D d'un certain modèle d'ampoule électrique est une variable aléatoire de densité f donnée par

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{c}{x^2} && si\, x > 200 \\ &= 0 && sinon \end{aligned}$$

a) Calculer c.

b) On contrôle l'état d'une ampoule après 300 heures d'utilisation. Avec quelle probabilité est-elle hors d'usage ?

c) On équipe un local souterrain de 5 de ces ampoules électriques, neuves. On suppose que les durées de vie D_1, ..., D_5 de ces ampoules sont des variables aléatoires indépendantes et de densité f. On contrôle l'état des ampoules après 300 heures d'utilisation. Avec quelle probabilité deux (exactement) des ampoules sont-elles hors d'usage ?

Exercice 3-11 : On tire n nombres réels au hasard et indépendamment suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On les note X_1, X_2, ..., X_n. On pose $M = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$.

a) Que vaut $P(X_1 \leq 2/3 \; et \; X_1 \leq 2/3 \; et \ldots et \, X_n \leq 2/3)$? Que vaut $P(M \leq 2/3)$?

b) Quelle est la fonction de répartition de M ? Quelle est la densité de la loi de M ?

c) Mêmes questions qu'en b) avec $\min(X_1, X_2, ..., X_n)$.

CHAPITRE 4

Caractéristiques numériques des variables aléatoires

1- Espérance d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur un espace de probabilité (Ω, P). L'*espérance* $E(X)$ de X est la valeur moyenne des valeurs prises par X, pondérées par leur probabilité de réalisation. Les mathématiciens disposent d'une théorie, la théorie de la mesure, pour définir cet objet dans un cas général. Ici, nous nous restreignons aux deux cas particuliers des variables aléatoires discrètes ou à densité, et nous utiliserons comme définition de l'espérance les caractérisations suivantes :

Définition 4-1 : Soit X une variable aléatoire discrète et prend ses valeurs dans un sous-ensemble fini $\{x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n\}$de $\mathbb{R}$. L'espérance $E(X)$ de X est

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i)$$

et cette formule s'étend au cas où X prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n,\, ...\}$.

Exercice 4-1 : Quelle est l'espérance de la variable aléatoire qui représente le nombre de points obtenus en lançant un dé ?

Définition 4-2 : Soit X une variable aléatoire à densité f. L'espérance $E(X)$ de X est

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) \, dx$$

Exercice 4-2 : Quelle est l'espérance de la variable aléatoire Θ de l'exercice 3-6 ?

Exercice 4-3 : Dans chacun des deux cas suivants, calculer $E(X)$, décrire la loi de X^2 et calculer $E(X^2)$.

a) $P(X = -2) = 0.1 \qquad P(X = 1) = 0.6 \qquad P(X = 2) = 0.3$

b) X à densité f définie par

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= 1/2 \quad \textit{si } -1 \leq x \leq 1 \\ &= 0 \qquad \textit{sinon} \end{aligned}$$

Pour calculer l'espérance X^2 ou plus généralement d'une fonction $\phi(X)$ de X, on peut éviter la détermination de la loi de $\phi(X)$ en utilisant le résultat suivant :

Proposition 4-1 : Soit X une variable aléatoire et soit ϕ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Si X est discrète et prend ses valeurs dans $\{x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n\}$,

$$E(\phi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) \, P(X = x_i)$$

et cette formule s'étend au cas où X prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n,\, ...\}$.

- Si X est à densité f,

$$E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \, f(x) \, dx$$

Exercice 4-4 : Reprendre les exemples de l'exercice 4-3 et calculer $E(X^2)$ en utilisant la proposition 4-1.

L'énoncé suivant sera très utilisé par la suite :

Proposition 4-2 : Soient X et Y deux variables aléatoires sur un espace de probabilité (Ω, P), et soient a et b deux réels. Alors

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Exercice 4-5 : On lance deux dés, et on note S la variable aléatoire qui représente la somme des points obtenus. Quelle est l'espérance de S ?

2- Variance d'une variable aléatoire

Exemple 4-1 : Considérons les quatre variables aléatoires :

$X_1 = 0$, c'est-à-dire la variable “aléatoire” constante et nulle,

X_2 de loi uniforme sur $[-1, +1]$,

X_3 de loi uniforme sur $[-100, +100]$,

X_4 telle que $P(X_4 = -3000) = 1/2$, $P(X_4 = 2000) = P(X_4 = 4000) = 1/4$

Elles ont toutes quatre pour espérance 0, mais leurs lois sont clairement différentes. Une caractéristique qui les distingue est l'étalement, la dispersion, des valeurs qu'elles prennent autour de leur valeur moyenne $E(X_i) = 0$. Une façon de mesurer cette dispersion est de regarder la valeur moyenne de la distance entre X_i et $E(X_i)$. Pour des raisons pratiques, on préfère choisir la valeur moyenne du carré de la distance entre X_i et $E(X_i)$, qu'on appelle la variance.

Définition 4-3 : Soit X une variable aléatoire sur un espace de probabilité (Ω, P). La *variance* $\nu(X)$ de X est

$$\nu(X) = E(\,(X - E(X))^2\,)$$

L'*écart-type* $\sigma(X)$ de X est

$$\sigma(X) = \sqrt{\nu(X)}$$

(Remarquons que si l'unité de mesure dans laquelle X est exprimé est, par exemple, le mètre, $\nu(X)$ est en mètre carré et $\sigma(X)$ en mètre).

On peut déduire facilement de la proposition 4-2 l'égalité suivante, parfois utile dans le calcul effectif de variances :

$$\nu(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Exercice 4-6 : Calculer les variances des variables aléatoires X_i de l'exemple 4-1.

Exercice 4-7 : On lance un dé, et on note X la variable aléatoire qui représente le nombre de points obtenus. Quelle est la variance de X ?

Proposition 4-3 : Soit X une variable aléatoire.

a) La variance de X est nulle si et seulement si il existe un réel c tel que $P(X = c) = 1$. On dit alors que X est *presque sûrement* constante.

b) Soient a et b deux réels. Alors

$$\nu(aX + b) = a^2\nu(X) \qquad \sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$$

Proposition 4-4 : Soit X une variable aléatoire, qui n'est pas constante presque sûrement. La variable aléatoire $(X - E(X))/\sigma(X)$ est appelée *variable aléatoire centrée réduite* associée à X. Son espérance est nulle et son écart-type est égal à 1 :

$$E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = 0 \qquad \sigma\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = 1$$

Le passage de l'une des variables à l'autre se fait tout simplement par un changement d'origine et d'unité dans l'ensemble des valeurs prises par X.

L'expression de la variance d'une variable aléatoire n'est manifestement pas linéaire. De fait, *si X et Y sont deux variables aléatoires sur (Ω, P), en général,*

$$\nu(X+Y) \neq \nu(X) + \nu(Y)$$

et de même pour l'écart-type.

Exemple 4-2 : Soit X une variable aléatoire de variance non nulle, - c'est-à-dire qui n'est pas presque sûrement constante -. On a :

$$\nu(\,X + (-X)\,) = \nu(0) = 0 \quad et \quad \nu(X) + \nu(-X) = 2\nu(X) \neq 0$$

On a cependant le résultat important suivant :

Proposition 4-5 : Soient X et Y deux variables aléatoires sur (Ω, P). *Si X et Y sont indépendantes*, alors

$$\nu(X+Y) = \nu(X) + \nu(Y) \quad et \quad \sigma(X+Y) = \sqrt{\nu(X) + \nu(Y)}$$

Exercice 4-8 : On lance n fois un dé, et on note S la variable aléatoire qui représente la somme des points obtenus. Quelle est la variance de S ? Quelle est la variance de S/n ?

3- Exercices

Exercice 4-9 : Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire M de l'exercice 3-11.

Exercice 4-10 : Les transistors fournis par une usine sont défectueux dans la proportion p. On teste un transistor après l'autre jusqu'à en obtenir un bon. On note N le nombre de tests effectués. Quelle est la loi de N ? Exprimer l'espérance de N.

Exercice 4-11 : Une machine est constituée de n sous-unités identiques. Elle fonctionne si toutes ses sous-unités fonctionnent. Le procédé de construction des sous-unités est tel qu'elles sont défectueuses dans la proportion p, et indépendamment les unes des autres. Pour construire une machine sans défaut, deux procédés sont envisagés :

a) On construit une sous-unité, on la teste, si elle est bonne, on la monte, sinon, on la jette, etc.. On continue jusqu'à avoir monté les n sous-unités de la machine. On suppose pour simplifier qu'il n'y a pas de problème de montage. La machine ainsi construite est donc bonne.

b) On construit et monte sans les tester n sous-unités, et on teste la machine ainsi constituée. Si elle ne marche pas, on la jette, et on recommence jusqu'à obtenir une bonne machine.

On note :

c_u le coût de construction d'une sous-unité,

t_u le coût du test d'une sous-unité,

t_m le coût du test d'une machine,

et on suppose pour simplifier que le coût d'assemblage des unités est nul.

On note C le coût de construction d'une bonne machine.

a) Calculer l'espérance de C dans les deux cas, a) et b).

2) On suppose $t_u = t_m = c_u/2$, et $n = 10$ (puis $n = 100$). Suivant la valeur de p, quel est le procédé de fabrication qui est préférable ?

Exercice 4-12 : Le rayon "télévision" d'un magasin d'une petite ville propose 2 modèles A et B. On a constaté qu'un visiteur de ce rayon achète un poste de la marque A avec la probabilité p_A, un poste de la marque B avec la probabilité p_B, n'achète rien avec la probabilité q ($p_A > 0$, $p_B > 0$, $q > 0$, $p_A + p_B + q = 1$), et que les choix des visiteurs sont indépendants. 100 personnes visitent ce rayon.

1) Quelle est la probabilité ρ de l'évènement "les 10 premiers visiteurs achètent un poste A, les 20 suivants un poste B, les 70 autres n'achètent rien" ?

2) On note X le nombre de clients qui achètent un poste A, Y le nombre de clients qui achètent un poste B.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Que vaut $E(X)$?

c) Exprimer $P(X = 60)$.

3) a) Préciser quel est l'évènement $\{X = 60\ et\ Y = 60\}$. En déduire la valeur de $P(X = 60\ et\ Y = 60)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

b) A-t-on $P(X = 10\, et\, Y = 20) = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 20 \end{pmatrix} p_A^{10}\, p_B^{20}\, q^{70}$? (Justifier la réponse).

4) Le vendeur fait un bénéfice de α francs sur la vente d'un poste A, de β francs sur la vente d'un poste B. On note T le bénéfice correspondant aux 100 visiteurs.

a) Exprimer T en fonction de X et Y.

b) Que vaut $E(T)$?

c) Peut-on affirmer $\nu(T) = \alpha^2\nu(X) + \beta^2\nu(Y)$? (Justifier la réponse).

CHAPITRE 5

Variables aléatoires usuelles

Voici une liste de définitions et propriétés de quelques lois connues. On pourra trouver beaucoup d'autres lois classiques dans la "littérature" : les lois hypergéométrique, multinomiale, gamma, etc..

1- Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Soit A un évènement de probabilité p. Introduisons la variable aléatoire X telle que

$$\begin{aligned} X &= 1 \qquad \text{si l'évènement } A \text{ est réalisé} \\ &= 0 \qquad \text{sinon} \end{aligned}$$

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Plus généralement, soit p dans $[0, 1]$. Par définition, une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ si

$$P(X = 1) = p \qquad P(X = 0) = 1 - p$$

On a alors

$$E(X) = p \qquad \nu(X) = p(1 - p)$$

2- Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

On exécute une succession de n expériences aléatoires indépendantes, le résultat de chacune réalisant un évènement A avec la probabilité p. On note X le rang de la première réalisation de A. La loi de X est appelée loi géométrique de paramètre p. Un exemple en a été donné dans l'exercice 4-10. Cette loi est définie par

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \qquad \textit{pour } k = 1, 2, ...$$

et vérifie

$$E(X) = 1/p \qquad \nu(X) = (1 - p)/p^2$$

3- Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Exercice 5-1 : On lance 4 fois un dé. On note X le nombre de fois où on obtient 6.

a) Pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$, calculer $P(X = k)$.

b) On note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si on tire un 6 au i-ième lancer, 0 si on ne tire pas 6 à ce lancer. Ecrire X en fonction des X_i, et en déduire la valeur de $E(X)$ et de $\nu(X)$.

Plus généralement, la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est la loi d'une somme X de n variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, ..., X_n suivant chacune la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. C'est aussi le nombre de réalisations d'un évènement A lors de l'exécution de n expériences aléatoires indépendantes, le résultat de chacune réalisant A avec la probabilité p. On a

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \qquad \textit{pour } k = 1, 2, ..., n$$

et

$$E(X) = np \qquad \nu(X) = np(1 - p)$$

4- Loi uniforme sur $[a, b]$

La loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ est la loi de densité f donnée par

$$\begin{aligned} f(x) &= 1/(b-a) \quad && si\ a \leq x \leq b \\ &= 0 && sinon \end{aligned}$$

On a

$$E(X) = (a+b)/2 \qquad \nu(X) = (b-a)^2/12$$

Exercice 5-2 : a) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculer directement $E(X)$ et $\nu(X)$.

b) Soit Y une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a, b]$. On pose $X = (Y-a)/(b-a)$. Exprimer Y en fonction de X, $E(Y)$ en fonction de $E(X)$, $\nu(Y)$ en fonction de $\nu(X)$. Exprimer la fonction de répartition de X en fonction de celle de Y, la densité de X en fonction de celle de Y. Quelle est donc la loi de X ? Que conclut-on ?

5- Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Soit λ un paramètre strictement positif. La loi exponentielle de paramètre λ est la loi de densité f définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda\, e^{-\lambda x} \quad && si\ x \geq 0 \\ &= 0 && sinon \end{aligned}$$

Si X suit cette loi,

$$E(X) = 1/\lambda \qquad \nu(X) = 1/\lambda^2$$

On peut remarquer aussi que pour tout t positif ou nul,

$$P(X \geq t + x \,|\, X \geq t) = P(X \geq x \,|\, X \geq 0)$$

Cette égalité permet d'interpréter X comme la durée de vie d'un appareil "sans vieillissement" ; en effet, étant donné un instant t, si l'appareil n'est pas tombé en panne auparavant (si $X \geq t$), la probabilité pour qu'il marche encore sans problème durant la période de temps x (évènement $\{X \geq t + x\}$) ne dépend pas de l'instant t.

6- Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Soit λ un paramètre strictement positif. On dit que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ si X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \qquad pour\ k = 0,\ 1,\ 2,\ ....$$

Cette loi décrit le nombre d'évènements intervenant dans un intervalle de temps de longueur 1, lorsque les laps de temps séparant deux évènements sont indépendants et de même loi exponentielle de paramètre λ. On a

$$E(X) = \lambda \qquad \nu(X) = \lambda$$

7- Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

La *loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0,1)$ est la loi de densité f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

Si X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$,

$$E(X) = 0 \qquad \sigma(X) = 1$$

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ si la variable aléatoire $(X - \mu)/\sigma$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 5-3 : Montrer que si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$,

$$E(X) = \mu \qquad \sigma(X) = \sigma$$

La variable aléatoire $(X - \mu)/\sigma$ est donc la variable centrée réduite associée à X.

La primitive de la fonction $e^{-x^2/2}$ ne peut pas s'exprimer à l'aide de fonctions usuelles. La fonction de répartition d'une variable normale se calcule point par point et numériquement (voir les tables donnant ces valeurs).

Exercice 5-4 : a) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Que vaut $P(X \leq -1)$? Calculer $P(-1 < X < 2)$.

b) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(1,4)$. Calculer $P(X \leq 3)$, $P(2 < X \leq 3)$.

On a le résultat important suivant :

Proposition 5-1 : a) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Soient a et b des réels arbitraires. Alors, $aX + b$ suit la loi $\mathcal{N}(a\mu + b, |a|\sigma)$.

b) Soient X et Y deux variables aléatoires ***indépendantes*** et de lois normales. Alors $X + Y$ suit une loi normale. Plus précisément, si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et Y suit la loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, alors $X + Y$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\,)$.

8- Exercices

Exercice 5-5 : On a constaté que les disques compacts produits dans une usine sont défectueux avec une probabilité 0.01, indépendamment les uns des autres. L'usine conditionne ses disques par boîtes de 10, et offre à l'acheteur le remboursement d'une boîte dès qu'au moins deux des 10 disques sont défectueux.

a) Dans quelle proportion les boîtes sont-elles renvoyées ?

b) Si quelqu'un achète 3 boîtes, avec quelle probabilité renvoie-t-il exactement une boîte ? au moins une boîte ?

Exercice 5-6 : Un stock important comprend 40% de transistors de type A, 60% de type B. Exprimée en heures d'utilisation, la durée de vie d'un transistor de type A suit la loi exponentielle de paramètre $a = 1$. La durée de vie d'un transistor de type B suit la loi exponentielle de paramètre $b = 2$.

On prend au hasard un transistor dans le stock. On note D sa durée de vie.

1) Que vaut la probabilité $P(D \geq 2)$?

2) a) Quelle est la fonction de répartition de D ? Est-elle continue en tout point de $\mathbb{R}$?

b) La loi de D est-elle à densité ? Si oui, quelle est cette densité ?

c) Calculer $E(D)$.

3) On constate que le transistor qu'on a tiré au hasard fonctionne toujours au bout de deux heures d'utilisation. Avec quelle probabilité est-il du type A ?

4) On tire au hasard dans le stock 5 transistors. Avec quelle probabilité 2 d'entre eux exactement sont-ils du type A ?

Exercice 5-7 : Le diamètre (exprimé en cm.) des tomates livrées à une usine d'emballage suit une loi normale $\mathcal{N}(7, \sigma)$, où σ est inconnu. Un tri automatique rejette toutes les tomates dont le diamètre n'est pas compris entre 6 cm et 8 cm.

a) On constate que 10% des tomates livrées sont rejetées par ce procédé de tri. Calculer l'écart type σ.

b) Le directeur veut réduire à 5% le pourcentage de tomates rejetées lors du tri. Ne pouvant agir sur les livraisons, il installe un système de tri qui rejette les tomates de diamètre inférieur à $(7 - s)$ ou supérieure à $7 + s$. Calculer s.

Exercice 5-8 : On a constaté qu'en absence d'épidémie, la variable aléatoire qui représente le poids d'un poulet de 81 jours pris au hasard dans un élevage des Landes suit une loi normale $\mathcal{N}(1.8\,,\,0.2)$, et que les poulets se développent indépendamment. On note X la moyenne arithmétique des poids de 100 poulets pris au hasard. Avec quelle probabilité a-t-on $1.79 < X < 1.81$? Même question en remplaçant 100 par 1000 poulets.

CHAPITRE 6

VI- Somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes

1- L'inégalité de Tchebychev

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $\nu(X)$, et soit a un réel positif.

Notons Y la variable aléatoire définie par

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= a^2 \qquad si\ |X(\omega) - E(X)| \geq a \\ &= 0 \qquad sinon \end{aligned}$$

On a bien sûr

$$Y \leq |X - E(X)|^2$$

et donc

$$E(Y) \leq E(\,|X - E(X)|^2\,)$$

De plus

$$E(Y) = a^2\, P(\,|X - E(X)| \geq a\,)$$

On a ainsi obtenu l'*inégalité de Tchebychev*

$$P(\,|X - E(X)| \geq a\,) \leq \frac{\nu(X)}{a^2}$$

Cette inégalité n'a bien sûr pas d'intérêt lorsque les probabilités $P(\,|X - E(X)| \geq a\,)$ peuvent être calculées explicitement et exprimées simplement. Elle est par contre utile dans le cas contraire, à condition bien sûr de connaître l'espérance et la variance de X. Comme la définition même de $\nu(X)$, l'inégalité de Tchebychev met en évidence l'intérêt de la variance comme mesure de l'étalement des valeurs prises par X autour de la valeur moyenne $E(X)$.

Exercice 6-1 : On lance n fois un dé, et on note M la moyenne arithmétique des points obtenus.

a) Calculer $E(M)$ et $\nu(M)$.

b) Combien de fois suffit-il de lancer un dé pour que, avec une probabilité supérieure à 0.9, la moyenne arithmétique des points obtenus soit comprise entre 3.4 et 3.6 ?

2- Loi des grands nombres

Considérons n variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n, toutes suivant la même loi d'espérance μ et d'écart-type σ, et intéressons-nous à la moyenne arithmétique M de ces variables aléatoires :

$$M = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Un calcul simple donne l'espérance et la variance de M :

$$E(M) = \mu \qquad \nu(M) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Si a est strictement positif, on a, en vertu de l'inégalité de Tchebychev

$$P(\,|M - \mu| \geq a\,) \leq \frac{\sigma^2}{na^2}$$

On en déduit le théorème connu sous le nom de *loi faible des grands nombres* :

Théorème 6-1 : Soit X_1, X_2, ..., X_n, ... une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance μ et d'écart-type σ. Alors, pour tout a strictement positif

$$\lim_{n\to+\infty} P(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - \mu\right| > a\,) = 0$$

On dit que la suite X_1, X_2, ..., X_n, ... *converge en probabilité* vers μ.

Exemple 6-1 : Exécutons une suite d'expériences aléatoires indépendantes, le résultat de chacune réalisant un évènement A avec la probabilité p. Pour décrire cette expérience, introduisons les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n, ... définies par

$$\begin{aligned} X_i &= 1 \quad \text{si le résultat de la i-ième expérience réalise } A \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

Ces variables aléatoires sont indépendantes, et suivent toutes la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, dont l'espérance est p. La variable aléatoire représente la fréquence de réalisation de A au cours des n premières expériences. On conclut de la loi des grands nombres que, lorsque n est grand, cette fréquence est, dans le sens précisé par l'énoncé, proche de p. Or, p n'est autre que la probabilité de réalisation de A lors d'une expérience. Ainsi, on a construit la théorie mathématique des probabilités en partant de la définition intuitive de la probabilité d'un évènement A comme fréquence de réalisation de A sur un grand nombre d'expériences, et, par une déduction interne au cadre formel mathématique, on démontre cette même propriété.

3- Théorème central-limite

Soit X_1, X_2, ..., X_n, ... une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance μ et d'écart-type σ. On a alors

$$E(X_1+X_2+\ldots+X_n) = n\mu \qquad \nu(X_1+X_2+\ldots+X_n) = n\sigma^2$$

et la variable aléatoire centrée réduite associée à la somme $X_1+X_2+\ldots+X_n$ est

$$Y_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Y_n est aussi la variable aléatoire centrée réduite associée à la moyenne arithmétique $M_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$. En effet,

$$Y_n = \frac{M_n - \mu}{(\sigma/\sqrt{n})}$$

Remarquons que lorsque la loi des X_n est la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, la loi de Y_n est la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Le *théorème central-limite* affirme que dans le cas général, la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est une bonne approximation de la loi de Y_n, sous réserve que n soit assez grand. Plus précisément :

Théorème 6-2 : Soit X_1, X_2, ..., X_n, ... une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance μ et d'écart-type σ. Alors, quels que soient a et b $(-\infty \le a \le b \le +\infty)$

$$P(\,a \le \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le b\,) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}\,dx$$

On dit que $Y_n = (X_1+X_2+\ldots+X_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})$ *converge en loi* vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Dans la pratique, cet énoncé rigoureux est interprété assez librement : on considèrera souvent par exemple que sous les hypothèses du théorème, pour des valeurs de n assez grandes, on peut remplacer dans les calculs la loi de $X_1+X_2+\ldots+X_n$ par une loi normale (et donc par la loi normale $\mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$).

4- Exercices

Exercice 6-2 : Résoudre l'exercice 6-1 en utilisant le théorème central-limite, et comparer les résultats obtenus.

Exercice 6-3 : La somme moyenne demandée par chaque personne à un distributeur de billets est de 50 Euros, avec un écart type de 20 Euros. 60 personnes veulent retirer de l'argent à ce distributeur. Les sommes demandées par chaque personne sont indépendantes.

Combien d'argent doit avoir le guichet à sa disposition pour que, avec une probabilité supérieure à 0.95, les 60 personnes retirent la somme qu'elles souhaitent ?

Exercice 6-4 : Une cafétéria d'entreprise fournit chaque jour n repas, et propose chaque jour 2 plats du jour. Le cuisinier a remarqué que lorsqu'il propose saucisse-lentilles et poisson pané-riz, chaque client souhaite le plat de saucisses avec la probabilité $p = 0.6$ et le plat de poisson avec la probabilité $1 - p$, et que les choix des clients sont indépendants. Pour tenter de satisfaire sa clientèle, il prépare $np + s$ plats de saucisses, et $n(1 - p) + s$ plats de riz.

On supposera successivement $n = 100$ et $n = 1000$.

Quelle est la valeur minimale de s telle que, avec une probabilité supérieure à 0.95 , tous les clients aient le plat qu'ils souhaitent ?

Pour cette valeur, quelle est le pourcentage de plats non consommés comparé aux plats préparés ?

Exercice 6-5 : 1) Exprimée en heures d'utilisation, la durée de vie X d'une aiguille de machine à coudre suit une loi uniforme sur l'intervalle $[10, 30]$.

a) On note α le nombre tel que, avec une probabilité égale à 0.9 , X est plus grande que α. Calculer α.

b) Que valent l'espérance et l'écart-type de X ?

2) L'utilisateur d'une machine à coudre a acheté 25 aiguilles, dont on suppose les durées de vie indépendantes et de loi uniforme sur l'intervalle $[10, 30]$. On note Y la durée totale d'utilisation de la machine à coudre que ces aiguilles permettent. (... une et une seule aiguille est nécessaire au fonctionnement de la machine...).

a) Calculer l'espérance et l'écart-type de Y.

b) On note β le nombre tel que, avec une probabilité égale à 0.9 , Y est plus grande que β. Donner une valeur approchée de $\beta/25$.

Exercice 6-6 : Le nombre de visiteurs potentiels de la Foire de Bordeaux est $v = 100000$. Les visiteurs viennent indépendamment les uns des autres et avec la probabilité p, $(0 < p < 1)$. On note N le nombre de personnes qui visitent la foire.

a) Trouver la loi de N. Quelle est l'espérance, la variance de N ?

b) Déterminer le nombre maximal n tel que, avec une probabilité supérieure ou égale à 0.8, il y aura au moins n visiteurs.

b) Soit x le prix d'entrée $(x > 0)$ et R la recette correspondante. Quelle est l'espérance de R ? En supposant p et x reliés par la relation $p = e^{-cx}$, où c est une constante positive, trouver le prix d'entrée qui maximise $E(R)$. Quelle est alors la valeur de $E(R)$?