

2013-2014 上学期-计算机学院 离散数学 (A 卷)

一. 求下列公式的主析取范式和主合取范式: (10')

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

二. 证明下列结论是前提的有效结论 (写出证明序列): (7+8=15')

(1) 前提: $P \wedge Q \rightarrow R$, $\neg S \rightarrow P$

结论: $\neg R \rightarrow \neg Q \vee S$

(2) 前提: $\forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$, $\neg \exists x(G(x) \wedge \neg R(x))$

结论: $\neg \exists x(P(x) \wedge G(x))$

三. R_1 是集合 S 上的二元关系, R_2 是 T 上的二元关系, 定义 $S \times T$ 上的关系 $R_3 \subseteq (S \times T)^2$: $\langle s_1, t_1 \rangle R_3 \langle s_2, t_2 \rangle$, iff, $s_1 R_1 s_2 \wedge t_1 R_2 t_2$, 证明下列各题: (7+7=14')

(1) 若 R_1 、 R_2 为等价关系, 则 R_3 为等价关系;

(2) 若 R_1 、 R_2 为偏序关系, 则 R_3 为偏序关系;

四. 设集合 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, 定义 $f \in Y^X$, 其中 $f(1)=f(2)=a$, $f(3)=b$, 定义函数 $g: Y \rightarrow \rho(X)$, $g(y) = f^{-1}(\{y\})$ (说明: $f^{-1}(\{y\})$ 为集合 $\{y\}$ 在函数 f 下的逆像), 完成下列各题: (4+6+6=16')

- (1) 求函数 g 的值域 $\text{ran}(g)$;
- (2) 分别说明 f 、 g 是否为单射、满射、双射;
- (3) 证明: $\forall B \subseteq Y, f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, 并说明在什么条件下, $f(f^{-1}(B)) = B$.

五. 设 $\langle G, * \rangle$ 是群, 完成下列各题: (4+4+4=12')

- (1) 设元素 $x \in G$, 且 $x = x^{-1}$, 求元素 x 的阶。
- (2) 证明: 在偶数阶群中, 阶为 2 的元素的个数一定是奇数。
- (3) 设元素 $a, b \in G$, 且 $b * a * b^{-1} = a^2$, 其中 a 不是单位元, b 的阶为 2, 求 a 的阶。

六. 设 $\langle G, *, e_G \rangle$ 和 $\langle H, \cdot, e_H \rangle$ 是两个群, h 是群 G 到 H 的同态, 完成下列各题: (6+6+3=15')

- (1) 证明: 如果 A 是 G 的子群, 则 $h(A)$ 是 H 的子群;
- (2) 证明: 如果 G 和 H 都是有限群, $a \in G$, 则 $h(a)$ 的阶是 $|G|$ 和 $|H|$ 的公因子;
- (3) $\langle N_5, +_5 \rangle$ 到 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 上共有多少个同态? (利用 (2) 的结果。)

七. 设 $G(n, m)$ 是简单无向图, 其顶点数 $n \geq 11$, 证明: G 和 \bar{G} (G 的补图) 至少有一个不是平面图. (10')

八. 简单无向图 G 有 n 个顶点, m 条边, 各顶点度数均为 3, 且 $2n = m + 3$, 试画出满足条件的所有不同构的图 G . (要求给出解题过程) (8')