武汉大学数学与统计学院

2008－2009 学年第一学期《离散数学》考试试卷 A 卷

学号：　　　　　　　　　姓名：　　　　　　　　成绩：

注意：所有答案均写在答题纸上，试卷与答题纸一并上交。

1.（8 分）确定下列集合 A 的幂集：

（1）$\varnothing$；　（2）$\{\varnothing\}$；　（3）$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$；　（4）$\{\varnothing,\{a\},\{b\}\}$。

2.（8 分）求在 1 和 1000 之间（1 和 1000 包含在内）不能被 5 或 6，也不能被 8 整除的数的个数（提示：能被 6 整除的数集和能被 8 整除的数集之交是能被 24 整除的数集）。

3.（8 分）举出集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系 R 的例子，要求画出其关系图，使它具有以下性质：

（1）R 同时是对称的且反对称的且传递的；

（2）R 不是对称的且不是反对称的但是传递的；

（3）R 是传递的，但 $R\cup R^{c}$ 不是传递的；

（4）R 同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性。

4.（8 分）设集合 $A=\{a,b,c,d\}$，定义集合 A 上的关系 R 为：

$$R=\left\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\right\},$$

求 $r(R)$，$s(R)$，$t(R)$。

5.（8 分） $A=\{1,2,3\}\times\{1,2,3,4\}$，$A$ 上关系 R 定义为：

$$<x,y>R<u,v>，当且仅当|x-y|=|u-v|，$$

证明 R 是等价关系，并求由 R 确定的 A 的划分。

6.（8 分）设函数 $f:R\times R\to R\times R$，f 定义为：$f(<x,y>)=<x+y,x-y>$。

（1）证明 f 是单射；　　（2）证明 f 是满射；

（3）求反函数 f^{-1}；　　（4）求复合函数 $f^{-1}\circ f$ 和 $f\circ f$。

7.（8 分）有理数集 Q 中的 $*$ 定义为：$a*b=a+b-ab$.

（1）$(Q,*)$ 是半群吗？是可交换的吗？

（2）求单位元；

（3）$(Q,*)$ 中是否有可逆元？若有，指出哪些是可逆元？并指出逆元是什么？

8.（8 分）设 R 是全体实数集，$M=\{<a,b>|\,a,b\in R,a\neq 0\}$。定义

$$<a,b>\circ<c,d>=<ac,ad+b>。$$

这时 M 对运算 $\circ$ 构成群吗？试验证之。

9.（8 分）设 $(L,\vee,\wedge)$ 是有界分配格，若元素 x 是有补元，证明它的补元是惟一的。

10.（10 分）求公式 $p\wedge(p\to q)\vee r$ 的主析取范式与主合取范式。

11.（10 分）在谓词逻辑中，将下列命题符号化：

（1）没有不犯错误的人；

（2）并不是外语学得好的学生都是三好生，但外语学得不好的学生一定不是三好生。

12.（8 分）证明：$\forall x\left(P(x)\to Q(x)\right)\to(\exists xP(x)\to\exists xQ(x))$ 为重言式。

2008－2009 学年第一学期《离散数学》考试试卷 A 卷

答　案

1．（1）$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$；　　　　（2）$P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$；

（3）$P(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})=\left\{\varnothing,\{\varnothing\},\left\{\{\varnothing\}\right\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\right\}$；

（4）$P(\{\varnothing,\{a\},\{b\}\})=\left\{\varnothing,\{\varnothing\},\left\{\{a\}\right\},\{\{b\}\},\{\varnothing,\{a\}\},\left\{\varnothing,\{b\}\right\},\{\{a\},\{b\}\},\{\varnothing,\{a\},\{b\}\}\right\}$。

2．设 1 到 1000 的整数构成全集 U。用 A,B,C 分别表示由能被 5，6，8 整除的数构成的集合，则 $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$ 表示不能被 5 或 6，也不能被 8 整除的数构成的集合。文氏图如图所示。因

$|A|=[1000/5]=200$

$|B|=[1000/6]=166$

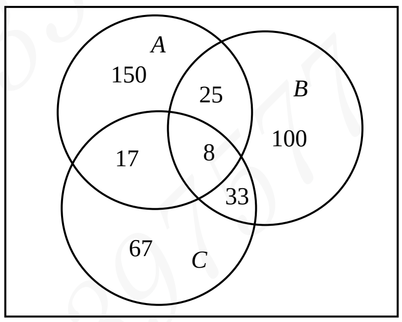
$|C|=[1000/8]=125$

$|A\cap B|=[1000/30]=33$

$|A\cap C|=[1000/40]=25$

$|B\cap C|=[1000/24]=41$

$|A\cap B\cap C|=[1000/120]=8$



由容斥原理，有

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=|U|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|-|A\cap B\cap C|$$

$$=1000-200-166-125+33+25+41-8=600。$$

3．有许多组例子可以作为答案，下面是一组可能的答案：

（1）$R=\left\{<1,1>,<2,2>\right\}$；　　（2）$R=\left\{<1,2>,<2,1>,<1,1>,<2,2>,<2,3>\right\}$；

（3）$R=\left\{<1,2>\right\}$。　　（4）$R=\left\{<1,2>,<2,1>,<1,1>,<2,2>,<2,3>\right\}$

4．求自反闭包，R 不具有自反性，由自反性的定义，只需在 R 上添加 I_A，于是

$$r(R)=R\cup I_A=\left\{\underline{<a,a>},<a,b>,<b,a>,\underline{<b,b>},<b,c>,\underline{<c,c>},<c,d>,\underline{<d,d>}\right\}$$

其中下画线者为添加元素。

$$s(R)=R\cup\tilde{R}=\left\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,\underline{<c,b>},<c,d>,\underline{<d,c>}\right\}$$

$$t(R)=R\cup\left\{<a,a>,<b,b>,<a,c>,<a,d>,<b,d>\right\}$$

$$=\left\{\underline{<a,a>},<a,b>,\underline{<a,c>},\underline{<a,d>},<b,a>,\underline{<b,b>},<b,c>,\underline{<b,d>},<c,d>\right\}$$

5．首先证明 R 是等价的。

a．对任意的 $<x,y>\in A$，因 $|x-y|=|x-y|$，故 $<x,y>R<x,y>$，R 自反。

b．对任意 $<x,y>\in A,<u,v>\in A$，若 $<x,y>R<u,v>$，即 $|x-y|=|u-v|$，则 $|u-v|=|x-y|$，从而

$<u,v> R <x,y>$ ，R 对称。

c．若 $<x,y> R <u,v>$ ，$<u,v> R <p,q>$ ，即 $|x-y|=|u-v|$ ，$|u-v|=|p-q|$ ，从而 $|x-y|=|p-q|$ ，得证 $<x,y> R <p,q>$ 。R 传递。

综上所述，R 是等价关系。

由定理知由 R 的等价类确定对集合 A 的划分。

$[<1,1>]_R=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$ ；$[<1,2>]_R=\{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>,<3,4>\}$ ；

$[<1,3>]_R=\{<1,3>,<3,1>,<2,4>\}$ ；$[<1,4>]_R=\{<1,4>\}$ 。

即划分 $\Pi=\left\{[<1,1>]_R,[<1,2>]_R,[<1,3>]_R,[<1,4>]_R\right\}$ 。

6．（1）$\forall <x_1,y_1>,<x_2,y_2>\in R\times R$ ，若 $f(<x_1,y_1>)=f(<x_2,y_2>)$ ，即 $<x_1+y_1,x_1-y_1>=<x_2+y_2,x_2-y_2>$ ，则 $\begin{cases}x_1+y_1=x_2+y_2\\ x_1-y_1=x_2-y_2\end{cases}$ ，易得 $x_1=x_2,y_1=y_2$ ，从而 f 是单射。

（2）$\forall <p,q>\in R\times R$ ，由 $f(<x,y>)=<p,q>$ ，通过计算可得 $\begin{cases}x=(p+q)/2\\ y=(p-q)/2\end{cases}$ ，从而 $<p,q>$ 的原象存在，f 是满射。

（3）由上面的证明可知，f 存在反函数，且 $f^{-1}(<x,y>)=\left\langle\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right\rangle$ ；

（4）$(f^{-1}\circ f)(<x,y>)=f\left(\left\langle\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right\rangle\right)=<x,y>$ ；

$(f\circ f)(<x,y>)=f(\langle x+y,x-y\rangle)=<(x+y)+(x-y),(x+y)-(x-y)>=<2x,2y>$ 。

7．（1）$\forall a,b,c\in Q$ ，易证 $a*(b*c)=(a*b)*c$ ，故 $(Q,*)$ 是半群。因 $a*b=b*a$ ，$\forall a,b\in Q$,故 $*$ 可交换。

（2）设 e 为其单位元，则应有：$\forall a\in Q$ ，$a*e=e*a=a$ ，即 $a+e-ae=a$ ，由 a 的任意性，有 $e=0$ 。所以单位元为 0。

（3）设 a 有逆元 b ，则应有：$a*b=a+b-ab=0$ ，故当 $a\neq 1$ 时，有逆元为：$a^{-1}=\frac{a}{a-1}$ ，当 $a=1$ 时，没有逆元。

8．M 对运算 $\circ$ 构成群：

首先，$\forall <a,b>,<c,d>\in M$ ，有 $a,b,c,d\in R$ ，且 $a,c\neq 0$ ，于是 $ac,ad+b\in R$ ，且 $ac\neq 0$ ，从而 $<a,b>\circ<c,d>=<ac,ad+b>\in M$ ，$\circ$ 是 M 上的二元运算。

其次，$\forall <a,b>,<c,d>,<e,f>\in M$ ，有

$(<a,b>\circ<c,d>)\circ<e,f>=<a,b>\circ(<c,d>\circ<e,f>)$ ，结合律成立。

$<1,0>$ 是 M 上关于 $\circ$ 的单位元。事实上，$\forall <a,b>\in M$,有

$$<1,0>\circ<a,b>=<a\cdot 1,a\cdot 0+b>=<a,b>$$

$$<a,b>\circ<1,0>=<1\cdot a,1\cdot b+0>=<a,b>$$

最后，$\forall <a,b>\in M$，$<a^{-1},-a^{-1}b>$ 是 $<a,b>$ 的逆元。事实上，

$$<a,b>\circ<a^{-1},a^{-1}b>=<a\cdot a^{-1},a\cdot(-a^{-1}b)+b>=<1,0>$$

$$<a^{-1},-a^{-1}b>\circ<a,b>=<a\cdot a^{-1},a^{-1}b-a^{-1}b>=<1,0>$$

得证 $(M,\circ)$ 是群。

9．设 x 有补元 y 和 z ，即 $x\wedge y=0$ ，$x\vee y=1$ ，$x\wedge z=0$ ，$x\vee z=1$ ，则

$y=y\vee 0$

$=y\vee(x\wedge z)$　　由条件 $x\wedge z=0$

$=(y\vee x)\wedge(y\vee z)$　　分配律

$=1\wedge(y\vee z)$　　由条件 $x\vee y=1$

$=(x\vee z)\wedge(y\vee z)$　　由条件 $x\vee z=1$

$=z\vee(x\wedge y)$　　分配律

$=z\vee 0$　　由条件 $x\wedge y=0$

$=z$

10．　$p\wedge(p\to q)\vee r$

$\Leftrightarrow p\wedge(\neg p\vee q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee(p\wedge q)\vee r$　　析取范式

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$　　化简，去掉矛盾式

$\Leftrightarrow ((p\wedge q)\wedge(r\vee\neg r))\vee(r\wedge(p\vee\neg p))$　　使所有变元均在简单合取式中出现

$\Leftrightarrow ((p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r))\vee((r\wedge p)\vee(r\wedge\neg p))$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(r\wedge p\wedge(q\vee\neg q))\vee(r\wedge\neg p\wedge(q\vee\neg q))$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(r\wedge p\wedge q)\vee(r\wedge p\wedge\neg q)\vee r\wedge\neg p\wedge q)\vee(r\wedge\neg p\wedge\neg q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(r\wedge p\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg p\wedge q)\vee(r\wedge\neg p\wedge\neg q)$

去掉重复的简单合取式

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$　　排序

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

最后的公式为原公式的主析取范式，其中共有 5 个极小项 m_1, m_3, m_5, m_6, m_7 ，显然原式有 001,011,101,110,111 共 5 组赋值使其为真，此外的其它赋值 000,010,100 均使其为假。由此还可以看到，原式既不是重言式，也不是矛盾式，而是一个可满足式。

由　$p\wedge(p\to q)\vee r$

$\Leftrightarrow p\wedge(\neg p\vee q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$　　合取范式

$\Leftrightarrow (p \vee r \vee (q \wedge \neg q)) \wedge (q \vee r \vee (p \wedge \neg p))$ 使全部变元均在简单合取式中出现

$\Leftrightarrow (p \vee r \vee q) \wedge (p \vee r \vee \neg q) \wedge (q \vee r \vee p) \wedge (q \vee r \vee \neg p)$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$ 排序

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$

最后得到主合取范式，其中共有 3 个极大项 M_0, M_2, M_4 与 000,010,100 三组赋值相对应。只有在这三组赋值下原公式为假，其它任何赋值都使原公式为真。 ▮

11.（1）设 $F(x)$ 表示"x 犯错误"，$N(x)$ 表示"x 为人"，则此语句表示为：

$$\neg \exists x (N(x) \wedge \neg F(x))。$$

（2）设 $F(x)$ 表示"x 为外语学得好的学生"，$N(x)$ 表示"x 为三好生"，则此语句表示为：

$$\neg \forall x (F(x) \to N(x)) \wedge \forall x (\neg F(x) \to \neg N(x))。$$

12． $\forall x (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$

$\Leftrightarrow \neg \forall x (\neg P(x) \vee Q(x)) \vee (\neg \exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$

$\Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists x Q(x) \vee \neg \exists x P(x)$

$\Leftrightarrow \exists x ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee Q(x)) \vee \neg \exists x P(x)$

$\Leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x)) \vee \neg \exists x P(x)$

$\Leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \vee \neg \exists x P(x) \Leftrightarrow 1$。