武汉大学2011--2012第一学期概率统计B试题答案

（54学时 A ）

一、（12分）若事件 B 和 A 满足：$P(A)=0.5, P(B)=0.4$ ，$P(AB)=0.3$

求 (1) $P(A\cup B)$；(2) $P((A-B)|A)$。

解：(1) $P(A\cup B)=0.6$，

(2) $P((A-B)|A)=\dfrac{P(A-B)}{P(A)}=0.4$

二、（12分）对以往数据的分析表明，当机器良好时，产品的合格率为 90%；当机器故障时，合格率为 30%。若每天开机时机器的良好率为 75%。试求某日的第一件产品不合格时，机器良好的概率。

解：设 $A=${产品合格}，$B=${机器调整良好}

$$P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}|\mathrm{B})P(B)}{P(\overline{A}|\mathrm{B})P(B)+P(\overline{A}|\overline{\mathrm{B}})P(\overline{B})}=\frac{0.1\times 0.75}{0.1\times 0.75+0.7\times 0.25}=0.3$$

三、（12分）随机变量 X,Y 独立且都服从泊松分布 $p(\lambda)$；

(1)证明：$Z=X+Y$ 服从参数为 2λ 的泊松分布。

(2)若 $P\{X=1\}=P\{X=0\}$，求 $E(X^2Y^2)$。

证明 (1) $P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda}=\frac{(2\lambda)}{k!}e^{-2\lambda}$$

（2）$\because P\{X=1\}=P\{X=0\}, \therefore \lambda=1$

$E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)=4$。

四、（12分）随机变量 X 服从区间 $(0,4)$ 的均匀分布；

(1)求 关于 y 的方程 $y^2+Xy+1=0$ 有实根的概率；

(2)求 $Y=X^2$ 的概率密度。

解：（1）$P=P(X^2-4\geq 0)=P(X\geq 2)=0.5$

（2）$F_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{y}}{4} & 0<y<16\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$；$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8\sqrt{y}} & 0<y<16\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

五、（14 分）若随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy & 0<x\le 1, 0<y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases};$$

(1)求随机变量X和Y的边缘概率密度$f_x(x); f_y(y)$；

(2)X和Y是否独立 ？（3）求$Z=X+Y$的概率密度。

解：（1）$f_x(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$；$f_Y(y)=\begin{cases}2y & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（2）$\because f(x,y)=f_x(x)f_Y(y)$，$\therefore$ X和Y独立。

（3）$f_z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}z^3 & 0<z\le 1\\ -\dfrac{2}{3}z^3+4z-\dfrac{8}{3} & 1\le z<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

六、（12 分）一商店经销某种商品，每天的进货量X与销售量Y都服从[10,20]上的均匀分布，而且相互独立。已知商店每售出一单位商品可获利 1200 元，积压一单位则亏损 300 元。试求此商店每天的平均利润。

解：利润$L(x,y)=\begin{cases}1200x & 10\le x\le y\\ 1500y-300x & y\le x\le 20\end{cases}$

$$E(L)=\int_{10}^{20}dx\int_{x}^{20}1200x\times\frac{1}{100}dy+\int_{10}^{20}dx\int_{10}^{x}(1500y-300x)\times\frac{1}{100}dy$$
=15500。

七、（14 分）若随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2\mathrm{K}\,X_n$是其样本，

求（1）μ,σ^2 的极大似然估计。（2）判别他们的无偏性。如果有偏，化为无偏估计，并计算其方差。

解：（1）$\hat{\mu}=\overline{X},\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 。

（2）$E(\overline{X})=\mu, E(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2)=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$ 。所以$\overline{X}$是μ的无偏估计。而

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 不是σ^2的无偏估计。无偏化为$\hat{\sigma}^2=S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

$$D(\overline{X})=\frac{1}{n}\sigma^2, D(S^2)=\frac{2}{n-1}\sigma^4$$

八、(12 分)若X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2\cdots X_{16}$是其样本，$\overline{X}=567.2, S^2=121.0$

问： μ是否显著大于 560？（$\alpha=0.05$）（$z_{0.05}=1.65, z_{0.025}=1.96$）

（$t_{0.05}(15)=1.75, t_{0.025}(15)=2.13, t_{0.05}(16)=1.75, t_{0.025}(16)=2.12$）

解：做出假设$H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$

检验统计量$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$

拒接域形式为$T\geq t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(15)=1.75$

计算得： $T=2.62$。所以拒接H_0，接受H_1。认为μ是否显著大于 560。