武汉大学计算机学院20xx-20xx学年第一学期

20XX级《离散数学》考试标准答案

一、 试求下述命题公式G的主析取和主合取范式： (10分)

$$(P \to Q) \to R$$

主析取范式: $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$;
主合取范式: $(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$.

二、 写出下列结论的证明序列： (20分，10+10)

(1) 前提：$P \to Q$, $Q \to R$, $\neg R \wedge S$.
结论：$\neg P$;
证明：

① $\neg R \wedge S$	引入前提	④ $\neg Q$	②+③+MT
② $\neg R$	化简规则	⑤ $P \to Q$	引入前提
③ $Q \to R$	引入前提	⑥ $\neg P$	④+⑤+MT

(2) 前提：$\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$, $\forall x(Q(x) \vee R(x))$, $\exists x \neg R(x)$.
结论：$\exists x \neg P(x)$.
证明

① $\exists x \neg R(x)$	引入前提	⑥ $\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$	引入前提
② $R(a)$	①+ES	⑦ $P(a) \to \neg Q(a)$	⑥+US
③ $\forall x(Q(x) \vee R(x))$	引入前提	⑧ $\neg P(a)$	⑦+⑤+MT
④ $Q(a) \vee R(a)$	③+US	⑨ $\exists x \neg P(x)$	⑧+EG
⑤ $Q(a)$	④+析取三段论		

三、 设有函数$f: A \to B$，定义函数$g: \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$, $\forall S \in \mathcal{P}(B)$ (注: $\mathcal{P}(A)$为集合A的幂集合)，有 (20分，10+5+5)

$$g(S) = \{a \,|\, a \in A \wedge f(a) \in S\} \ (\text{即} f^{-1}(S))$$

(1) 试证明, 如果f是单射，则$\forall X \subseteq A$，$f^{-1}(f(X)) = X$；
证明: 由定理有$X \subseteq f^{-1}(f(X))$，现需证$f^{-1}(f(X)) \subseteq X$，设$x \in f^{-1}(f(X))$，则$f(x) \in f(X)$，即$\exists x' \in X$，$f(x) = f(x')$. $\because$ f是单射，$\therefore$ $x = x'$，即$x \in X$. 故$f^{-1}(f(X)) \subseteq X$.

(2) 试证明,当f是单射时，g是满射；
证明: $\forall X \in \mathcal{P}(A)$，由(1)有$f^{-1}(f(X)) = X$，即$g(f(X)) = X$，$\therefore g(\mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(A)$. 故$g$是满射.

(3) 试以集合$A = \{a, b\}$到$B = \{c, d\}$上的函数为例说明当f不是单射时，g不是满射.
解: 设$f(a) = f(b) = c$，则$g(\mathcal{P}(B)) = \{\varnothing, \{a, b\}\} \subsetneq \mathcal{P}(A)$，故$g$不是满射.

四、 设A为集合，集合P是集合A上所有的划分组成的集合，即$P=\{S \mid S$是A的划分$\}$，定义关系$R\in P\times P$, $\forall S,T\in P$，$\langle S,T\rangle\in R$ iff 若$\forall u\in S$，则存在$v\in T$，使得$u\subseteq v$. 如$A=\{a,b,c\}$，设$S=\{\{a\},\{b,c\}\}$，$T=\{\{a,b,c\}\}$，则$\langle S,T\rangle\in R$: (15分，5+5+5)

(1) 设$A=\{a,b,c\}$，试用枚举法表示集合A上所有的划分组成的集合P；

解:

$$P=\{\{\{a,b,c\}\},\{\{a,b\},\{c\}\},\{\{b,c\},\{a\}\},\\ \{\{a,c\},\{b\}\},\{\{a\},\{b\},\{c\}\}\}$$

(2) 证明：R是偏序关系；

证明:

① 自反性：$\forall S\in P$，$\forall u\in S$，$u\subseteq u$，$\therefore\langle S,S\rangle\in R$;

② 反对称性：设$\langle S,T\rangle\in R\wedge\langle T,S\rangle\in R$，需证明集合$S$和$T$相等. 设$u\in S$，$\therefore\exists v\in T, u\subseteq v$，$\because\langle T,S\rangle\in R$，$\therefore\exists u'\in S, v\subseteq u'$，这样$u\subseteq u'$，而$u$和$u'$同属于一个划分$S$，所以它们均非空且$u\cap v'\neq\varnothing$，$\therefore u=u'$，而$u\subseteq v\subseteq u'$，$\therefore u=v$，故$S\subseteq T$. 同理可证$T\subseteq S$. $\therefore S=T$.

③ 传递性：设$\langle S,T\rangle\in R\wedge\langle T,W\rangle\in R$，则$\forall u\in S,\exists u\in T, u\subseteq v$，$\because\langle T,W\rangle\in R$，$\therefore\exists w\in W, v\subseteq w$，这样$u\subseteq w$，故$\langle S,W\rangle\in R$.

(3) 试用性质法表示集合P的最大元素和最小元素.

解: 最大元素$\{P\}$；最小元素$\{\{a\} \mid a\in A\}$.

五、 设$\langle G,*,e\rangle$是群，H，K是其子群，在G上定义二元关系$R:\forall a,b\in G$，aRb iff 存在$h\in H$，$k\in K$，使得$b=h*a*k$. 证明： (20分, 每小题5分)

(1) R是G上的等价关系;

证明:

① 自反性：$\because H,K\leqslant G$，$\therefore e\in H\cap K$. 这样$\forall a\in G$，$a=e*a*e$

② 对称性：设aRb，即$\exists h\in H, k\in K$，$b=h*a*k$，即$a=h^{-1}*b*k^{-1}$，而$h^{-1}\in H$, $k^{-1}\in K$，故bRa.

③ 传递性：设$aRb\wedge bRc$，即$\exists h,h'\in H,k,k'\in K$，$b=h*a*k\wedge c=h'*b*k'$，这样$c=(h'*h)*a*(k*k')$. 而$h'*h\in H\wedge k*k'\in K$，故$aRc$.

(2) 试证明$\forall h,h'\in H$，$k,k'\in K$，hRh', kRk';

证明: $h'=(h'*h^{-1})*h*e$，而$h,h'\in H$，根据子群运算的封闭性有$h'*h^{-1}\in H$，又$e\in K$，故hRh'. 同理可证kRk'.

(3) 试证明$\forall a,b\in H\cup K$, aRb;

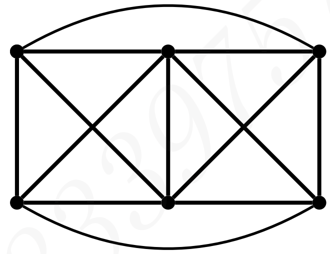
证明:如果$a,b\in H\vee a,b\in K$，这由题(2)有aRb.
设$a\in H\wedge b\in K$，$\because e\in H\cap K$，由题(2)，$aRe\wedge eRb$，由于R是传递关系，故aRb.

(4) 若$|H|=m$，$|K|=n$，$|G|=mn$，m与n互素，$[a]_R$是R的某个等价类，且$[a]_R$是G的一个子群，则$R=G\times G$.

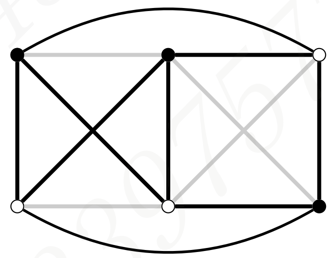
证明: $\because[a]_R\leqslant G$，$\therefore e\in[a]_R$. 这样eRa，由(2)，$\forall h\in H, eRh$，$\therefore$

hRa，即$h\in[a]_R$，由此$H\subseteq[a]_R$，$\therefore H\leqslant[a]_R$. 根据$Lagrange$定理，$|H|\mid|[a]_R|$，即$m$是$|[a]_R|$的因子. 同理$n$也是$|[a]_R|$的因子. 而$m$和$n$互素，这样$mn$是$|[a]_R|$的因子. $\therefore mn=|G|\geqslant|[a]_R|\geqslant mn$. 故$[a]_R=G$.

六、 设判别下面的简单无向图是否为平面图： (8分)



解: 不是平面图，因为其子图与$K_{3,3}$同构：



七、 设无向图$G(n,m)$是树，其结点最大度数为$k(k\geqslant 2)$，证明：G中至少有k片树叶. (7分)

证明（反证法）: 设仅有$k-1$个结点为树叶，这样图G有1个结点的度数$\geqslant k$，$n-k$个结点的度数$\geqslant 2$，$k-1$个结点的度数为1. $\therefore$所有结点的度数之和不小于下式：

$$k+2(n-k)+k-1$$

即$2n-1$. 但是n个结点的无向树的边数$m=n-1$，其度数之和为$2n-2<2n-1$. 故矛盾. 同理对叶结点数小于$k-1$的情况也有上述矛盾.