

武汉大学计算机学院  
2009-2010学年第二学期2008级  
《离散数学》期末考试试卷 (A)

学号: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_ 成绩: \_\_\_\_\_

(注: ①考试时间为120分钟; ②所有的解答必须写在答题纸上, 并注明题号。)

一、试求下述命题公式 $G$ 的主析取和主合取范式: (10分)

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$$

二、写出下列结论的证明序列: (20分, 10+10)

(1) 前提:  $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, \neg R \wedge S$ .  
结论:  $\neg P$ ;

(2) 前提:  $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)), \forall x(Q(x) \vee R(x)), \exists x \neg R(x)$ .  
结论:  $\exists x \neg P(x)$ .

三、设有函数  $f: A \rightarrow B$ , 定义函数  $g: \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A), \forall S \in \mathcal{P}(B)$   
(注:  $\mathcal{P}(A)$  为集合  $A$  的幂集合), 有 (20分, 10+5+5)

$$g(S) = \{a \mid a \in A \wedge f(a) \in S\} \text{ (即 } f^{-1}(S)\text{)}$$

(1) 试证明, 如果  $f$  是单射, 则  $\forall X \subseteq A, f^{-1}(f(X)) = X$ ;

(2) 试证明, 当  $f$  是单射时,  $g$  是满射;

(3) 试以集合  $A = \{a, b\}$  到  $B = \{c, d\}$  上的函数为例说明当  $f$  不是单射时,  $g$  不是满射.

四、设  $A$  为集合, 集合  $P$  是集合  $A$  上所有的划分组成的集合, 即  $P = \{S \mid S \text{ 是 } A \text{ 的划分}\}$ , 定义关系  $R \in P \times P, \forall S, T \in P, \langle S, T \rangle \in R$  iff 若  $\forall u \in S$ , 则存在  $v \in T$ , 使得  $u \subseteq v$ . 如  $A = \{a, b, c\}$ , 设  $S = \{\{a\}, \{b, c\}\}$ ,  $T = \{\{a, b, c\}\}$ , 则  $\langle S, T \rangle \in R$ : (15分, 5+5+5)

(1) 设  $A = \{a, b, c\}$ , 试用枚举法表示集合  $A$  上所有的划分组成的集合  $P$ ;

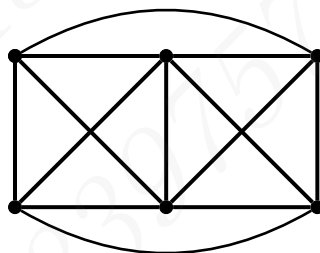
(2) 证明:  $R$  是偏序关系;

(3) 试用性质法表示集合  $P$  的最大元素和最小元素.

五、 设 $\langle G, *, e \rangle$ 是群,  $H, K$ 是其子群, 在 $G$ 上定义二元关系 $R: \forall a, b \in G, aRb$  iff 存在 $h \in H, k \in K$ , 使得 $b = h * a * k$ . 证明: (20分, 每小题5分)

- (1)  $R$ 是 $G$ 上的等价关系;
- (2) 试证明 $\forall h, h' \in H, k, k' \in K, hRh', kRk'$ ;
- (3) 试证明 $\forall a, b \in H \cup K, aRb$ ;
- (4) 若 $|H| = m, |K| = n, |G| = mn, m$ 与 $n$ 互素,  $[a]_R$ 是 $R$ 的某个等价类, 且 $[a]_R$ 是 $G$ 的一个子群, 则 $R = G \times G$ .

六、 设判别下面的简单无向图是否为平面图: (8分)



七、 设无向图 $G(n, m)$ 是树, 其结点最大度数为 $k(k \geq 2)$ , 证明:  $G$ 中至少有 $k$ 片树叶. (7分)