概率论与数理统计公式

liaojunxuan at whu dot edu dot cn

<2021-12-24 Fri>

目录

1 公式

1.1 概率公式 计算概率

1.1.1 概率的基本性质

1. Front 概率的基本性质

2. Back

   - 不可能事件的概率为 0
   - 有限可加性
   - 可减性、单调性若 $B \subset A$ ，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$ ，且 $P(B) \leqslant P(A)$.
   - 逆事件概率公式 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

1.1.2 加法公式

1. Front 加法公式

2. Back

   (a) 设 A ，B 是两事件，则 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

   (b) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geqslant 2)$ 是 n 个事件，则

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_i A_j)+\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_i A_j A_k)-\cdots+(-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

1.1.3 条件概率

1. Front 条件概率

2. Back $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

1.1.4 乘法公式 独立性

1. Front 乘法公式

2. Back $P(AB)=P(B)P(A|B)$

1.1.5 全概率公式

1. Front 全概率公式

2. Back

完备事件组 样本空间的分割.

等价地，若每次试验的时候 $\{B_i|i \in I\}$ 中至少有一个发生且只有一个发生，则 $\{B_i|i \in I\}$ 是完备事件组.

定理（全概率公式） 设 $\{B_i|i \in I\}$ 是一个完备事件组，并且对每个 $i \in I$ 有 $P(B_i) > 0$ 对任意事件 A ,有 $P(A) = \sum_{i \in I} P(B_i)P(A|B_i)$

全概率公式的意义 导致结果 A 有各种原因（或条件）$B_1, B_2, \cdots$ ，在解决实际问题时，$P(A|B_i)$ 易知或易求，且已知 $P(B_i)$ 时，可用全概率公式计算结果 \$A\$ 发生的概率.

1.1.6 贝叶斯公式

1. Front 贝叶斯公式

2. Back 设 $\{B_i|i \in I\}$ 是一个完备事件组且 $P(B_i) > 0$ ，A 是一个事件且 $P(A) > 0$ ，则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)}$$

贝叶斯公式的意义：导致结果 A 有各种原因（或条件）$B_1, B_2, \cdots$ ，通过检验已知 A <u>已经发生</u>，再看各原因（或条件）发生的概率，可用 **贝叶斯公式**. 贝叶斯公式又称 **逆概率公式**.

先验概率 $P(B_i)$ ，试验之前就知道的概率.

后验概率 $P(B_i|A)$ ，试验过后知道的概率.

1.1.7 相互独立 独立性

1. Front 相互独立

2. Back 设 A ，B 是两事件，若 $P(AB) = P(A)P(B)$ ，则称事件 A 与事件 B 相互独立. 这些也相互独立：

$$\{\overline{A}, B\}, \{A, \overline{B}\}, \{\overline{A}, \overline{B}\}$$

1.1.8 伯努利概型

1. Front 在 n 重伯努利实验中事件 A 恰好发生 k 次的概率
2. Back

$$\binom{n}{k}p^k p^{n-k}$$

1.2 概率分布 概率分布

1.2.1 分布函数

1. Front 分布函数
2. Back $F(x) = P(X \le x), -\infty < x < \infty$

   $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$

1.2.2 概率密度函数

1. Front 概率密度函数
2. Back 若 $F(x)$ 是分布函数，如果存在定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的非负实值函数 $f(x)$ 使得

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y, \quad -\infty < x < \infty$$

   则 $f(x)$ 是 X 的概率密度函数.

1.2.3 随机变量函数分布 随机变量函数分布

1. Front 随机变量函数分布的积分转化法
2. Back $g(x)$ 是（分段）连续或（分段）单调函数，如果对任何有界连续函数 $h(x)$ ，成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h[g(x)]f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} h(y)p(y)\,\mathrm{d}y$$

   其中 $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$ ，则 $Y = g(X)$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} p(y), & \alpha < y < \beta \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

二维随机变量函数分布与此类似.

1.3 常见分布 常见分布

1.3.1 离散型

1. 二项分布 二项分布

   (a) 分布律

      i. Front 二项分布 $B(n,p)$ 的分布律

      ii. Back

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k p^{n-k}$$

   (b) 期望

      i. Front 二项分布的期望

      ii. Back np

   (c) 方差

      i. Front 二项分布的方差

      ii. Back $np(1-p)$

   (d) 二项分布的泊松逼近 二项分布的近似

      i. Front 二项分布的泊松逼近

      ii. Back 若 p 很小（$p \leq 0.05$）、n 较大（$n \geq 20$ ）时，近似计算公式：

$$b(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k p^{n-k} \approx p(k;np) = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$$

      若 p 很大，转换成 $b(n-k,n,1-p)$

2. 泊松分布 泊松分布

(a) 分布律

i. Front 泊松分布 $\mathcal{P}(\lambda)$ 的分布律

ii. Back $p(k;\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\cdots$

(b) 期望

i. Front 泊松分布的期望

ii. Back λ

(c) 方差

i. Front 泊松分布的方差

ii. Back λ

1.3.2 连续型

1. 均匀分布 均匀分布

(a) 概率密度函数

i. Front 均匀分布 $U(a,b)$ 的概率密度函数

ii. Back $f(x)=\frac{1}{b-a}I_{[a,b]}(x)$

(b) 期望

i. Front 均匀分布的期望

ii. Back $\frac{a+b}{2}$

(c) 方差

i. Front 均匀分布的方差

ii. Back $\frac{(b-a)^2}{12}$

2. 正态分布 正态分布

(a) 概率密度函数

i. Front 正态分布概率密度函数

ii. Back $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, -\infty<x<\infty$

(b) 期望

i. Front 正态分布的期望

ii. Back μ

(c) 方差

i. Front 正态分布的方差

ii. Back σ^2

(d) 正态概率计算公式 计算概率

i. Front 正态概率计算公式

ii. Back $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

$$P(a < X \leq b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

(e) 怎么算 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x$

i. Front $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$

ii. Back 用这个算：$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = 1$

3. 指数分布 指数分布

(a) 概率密度函数

i. Front 指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的概率密度函数

ii. Back $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

(b) 期望

i. Front 指数分布的期望

ii. Back $\frac{1}{\lambda}$

(c) 方差

i. Front 指数分布的方差

ii. Back $\frac{1}{\lambda^2}$

1.4 多维随机变量

1.4.1 n 维随机变量

1. 若干个随机变量的最大值的分布 分布函数

(a) Front 若干个随机变量的最 **大**值的分布

(b) Back 相互独立的随机变量 $X_1, \cdots, X_n$,X_i 的分布函数为 $F_{X_i}(x), i = 1, \cdots, n$

$$F_{\max}(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x)$$

2. 若干个随机变量的最小值的分布 分布函数

(a) Front 若干个随机变量的最 **小**值的分布

(b) Back 相互独立的随机变量 $X_1, \cdots, X_n$,X_i 的分布函数为 $F_{X_i}(x), i = 1, \cdots, n$

$$F_{\min}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{X_i}(x))$$

1.4.2 二维随机变量 随机变量函数分布

1. 和的分布

(a) Front 和的分布 (卷积公式)

(b) Back X 与 Y 相互独立，$Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) \mathrm{d}x$$

2. 商的分布

(a) Front 商的分布

(b) Back X 与 Y 相互独立，$Z = \frac{X}{Y}$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f(zy, y) \mathrm{d}y$$

1.5 多维随机变量的数字特征

1.5.1 期望 期望

1. 离散型随机变量的期望

(a) Front 离散型随机变量的期望

(b) Back

$$E(X) = \sum_{k \geq 1} x_k p_k$$

2. 连续型随机变量的期望

(a) Front 连续型随机变量的期望

(b) Back

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

若 $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) \mathrm{d}x = \infty$ 则不存在.

3. 连续型随机变量函数的期望

(a) Front 连续型随机变量函数的期望

(b) Back

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x$$

4. 期望的性质

(a) Front 期望的性质

(b) Back

i. 线性性

ii. 单调性

iii. 若 **相互独立**，则乘积的期望等于期望的乘积.

iv. 收缩性 $|E(x)| \leq E(|X|)$

v. 马尔可夫不等式

vi. 若 $E(|X|) = 0$, 则 $P(X = 0) = 1$.

5. 马尔可夫不等式

(a) Front 马尔可夫不等式

(b) Back 设 X 是数学期望存在的随机变量，则对任何 $c > 0$

$$P(|X| \geq c) \leq \frac{E(|X|)}{c}$$

1.5.2 方差

1. 方差
   (a) Front 方差
   (b) Back $D(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$ 标准差（均方差）为
   $$\sigma_X = \sqrt{D(X)}$$
2. 方差的计算公式
   (a) Front 方差的计算公式
   (b) Back
   $$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
3. 方差的性质
   (a) Front 方差的性质
   (b) Back
      i. $D(c) = 0$
      ii. $D(kX) = k^2 D(X)$
      iii. 对任意常数 C ，$D(X) \leq E((X - C)^2)$
      iv. **相互独立**则和的方差等于方差的和.
4. 切比雪夫不等式
   (a) Front 切比雪夫不等式
   (b) Back 对任意随机变量 X ，若 $D(X)$ 存在，则对任意 $\varepsilon > 0$ ，有
   $$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

1.5.3 协方差和相关系数

1. 协方差
   (a) Front 协方差
   (b) Back $\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left((X-E(X)(Y-E(Y))\right)$
   $$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$
2. 协方差计算公式
   (a) Front 协方差计算公式
   (b) Back
   $$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
3. 协方差的性质
   (a) Front 协方差的性质
   (b) Back
      i. 对称性：$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
      ii. 若 a, b 为常数，则
      $$\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$
      iii.
      $$\mathrm{Cov}(X_1+X_2, Y) = \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Cov}(X_2, Y)$$
4. 相关系数
   (a) Front 相关系数
   (b) Back
   $$\rho = \rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$
5. 相关系数的意义
   (a) Front 相关系数的意义

(b) Back

i. $|\rho| = 1$ 的充分必要条件是 X 与 Y 之间线性相关，即存在常数 a, b ，使得

$$P(Y = aX + b) = 1$$

ii. $\rho = 0$ 则不相关，不能推出独立性，但是二维正态分布可以推出独立性.

1.6 概率极限定理

1.6.1 中心极限定理 中心极限定理

1. 莱维-林德伯格中心极限定理

   (a) Front 莱维-林德伯格中心极限定理

   (b) Back 独立同分布随机变量序列 $\{X_n\}$ ，$E(X) = \mu$ ，$D(X_n) = \sigma^2 > 0$ ，则随机变量

   $$\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right)$$

   的分布函数收敛到标准正态分布函数 $\Phi(x)$.

2. 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理 二项分布的近似

   (a) Front 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

   (b) Back 设 n_A 为 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数，又每次试验中 A 发生的概率为 p，则

   $$\frac{n_A - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

   的分布函数收敛到标准正态分布函数 $\Phi(x)$.

   当 p 很接近 0 或 1 时用正态分布近似二项分布要求 n 相当大，否则不如泊松近似.

1.7 统计量

1.7.1 样本平均值

1. Front 样本平均值

2. Back

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

1.7.2 样本方差

1. Front 样本方差

2. Back

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

1.7.3 样本平均值的期望

1. Front 样本平均值的期望

2. Back

$$E(\overline{X}) = \mu$$

1.7.4 样本平均值的方差

1. Front 样本平均值的方差

2. Back

$$D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

1.7.5 样本方差的期望

1. Front 样本方差的期望

2. Back

$$E(S^2) = \sigma^2$$

1.8 抽样分布

1.8.1 χ^2 分布

1. Front χ^2 分布

2. Back $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相互独立且服从标准正态分布，自由度为 n 的 χ^2 ：

   $$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

   记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

1.8.2 χ^2 均值和方差

1. Front $E(\chi^2)$ $D(\chi^2)$

2. Back $E(X_i) = 0$

   $D(X_i) = 1 = E(X_i^2) - (E(X_i^2))^2$

   $E(X_i^2) = 1 + 0 = 1$, $E(X_i^4) = 3$

   $D(X_i^2) = E(X_i^4) - (E(X_i^2))^2 = 3 - 1^2 = 2$

   $$E(\chi^2) = n$$
   $$D(\chi^2) = 2n$$

1.8.3 t 分布

1. Front t 分布

2. Back 随机变量 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$ ，自由度为 n 的 t 分布:

   $$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

   记为 $T \sim t(n)$.

1.8.4 t 分布的上分位点结论

1. Front t 分布的上分位点结论

2. Back $t_{1-a}(n) = -t_a(n)$

1.8.5 F 分布

1. Front F 分布

2. Back 随机变量 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ ，自由度为 n_1, n_2 的 F 分布:

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$$

   记为 $F \sim F(n_1, n_2)$.

1.8.6 F 分布的结论

1. Front F 分布的结论

2. Back

   (a) 若 $F \sim F(n_1, n_2)$ ，则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

   (b) 若 $T \sim t(n)$ ，则 $T^2 \sim F(1, n)$

   (c) $F(n_1, n_2)$ 分布的数学期望是 $\frac{n_2}{n_2-2}$

1.8.7 正态总体基本定理 正态分布

1. Front 正态总体基本定理

2. Back

   (a) $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

   (b) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

   (c) $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立.

   (d) $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

1.9 正态分布区间估计 区间估计

假设检验和这个类似.

1.9.1 单个

1. 均值

   (a) 方差已知

      i. Front 区间估计 μ 单个正态 $N(\mu, \sigma^2)$，已知 σ

      ii. Back 枢轴量:
      $$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$
      μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为
      $$\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

   (b) 方差未知

      i. Front 区间估计 μ 单个正态 $N(\mu, \sigma^2)$，σ 未知

      ii. Back 枢轴量:
      $$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$
      μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为
      $$\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

2. 方差

   (a) 均值未知

      i. Front 区间估计 σ 单个正态 $N(\mu, \sigma^2)$，μ 未知

      ii. Back 枢轴量:
      $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$
      σ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为
      $$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$$

1.9.2 多个

1. 均值

   (a) 方差已知

      i. Front 区间估计 $\mu_1-\mu_2$ 两正态 $N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\sigma_1,\sigma_2$ 已知

      ii. Back 枢轴量：

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_1^2}{n_1}}}\sim N(0,1)$$

$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_1^2}{n_1}}\right)$$

   (b) 方差相等但未知

      i. Front 区间估计 $\mu_1-\mu_2$ 两正态 $N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ 未知

      ii. Back 枢轴量：

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right)$$

$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

2. 方差

   (a) 均值未知

      i. Front 区间估计 σ_1^2/σ_2^2 两正态 $N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\mu_1,\mu_2$ 未知

ii. Back 枢轴量:

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = \frac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(n_1-1)}{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/(n_2-1)} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

σ_1^2/σ_2^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}\right)$$