2013-2014 上学期-计算机学院

离散数学（A 卷）

一．求下列公式的主析取范式和主合取范式：(10’)

$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$

解：主合取范式：$\Pi(6) \Leftrightarrow \neg P\vee\neg Q\vee R$

主析取范式：$\Sigma(0, 1, 2, 3, 4, 5, 7) \Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R) \vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R) \vee (\neg P\wedge Q\wedge\neg R) \vee (\neg P\wedge Q\wedge R) \vee (P\wedge\neg Q\wedge\neg R) \vee (P\wedge\neg Q\wedge R) \vee (P\wedge Q\wedge R)$

二．证明下列结论是前提的有效结论（写出证明序列）：(7+8=15’)

（1）前提：$P\wedge Q \rightarrow R$，$\neg S\rightarrow P$

结论：$\neg R \rightarrow\neg Q\vee S$

证明：1) $\neg R$　　附加前提

2) Q　　附加前提

3) $P\wedge Q \rightarrow R$　　前提

4) $\neg R \rightarrow\neg(P\wedge Q)$　　3)，T 规则

5) $\neg(P\wedge Q)$　　1),4)，MP 规则

6) $\neg P\vee\neg Q$　　5)，T 规则

7) $\neg P$　　2),6)，析取三段论

8) $\neg S\rightarrow P$　　前提

9) S　　7),8)，拒取式

（2）前提：$\forall x(P(x) \rightarrow\neg R(x))$，$\neg\exists x(G(x) \wedge\neg R(x))$

结论：$\neg\exists x(P(x)\wedge G(x))$

证明：反证法：

1) $\exists x(P(x)\wedge G(x))$　　否定前提

2) $P(a)\wedge G(a)$　　1), ES 规则

3) $\forall x(P(x) \rightarrow\neg R(x))$　　前提

4) $\neg\exists x(G(x)\wedge\neg R(x))$　　前提

5) $\forall x(\neg G(x)\vee R(x))$　　4），T 规则

6) $P(a)\rightarrow\neg R(a)$　　3), US 规则

7) $\neg G(a)\vee R(a)$　　5), US 规则

8) $P(a)$　　2), 化简规则

9) $\neg R(a)$　　6),8), MP 规则

10) $G(a)$　　2), 化简规则

11) $R(a)$　　7),10)，析取三段论

12) F　　9)11)，合取

三．R_1是集合 S 上的二元关系，R_2是 T 上的二元关系，定义 S×T 上的关系 $R_3\subseteq(S\times T)^2$：$<s_1, t_1> R_3<s_2, t_2>$，iff，$s_1R_1s_2\wedge t_1R_2t_2$，证明下列各题：(7+7=14’)

(1) 若 R_1、R_2为等价关系，则 R_3为等价关系；

证明：**R_3为自反的：**对任意$<s, t>\in S\times T$，因为 R_1、R_2为等价关系，R_1、R_2具有自反性，则，$sR_1s\wedge tR_2t$，即$<s, t> R_3<s, t>$，R_3为自反的；

R_3为对称的：若$<s_1, t_1> R_3<s_2, t_2>$，则 $s_1R_1s_2\wedge t_1R_2t_2$，因为 R_1、R_2为等价关系，R_1、R_2具有对称性，则有 $s_2R_1s_1\wedge t_2R_2t_1$，即$<s_2, t_2> R_3<s_1, t_1>$，则 R_3为对称的；

R_3为传递的：若$<s_1, t_1> R_3<s_2, t_2>$，若$<s_2, t_2> R_3<s_3, t_3>$，则 $s_1R_1s_2\wedge t_1R_2t_2$，且 $s_2R_1s_3\wedge t_2R_2t_3$，因为 R_1、R_2为等价关系，R_1、R_2具有传递性，所以 $s_1R_1s_3\wedge t_1R_2t_3$，即$<s_1, t_1> R_3<s_3, t_3>$，则 R_3为传递的；

综上，若 R_1、R_2为等价关系，则 R_3为等价关系；

(2) 若 R_1、R_2为偏序关系，则 R_3为偏序关系；

证明：若 R_1、R_2为偏序关系，R_1、R_2为自反且传递关系，R_3也具有自反性、传递性（证明同（1））；

R_3为反对称的：若$<s_1, t_1> R_3<s_2, t_2>$，且$<s_2, t_2> R_3<s_1, t_1>$，则 $s_1R_1s_2\wedge t_1R_2t_2$，且 $s_2R_1s_1\wedge t_2R_2t_1$，因为 R_1、R_2为偏序关系，R_1、R_2具有反对称性，则 $s_1=s_2\wedge t_1=t_2$，则$<s_1, t_1> =<s_2, t_2>$，所以 R_3为反对称的。所以若 R_1,R_2为偏序关系,R_3为偏序关系。

四．设集合 X={1, 2, 3}，Y={a, b, c}，定义 $f\in Y^X$，其中 f(1)=f(2)=a，f(3)=b，定义函数 g: Y→ρ(X)，$g(y) = f^{-1}(\{y\})$ （说明：$f^{-1}(\{y\})$为集合{ y }在函数 f 下的逆像），完成下列各题：(4+6+6=16’)

(1) 求函数 g 的值域 ran(g)；

解：ran(g)={ {1, 2}, {3}, Ø}.

(2) 分别说明 f、g 是否为单射、满射、双射；

解：f 不是单射、满射、双射；

g 是单射，不是满射、双射。

(3) 证明：$\forall B\subseteq Y$，$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$，并说明在什么条件下，$f(f^{-1}(B)) = B$.

解：$\forall y\in f(f^{-1}(B))$，存在 $x\in f^{-1}(B)$ ，且 f(x)=y，因为 $x\in f^{-1}(B)$，则 $f(x) \in B$，即 $y\in B$. 证毕

当 f 为满射时，$f(f^{-1}(B)) = B$.

五．设<G, *>是群，完成下列各题：(4+4+4=12’)

(1) 设元素 $x\in G$，且 $x = x^{-1}$，求元素 x 的阶。

解：若 x 为单位元 e，也满足条件，x 的阶可为 1.

又若 $x\neq e$，因 $x = x^{-1}$，则 $x*x= x * x^{-1} =e$，即 $x^2=e$，则 x 的阶为 2.

(2) 证明：在偶数阶群中，阶为 2 的元素的个数一定是奇数。

证明：对于任意的阶为 k（k>2）的元素 a，因为$|a|=|a^{-1}|$，且 $a\neq a^{-1}$（若 $a\neq a^{-1}$，则 a 的阶为 2），所以阶为 k 的元素总是成对出现，即 a 和 a^{-1}，则阶大于 2 的元素个数为偶数，有单位元 e 是阶为 1 的唯一元素，则偶数阶群中阶为 2 的元素个数一定是奇数。

(3) 设元素 $a，b\in G$，且 $b*a*b^{-1} = a^2$，其中 a 不是单位元，b 的阶为 2，求 a 的阶。

解：|b|=2，b*b=e，则 $b=b^{-1}$；因为 $b*a*b^{-1} = a^2$，所以 $b= a^2*b*a^{-1}$. 则

$$\begin{aligned} b*b &=(a^2*b*a^{-1})*(a^2*b*a^{-1}) \\ &=a^2*(b*a *b)*a^{-1}= a^2*(b*a *b^{-1})*a^{-1} \\ &= a^2* a^2*a^{-1}= a^3=e, \end{aligned}$$

则 a 的阶为 3.

六．设<G, *, e_G>和<H, ·, e_H>是两个群，h 是群 G 到 H 的同态，完成下列各题：(6+6+3=15’)

（1）证明：如果 A 是 G 的子群，则 h(A)是 H 的子群；

证明：i) 因 A 是 G 的子群，$e_G \in A$，h 是群同态，则 $e_H = h(e_G) \in h(A)$，h(A)非空；

ii) 对任意 x，y∈h(A)，存在 a，b∈A，使得 h(a)=x, h(b)=y, 则

$x*y^{-1}=h(a)*(h(b))^{-1}=h(a)*h(b^{-1})=h(a*b^{-1})$,

因 A 是 G 的子群，$a*b^{-1}\in A$，则 $h(a*b^{-1}) \in h(A)$，即 $x*y^{-1}\in h(A)$，所以 h(A)是 H 的子群。

（2）证明：如果 G 和 H 都是有限群，a∈G，则 h(a)的阶是|G|和|H|的公因子；

证：设|a|=p, 则 p 整除|G|，且 $(h(a))^p=h(a^p)=h(e_G)=e_H$, 所以|h(a)|整除 p，所以|h(a)|整除|G|，同时 h(a) ∈H，|h(a)|整除|H|，所以 h(a)的阶是|G|和|H|的公因子。

（3）<N_5, $+_5$>到<N_6, $+_6$>上共有多少个同态？（利用（2）的结果。）

证：对任意 $n\in N_5$, 同态 h，由上题结果 h(n)的阶是 5 和 6 的公因子，则|h(n)|=1, 阶为 1 的元素仅有单位元 0，则 h: n→0。<N_5, $+_5$>到<N_6, $+_6$>仅有一个同态，$\forall n \in N_5$, h(n)=0.

七．设 G(n, m)是简单无向图，其顶点数 n≥11，证明：G 和$\bar{G}$(G 的补图)至少有一个**不是**平面图。(10’)

证：反证法，假设 G(n, m)和$\bar{G}(n, C_n^2 - m)$均为简单平面图，则由欧拉公式：

$\mathrm{m} \le 3n-6,\ C_n^2 - \mathrm{m} \le 3n-6$，则$C_n^2 \le 6n-12$,则

(n-11)(n+2)+2≥0，与 n≥11 矛盾。

八．简单无向图 G 有 n 个顶点，m 条边，各顶点度数均为 3，且 2n=m+3，试画出满足条件的所有**不**同构的图 G.（要求给出解题过程）(8’)

解：3n=2m, 又 2n=m+3, 则 n=6, m=9.