一阶谓词逻辑

School of Computer Wuhan University

- 1 谓词与量词
 - 谓词
 - 符号化
 - 一阶逻辑公式的语义
- 2 公式间的关系式
 - 逻辑等价和永真蕴涵关系
 - 量词的逻辑关系
 - 前束范式
- 3 谓词公式的自然推理
 - 相关概念的复习
 - 量词的推理规则
 - 形式证明的例子
 - Mechanized Reasoning

Jacques Herbrand (1908 — 1931)



- 1 谓词与量词
 - 谓词
 - 符号化
 - 一阶逻辑公式的语义
- 2 公式间的关系式
 - 逻辑等价和永真蕴涵关系
 - 量词的逻辑关系
 - 前東范式
- 3 谓词公式的自然推理
 - 相关概念的复习
 - 量词的推理规则
 - 形式证明的例子
 - Mechanized Reasoning

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立: P,Q ⊬ R;
- 原因: P, Q和R所描述的对象是相关的, 但是, 在抽象为原子后, 彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项,谓词和量词,使 得语句的真假和对象相关;
- (∀x(MAN(x) → MORTAL(x))) ∧ MAN(Confucius) ⇒ MORTAL(Confucius)

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立: P,Q ⊬ R;
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律
- ●解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项, 谓词和量词, 使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \land MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立: P,Q ∀ R;
- 原因: P, Q和R所描述的对象是相关的, 但是, 在抽象为原 子后 彼此不再相关
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律
- ●解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项, 谓词和量词, 使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \land MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立: P,Q ⊬ R;
- 原因: P, Q和R所描述的对象是相关的, 但是, 在抽象为原 子后, 彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律
- ●解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项, 谓词和量词, 使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \land MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立: P,Q ⊬ R;
- 原因: P, Q和R所描述的对象是相关的, 但是, 在抽象为原子后, 彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律
- 解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项,谓词和量词,使 得语句的真假和对象相关;
- (∀x(MAN(x) → MORTAL(x))) ∧ MAN(Confucius) ⇒
 MORTAL(Confucius)

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立: P,Q ⊬ R;
- 原因: P, Q和R所描述的对象是相关的, 但是, 在抽象为原子后, 彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项,谓词和量词,使得语句的真假和对象相关;
- (∀x(MAN(x) → MORTAL(x))) ∧ MAN(Confucius) ⇒
 MORTAL(Confucius)

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立: P,Q ⊬ R;
- 原因: P, Q和R所描述的对象是相关的, 但是, 在抽象为原子后, 彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项,谓词和量词,使得语句的真假和对象相关;
- (∀x(MAN(x) → MORTAL(x))) ∧ MAN(Confucius) ⇒ MORTAL(Confucius).

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立: P,Q ⊬ R;
- 原因: P, Q和R所描述的对象是相关的, 但是, 在抽象为原子后, 彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项,谓词和量词,使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \land MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius).$

谓词

- 将"命题"(陈述句)分解为"主语+谓语";
- 个体词: 在简单命题中,表示主语的符号;
- 谓词: 在简单命题中,表示个体的性质或个体间的关系的符号.常用大写字母表示: P, Q, R...

- P(x): P表示谓词"大于3", x为个体变元, P(x)即为x > 3;
- Q(x,y): Q表示谓词"等于", x和y为个体变元, Q(x,y)即为
 x = y;

谓词

- 将"命题"(陈述句)分解为"主语+谓语";
- 个体词: 在简单命题中, 表示主语的符号;
- 谓词: 在简单命题中,表示个体的性质或个体间的关系的符号.常用大写字母表示: P, Q, R...

- P(x): P表示谓词"大于3",x为个体变元,P(x)即为x > 3;
- Q(x,y): Q表示谓词"等于", x和y为个体变元, Q(x,y)即为
 x = y;

谓词

- 将"命题"(陈述句)分解为"主语+谓语";
- 个体词: 在简单命题中,表示主语的符号;
- 谓词:在简单命题中,表示个体的性质或个体间的关系的符号.常用大写字母表示: P, Q, R...

- P(x): P表示谓词"大于3", x为个体变元,P(x)即为x > 3;
- Q(x,y): Q表示谓词"等于", x和y为个体变元, Q(x,y)即为 x = y;

谓词

- 将"命题"(陈述句)分解为"主语+谓语";
- 个体词: 在简单命题中,表示主语的符号;
- 谓词:在简单命题中,表示个体的性质或个体间的关系的符号.常用大写字母表示: P, Q, R...

- P(x): P表示谓词"大于3", x为个体变元, P(x)即为x > 3;
- Q(x, y): Q表示谓词"等于", x和y为个体变元, Q(x, y)即为 x = y;

谓词

- 将"命题"(陈述句)分解为"主语+谓语";
- 个体词: 在简单命题中,表示主语的符号;
- 谓词:在简单命题中,表示个体的性质或个体间的关系的符号.常用大写字母表示: P, Q, R...

- P(x): P表示谓词"大于3",x为个体变元,P(x)即为x > 3;
- Q(x,y): Q表示谓词"等于", x和y为个体变元, Q(x,y)即为 x = y;

Example

① "x大于3"; P(x)

② "x大于y";
Q(x, y)

③ "x+1大于x"; R(x)

❶ 三句话所描述的对象不同, 但是对象之间的关系是相同的(GREATER)

Example

(h) "x(x-y)";

0 "x+1.k.fx";

① "x大于3"; P(x)

① "x大于3"; P(x)

② "x大于y";
Q(x, y)

③ "x+1大于x"; R(x)

① 三句话所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER)

Example

② 引入表示对象关系的思想的

0 "xx+y"; GF

G (x+1,2,7x); GREATE

2. 4.2.3.1

① "x大于3"; P(x)

② "x大于y";
Q(x, y)

⑥ "x+1大于x";
R(x)

① 三句话所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER)

1 "x大于3";P(x)

② "x大于y";
Q(x, y)

③ "x+1大于x"; R(x)

④ 三句话所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

① "x大于3"; P(x)

② "x大于y"; Q(x, y)

⑥ "x+1大于x"; R(x)

④ 三句话所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

① "x大于3"; P(x)

② "x大于y";
Q(x, y)

③ "x+1大于x"; R(x)

④ 三句话所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

- ① 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:
- ② "x 大于3"; GREATER(x, 3)
- ③ "x 大于y"; GREATER(x, y)
- ⑤ 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数,变量和函数符号组合成的对象 升之为而(torma)
 - 象, 称之为项(terms).

① "x大于3"; P(x)

② "x大于y";
Q(x, y)

③ "x+1大于x";
R(x)

④ 三句话所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

① 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:

② "×大于3"; GREATER(x,3)

③ "x大于y"; GREATER(x, y)

④ "x+1大于x"; *GREATER*(plus(x,1),x)

Example

① "x大于3"; P(x)

② "x大于y";
Q(x, y)

③ "x+1大于x";
R(x)

④ 三句话所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

① 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:

② "x 大于3"; GREATER(x,3)

③ "x大于y"; GREATER(x, y)

④ "x+1大于x"; *GREATER*(plus(x,1),x)

⑤ 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数,变量和函数符号组合成的对象,称之为项(terms).

Example

① "x大于3"; P(x)

② "x大于y";
Q(x, y)

③ "x+1大于x";
R(x)

④ 三句话所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

① 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3,上述关系可表示为:

② "×大于3"; GREATER(x,3)

③ "x大于y";
GREATER(x, y)

④ "x+1大于x"; *GREATER*(plus(x,1), x)

⑤ 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数,变量和函数符号组合成的对象,称之为项(terms).

① "x大于3"; P(x)

② "x大于y";
Q(x, y)

③ "x+1大于x";
R(x)

④ 三句话所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

① 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:

② "x 大于3"; GREATER(x,3)

③ "x 大于y"; GREATER(x, y)

④ "x+1大于x"; *GREATER*(plus(x,1),x)

⑤ 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数,变量和函数符号组合成的对象,称之为项(terms).

1 "x loves y":

Love(x, y)

1 "x loves y": Love(x, y)

2 "x's father loves x": Love(father(x), x)

(3) "John loves Mary": Love(John, Mary)

(4) "Mary's father loves Mary": Love(father(Mary), Mary)

Remark

1 "x loves y": Love(x, y)

2 "x's father loves x": Love (father(x), x)

(3) "John loves Mary": Love(John, Mary)

"Mary's father loves Mary": Love(father(Mary), Mary)

Remark

题 也可以在消荷中不使用领,这种需要引入更多的消荷、使得消荷公司

2,55, 20

(a) "x is y' father":

(a) "x's father loves

1 "x loves y": Love(x, y)

2 "x's father loves x": Love (father(x), x)

(3) "John loves Mary": Love(John, Mary)

"Mary's father loves Mary": Love(father(Mary), Mary)

Remark

也可以在谓词中不使用项,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过过 复杂,如:

(a) "x's father loves ...

1 "x loves y": Love(x, y)

"x's father loves x": Love(father(x), x)

"John loves Mary": Love(John, Mary)

"Mary's father loves Mary": Love(father(Mary), Mary)

Remark

1 "x loves y": Love(x, y)

"x's father loves x": Love(father(x), x)

"John loves Mary": Love(John, Mary)

"Mary's father loves Mary": Love(father(Mary), Mary)

Remark

- 也可以在谓词中不使用项,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于 复杂,如:

1 "x loves y": Love(x, y)

"x's father loves x": Love(father(x), x)

"John loves Mary": Love(John, Mary)

"Mary's father loves Mary": Love(father(Mary), Mary)

Remark

■ 也可以在谓词中不使用项,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于 复杂,如:

"x is y' father": FATHER(x, y)

Terms (2/2)

1 "x loves y": Love(x, y)

"x's father loves x": Love(father(x), x)

"John loves Mary": Love(John, Mary)

"Mary's father loves Mary": Love(father(Mary), Mary)

Remark

■ 也可以在谓词中不使用项,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于 复杂,如:

"x is y' father": FATHER(x, y)

"x's father loves x": $FATHER(y,x) \wedge LOVE(y,x)$

谓词公式形式系统中使用的符号

- 常数符号(constant symbol): 3, John, Mary, ...
- 变量符号(variables): *x*, *y*, *z*, ...
- 函数符号(functions): plus, father, f, g, ...
- 谓词符号(predicate): MAN, GREATER, LOVE, P, Q, R, ...
- 各种符号应和具体形式化对象相关

谓词公式形式系统中使用的符号

- 常数符号(constant symbol): 3, John, Mary, ...

- 常数符号(constant symbol): 3, John, Mary, ...
- 变量符号(variables): x, y, z, ...

- 常数符号(constant symbol): 3, John, Mary, ...
- 变量符号(variables): x, y, z, ...
- 函数符号(functions): plus, father, f, g, ...
- 谓词符号(predicate): MAN, GREATER, LOVE, P, Q, R, ...
- 各种符号应和具体形式化对象相关

- 常数符号(constant symbol): 3, John, Mary, ...
- 变量符号(variables): x, y, z, ...
- 函数符号(functions): plus, father, f, g, ...
- 谓词符号(predicate): MAN, GREATER, LOVE, P, Q, R, ...

- 常数符号(constant symbol): 3, John, Mary, ...
- 变量符号(variables): x, y, z, ...
- 函数符号(functions): *plus*, *father*, *f*, *g*, ...
- 谓词符号(predicate): MAN, GREATER, LOVE, P, Q, R, ...
- 各种符号应和具体形式化对象相关.

- 每个函数符号都固定参数的个数, f 的参数的个数为n, 称为n元函数(n-ary function), 如: plus是2元函数, father 是1元函数;
- 0元函数退化为常数;
- 每个谓词符号都固定参数的个数, P的参数的个数为n, 称 为n元谓词(n-ary predicate), 如: LOVE 和 GREATER 是2元 谓词, MAN 和 MORTAL 是1元谓词;
 - 0元谓词退化为命题

- 每个函数符号都固定参数的个数, f 的参数的个数为n, 称为n元函数(n-ary function), 如: plus是2元函数, father 是1元函数;
- 0元函数退化为常数;
- 每个谓词符号都固定参数的个数, P的参数的个数为n, 称为n元谓词(n-ary predicate), 如: LOVE 和 GREATER 是2元谓词, MAN 和 MORTAL 是1元谓词;
- 0元谓词退化为命题

- 每个函数符号都固定参数的个数,f的参数的个数为n,称为n元函数(n-ary function),如:plus是2元函数,father是1元函数;
- 0元函数退化为常数;
- 每个谓词符号都固定参数的个数, P的参数的个数为n, 称为n元谓词(n-ary predicate), 如: LOVE 和 GREATER 是2元谓词, MAN 和 MORTAL 是1元谓词;
- 0元谓词退化为命题

- 每个函数符号都固定参数的个数,f的参数的个数为n,称为n元函数(n-ary function),如:plus是2元函数,father是1元函数;
- 0元函数退化为常数;
- 每个谓词符号都固定参数的个数, P的参数的个数为n, 称为n元谓词(n-ary predicate), 如: LOVE 和 GREATER 是2元谓词, MAN 和 MORTAL 是1元谓词;

• 0元谓词退化为命题.

- 每个函数符号都固定参数的个数,f的参数的个数为n,称为n元函数(n-ary function),如:plus是2元函数,father是1元函数;
- 0元函数退化为常数;
- 每个谓词符号都固定参数的个数, P的参数的个数为n, 称为n元谓词(n-ary predicate), 如: LOVE 和 GREATER 是2元谓词, MAN 和 MORTAL 是1元谓词;
- 0元谓词退化为命题.

- 常数符号,变量符号是项;
- ② if $f \in \mathbb{Z}_n$ -ary function symbol, t_1, t_2, \ldots, t_n 是已经定义的项,则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步生成.

Example

0 x 1255;

by Def@

O phylohele II II 2 a by Def(2)

- 常数符号,变量符号是项;

项的形式定义

Definition (递归定义)

- ❶ 常数符号,变量符号是项;
- ② if $f \in \mathbb{Z}_n$ -ary function symbol, t_1, t_2, \ldots, t_n 是已经定义的项,则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步生成

Example

谓词与量词

Definition (递归定义)

- 常数符号,变量符号是项;
- ② if f 是n-ary function symbol, t1, t2,..., tn是已经定义的项, 则 $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步生成.

项的形式定义

Definition (递归定义)

- 常数符号,变量符号是项;
- ② if f 是 n-ary function symbol, t₁, t₂,...,t_n是已经定义的项, 则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步生成.

- 常数符号,变量符号是项;
- ② if $f \not\in n$ -ary function symbol, t_1, t_2, \ldots, t_n 是已经定义的项,则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;
- ◎ 所有的项都是由以上规则在有限步生成.

Example

① x, 1是项;

by Def①

② *plus*(x,1)是项;

- by Def(2)
- ③ plus(plus(x,1),1)是项; by Def②

项的形式定义

Definition (递归定义)

- 常数符号,变量符号是项;
- ② if *f* 是*n*-ary function symbol, *t*₁, *t*₂, . . . , *t*_n是已经定义的项, 则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步生成.

① x. 1是项;

by Def(1)

② *plus*(x,1)是项;

by Def(2)

- ❶ 常数符号,变量符号是项;
- ② if $f \not\in n$ -ary function symbol, t_1, t_2, \ldots, t_n 是已经定义的项,则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;
- ◎ 所有的项都是由以上规则在有限步生成.

Example

① x, 1是项; by Def①

② *plus*(x,1)是项; by Def②

3 plus(plus(x,1),1)是项; by Def②

If P is an n-ary predicate symbol, and t_1, t_2, \ldots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ 是原子.

If P is an n-ary predicate symbol, and t_1, t_2, \ldots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ 是原子.

If P is an n-ary predicate symbol, and t_1, t_2, \dots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ 是原子.

- MAN(x), MORTAL(Confucius);

If P is an n-ary predicate symbol, and t_1, t_2, \ldots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是原子.

Example

- MAN(x), MORTAL(Confucius);
- 2 LOVE(father(MARY), MARY);
 - GREATER(plus(plus(x, 1), 1), 1).

If P is an n-ary predicate symbol, and t_1, t_2, \ldots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是原子.

Example

- MAN(x), MORTAL(Confucius);
- 2 LOVE(father(MARY), MARY);
- **3** GREATER(plus(plus(x,1),1),1).

If P is an n-ary predicate symbol, and t_1, t_2, \ldots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是原子.

Example

- MAN(x), MORTAL(Confucius);
- 2 LOVE(father(MARY), MARY);
- **3** GREATER(plus(plus(x,1),1),1).

- 谓词原子和命题一样有唯一的真假值;
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式称为谓词公式,
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律,如:

If P is an n-ary predicate symbol, and t_1, t_2, \ldots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ 是原子.

Example

- MAN(x), MORTAL(Confucius);
- 2 LOVE(father(MARY), MARY);
- \bullet *GREATER*(plus(plus(x,1),1),1).

- 谓词原子和命题一样有唯一的真假值;

If P is an n-ary predicate symbol, and t_1, t_2, \ldots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是原子.

Example

- MAN(x), MORTAL(Confucius);
- 2 LOVE(father(MARY), MARY);
- **3** GREATER(plus(plus(x,1),1),1).

- 谓词原子和命题一样有唯一的真假值;
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式称为谓词公式;
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律,如

If P is an n-ary predicate symbol, and t_1, t_2, \ldots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是原子.

Example

- MAN(x), MORTAL(Confucius);
- **2** LOVE(father(MARY), MARY);
- **3** GREATER(plus(plus(x,1),1),1).

- 谓词原子和命题一样有唯一的真假值;
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式称为谓词公式;
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律,如: $P(t_1) \rightarrow Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \lor Q(t_2, t_3)$

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x, there exists a number y such that x < y

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x, there exists a number y such that x < y.

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x, there exists a number y such that x < y

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x, there exists a number y such that x < y.

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x, there exists a number y such that x < y.

- 不涉及到某个特定的个体,
- 对个体所在的对象全体的整体性质进行描述;
- 引入新的逻辑符号— 量词(Quantifier) 描述对象的整体性质

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x, there exists a number y such that x < y.

- 不涉及到某个特定的个体;
- 对个体所在的对象全体的整体性质进行描述;
- 引入新的逻辑符号— 量词(Quantifier) 描述对象的整体性质.

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x, there exists a number y such that x < y.

- 不涉及到某个特定的个体;
- 对个体所在的对象全体的整体性质进行描述;
- 引入新的逻辑符号— 量词(Quantifier) 描述对象的整体性质.

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x, there exists a number y such that x < y.

Remark (特点)

- 不涉及到某个特定的个体;
- 对个体所在的对象全体的整体性质进行描述;
- 引入新的逻辑符号— 量词(Quantifier) 描述对象的整体性质.

全称量词(Universal)	特称量词(Existential)
for all x	there exists an x
for every x	for some x
for each x	for at least one x
A	3



全称量词(Universal)	特称量词(Existential)
for all x	there exists an x
for every x	for some x
for each x	for at least one x
A	3

- ① 每个有理数都是实数: $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x));$
- 2 There exists a number that is prime: $\exists x Prime(x)$
- For every number x, there exists a number y such that x <
 ∀x(∃vLess(x, v)).

全称量词(Universal)	特称量词(Existential)
for all x	there exists an x
for every x	for some x
for each x	for at least one x
A	3

- ① 每个有理数都是实数: $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x));$
- 2 There exists a number that is prime: $\exists x Prime(x)$;
- **3** For every number x, there exists a number y such that x < y : $\forall x (\exists y Less(x, y))$.

全称量词(Universal)	特称量词(Existential)
for all x	there exists an x
for every x	for some x
for each x	for at least one x
A	3

- **①** 每个有理数都是实数: $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x));$
- 2 There exists a number that is prime: $\exists x Prime(x)$;
- **3** For every number x, there exists a number y such that x < y : $\forall x (\exists y Less(x, y))$.

全	称量词(Universal)	特称量词(Existential)
	for all x	there exists an x
	for every x	for some x
	for each x	for at least one x
	A	3

- **①** 每个有理数都是实数: $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x));$
- 2 There exists a number that is prime: $\exists x Prime(x)$;
- For every number x, there exists a number y such that x < y: $\forall x (\exists y Less(x, y))$.

合式公式(Well Formed Formulas)

- Base: T, F & Atoms are WFF;

- Base: T, F & Atoms are WFF;
- 2 Induction Rule: if F & G are WFF, then $(\neg F)$, $(F \land G)$, $(F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$ are WFF; F & G称为递归定义中的元变量(metavariable);

合式公式(Well Formed Formulas)

- Base: T, F & Atoms are WFF;
- 2 Induction Rule: if F & G are WFF, then $(\neg F)$, $(F \land G)$, $(F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$ are WFF; F & G称为递归定义中的元变量(metavariable);
- 3 if F is WFF, x is variable symbol, then $(\forall xF)$ & $(\exists xF)$ are WFF:

- Base: T, F & Atoms are WFF;
- ② Induction Rule: if F & G are WFF, then $(\neg F)$, $(F \land G)$, $(F \lor G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ are WFF; F & G称为递归定义中的元变量(metavariable);
- **3** if *F* is WFF, *x* is variable symbol, then $(\forall xF)$ & $(\exists xF)$ are WFF:
- 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFF, 称为谓词公式, 简称为公式.

谓词与量词

- \bullet MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius), MORTAL(Confucius)是WFF; by Def(1)

谓词与量词

- \bullet MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius), MORTAL(Confucius) 是WFF; by Def(1)
- ② $(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ 是WFF; by Def(2)+(1)

- \bullet MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius), MORTAL(Confucius) 是WFF; by Def(1)
- ② $(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ 是WFF; by Def(2)+(1)
- **③** $(\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)))$ \not \neq WFF; by Def(3)+(2)

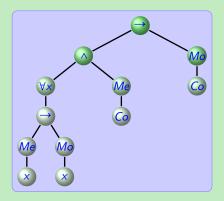
- \bullet MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius), MORTAL(Confucius) 是WFF; by Def(1)
- ② $(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ 是WFF; by Def(2)+(1)
- **4** $((\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \land MAN(Confucius))$ **∠WFF**; by Def(2)+(3)(1)

- \bullet MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius), MORTAL(Confucius)是WFF; by Def(1)
- ② $(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ 是WFF; by Def(2)+(1)
- ③ $(\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)))$ \neq WFF; by Def(3)+(2)
- **4** $((\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \land MAN(Confucius))$ **∠WFF**; by Def(2)+(3)(1)
- **⑤** $(((∀x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \land MAN(Confucius)) \rightarrow$ MORTAL(Confucius))是WFF; by Def(2)+(4)(1)

公式的语法树

Example

 $(((\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \land MAN(Confucius)) \rightarrow MORTAL(Confucius))$



◆□▶ ◆圖▶ ◆圖▶ ◆圖▶

省略括号的约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:
 - 括号, ∀, ∃, ¬, ∧, ∨, →, ↔
- 同一二元运算符号按从左到右进行结合.

Example

 $\bigcirc \forall x \land (x) \rightarrow$

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:

括号, ∀, ∃, ¬, ∧, ∨, →, ↔

省略括号的约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:

括号,
$$\forall$$
, \exists , \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow

略括亏的约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:

括号, ∀,∃, ¬, ∧, ∨, →, ↔

• 同一二元运算符号按从左到右进行结合.

- $\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \land MAN(Confucius) \rightarrow MORTAL(Confucius)$

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:

省略括号的约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:

括号, ∀,∃, ¬, ∧, ∨, →, ↔

- $\bigvee x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \land MAN(Confucius) \rightarrow$ MORTAL(Confucius)

省略括号的约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:

- $\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \land MAN(Confucius) \rightarrow$ MORTAL(Confucius)

符号化谓词公式(1/5)

符号化谓词公式(1/5)

- 这个班的每个学生都去过北京;

谓词与量词

- 这个班的每个学生都去过北京;
- *C*(x): x是这个班的学生;

- 这个班的每个学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- *B*(*x*): *x*去过北京;

Remark (Why not

- 这个班的每个学生都去过北京;
- *C*(x): x是这个班的学生;
- *B*(*x*): *x*去过北京;
- $\bullet \ \forall x (C(x) \to B(x)).$

符号化谓词公式(1/5)

- 这个班的每个学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \ \forall x (C(x) \to B(x)).$

- 这个班的每个学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$ 能正确反映上述关系:
- $\forall x(C(x) \land B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则 $C(\mathcal{R}) \land B(\mathcal{R})$ 为假, $\forall x(C(x) \land B(x))$ 亦假;

- 这个班的每个学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \land B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则 $C(\mathcal{X} =) \land B(\mathcal{X} =)$ 为假, $\forall x(C(x) \land B(x))$ 亦假;
- "C(x) →" 称为全称限定条件

- 这个班的每个学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x (C(x) \rightarrow B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \land B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(\mathcal{R}) \land B(\mathcal{R})$ 为假, $\forall x(C(x) \land B(x))$ 亦假;
- "C(x) →"称为全称限定条件

7 10111112

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x (C(x) \rightarrow B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \land B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(\mathcal{R}) \land B(\mathcal{R})$ 为假, $\forall x(C(x) \land B(x))$ 亦假;
- "C(x) →"称为全称限定条件.

符号化谓词公式(2/5)

Example

- 这个班的有些学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- \bullet $\exists x (C(x) \land B(x)).$

Remark (Why not

符号化谓词公式(2/5)

- 这个班的有些学生都去过北京;

Evample

- 这个班的有些学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \ \exists x (C(x) \land B(x)).$

Remark (Why not

符号化谓词公式(2/5)

Example

- 这个班的有些学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \ \exists x (C(x) \land B(x)).$

Remark (Why not

- 这个班的有些学生都去过北京;
- *C*(x): x是这个班的学生;
- *B*(*x*): *x*去过北京;
- \bullet $\exists x (C(x) \land B(x)).$

符号化谓词公式(2/5)

- 这个班的有些学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- *B*(*x*): *x*去过北京;
- \bullet $\exists x (C(x) \land B(x)).$

- 这个班的有些学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \ \exists x (C(x) \land B(x)).$

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- ∃x(C(x) ∧ B(x))能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则。 $C(\mathcal{X} =) \to B(\mathcal{X} =)$ 为真, $\exists x(C(x) \to B(x))$ 亦真;
- "C(x) ∧" 称为特称限定条件.

- 这个班的有些学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- \bullet $\exists x (C(x) \land B(x)).$

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- ∃x(C(x) ∧ B(x))能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(\mathcal{R} =) \to B(\mathcal{R} =)$ 为真, $\exists x(C(x) \to B(x))$ 亦真;
- "C(x)∧"称为特称限定条件.

- 这个班的有些学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- \bullet $\exists x (C(x) \land B(x)).$

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- ∃x(C(x) ∧ B(x))能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \to B(张三)$ 为真, $\exists x(C(x) \to B(x))$ 亦真;
- "C(x) ^" 称为特称限定条件

- 这个班的有些学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- \bullet $\exists x (C(x) \land B(x)).$

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- ∃x(C(x) ∧ B(x))能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \to B(张三)$ 为真, $\exists x(C(x) \to B(x))$ 亦真;
- "C(x) ∧"称为特称限定条件.

喝酒者悖论

- There is someone in the pub such that, if he is drinking, everyone in the pub is drinking.
- $\bullet \exists x (D(x) \to \forall y D(y)).$

喝酒者悖论

- There is someone in the pub such that, if he is drinking, everyone in the pub is drinking.
- $\bullet \exists x (D(x) \to \forall y D(y)).$

喝酒者悖论

- There is someone in the pub such that, if he is drinking, everyone in the pub is drinking.
- $\exists x (D(x) \rightarrow \forall y D(y)).$

谓词与量词

符号化谓词公式(4/5)

- Everyone has exactly one best friend.

- Everyone has exactly one best friend.
- B(x,y): y是x的最好的朋友;
- Inequal(x, y): x和y是不同的对象;
- 唯一性: "y是唯一的"等价于"对任意的Z,如果Z不等于y。则×和Z不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (Inequal(z,y) \rightarrow \neg B(x,z)));$
- 中缀谓词的引入" \neq : Inequal(x, v) \triangleq x \neq v
- $\bullet \ \forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x,z)));$
- 数学常用记号∃!表示存在唯一: ∀x∃!vB(x, v)

- Everyone has exactly one best friend.
- B(x,y): y是x的最好的朋友;
- *Inequal*(x,y): x和y是不同的对象;
- 唯一性: "y是唯一的"等价于"对任意的Z,如果Z不等于y,则×和Z不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (Inequal(z,y) \rightarrow \neg B(x,z)));$
- 中缀谓词的引入"≠: Inequal(x, y) ≜ x ≠ y
- $\bullet \ \forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x,z)));$
- 数学常用记号∃!表示存在唯一: ∀x∃!yB(x, y).

- Everyone has exactly one best friend.
- B(x,y): y是x的最好的朋友;
- *Inequal*(x, y): x和y是不同的对象;
- 唯一性: "y是唯一的"等价于"对任意的z,如果z不等于y,则x和z不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (Inequal(z,y) \rightarrow \neg B(x,z)));$
- 中缀谓词的引入"≠: Inequal(x,y) \triangleq x ≠ y
- $\bullet \ \forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x,z)));$
- 数学常用记号∃!表示存在唯一: ∀x∃!yB(x, y).

- Everyone has exactly one best friend.
- B(x,y): y是x的最好的朋友;
- Inequal(x, y): x和y是不同的对象;
- 唯一性: "y是唯一的"等价于"对任意的z, 如果z不等于y,则x和z不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (Inequal(z,y) \rightarrow \neg B(x,z)));$
- 中缀谓词的引入"≠: Inequal(x, y) \triangleq x ≠ y
- $\forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x,z)))$
- 数学常用记号3!表示存在唯一: ∀x3!vB(x, v)

- Everyone has exactly one best friend.
- B(x,y): y是x的最好的朋友;
- Inequal(x, y): x和y是不同的对象;
- 唯一性: "y是唯一的"等价于"对任意的z,如果z不等于y,则×和z不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (Inequal(z,y) \rightarrow \neg B(x,z)));$
- 中缀谓词的引入"≠: $Inequal(x,y) \triangleq x \neq y$
- $\bullet \ \forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x,z)));$
- 数学常用记号∃!表示存在唯一: ∀x∃!yB(x,y)

7 TUR 17/2 31(T/J)

- Everyone has exactly one best friend.
- B(x,y): y是x的最好的朋友;
- Inequal(x,y): x和y是不同的对象;
- 唯一性: "y是唯一的"等价于"对任意的z,如果z不等于y,则x和z不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (Inequal(z,y) \rightarrow \neg B(x,z)));$
- 中缀谓词的引入"≠: $Inequal(x,y) \triangleq x \neq y$
- $\forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x,z)));$
- 数学常用记号∃!表示存在唯一: ∀x∃!yB(x,y)

- Everyone has exactly one best friend.
- B(x,y): y是x的最好的朋友;
- Inequal(x, y): x和y是不同的对象;
- 唯一性: "y是唯一的"等价于"对任意的z,如果z不等于y,则×和z不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (Inequal(z,y) \rightarrow \neg B(x,z)));$
- 中缀谓词的引入" \neq : Inequal(x, y) $\triangleq x \neq y$
- $\forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x,z)));$
- 数学常用记号∃!表示存在唯一: ∀x∃!yB(x,y).

了为他阴网公式(5/5)

Example (Peano自然数公理)

- A₁ 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor)
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

符号化谓词公式(5/5)

Example (Peano自然数公理)

A1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);

- A1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A₂ There is no number for which 0 is the immediate successor;
 - 43 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

- A₁ 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

引入函数符号: succ(x)表示x的直接后继,pred(x)表示x的直接前驱

符号化谓词公式(5/5)

Example (Peano自然数公理)

- A₁ 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A₃ For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

- [∞] 引入函数符号: succ(x)表示x的直接后继, pred(x)表示x的直接前驱;
- $A_1 \ \forall x \exists y ((y = succ(x)) \land \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z))$
- $A_2 \neg \exists x (0 = succ(x));$
- $A_3 \ \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y ((y = pred(x)) \land \forall z (z = pred(x) \rightarrow y = z)))$

- A₁ 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A₂ There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

- ◎ 引入函数符号: succ(x)表示x的直接后继, pred(x)表示x的直接前驱;
- $A_1 \ \forall x \exists y ((y = succ(x)) \land \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$
- $A_2 \neg \exists x (0 = succ(x));$
- $A_3 \ \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y ((y = pred(x)) \land \forall z (z = pred(x) \rightarrow y = z))).$

- A₁ 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A₂ There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A₃ For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

◎ 引入函数符号: succ(x)表示x的直接后继, pred(x)表示x的直接前驱;

$$A_1 \ \forall x \exists y ((y = succ(x)) \land \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$$

 $A_2 \neg \exists x (0 = succ(x));$

 $A_3 \ \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y ((y = pred(x)) \land \forall z (z = pred(x) \rightarrow y = z)))$

- A₁ 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A₂ There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A₃ For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

◎ 引入函数符号: succ(x)表示x的直接后继, pred(x)表示x的直接前驱;

$$A_1 \ \forall x \exists y ((y = succ(x)) \land \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$$

$$A_2 \neg \exists x (0 = succ(x));$$

 $A_3 \ \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y ((y = pred(x)) \land \forall z (z = pred(x) \rightarrow y = z)))$

- A₁ 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A₃ For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

◎ 引入函数符号: succ(x)表示x的直接后继, pred(x)表示x的直接前驱;

$$A_1 \ \forall x \exists y ((y = succ(x)) \land \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$$

$$A_2 \neg \exists x (0 = succ(x));$$

$$A_3 \ \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y ((y = pred(x)) \land \forall z (z = pred(x) \rightarrow y = z))).$$

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式F是全称(特称)量词∀x(∃x)的辖域,F中出现的x称为约束出现(bound occurrence), x也称为约束变量(bound variable)
- 子公式F没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x也称为自由 变量(free variable).

Example

- V Scape by the large property
- Scope of ty is F
- 0 0种的效果自由效应。

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式F是全称(特称)量词∀x(∃x)的辖域,F中出现的x称为约束出现(bound occurrence), x也称为约束变量(bound variable)
- 子公式F没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x也称为自由 变量(free variable).

Example

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式F是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$)的辖域,F中出现的x称为约束出 现(bound occurrence), x也称为约束变量(bound variable)
- 子公式F没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x也称为自由 变量(free variable).

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式F是全称(特称)量词∀x(∃x)的辖域, F中出现的x称为约束出现(bound occurrence), x也称为约束变量(bound variable)
- 子公式F没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x也称为自由 变量(free variable).

Example

- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y \text{ is } P(x,y)$;
- P中的x和y是约束变量;
- Q中的x是自由变量

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式F是全称(特称)量词∀x(∃x)的辖域, F中出现的x称为约束出现(bound occurrence), x也称为约束变量(bound variable)
- 子公式F没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x也称为自由变量(free variable).

- $\bullet \ \forall x \exists y P(x, y) \land Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- P中的x和y是约束变量;
- Q中的x是自由变量

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式F是全称(特称)量词∀x(∃x)的辖域, F中出现的x称为约束出现(bound occurrence), x也称为约束变量(bound variable)
- 子公式F没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x也称为自由 变量(free variable).

- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y \text{ is } P(x, y)$;
- P中的×和y是约束变量;
- Q中的x是自由变量.

Definition

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式F是全称(特称)量词∀x(∃x)的辖域, F中出现的x称为约束出现(bound occurrence), x也称为约束变量(bound variable)
- 子公式F没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x也称为自由 变量(free variable).

- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of ∃y is P(x, y);
- P中的×和y是约束变量;
- Q中的x是自由变量.

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式F是全称(特称)量词∀x(∃x)的辖域,F中出现的x称为约束出现(bound occurrence), x也称为约束变量(bound variable)
- 子公式F没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x也称为自由 变量(free variable).

- $\bullet \ \forall x \exists y P(x, y) \land Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is P(x, y);
- P中的x和y是约束变量;
- Q中的x是自由变量.

Definition

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式F是全称(特称)量词∀x(∃x)的辖域,F中出现的x称为约束出现(bound occurrence), x也称为约束变量(bound variable)
- 子公式F没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x也称为自由 变量(free variable).

- $\bullet \ \forall x \exists y P(x, y) \land Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is P(x, y);
- P中的x和y是约束变量;
- Q中的x是自由变量.

- 谓词 $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ 的语义解释和对象 $x_1, x_2, ..., x_n$ 相关
- 解释一个谓词公式需要解释:对象和谓词原子两个部分。

Definition

- 谓词 $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ 的语义解释和对象 $x_1, x_2, ..., x_n$ 相关
- 解释一个谓词公式需要解释: 对象和谓词原子两个部分.

Definition

F是一谓词公式,F的一个解释I包含一个集合D(称为全总个体域(Domain, 论域)及:

4ロ > 4団 > 4豆 > 4豆 > 豆 めなぐ

- 谓词P(x₁, x₂,...,xn)的语义解释和对象x₁, x₂,...,xn相关
- 解释一个谓词公式需要解释: 对象和谓词原子两个部分.

Definition

- 每个常量符号对应于D中的一个元素;
- ② 每个n元函数对应于一个 $\mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{D}$ 的函数($\mathcal{D}^n \triangleq \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in \mathcal{D}, i = 1, 2, \dots, n \}$);
- ③ 每个n元谓词对应于个 D^n → $\{0,1\}$ 的函数

- 谓词 $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ 的语义解释和对象 $x_1, x_2, ..., x_n$ 相关
- 解释一个谓词公式需要解释: 对象和谓词原子两个部分.

Definition

- 每个常量符号对应于D中的一个元素;
- ② 每个n元函数对应于一个 $D^n \longrightarrow D$ 的函数($D^n \triangleq \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle | x_i \in D, i = 1, 2, \dots, n \}$)
- ③ 每个n元谓词对应于个 $D^n \longrightarrow \{0,1\}$ 的函数

- 谓词P(x₁, x₂,...,x_n)的语义解释和对象x₁, x₂,...,x_n相关
- 解释一个谓词公式需要解释: 对象和谓词原子两个部分.

Definition

- 每个常量符号对应于D中的一个元素;
- ② 每个n元函数对应于一个 $\mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{D}$ 的函数($\mathcal{D}^n \triangleq \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in \mathcal{D}, i = 1, 2, \dots, n \}$);
- ③ 每个n元谓词对应于个 $D^n \longrightarrow \{0,1\}$ 的函数

- 谓词P(x₁, x₂,...,x_n)的语义解释和对象x₁, x₂,...,x_n相关
- 解释一个谓词公式需要解释: 对象和谓词原子两个部分.

Definition

- 每个常量符号对应于D中的一个元素;
- ② 每个n元函数对应于一个 $\mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{D}$ 的函数($\mathcal{D}^n \triangleq \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in \mathcal{D}, i = 1, 2, \dots, n \}$);
- ③ 每个n元谓词对应于个 D^n → {0,1}的函数.

F是一谓词公式, F的一个解释/的真值(记为: F/1)递归定义如下:

① 设 $F = P(t_1, t_2, ..., t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, ..., t_n|_I$ 是项 $t_1, t_2, ..., t_n$ 在I下的取值, $F|_I = P|_I(t_1|_I, t_2|_I, ..., t_n|_I)$;

$$\neg (G|_{I}) \qquad \text{if } F = \neg G$$

 $F|_I = \left\{ \begin{array}{c} (G|_I) \vee (H|_I) & \text{if } F = G \vee H \end{array} \right.$

$$(G|_I) \rightarrow (H|_I)$$
 if $F = G \rightarrow H$
 $(G|_I) \leftrightarrow (H|_I)$ if $F = G \leftrightarrow H$

② 设 $F = \forall xG, F|_1 = 1$, iff, 对每个约束变量×在D中的取值 $d \in \mathcal{D}$, 都有 $G(d/x)|_1 = 1$; 否则 $F|_1 = 0$;

① 设 $F = \exists x G, F|_1 = 1$, iff, 对存在 $d \in \mathcal{D}$, 使得 $G(d/x)|_1 = 1$; 否则 $F|_1 = 0$

到于含有自由变量的公式,只有在每个自由变量都取定D中的值时公式才 去知效

F是一谓词公式, F的一个解释/的真值(记为: F/1)递归定义如下:

① 设 $F = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I$ 是项 t_1, t_2, \dots, t_n 在I下的取值, $F|_I = P|_I(t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I)$;

$$F|_{I} = \begin{cases} (G|_{I}) \wedge (H|_{I}) & \text{if } F = G \wedge H \\ (G|_{I}) \vee (H|_{I}) & \text{if } F = G \vee H \\ (G|_{I}) \rightarrow (H|_{I}) & \text{if } F = G \rightarrow H \\ (G|_{I}) \leftrightarrow (H|_{I}) & \text{if } F = G \leftrightarrow H \end{cases}$$

- ③ 设 $F = \forall xG$, $F|_1 = 1$, iff, 对每个约束变量×在D中的取值 $d \in D$, 都有 $G(d/x)|_1 = 1$; 否则 $F|_1 = 0$;
- ① 设 $F = \exists x G, F|_1 = 1$, iff, 对存在 $d \in \mathcal{D}$, 使得 $G(d/x)|_1 = 1$; 否则 $F|_1 = 0$
- 对于含有自由变量的公式,只有在每个自由变量都取定D中的值时公式才 有解释

F是一谓词公式, F的一个解释/的真值(记为: F/)递归定义如下:

① 设 $F = P(t_1, t_2, ..., t_n)$, 设 $t_1|_{I}, t_2|_{I}, ..., t_n|_{I}$ 是项 $t_1, t_2, ..., t_n$ 在I下的取值, $F|_{I} = P|_{I}(t_{1}|_{I}, t_{2}|_{I}, \ldots, t_{n}|_{I});$

$$\textbf{2} \ \ F|_{I} = \left\{ \begin{array}{ll} \neg (G|_{I}) & \text{if } F = \neg G \\ (G|_{I}) \wedge (H|_{I}) & \text{if } F = G \wedge H \\ (G|_{I}) \vee (H|_{I}) & \text{if } F = G \vee H \\ (G|_{I}) \rightarrow (H|_{I}) & \text{if } F = G \rightarrow H \\ (G|_{I}) \leftrightarrow (H|_{I}) & \text{if } F = G \leftrightarrow H \end{array} \right.$$

F是一谓词公式, F的一个解释/的真值(记为: F/1)递归定义如下:

① 设 $F = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, 设 $t_1|_I$, $t_2|_I$, ..., $t_n|_I$ 是项 t_1, t_2 , ..., t_n 在I下的取值, $F|_I = P|_I(t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I)$;

$$P|_{I} = \begin{cases} \neg(G|_{I}) & \text{if } F = \neg G \\ (G|_{I}) \land (H|_{I}) & \text{if } F = G \land H \\ (G|_{I}) \lor (H|_{I}) & \text{if } F = G \lor H \\ (G|_{I}) \to (H|_{I}) & \text{if } F = G \to H \\ (G|_{I}) \leftrightarrow (H|_{I}) & \text{if } F = G \leftrightarrow H \end{cases}$$

- ③ 设 $F = \forall xG$, $F|_1 = 1$, iff, 对每个约束变量×在 \mathcal{D} 中的取值 $d \in \mathcal{D}$, 都有 $G(d/x)|_1 = 1$; 否则 $F|_1 = 0$;
- ④ 设 $F = \exists x G, F|_1 = 1$, iff, 对存在 $d \in \mathcal{D}$, 使得 $G(d/x)|_1 = 1$; 否则 $F|_1 = 0$;
- 对于含有自由变量的公式,只有在每个自由变量都取定D中的值时公式才有解释。

F是一谓词公式, F的一个解释/的真值(记为: F/1)递归定义如下:

① 设 $F = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I$ 是项 t_1, t_2, \dots, t_n 在I下的取值, $F|_I = P|_I(t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I)$;

$$P|_{I} = \begin{cases} \neg(G|_{I}) & \text{if } F = \neg G \\ (G|_{I}) \land (H|_{I}) & \text{if } F = G \land H \\ (G|_{I}) \lor (H|_{I}) & \text{if } F = G \lor H \\ (G|_{I}) \to (H|_{I}) & \text{if } F = G \to H \\ (G|_{I}) \leftrightarrow (H|_{I}) & \text{if } F = G \leftrightarrow H \end{cases}$$

- ③ 设 $F = \forall xG$, $F|_1 = 1$, iff, 对每个约束变量×在 \mathcal{D} 中的取值 $d \in \mathcal{D}$, 都有 $G(d/x)|_1 = 1$; 否则 $F|_1 = 0$;
- ④ 设 $F = \exists x G, F|_1 = 1$, iff, 对存在 $d \in \mathcal{D}$, 使得 $G(d/x)|_1 = 1$; 否则 $F|_1 = 0$;
- ⑤ 对于含有自由变量的公式,只有在每个自由变量都取定D中的值时公式才有解释.

F是一谓词公式, F的一个解释/的真值(记为: F/1)递归定义如下:

① 设 $F = P(t_1, t_2, ..., t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, ..., t_n|_I$ 是项 $t_1, t_2, ..., t_n$ 在I下的取值, $F|_I = P|_I(t_1|_I, t_2|_I, ..., t_n|_I)$;

$$F|_{I} = \begin{cases} \neg(G|_{I}) & \text{if } F = \neg G \\ (G|_{I}) \land (H|_{I}) & \text{if } F = G \land H \\ (G|_{I}) \lor (H|_{I}) & \text{if } F = G \lor H \\ (G|_{I}) \to (H|_{I}) & \text{if } F = G \to H \\ (G|_{I}) \leftrightarrow (H|_{I}) & \text{if } F = G \leftrightarrow H \end{cases}$$

- ③ 设 $F = \forall xG$, $F|_1 = 1$, iff, 对每个约束变量 \times 在 \mathcal{D} 中的取值 $d \in \mathcal{D}$, 都有 $G(d/x)|_1 = 1$; 否则 $F|_1 = 0$;
- 设F = ∃xG, F|₁ = 1, iff, 对存在d ∈ D, 使得G(d/x)|_i = 1; 否则F|_i = 0;
- 对于含有自由变量的公式,只有在每个自由变量都取定D中的值时公式才有解释.

- ① 公式∀xP(x)和∃x¬P(x);
- **2** $\mathcal{D} = \{1, 2\}$
- **9** $\frac{P|_{I}(1)}{1} = \frac{P|_{I}(2)}{0}$
- $(\forall x P(x))|_I = 0$, because $P|_I(2) = 0$
- **3** $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, because $P|_I(2) = 0$, $(\neg P)|_I(2) = 1$

- ① 公式∀xP(x)和∃x¬P(x);
- **2** $\mathcal{D} = \{1, 2\}$
- $\bullet \ \frac{P|_{I}(1) | P|_{I}(2)}{1 | 0}$
- $(\forall x P(x))|_I = 0, \text{ because } P|_I(2) = 0$
- **9** $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, because $P|_I(2) = 0$, $(\neg P)|_I(2) = 1$

2
$$\mathcal{D} = \{1, 2\}$$

$$(\forall x P(x))|_{I} = 0$$
, because $P|_{I}(2) = 0$

5
$$(\exists x \neg P(x))|_I = 1$$
, because $P|_I(2) = 0$, $(\neg P)|_I(2) = 1$

2
$$\mathcal{D} = \{1, 2\}$$

2
$$\mathcal{D} = \{1, 2\}$$

$$(\forall x P(x))|_{I} = 0$$
, because $P|_{I}(2) = 0$;

6
$$(\exists x \neg P(x))|_I = 1$$
, because $P|_I(2) = 0$, $(\neg P)|_I(2) = 1$

2
$$\mathcal{D} = \{1, 2\}$$

$$(\forall x P(x))|_I = 0$$
, because $P|_I(2) = 0$;

3
$$(\exists x \neg P(x))|_{I} = 1$$
, because $P|_{I}(2) = 0$, $(\neg P)|_{I}(2) = 1$.

- ① 公式 $G = \forall x (P(x) \rightarrow Q(f(x), a));$
- **2** $\mathcal{D} = \{1, 2\}$

- **6** $(P(x) \to Q(f(x), a))|_{I,x=2} = P|_{I}(2) \to Q|_{I}(1, 1) = 1;$
- $(\forall x (P(x) \rightarrow Q(f(x), a)))|_{I} = 1$

① 公式
$$G = \forall x (P(x) \rightarrow Q(f(x), a));$$

2
$$\mathcal{D} = \{1, 2\}$$

$$(P(x) \to Q(f(x), a))|_{I, x=2} = P|_{I}(2) \to Q|_{I}(1, 1) = 1;$$

$$(\forall x (P(x) \to Q(f(x), a)))|_{I} = 1.$$

① 公式
$$G = \forall x (P(x) \rightarrow Q(f(x), a));$$

2
$$\mathcal{D} = \{1, 2\}$$

$$a | f(1) | f(2)$$

1 2 1

$$(\forall x (P(x) \to Q(f(x), a)))|_{I} = 1.$$

① 公式
$$G = \forall x (P(x) \rightarrow Q(f(x), a));$$

2
$$\mathcal{D} = \{1, 2\}$$

6
$$(P(x) \to Q(f(x), a))|_{I,x=2} = P|_{I}(2) \to Q|_{I}(1, 1) = 1;$$

$$(\forall x (P(x) \to Q(f(x), a)))|_{I} = 1.$$

① 公式
$$G = \forall x (P(x) \rightarrow Q(f(x), a));$$

2
$$\mathcal{D} = \{1, 2\}$$

4

$P _{I}(1)$	$P _{I}(2)$	$ Q _{I}(1,1)$	$Q _{I}(1,2)$	$ Q _{I}(2,1)$	$ Q _{I}(2,2)$
0	1	1	1	0	1

- $(P(x) \to Q(f(x), a))|_{I, x=2} = P|_{I}(2) \to Q|_{I}(1, 1) = 1$
- $\bigcirc (\forall x (P(x) \rightarrow Q(f(x), a)))|_I = 1.$

① 公式
$$G = \forall x (P(x) \rightarrow Q(f(x), a));$$

$$\mathcal{D} = \{1, 2\}$$

$$(P(x) \to Q(f(x), a))|_{I,x=1} = P|_{I}(1) \to Q|_{I}(2, 1) = 1;$$

6
$$(P(x) \to Q(f(x), a))|_{I,x=2} = P|_{I}(2) \to Q|_{I}(1, 1) = 1;$$

$$\bigcirc (\forall x (P(x) \rightarrow Q(f(x), a)))|_{I} = 1$$

Example(2/2)

Example

① 公式
$$G = \forall x (P(x) \rightarrow Q(f(x), a));$$

2
$$\mathcal{D} = \{1, 2\}$$

$$(P(x) \to Q(f(x), a))|_{I,x=1} = P|_{I}(1) \to Q|_{I}(2, 1) = 1;$$

6
$$(P(x) \to Q(f(x), a))|_{I,x=2} = P|_{I}(2) \to Q|_{I}(1, 1) = 1;$$

 $\bigcirc (\forall x (P(x) \rightarrow Q(f(x), a)))|_{I} = 1.$

① 公式
$$G = \forall x (P(x) \rightarrow Q(f(x), a));$$

2
$$\mathcal{D} = \{1, 2\}$$

$$(P(x) \to Q(f(x), a))|_{I,x=1} = P|_{I}(1) \to Q|_{I}(2, 1) = 1;$$

6
$$(P(x) \to Q(f(x), a))|_{I,x=2} = P|_{I}(2) \to Q|_{I}(1, 1) = 1;$$

- 1 谓词与量词
 - ●谓词
 - 符号化
 - 一阶逻辑公式的语义
- ② 公式间的关系式
 - 逻辑等价和永真蕴涵关系
 - 量词的逻辑关系
 - 前束范式
- ③ 谓词公式的自然推理
 - 相关概念的复习
 - 量词的推理规则
 - 形式证明的例子
 - Mechanized Reasoning

- A formula G is consistent (satisfiable, 相容的, 可满足的), iff, 存在解释/, 使得: G|₁ = 1, 这时, 称/是G的模型(model);
- G is inconsistent (unsatisfiable, 永假的, 矛盾的), iff, 对所有的解释I, $G|_{I}=0$;
- G is valid (永真的), iff, 对所有的解释/, G|₁ = 1.

Example

- A formula G is consistent (satisfiable, 相容的, 可满足的), iff, 存在解释/, 使得: G|_I = 1, 这时, 称/是G的模型(model);
- G is inconsistent (unsatisfiable, 永假的, 矛盾的), iff, 对所有的解释/,
 G|_I = 0;
- G is valid (永真的), iff, 对所有的解释I, $G|_{I}=1$.

- A formula G is consistent (satisfiable, 相容的, 可满足的), iff, 存在解释/, 使得: G|_I = 1, 这时, 称/是G的模型(model);
- G is inconsistent (unsatisfiable, 永假的, 矛盾的), iff, 对所有的解释/, $G|_{I}=0$;
- G is valid (永真的), iff, 对所有的解释I, $G|_{I}=1$

- A formula G is consistent (satisfiable, 相容的, 可满足的), iff, 存在解释1, 使得: $G|_{I}=1$, 这时, 称I是G的模型(model);
- G is inconsistent (unsatisfiable, 永假的, 矛盾的), iff, 对所有的解释/, $G|_{I}=0;$
- *G* is valid (永真的), iff, 对所有的解释*I*, *G*|_I = 1.

- A formula G is consistent (satisfiable, 相容的, 可满足的), iff, 存在解释/, 使得: G|_I = 1, 这时, 称/是G的模型(model);
- G is inconsistent (unsatisfiable, 永假的, 矛盾的), iff, 对所有的解释I, $G|_{I}=0$;
- G is valid (永真的), iff, 对所有的解释I, $G|_{I}=1$.

$\mathsf{Example}$

- (∃x¬P(x))|₁ = 1, 所以该公式是可满足的; 但是不是永真的;
- ∀xP(x) ↔ ¬(∃x¬P(x))) 是永真的:
- ∃x(D(x) → ∀yD(y)) (喝酒者悖论) 是永真的;
- 由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的,因为只要在一个特殊的解释下(Harbernet Universe)解释为假, 这八寸或点假

- A formula G is consistent (satisfiable, 相容的, 可满足的), iff, 存在解释/, 使得: G|_I = 1, 这时, 称/是G的模型(model);
- G is inconsistent (unsatisfiable, 永假的, 矛盾的), iff, 对所有的解释I, $G|_{I}=0$;
- G is valid (永真的), iff, 对所有的解释I, $G|_{I}=1$.

- (∃x¬P(x))|₁ = 1, 所以该公式是可满足的; 但是不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg (\exists x \neg P(x)))$ 是永真的;
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall yD(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;
- 由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的,因为只要在

- A formula G is consistent (satisfiable, 相容的, 可满足的), iff, 存在解释/, 使得: G|_I = 1, 这时, 称/是G的模型(model);
- G is inconsistent (unsatisfiable, 永假的, 矛盾的), iff, 对所有的解释I, $G|_{I}=0$;
- G is valid (永真的), iff, 对所有的解释I, $G|_{I}=1$.

${\sf Example}$

- (∃x¬P(x))|₁ = 1, 所以该公式是可满足的; 但是不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x)))$ 是永真的;
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall yD(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;
- 由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的,因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假,该公式就永假.

- A formula G is consistent (satisfiable, 相容的, 可满足的), iff, 存在解释/, 使得: G|₁ = 1, 这时, 称/是G的模型(model);
- G is inconsistent (unsatisfiable, 永假的, 矛盾的), iff, 对所有的解释I, $G|_{I}=0$;
- G is valid (永真的), iff, 对所有的解释I, $G|_{I}=1$.

- (∃x¬P(x))|₁ = 1, 所以该公式是可满足的; 但是不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x)))$ 是永真的;
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall yD(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;
- 由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的,因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假,该公式就永假。

- A formula G is consistent (satisfiable, 相容的, 可满足的), iff, 存在解释/, 使得: G|_I = 1, 这时, 称/是G的模型(model);
- G is inconsistent (unsatisfiable, 永假的, 矛盾的), iff, 对所有的解释/, $G|_{I}=0$;
- G is valid (永真的), iff, 对所有的解释I, $G|_{I}=1$.

- $(\exists x \neg P(x))|_{I} = 1$, 所以该公式是可满足的; 但是不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg (\exists x \neg P(x)))$ 是永真的;
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall yD(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;
- 由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的,因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假,该公式就永假.

- \bullet $F \Leftrightarrow G$;
- iff F ↔ G 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff F ↔ G 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff F ↔ G 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff F ↔ G 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_{I} = 1$;
- $\bullet \text{ iff } \forall I F|_I = G|_I.$

- o III F -- G 是永真的;
 - o iff viii i o iii o ii o ii
- o iff when a fine

- o iff when

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff F ↔ G 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff F ↔ G 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

- \bullet $F \Rightarrow G$;
- iff $F \rightarrow G$ 是永真的;
- iff $\forall I (F \rightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F |_{I} \leq G |_{I}$;
- iff $\forall I F|_I = 1$, then $G|_I = 1$;
- iff $\forall I G|_{I} = 0$, then $F|_{I} = 0$.

Definition (逻辑等价关系的等价定义)

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff F ↔ G 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

- $F \Rightarrow G$;
- iff F → G 是永真的;
- iff $\forall I (F \rightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F |_{I} \leq G |_{I}$;
- iff $\forall I F|_I = 1$, then $G|_I = 1$;
- iff $\forall I G|_{I} = 0$, then $F|_{I} = 0$.

Definition (逻辑等价关系的等价定义)

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff F ↔ G 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

- $F \Rightarrow G$;
- iff F → G 是永真的;
- iff $\forall I (F \rightarrow G)|_I = 1$;
- iff $\forall I F |_{I} \leq G |_{I}$;
- iff $\forall I F|_I = 1$, then $G|_I = 1$;
- iff $\forall I G|_{I} = 0$, then $F|_{I} = 0$.

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff F ↔ G 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

- $F \Rightarrow G$;
- iff F → G 是永真的;
- iff $\forall I (F \rightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F |_{I} \leq G |_{I}$;
- iff $\forall I F|_I = 1$, then $G|_I = 1$;
- iff $\forall I G|_I = 0$, then $F|_I = 0$.

Definition (逻辑等价关系的等价定义)

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff F ↔ G 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

- $F \Rightarrow G$;
- iff F → G 是永真的;
- iff $\forall I (F \rightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F|_I \leqslant G|_I$;
- iff $\forall I \ F|_{I} = 1$, then $G|_{I} = 1$;
- iff $\forall I G|_{I} = 0$, then $F|_{I} = 0$.

Definition (逻辑等价关系的等价定义)

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff F ↔ G 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

- $F \Rightarrow G$;
- iff F → G 是永真的;
- iff $\forall I (F \rightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F |_{I} \leq G |_{I}$;
- iff $\forall I F|_I = 1$, then $G|_I = 1$;
- iff $\forall I G|_{I} = 0$, then $F|_{I} = 0$.

Definition (逻辑等价关系的等价定义)

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff F ↔ G 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

- $F \Rightarrow G$;
- iff F → G 是永真的;
- iff $\forall I (F \rightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I F|_I \leqslant G|_I$;
- iff $\forall I F|_I = 1$, then $G|_I = 1$;
- iff $\forall I G|_I = 0$, then $F|_I = 0$.

- 所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;
- 谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.

- 所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;
- 谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.

- 所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;
- 谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.

- $\bullet \ \forall x P(x) \to \exists x Q(x,y) \Leftrightarrow \neg(\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x,y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性、对称性和传递性、不等式的传递性等

- 所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中 成立;
- 谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.

- $\bullet \ \forall x P(x) \to \exists x Q(x,y) \Leftrightarrow \neg(\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x,y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性, 对称性和传递性, 不等式的传递性等

- 所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中 成立;
- 谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.

- $\bullet \ \forall x P(x) \to \exists x Q(x,y) \Leftrightarrow \neg(\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x,y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性, 对称性和传递性, 不等式的传递性等

- 所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;
- 谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.

- $\bullet \ \forall x P(x) \to \exists x Q(x,y) \Leftrightarrow \neg(\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x,y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性, 对称性和传递性, 不等式的传递性等.

设F(x)表示含自由变量x的公式,设变量y不出现在公式F(x)中,则:

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall y F(y)$$
$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists y F(y)$$

设F(x)表示含自由变量x的公式,设变量y不出现在公式F(x)中,则:

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall y F(y)$$
$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists y F(y)$$

- $\bullet \ \forall x P(x,y) \Leftrightarrow \forall y P(y,y)$
- $\bullet \ \forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall y P(y,y)$
- 因为上述更名使约束与非约束的关系发生了变化

设F(x)表示含自由变量x的公式,设变量y不出现在公式F(x)中,则:

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall y F(y)$$
$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists y F(y)$$

- $\bullet \ \forall x P(x,y) \Leftrightarrow \forall y P(y,y)$
- $\bullet \ \forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall y P(y,y)$
- 因为上述更名使约束与非约束的关系发生了变化

设F(x)表示含自由变量x的公式,设变量y不出现在公式F(x)中,则:

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall y F(y)$$
$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists y F(y)$$

- $\bullet \ \forall x P(x,y) \Leftrightarrow \forall y P(y,y)$
- $\forall x \forall y P(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall y P(y, y)$
- 因为上述更名使约束与非约束的关系发生了变化

设F(x)表示含自由变量x的公式,设变量y不出现在公式F(x)中,则:

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall y F(y)$$
$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists y F(y)$$

- $\bullet \ \forall x P(x,y) \Leftrightarrow \forall y P(y,y)$
- $\bullet \ \forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall y P(y,y)$
- 因为上述更名使约束与非约束的关系发生了变化.

Theorem (量词的解消)

设F是不含自由变量x的公式,则:

$$\forall x \ F \Leftrightarrow F$$
$$\exists x \ F \Leftrightarrow F$$

Theorem (特例与量词的关系)

$$\forall x F(x) \Rightarrow F(x)$$
$$F(a) \Rightarrow \exists x F(x)$$

Remark

注意特例化没有恒等关系: 当 $D = \{1,2\}$, a = 1, F(1) = 0, F(2) = 1时, F(a)为假, 但是, $\exists x F(x)$ 为真.

- 14 my B /C

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

$$(\neg(\forall x F(x)))|_{I} = 1$$
iff $(\forall x F(x))|_{I} = 0$
iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land F(d)|_{I} = 0$
iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land \neg F(d)|_{I} = 0$
iff $(\exists x \neg F(x))|_{I} = 1$

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

$$(\neg(\forall x F(x)))|_{I} = 1$$
iff $(\forall x F(x))|_{I} = 0$
iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land F(d)|_{I} = 0$
iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land \neg F(d)|_{I} = 0$
iff $(\exists x \neg F(x))|_{I} = 1$

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

$$(\neg(\forall x F(x)))|_{I} = 1$$
iff $(\forall x F(x))|_{I} = 0$
iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land F(d)|_{I} = 0$
iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land \neg F(d)|_{I} = 1$
iff $(\exists x \neg F(x))|_{I} = 1$

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

$$(\neg(\forall x F(x)))|_{I} = 1$$
 iff $(\forall x F(x))|_{I} = 0$ iff 存在 $d \in \mathcal{D} \wedge F(d)|_{I} = 0$ iff 存在 $d \in \mathcal{D} \wedge \neg F(d)|_{I} = 1$ iff $(\exists x \neg F(x))|_{I} = 1$

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释/有:

$$(\neg(\forall x F(x)))|_I = 1$$

iff $(\forall x F(x))|_I = 0$
iff 存在 $d \in \mathcal{D} \wedge F(d)|_I = 0$
iff 存在 $d \in \mathcal{D} \wedge \neg F(d)|_I = 1$
iff $(\exists x \neg F(x))|_I = 1$

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释/有:

$$(\neg(\forall x F(x)))|_{I} = 1$$
 iff $(\forall x F(x))|_{I} = 0$ iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land F(d)|_{I} = 0$ iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land \neg F(d)|_{I} = 1$ iff $(\exists x \neg F(x))|_{I} = 1$

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释/有:

$$(\neg(\forall x F(x)))|_I = 1$$

iff $(\forall x F(x))|_I = 0$
iff 存在 $d \in \mathcal{D} \wedge F(d)|_I = 0$
iff 存在 $d \in \mathcal{D} \wedge \neg F(d)|_I = 1$
iff $(\exists x \neg F(x))|_I = 1$

- 对任意的 $\epsilon > 0$,存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 κ , 当 $0 < |x x_0| \le \delta$ 时, 有 $|f(x) f(x_0)| \le \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在x, 使 得 $0 < |x x_0| \le \delta n |f(x) f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

- 对任意的 $\epsilon > 0$,存在 $\delta > 0$, 使得对任意的x, 当 $0 < |x x_0| \le \delta$ 时, 有 $|f(x) f(x_0)| \le \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在x, 使 $\{ \{ \{ \{ \{ \{ \{ \{ \{ \} \} \} \} \} \} \in \epsilon \} \} \} \} \}$ 同时成立.

- 对任意的 $\epsilon>0$,存在 $\delta>0$, 使得对任意的x, 当 $0<|x-x_0|\leqslant\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|\leqslant\epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在x, 使 得 $0 < |x x_0| \le \delta m |f(x) f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example — 极限和发散的定义

Example (极限的定义)

- 对任意的 $\epsilon > 0$,存在 $\delta > 0$, 使得对任意的x, 当 $0 < |x x_0| \le \delta$ 时, 有 $|f(x) f(x_0)| \le \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在x, 使 得 $0 < |x x_0| \le \delta m |f(x) f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

 $\neg (\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon))$

 $\Leftrightarrow \neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\neg(\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \lor |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon))$

 $\Leftrightarrow \exists \epsilon \forall \delta \exists x ((\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leq \delta) \land |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).$

Example — 极限和发散的定义

Example (极限的定义)

- 对任意的 $\epsilon>0$,存在 $\delta>0$, 使得对任意的x, 当 $0<|x-x_0|\leqslant\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|\leqslant\epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在x, 使 得 $0 < |x x_0| \le \delta m |f(x) f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$\neg (\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$$

 $\Leftrightarrow \neg (\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\neg (\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \lor |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$

 $\Leftrightarrow \exists \epsilon \forall \delta \exists x ((\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \land |f(x) - f(x_0)| > \epsilon)$

- 对任意的 $\epsilon > 0$,存在 $\delta > 0$, 使得对任意的x, 当 $0 < |x x_0| \le \delta$ 时, 有 $|f(x) f(x_0)| \le \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在x, 使 得 $0 < |x x_0| \le \delta m |f(x) f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$\neg (\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\neg (\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \lor |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$$

 $\Leftrightarrow \exists \epsilon \forall \delta \exists x ((\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \land |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).$

- 对任意的 $\epsilon > 0$,存在 $\delta > 0$, 使得对任意的x, 当 $0 < |x x_0| \le \delta$ 时, 有 $|f(x) f(x_0)| \le \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在x, 使 得 $0 < |x x_0| \le \delta m |f(x) f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

$$\neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\neg (\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \lor |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon \forall \delta \exists x ((\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leq \delta) \land |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).$$

设×不在公式G中出现,则:

$$(\forall x F(x)) \land G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \land G)$$

$$(\forall x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \lor G)$$

$$(\exists x F(x)) \land G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \land G)$$

$$(\exists x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \lor G)$$

设×不在公式G中出现,则:

$$(\forall x F(x)) \land G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \land G)$$

$$(\forall x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \lor G)$$

$$(\exists x F(x)) \land G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \land G)$$

$$(\exists x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \lor G)$$

Example

 $\forall x \forall y (P(x) \lor P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y P(y)$

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y))$$

$$\Rightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y P(y))$$
 (代入+替换)

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y P(y)$$

设×不在公式G中出现,则:

$$(\forall x F(x)) \land G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \land G)$$

$$(\forall x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \lor G)$$

$$(\exists x F(x)) \land G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \land G)$$

$$(\exists x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \lor G)$$

Example

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y P(y)$$

$$\forall x \forall y (P(x) \vee P(y))$$

$$\Rightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y P(y))$$
 (代入+替换)

 $\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y P(y)$

设×不在公式G中出现,则:

$$(\forall x F(x)) \land G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \land G)$$

$$(\forall x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \lor G)$$

$$(\exists x F(x)) \land G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \land G)$$

$$(\exists x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \lor G)$$

Example

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y P(y)$$

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y))$$

 $\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y P(y))$ (代入+替换)

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y P(y)$$

设×不在公式G中出现,则:

$$(\forall x F(x)) \land G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \land G)$$

$$(\forall x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \lor G)$$

$$(\exists x F(x)) \land G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \land G)$$

$$(\exists x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \lor G)$$

Example

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y P(y)$$

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y P(y))$$
 (代入+替换)

 $\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall v P(v)$



设x不在公式G中出现,则:

$$(\forall x F(x)) \land G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \land G)$$

$$(\forall x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \lor G)$$

$$(\exists x F(x)) \land G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \land G)$$

$$(\exists x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \lor G)$$

$$(\exists x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \lor G)$$

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y P(y)$$

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y P(y))$$
 (代入+替换)

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y P(y)$$
 (代入)

设F(x)和G(x)是两谓词公式,则:

 $\exists x (F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$

 $\exists x (F(x) \land G(x)) = \exists x F(x) \land \exists x G(x)$

设F(x)和G(x)是两谓词公式,则:

0

- $\forall x (F(x) \land G(x)) \Leftrightarrow \forall x F(x) \land \forall x G(x)$
- $\exists x (F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$
- $\forall x F(x) \lor \forall x G(x) \forall x (F(x) \lor G(x))$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \exists x F(x) \land \exists x G(x)$

设F(x)和G(x)是两谓词公式,则:

- $\exists x (F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \land \exists x G(x)$

设F(x)和G(x)是两谓词公式,则:

- $\forall x (F(x) \land G(x)) \Leftrightarrow \forall x F(x) \land \forall x G(x)$
- $\exists x (F(x) \lor G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \exists x F(x) \land \exists x G(x)$

Remark

设F(x)和G(x)是两谓词公式,则:

- $\forall x (F(x) \land G(x)) \Leftrightarrow \forall x F(x) \land \forall x G(x)$
- $\exists x (F(x) \lor G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$
- $\forall x F(x) \lor \forall x G(x) \Longrightarrow \forall x (F(x) \lor G(x))$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \land \exists x G(x)$

量词的分配形式

Theorem (量词的分配形式)

设F(x)和G(x)是两谓词公式,则:

- $\forall x (F(x) \land G(x)) \Leftrightarrow \forall x F(x) \land \forall x G(x)$
- $\exists x (F(x) \lor G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$
- $\forall x F(x) \vee \forall x G(x) \Longrightarrow \forall x (F(x) \vee G(x))$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \land \exists x G(x)$

- (3)和(4)没有恒等式:
- 如, F(x): \times 是偶数, G(x): \times 是奇数, 则, 在自然数集合的解释下: $\forall \times (F(x) \vee G(x))$ 为真, 但是, $\forall \times F(x) \vee \forall \times G(x)$ 为假;
- 同样,∃xF(x) ∨∃xG(x)为真,但是,∃x(F(x) ∧ G(x))为假

设F(x)和G(x)是两谓词公式,则:

- $\forall x (F(x) \land G(x)) \Leftrightarrow \forall x F(x) \land \forall x G(x)$
- $\exists x (F(x) \lor G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$
- $\forall x F(x) \lor \forall x G(x) \Longrightarrow \forall x (F(x) \lor G(x))$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \land \exists x G(x)$

- ③和④没有恒等式;
- 如, F(x): \times 是偶数, G(x): \times 是奇数, 则, 在自然数集合的解释下: $\forall \times (F(x) \vee G(x))$ 为真, 但是, $\forall \times F(x) \vee \forall \times G(x)$ 为假;
- 同样, $\exists x F(x) \vee \exists x G(x)$ 为真, 但是, $\exists x (F(x) \wedge G(x))$ 为假

量词的分配形式

Theorem (量词的分配形式)

设F(x)和G(x)是两谓词公式,则:

- $\forall x (F(x) \land G(x)) \Leftrightarrow \forall x F(x) \land \forall x G(x)$
- $\exists x (F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$
- $\forall x F(x) \lor \forall x G(x) \Longrightarrow \forall x (F(x) \lor G(x))$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \land \exists x G(x)$

- (3)和(4)没有恒等式;
- 如, F(x): x是偶数, G(x): x是奇数, 则, 在自然数集合的解释下: $\forall x(F(x) \lor G(x))$ 为真, 但是, $\forall xF(x) \lor \forall xG(x)$ 为假;
- 同样, $\exists x F(x) \vee \exists x G(x)$ 为真, 但是, $\exists x (F(x) \wedge G(x))$ 为假

量词的分配形式

Theorem (量词的分配形式)

设F(x)和G(x)是两谓词公式,则:

- $\forall x (F(x) \land G(x)) \Leftrightarrow \forall x F(x) \land \forall x G(x)$
- $\exists x (F(x) \lor G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$
- $\forall x F(x) \lor \forall x G(x) \Longrightarrow \forall x (F(x) \lor G(x))$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \land \exists x G(x)$

- (3)和(4)没有恒等式;
- 如, F(x): x是偶数, G(x): x是奇数, 则, 在自然数集合的解释下: $\forall x(F(x) \lor G(x))$ 为真, 但是, $\forall xF(x) \lor \forall xG(x)$ 为假;
- 同样, $\exists x F(x) \lor \exists x G(x)$ 为真, 但是, $\exists x (F(x) \land G(x))$ 为假.

$$\exists x (P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$\exists x (P(x) \to Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x)) \qquad (\text{代} \lambda + \text{替} \text{\&})$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \lor \exists x Q(x) \qquad (\text{\'} \lambda + \text{\'} \text{\'} \text{\'} \text{\'} \text{\&})$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x) \qquad (\text{\'} \text{\'} \text{\&} + \text{\'} \text{\'} \text{\'} \text{\'} \text{\&} \text{\'} \text{\'} \text{\'} \text{\'} \text{\'}$$

$$\exists x (P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$\exists x (P(x) \to Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x)) \qquad (代入+替换$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \lor \exists x Q(x) \qquad (代入+分配形式$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x) \qquad (替换+量词的否定$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x) \qquad (代入+按项表状式)$$

$$\exists x (P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$\exists x (P(x) \to Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \lor \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x)$$

$$\exists x (P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$\exists x (P(x) \to Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \lor \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$(代入 + 芬配形式)$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$(代A + 蔡涵表达式)$$

Eve mande

$$\exists x (P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

 $\exists x (P(x) \to Q(x))$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \lor \exists x Q(x) \qquad (\texttt{代入+分配形式})$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x)$$
 (替换+量词的否定)

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$
 (代入+蕴涵表

$$\exists x (P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$\exists x (P(x) \to Q(x))$$

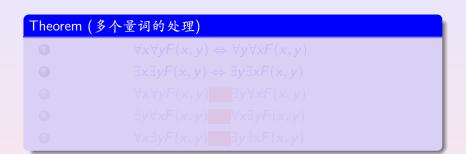
$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x)) \qquad (代入+替换)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \lor \exists x Q(x) \qquad (代入+分配形式)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x) \qquad (替换+量词的否定)$$

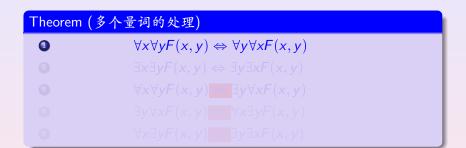
$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x) \qquad (代入+蕴涵表达式)$$

多个量词的处理





多个量词的处理





Theorem (多个量词的处理)

 $\exists x \exists y F(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$

 $\exists \forall x \forall y F(x,y) = \exists y \forall x F(x,y)$

 $\exists y \forall x F(x,y) \qquad \forall x \exists y F(x,y)$

 $\forall x \exists y F(x,y) \exists y \exists x F(x,y)$

Example (④不是逻辑恒等关系的反例

Theorem (多个量词的处理)

 $\forall x \forall y F(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x F(x, y)$ 0

 $\exists x \exists y F(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$ 2

 $\forall x \forall y F(x, y) \Longrightarrow \exists y \forall x F(x, y)$ (3)

Theorem (多个量词的处理)

 $\forall x \forall y F(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x F(x, y)$

 $\exists x \exists y F(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$

 $\forall x \forall y F(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x F(x,y)$

 $\exists y \forall x F(x,y) \Longrightarrow \forall x \exists y F(x,y)$

 $\forall x \exists y F(x, y) \Longrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$

Example (④不是逻辑恒等关系的反例)

1	$\forall x \forall y F(x, y)$	$(x) \Leftrightarrow \forall y \forall x F(x)$	(x,y)
----------	-------------------------------	--	-------

$$\exists x \exists y F(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x,y)$$

$$\exists \forall x \forall y F(x,y) \Longrightarrow \exists y \forall x F(x,y)$$

$$\exists y \forall x F(x, y) \Longrightarrow \forall x \exists y F(x, y)$$

$$\forall x \exists y F(x, y) \Longrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$$

Example (④不是逻辑恒等关系的反例)

0 $\forall x \forall$	$\forall y F(x, y)$	$(\mathbf{v}) \Leftrightarrow \forall \mathbf{v}$	$y \forall x F(x)$	(, y)
-------------------------	---------------------	---	--------------------	-------

$$\exists x \exists y F(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$$

$$\forall x \forall y F(x,y) \Longrightarrow \exists y \forall x F(x,y)$$

$$\exists y \forall x F(x,y) \Longrightarrow \forall x \exists y F(x,y)$$

 $\forall x \exists y F(x, y) \Longrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$

Example (4)不是逻辑恒等关系的反例)

0 $\forall x \forall$	$\forall y F(x, y)$	$(\mathbf{v}) \Leftrightarrow \forall \mathbf{v}$	$y \forall x F(x)$	(, y)
-------------------------	---------------------	---	--------------------	-------

$$\exists x \exists y F(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$$

$$\forall x \forall y F(x,y) \Longrightarrow \exists y \forall x F(x,y)$$

$$\exists y \forall x F(x, y) \Longrightarrow \forall x \exists y F(x, y)$$

 $\forall x \exists y F(x,y) \Longrightarrow \exists y \exists x F(x,y)$

Example (④不是逻辑恒等关系的反例)

- $\forall x \exists y \ LOVE(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x LOVE(x, y);$
- $\bullet \ \forall x \exists v (x + v = 0) \Rightarrow \exists v \forall x (x + v = 0)$

0 $\forall x \forall$	$\forall y F(x, y)$	$(\mathbf{v}) \Leftrightarrow \forall \mathbf{v}$	$y \forall x F(x)$	(, y)
-------------------------	---------------------	---	--------------------	-------

$$\exists x \exists y F(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$$

$$\forall x \forall y F(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x F(x,y)$$

$$\exists y \forall x F(x,y) \Longrightarrow \forall x \exists y F(x,y)$$

 $\forall x \exists y F(x,y) \Longrightarrow \exists y \exists x F(x,y)$

Example (④不是逻辑恒等关系的反例)

- $\forall x \exists y \ LOVE(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x LOVE(x, y);$
- $\forall x \exists y (x + y = 0) \Rightarrow \exists y \forall x (x + y = 0)$

Definition

设G是一个仅含有 \forall , \exists , \neg , \wedge 和 \vee 运算符号的公式; G的对偶公式G*是将G中的 \forall , \exists , \wedge , \vee , \mathbb{T} 和 \mathbb{T} 等符号分别替换为 \exists , \forall , \vee , \wedge , \mathbb{T} 和 \mathbb{T} , 并且 \mathbb{T} , 并且 \mathbb{T} , 并且 \mathbb{T}

$\mathsf{T}\mathsf{heorem}$

设F和G是仅含有∀, ∃, ¬, ∧π∨运算符号的公式; 则: F ⇔ G iff $F^* ⇔ G^*$

Theorem

设F和G是仅含有∀,∃,¬,∧和∨运算符号的公式;则: F ⇒ G iff G* ⇒ F*

Definition

设G是一个仅含有 \forall , \exists , \neg , \wedge 和 \vee 运算符号的公式; G的对偶公式G*是将G中的 \forall , \exists , \wedge , \vee , \mathbb{T} 和 \mathbb{T} 等符号分别替换为 \exists , \forall , \vee , \wedge , \mathbb{T} 和 \mathbb{T} , 并且 \mathbb{T} , 并且 \mathbb{T} 持原有的运算关系所得到的公式.

Theorem

设F和G是仅含有∀, ∃, ¬, ∧↑0 运算符号的公式; 则: $F ⇔ G \qquad iff \qquad F^* ⇔ G^*$

Theorem

设F和G是仅含有∀,∃,¬,∧和∨运算符号的公式;则: F⇒G iff G*⇒F*

Definition

设G是一个仅含有 \forall , ∃, ¬, ∧和∨运算符号的公式; G的对偶公 式 G^* 是将G中的 \forall , ∃, ∧, ∨, \mathbb{T} 和 \mathbb{F} 等符号分别替换为∃, \forall , ∨, ∧, \mathbb{F} 和 \mathbb{T} ,并且保持原有的运算关系所得到的公式.

$\mathsf{Theorem}$

设F和G是仅含有∀, ∃, ¬, ∧和∨运算符号的公式; 则:

 $F \Leftrightarrow G$ iff $F^* \Leftrightarrow G^*$

Theorem

设F和G是仅含有∀, ∃, ¬, ∧和∨运算符号的公式; 则:

 $F \Rightarrow G$ iff $G^* \Rightarrow F^*$

- $\forall x F(x) \vee \forall x G(x) \forall x (F(x) \vee G(x))$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$

- o valyita, yhtelyaatta

- $\forall x F(x) \lor \forall x G(x) \Longrightarrow \forall x (F(x) \lor G(x))$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$

- $\forall x F(x) \lor \forall x G(x) \Longrightarrow \forall x (F(x) \lor G(x))$ •
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$

- $\forall x F(x) \lor \forall x G(x) \Longrightarrow \forall x (F(x) \lor G(x))$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$

- $\forall x \exists y F(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x, y)$
- $\forall y \forall x F(x,y) \Longrightarrow \exists x \forall y F(x,y)$

- $\forall x F(x) \lor \forall x G(x) \Longrightarrow \forall x (F(x) \lor G(x))$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$

- $\forall x \exists y F(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x,y)$
- $\forall y \forall x F(x,y) \Longrightarrow \exists x \forall y F(x,y)$

- $\forall x F(x) \lor \forall x G(x) \Longrightarrow \forall x (F(x) \lor G(x))$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$

- $\forall x \exists y F(x,y) \Longrightarrow \exists y \exists x F(x,y)$
- $\forall y \forall x F(x,y) \Longrightarrow \exists x \forall y F(x,y)$

Example(2/2)

Example

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \to \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \to \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg R(x) \lor \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \neg P(x)) \wedge \neg P(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land \forall x B(x)$$

$$\Rightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \neg R(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \to \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg R(x) \lor \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land \forall x B(x)$$

$$\Rightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \neg R(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

Evample

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \to \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg R(x) \lor \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \blacksquare$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \forall x B(x)$$

$$\Rightarrow \forall x (\neg P(x) \lor \neg R(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \to \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg R(x) \lor \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land \neg P(x)) \land \neg P(x)) \land \neg P(x) \lor \neg P(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \forall x B(x)$$

$$\Rightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \neg R(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \to \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg R(x) \lor \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge B(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \forall x B(x)$$

$$\Rightarrow \forall x (\neg P(x) \lor \neg R(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \to \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg R(x) \lor \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land B(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land \forall x B(x)$$

$$\Rightarrow \forall x (\neg P(x) \lor \neg R(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

Example(2/2)

Example

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \to \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg R(x) \lor \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land B(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \forall \overline{xB(x)}$$

$$\Rightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \neg R(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \to \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg R(x) \lor \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land B(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \forall \overline{xB(x)}$$

$$\Rightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \neg R(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$



存在B使得: $(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \lor \neg R) \land B$

存在B使得: $(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \lor \neg R) \land B$

Proof.

$$(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q)$$

$$\Rightarrow B \land ((\neg P \lor \neg R) \lor (P \land R))$$

$$\Rightarrow (B \land (\neg P \lor \neg R)) \lor (B \land (P \land R))$$

 $\Leftrightarrow C \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge P \wedge R)$ $\Leftrightarrow C \vee ((\neg P \wedge P \vee Q \wedge P) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge R$ $\Leftrightarrow C \vee (Q \wedge P \wedge (\neg R \wedge R \vee \neg Q \wedge R))$ $\Leftrightarrow C \vee (Q \wedge P \wedge \neg Q \wedge R)$

 \Leftrightarrow C \vee F

← C

存在B使得: $(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \lor \neg R) \land B$

$$(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow B \land ((\neg P \lor \neg R) \lor (P \land R))$$

$$\Leftrightarrow (B \land (\neg P \lor \neg R)) \lor (B \land (P \land R))$$

$$\Leftrightarrow C \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge P \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow C \vee ((\neg P \wedge P \vee Q \wedge P) \wedge (\neg R \vee \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow C \vee (Q \wedge P \wedge (\neg R \wedge R \vee \neg Q \wedge R))$$

$$\Leftrightarrow C \vee (Q \wedge P \wedge \neg Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow C \vee \mathbb{F}$$

$$\Leftrightarrow C$$

Example(2/2)(上例的补充证明)

存在B使得: $(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \lor \neg R) \land B$

$$\begin{array}{c} (\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \\ & \\ \Leftrightarrow B \land ((\neg P \lor \neg R) \lor (P \land R)) \\ \Leftrightarrow (B \land (\neg P \lor \neg R)) \lor (B \land (P \land R)) \\ & \\ \Leftrightarrow C \lor ((\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \land P \land R) \\ \Leftrightarrow C \lor ((\neg P \land P \lor Q \land P) \land (\neg R \lor \neg Q) \land R \\ \Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land (\neg R \land R \lor \neg Q \land R)) \\ \Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land \neg Q \land R) \\ \Leftrightarrow C \lor F \\ \Leftrightarrow C \end{array}$$

存在B使得: $(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \lor \neg R) \land B$

$$(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow B \land ((\neg P \lor \neg R) \lor (P \land R))$$

$$\Leftrightarrow (B \land (\neg P \lor \neg R)) \lor (B \land (P \land R))$$

$$\Leftrightarrow C \lor ((\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \land P \land R)$$

$$\Leftrightarrow C \lor ((\neg P \land P \lor Q \land P) \land (\neg R \lor \neg Q) \land P$$

$$\Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land (\neg R \land R \lor \neg Q \land R))$$

$$\Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land \neg Q \land R)$$

$$\Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land \neg Q \land R)$$

存在B使得: (¬P ∨ Q) ∧ (¬R ∨ ¬Q) ⇔ (¬P ∨ ¬R) ∧ B

$$\frac{(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q)}{B}$$

$$\Leftrightarrow B \land ((\neg P \lor \neg R) \lor (P \land R))$$

$$\Leftrightarrow (B \land (\neg P \lor \neg R)) \lor (B \land (P \land R))$$

$$\Leftrightarrow C \lor ((\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \land P \land R)$$

$$\Leftrightarrow C \lor ((\neg P \land P \lor Q \land P) \land (\neg R \lor \neg Q) \land R)$$

$$\Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land (\neg R \land R \lor \neg Q \land R))$$

$$\Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land \neg Q \land R)$$

$$\Leftrightarrow C \lor Q \land P \land \neg Q \land R$$

存在B使得: $(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \lor \neg R) \land B$

$$\begin{array}{c} \underbrace{(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q)}_{B} \\ \Leftrightarrow B \land ((\neg P \lor \neg R) \lor (P \land R)) \\ \Leftrightarrow \underbrace{(B \land (\neg P \lor \neg R))}_{C} \lor (B \land (P \land R)) \\ \Leftrightarrow C \lor ((\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \land P \land R) \\ \Leftrightarrow C \lor ((\neg P \land P \lor Q \land P) \land (\neg R \lor \neg Q) \land R) \\ \Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land (\neg R \land R \lor \neg Q \land R)) \\ \Leftrightarrow C \lor Q \land P \land \neg Q \land R) \\ \Leftrightarrow C \lor F \\ \Leftrightarrow C \\ \end{array}$$

存在B使得: $(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \lor \neg R) \land B$

$$\begin{array}{c} \underbrace{(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q)}_{B} \\ \Leftrightarrow B \land ((\neg P \lor \neg R) \lor (P \land R)) \\ \Leftrightarrow \underbrace{(B \land (\neg P \lor \neg R))}_{C} \lor (B \land (P \land R)) \\ \Leftrightarrow C \lor ((\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \land P \land R) \\ \Leftrightarrow C \lor ((\neg P \land P \lor Q \land P) \land (\neg R \lor \neg Q) \land R) \\ \Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land (\neg R \land R \lor \neg Q \land R)) \\ \Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land \neg Q \land R) \\ \Leftrightarrow C \lor F \\ \Leftrightarrow C \end{array}$$

存在B使得: $(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \lor \neg R) \land B$

$$\begin{array}{c} \underbrace{(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q)}_{B} \\ \Leftrightarrow B \land ((\neg P \lor \neg R) \lor (P \land R)) \\ \Leftrightarrow \underbrace{(B \land (\neg P \lor \neg R))}_{C} \lor (B \land (P \land R)) \\ \Leftrightarrow C \lor ((\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \land P \land R) \\ \Leftrightarrow C \lor ((\neg P \land P \lor Q \land P) \land (\neg R \lor \neg Q) \land R) \\ \Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land (\neg R \land R \lor \neg Q \land R)) \\ \Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land \neg Q \land R) \\ \Leftrightarrow C \lor F \\ \Leftrightarrow C \end{array}$$

Evample

存在B使得: $(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \lor \neg R) \land B$

$$\begin{array}{c} \underbrace{(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q)}_{B} \\ \Leftrightarrow B \land ((\neg P \lor \neg R) \lor (P \land R)) \\ \Leftrightarrow \underbrace{(B \land (\neg P \lor \neg R))}_{C} \lor (B \land (P \land R)) \\ \Leftrightarrow C \lor ((\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \land P \land R) \\ \Leftrightarrow C \lor ((\neg P \land P \lor Q \land P) \land (\neg R \lor \neg Q) \land R) \\ \Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land (\neg R \land R \lor \neg Q \land R)) \\ \Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land \neg Q \land R) \\ \Leftrightarrow C \lor \mathbb{F} \\ \Leftrightarrow C \end{array}$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

- 1 $\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$
- $2 \Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (Q(x) \to \neg R(x))))$
- $3 \Rightarrow \forall x (R(x) \rightarrow \neg P(x))$

第3步推倒出错:局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proot.

没 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派I, 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_{I}(d)$ 为真, then $B|_{I}(d)$ 为真.

设 (∀xA(x))|,为真,

则 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有 $A|_{I}(d)$ 为真, 所以 $B|_{I}(d)$ 为真.

即 (∀xB(x))|/为真.

Example(2/2)(一个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$
 £ $\dot{\mathcal{B}}$

- $1 \Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$
- $2 \quad \Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (Q(x) \to \neg R(x)))$
- $3 \Rightarrow \forall x (R(x) \rightarrow \neg P(x))$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proot

 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派I, 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_{I}(d)$ 为真, then $B|_{I}(d)$ 为真.

设 (∀xA(x))|₁为真,

则 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有 $A|_{I}(d)$ 为真, 所以 $B|_{I}(d)$ 为真.

即 (∀xB(x))|,为真.

Example(2/2)(一个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$
£\(\psi\)

$$1 \Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

$$2 \quad \Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (Q(x) \to \neg R(x)))$$

$$3 \Rightarrow \forall x (R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派I, 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_{I}(d)$ 为真, then $B|_{I}(d)$ 为真.

设 (∀xA(x))|,为真,

则 ∀d ∈ D, 有A|₁(d) 为真, 所以B|₁(d) 为真.

即 $(\forall x B(x)) | 1 为真.$



Proof.

用CP规则等价证明:

1
$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

$$2 \Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (Q(x) \to \neg R(x)))$$

$$3 \Rightarrow \forall x (R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof

 $\mathcal{E} \quad A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派I, 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_{I}(d)$ 为真, then $B|_{I}(d)$ 为真.

设 (∀xA(x))|₁为真,

则 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有 $A|_{I}(d)$ 为真, 所以 $B|_{I}(d)$ 为真.

即 (∀xB(x)) | 为真.



用CP规则等价证明:

1
$$\Leftrightarrow \forall x((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

2
$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (Q(x) \to \neg R(x)))$$

$$3 \Rightarrow \forall x (R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if
$$A(x) \Rightarrow B(x)$$
 then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof

 $\mathcal{L} A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派I, 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_{I}(d)$ 为真, then $B|_{I}(d)$ 为真.

设 (∀xA(x))|₁为真,

则 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有 $A|_{I}(d)$ 为真, 所以 $B|_{I}(d)$ 为真.

即 (∀xB(x))|₁为真.

用CP规则等价证明:

1
$$\Leftrightarrow \forall x((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

$$2 \Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (Q(x) \to \neg R(x)))$$

$$3 \quad \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

第3步推倒出错:局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派I, 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_{I}(d)$ 为真, then $B|_{I}(d)$ 为真.

设 (∀*xA*(*x*))|*i*为真,

则 $\forall d \in \mathcal{D}, \, fA|_{I}(d)$ 为真, 所以 $B|_{I}(d)$ 为真.

即 (∀xB(x)) | 为真.

用CP规则等价证明:

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$
 左边

1
$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

2
$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (Q(x) \to \neg R(x)))$$

$$3 \Rightarrow \forall x ((P(x) \rightarrow Q(x)) \land (Q(x) \rightarrow P(x))$$

第3步推倒出错:局部变换中对不等式使用替换规则!

if
$$A(x) \Rightarrow B(x)$$
 then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派I, 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_I(d)$ 为真, then $B|_I(d)$ 为真.

设 (∀xA(x))|₁为真,

则 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有 $A|_{I}(d)$ 为真, 所以 $B|_{I}(d)$ 为真

即 (∀xB(x))|,为真.

用CP规则等价证明:

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$
 £ $\dot{\mathfrak{U}}$

1
$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

2
$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (Q(x) \to \neg R(x)))$$

$$3 \Rightarrow \forall x (R(x) \rightarrow P(x)) \land (Q(x) \rightarrow R(x)))$$

$$3 \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if
$$A(x) \Rightarrow B(x)$$
 then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设
$$A(x) \Rightarrow B(x)$$



Example(2/2)(-个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

1
$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

2
$$\Leftrightarrow \forall x((P(x) \to Q(x)) \land (Q(x) \to \neg R(x)))$$

$$3 \Rightarrow \forall x (R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if
$$A(x) \Rightarrow B(x)$$
 then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

 $A(x) \Rightarrow B(x)$

对任意的指派I, 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_{I}(d)$ 为真, then $B|_{I}(d)$ 为真.

Example(2/2)(一个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

1
$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

2
$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (Q(x) \to \neg R(x)))$$

$$3 \Rightarrow \forall x (R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

第3步推倒出错:局部变换中对不等式使用替换规则!

if
$$A(x) \Rightarrow B(x)$$
 then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派I, 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_{I}(d)$ 为真, then $B|_{I}(d)$ 为真.

设 (∀xA(x))|1为真,

则 ∀d ∈ D, 有A|ı(d)为真, 所以B|ı(d)为真

印 (∀xB(x))|1为真.

Example(2/2)(-个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

1
$$\Leftrightarrow \forall x((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

2
$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (Q(x) \to \neg R(x)))$$

$$3 \Rightarrow \forall x (R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

$$3 \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if
$$A(x) \Rightarrow B(x)$$
 then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

 $A(x) \Rightarrow B(x)$

对任意的指派I, 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_{I}(d)$ 为真, then $B|_{I}(d)$ 为真.

设 (∀xA(x))|₁为真.

 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有 $A|_{I}(d)$ 为真, 所以 $B|_{I}(d)$ 为真.

用CP规则等价证明:

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$
 左边

1
$$\Leftrightarrow \forall x((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

2
$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (Q(x) \to \neg R(x)))$$

$$3 \Rightarrow \forall x (R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

$$3 \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if
$$A(x) \Rightarrow B(x)$$
 then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

 $A(x) \Rightarrow B(x)$

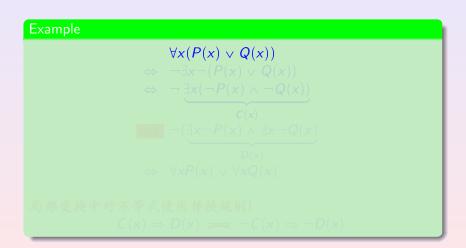
对任意的指派I, 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_{I}(d)$ 为真, then $B|_{I}(d)$ 为真.

设 (∀xA(x))|₁为真.

 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有 $A|_{I}(d)$ 为真, 所以 $B|_{I}(d)$ 为真.

即 (∀xB(x))|₁为真.

Example(错误使用替换规则)



Example(错误使用替换规则)

$\forall x (P(x) \lor Q(x))$ $\Leftrightarrow \neg \exists x \neg (P(x) \lor Q(x))$

Example(错误使用替换规则)

Example

$$\forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x \neg (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x (\neg P(x) \land \neg Q(x))$$

$$C(x)$$

$$\neg (\exists x \neg P(x) \land \exists x \neg Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

局部变换中对不等式使用替换规则!

 $C(x) \Rightarrow D(x) \Longrightarrow \neg C(x) \Rightarrow \neg D(x)$

Evample

$$\forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x \neg (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg \underbrace{\exists x (\neg P(x) \land \neg Q(x))}_{C(x)}$$

$$\neg (\underbrace{\exists x \neg P(x) \land \exists x \neg Q(x)}_{D(x)})$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

局部变换中对不等式使用替换规则!

$$C(x) \Rightarrow D(x) \Longrightarrow \neg C(x) \Rightarrow \neg D(x)$$

$$\forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x \neg (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg \underbrace{\exists x (\neg P(x) \land \neg Q(x))}_{C(x)}$$

$$\neg \underbrace{(\exists x \neg P(x) \land \exists x \neg Q(x))}_{D(x)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

局部变换中对不等式使用替换规则!

$$C(x) \Rightarrow D(x) \Longrightarrow \neg C(x) \Rightarrow \neg D(x)$$

$$\forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x \neg (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x (\neg P(x) \land \neg Q(x))$$

$$C(x)$$

$$\Rightarrow \neg (\exists x \neg P(x) \land \exists x \neg Q(x)$$

$$\Rightarrow \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

局部变换中对不等式使用替换规则!

$$C(x) \Rightarrow D(x) \Longrightarrow \neg C(x) \Rightarrow \neg D(x)$$

形如: $Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_n(M)$ 的公式称为前東范式(Prenex Normal

Form), 其中:

$$Q_i x_i = \begin{cases} \forall x_i \\ \exists x_i \end{cases} i = 1, 2, \dots, n$$

M是不含有量词的公式.

称 $Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_n$ 为前東词, M为母式(Matrix).

形如: $Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_n(M)$ 的公式称为前束范式(Prenex Normal

Form), 其中:

$$Q_i x_i = \begin{cases} \forall x_i \\ \exists x_i \end{cases} i = 1, 2, \dots, n$$

M是不含有量词的公式.

称 $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n$ 为前束词, M 为母式(Matrix).

Example

- $\forall x \forall y (P(x,y) \land Q(x))$
- $\bullet \ \forall x \forall y \exists z (P(x,y) \to Q(x,z))$

Definition

形如: $Q_1 \times_1 Q_2 \times_2 \dots Q_n \times_n (M)$ 的公式称为前束范式(Prenex Normal Form), 其中:

$$Q_i x_i = \begin{cases} \forall x_i \\ \exists x_i \end{cases} i = 1, 2, \dots, n$$

M是不含有量词的公式.

称 $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n$ 为前東词, M 为母式(Matrix).

Example

- $\forall x \forall y (P(x, y) \land Q(x))$
- $\bullet \ \forall x \forall y \exists z (P(x,y) \to Q(x,z))$

Definition

形如: $Q_1 \times_1 Q_2 \times_2 \dots Q_n \times_n (M)$ 的公式称为前束范式(Prenex Normal Form), 其中:

$$Q_i x_i = \begin{cases} \forall x_i \\ \exists x_i \end{cases} i = 1, 2, \dots, n$$

M是不含有量词的公式.

称Q1×1Q2×2...Qn×n为前束词, M为母式(Matrix).

Example

- $\bullet \ \forall x \forall y (P(x,y) \land Q(x))$
- $\bullet \ \forall x \forall y \exists z (P(x,y) \to Q(x,z))$

Definition

形如: $Q_1 \times_1 Q_2 \times_2 \dots Q_n \times_n (M)$ 的公式称为前束范式(Prenex Normal Form), 其中:

$$Q_i x_i = \begin{cases} \forall x_i \\ \exists x_i \end{cases} i = 1, 2, \dots, n$$

M是不含有量词的公式.

称 $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n$ 为前束词, M 为母式 (Matrix).

Example

- $\forall x \forall y (P(x, y) \land Q(x))$
- $\forall x \forall y \exists z (P(x, y) \rightarrow Q(x, z))$

Definition

设公式 $F \Leftrightarrow G$, 其中G是前束范式, 称G为公式F的前束范式.

对任意的公式F,存在公式G,使得G是F的前束范式.

对任意的公式F,存在公式G,使得G是F的前束范式.

- ① 消除→, ↔;
- ② 用De Morgan律消除对非原子子公式的否定;
- ③ 对约束变量的重新命名;
- 量词的外提(量词的吸收,扩张和分配等定律的使用)

对任意的公式F,存在公式G,使得G是F的前束范式.

- ① 消除→, ↔;
- ② 用De Morgan律消除对非原子子公式的否定;
- ③ 对约束变量的重新命名;
- ◎ 量词的外提(量词的吸收, 扩张和分配等定律的使用)

对任意的公式F,存在公式G,使得G是F的前束范式.

- ❶ 消除→, ↔;
- ② 用De Morgan律消除对非原子子公式的否定;
- ③ 对约束变量的重新命名;
- 量词的外提(量词的吸收,扩张和分配等定律的使用)

对任意的公式F,存在公式G,使得G是F的前束范式.

- ❶ 消除→, ↔;
- ② 用De Morgan律消除对非原子子公式的否定;
- ③ 对约束变量的重新命名;
- 量词的外提(量词的吸收,扩张和分配等定律的使用)

对任意的公式F,存在公式G,使得G是F的前束范式.

- ❶ 消除→, ↔;
- ② 用De Morgan律消除对非原子子公式的否定;
- ③ 对约束变量的重新命名;
- 量词的外提(量词的吸收,扩张和分配等定律的使用).

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\bowtie \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Rightarrow \forall x (x) \lor \forall y (y)$$

$$\Rightarrow \forall x (B(x) \lor \forall y (y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\Rightarrow \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Rightarrow \forall x P(x) \lor \forall y Q(y)$$

$$\Rightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Rightarrow \forall x \forall y \in P(x) \lor \forall y \in Q(y)$$

Example

 $\Rightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists x Q(x)$

 $2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y)$

Example

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\bowtie \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

 $\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$

Example

 $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$

 $1 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists x Q(x)$

 $2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)$

 $\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y))$

Example

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\bowtie \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y Q(y)$$
$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y))$$

 $\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$$

- $1 \quad \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists x Q(x)$
- $\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor xQ(x))$
- $2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)$
 - $\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y))$

Example

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\bowtie \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$$

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$$

$$1 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor xQ(x))$$

$$2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\bowtie \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \lor Q(y))$$

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$$

- $1 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x)$
- $\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor x Q(x))$
- $2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)$
 - - 人 ハ ナ 幼 ☆ も 共 ナ ア 昨 1

Example

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

$$\bowtie \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y Q(y)$$
$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$$

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$$

$$1 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor xQ(x))$$

$$2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y))$$

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\bowtie \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \lor Q(y))$$

$$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$1 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor xQ(x))$$

$$2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\bowtie \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y Q(y)$$
$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

1
$$\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor xQ(x))$$

$$2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

$$\bowtie \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y Q(y)$$
$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$1 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor xQ(x))$$

$$2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\bowtie \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$1 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor xQ(x))$$

$$2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y))$$

- 1 谓词与量词
 - ●谓词
 - 符号化
 - 一阶逻辑公式的语义
- 2 公式间的关系式
 - 逻辑等价和永真蕴涵关系
 - 量词的逻辑关系
 - 前東范式
- 3 谓词公式的自然推理
 - 相关概念的复习
 - 量词的推理规则
 - 形式证明的例子
 - Mechanized Reasoning

Definition

设 H_1, H_2, \ldots, H_n , C是公式, 称 $C \not\in H_1, H_2, \ldots, H_n$ 的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I, 如果, $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n)|_I = 1$, 则: $C|_I = 1$. 记为: $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价

←□ → ←□ → ← □ → ← □ → へ○

Definition

设 $H_1, H_2, ..., H_n$, C是公式, 称 $C \not\in H_1, H_2, ..., H_n$ 的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I, 如果, $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n)|_I = 1$, 则: $C|_I = 1$. 记为: $H_1, H_2, ..., H_n \vdash C$.

Theorem

- ③ $\neg((H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;

Definition

设 H_1, H_2, \ldots, H_n , C是公式, 称 $C \not\in H_1, H_2, \ldots, H_n$ 的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I, 如果, $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n)|_I = 1$, 则: $C|_I = 1$. 记为: $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

- ③ ¬ $((H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;

Definition

设 H_1, H_2, \ldots, H_n , C是公式,称C是 H_1, H_2, \ldots, H_n 的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I, 如果, $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n)|_{I} = 1$, 则: $C|_{I} = 1$. 记为: $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$
- ③ $\neg((H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;

Definition

设 H_1, H_2, \ldots, H_n , C是公式, 称 $C \not\in H_1, H_2, \ldots, H_n$ 的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I, 如果, $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n)|_I = 1$, 则: $C|_I = 1$. 记为: $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$
- ③ ¬ $((H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;

Definition

设 $H_1, H_2, ..., H_n$, C是公式, 称 $C \not\in H_1, H_2, ..., H_n$ 的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I, 如果, $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n)|_I = 1$, 则: $C|_I = 1$. 记为: $H_1, H_2, ..., H_n \vdash C$.

Theorem

- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$
- ③ ¬ $((H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;

Definition

设, $H_1, H_2, ..., H_n$ 是一组条件, 一个证明序列是一组形如: $C_1, C_2, ..., C_m$ 的公式序列, 其中每个 C_i 满足下述条件中的一个:

- 存在H_i, 使得: C_i = H_j; (引入条件)
- 存在C_{i1}, C_{i2},..., C_{ik}, 其中: i_j ≤ i, 并且:
 C: ∧ C: ∧ · · · ∧ C: ⇔ C: (恒等变换)
- 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且:
 - $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_{i_i}$ (不等变换)

Definition

设, $H_1, H_2, ..., H_n$ 是一组条件, 一个证明序列是一组形如: $C_1, C_2, ..., C_m$ 的公式序列, 其中每个 C_i 满足下述条件中的一个:

- 存在H_j, 使得: C_i = H_j; (引入条件)
- ③ 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且: $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$; (恒等变换)
- ④ 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且: $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$; (不等变换)

证明有效结论的方法

- ❶ 恒等和不等变换;
- ② 设1为任意的语义解释,并且在该解释下结论为假,证明条件 亦假;
- 设设 | 为任意的语义解释,并且在该解释下条件为真,证明结论亦真;
- 4 证明序列

- 恒等和不等变换;

证明有效结论的方法

- ❶ 恒等和不等变换;
- ② 设1为任意的语义解释,并且在该解释下结论为假,证明条件 亦假;
- 设设1为任意的语义解释,并且在该解释下条件为真,证明结 论亦真;
- 4 证明序列

- ❶ 恒等和不等变换;
- ② 设1为任意的语义解释,并且在该解释下结论为假,证明条件 亦假;
- ③ 设设 | 为任意的语义解释, 并且在该解释下条件为真, 证明结论亦真;
- 4 证明序列.

证明有效结论的方法

- ❶ 恒等和不等变换;
- ② 设1为任意的语义解释,并且在该解释下结论为假,证明条件 亦假;
- ③ 设设 | 为任意的语义解释,并且在该解释下条件为真,证明结论亦真;
- 证明序列.

Notation

 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \dots, x_n 在公式F自由出现.

Example

Notation

 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \ldots, x_n 在公式F自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \lor Q(x) \lor R(z) \triangleq F(x,z);$
- $\forall y P(x,y) \lor Q(x,y) \Leftrightarrow \forall z P(x,z) \lor Q(x,y) \triangleq G(x,y);$

Notation

 $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ 表示变量为: $x_1, x_2, ..., x_n$ 在公式F自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \lor Q(x) \lor R(z) \triangleq F(x,z);$
- $\forall y P(x,y) \lor Q(x,y) \Leftrightarrow \forall z P(x,z) \lor Q(x,y) \triangleq G(x,y);$

Notation

 $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ 表示变量为: $x_1, x_2, ..., x_n$ 在公式F自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \lor Q(x) \lor R(z) \triangleq F(x,z);$
- $\forall y P(x,y) \lor Q(x,y) \Leftrightarrow \forall z P(x,z) \lor Q(x,y) \triangleq G(x,y);$

Notation

 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \ldots, x_n 在公式F自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \lor Q(x) \lor R(z) \triangleq F(x, z);$
- $\forall y P(x,y) \lor Q(x,y) \Leftrightarrow \forall z P(x,z) \lor Q(x,y) \triangleq G(x,y);$

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则:两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记: 约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与 完备性(Gödel's completeness theorem).

Notation

 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \ldots, x_n 在公式F自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \lor Q(x) \lor R(z) \triangleq F(x,z);$
- $\forall y P(x, y) \lor Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \lor Q(x, y) \triangleq G(x, y);$

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则:两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记: 约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与 完备性(Gödel's completeness theorem).

Notation

 $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ 表示变量为: $x_1, x_2, ..., x_n$ 在公式F自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \lor Q(x) \lor R(z) \triangleq F(x, z);$
- $\forall y P(x,y) \lor Q(x,y) \Leftrightarrow \forall z P(x,z) \lor Q(x,y) \triangleq G(x,y)$;

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则:两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记:约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与 完备性(Gödel's completeness theorem).

谓词与量词

707

Notation

 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \ldots, x_n 在公式F自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \lor Q(x) \lor R(z) \triangleq F(x, z);$
- $\forall y P(x, y) \lor Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \lor Q(x, y) \triangleq G(x, y);$

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则:两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记: 约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与 完备性(Gödel's completeness theorem).

Notation

 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \ldots, x_n 在公式F自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \lor Q(x) \lor R(z) \triangleq F(x, z)$;
- $\forall y P(x,y) \lor Q(x,y) \Leftrightarrow \forall z P(x,z) \lor Q(x,y) \triangleq G(x,y);$

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则:两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记: 约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与 完备性(Gödel's completeness theorem).

全称指定规则(Universal Specification).

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)} (US) \qquad \frac{\forall x F(x)}{F(c)} (US)$$

☞y一定不是在公式A中出现的约束变量

噯对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

全称指定规则(Universal Specification).

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)} (US) \qquad \frac{\forall x F(x)}{F(c)} (US)$$

☞y一定不是在公式A中出现的约束变量

 \mathfrak{P} 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

- $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y P(x, y), \ \text{#...} P(x) \triangleq \forall y P(x, y);$
- ∀x∃yP(x,y) ⊬ ∃yP(y,y), y在∀yP(x,y)中约東出现;
- $\bullet \ \forall x P(x) \to Q \not\vdash P(x) \to Q;$
- 原因: US规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子 公式。

全称指定规则

全称指定规则(Universal Specification).

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)} \ (\mathit{US}) \qquad \qquad \frac{\forall x F(x)}{F(c)} \ (\mathit{US})$$

☞y一定不是在公式A中出现的约束变量

嘽对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

- $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y P(x, y)$, $\not = P(x) = \forall y P(x, y)$;
- ∀x∃yP(x,y) ⊬ ∃yP(y,y), y在∀yP(x,y)中约東出现;
- $\bullet \ \forall x P(x) \to Q \not\vdash P(x) \to Q;$
- 原因: US规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子 公式...

全称指定规则

全称指定规则(Universal Specification).

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)} (US) \qquad \frac{\forall x F(x)}{F(c)} (US)$$

曜y一定不是在公式A中出现的约束变量 曜叶点的工築は、YVE(x) → E(v)

 \mathfrak{P} 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

- $\forall x \forall y P(x,y) \vdash \forall y P(x,y)$, $\not = P(x) \triangleq \forall y P(x,y)$;
- ∀x∃yP(x,y) ⊬ ∃yP(y,y), y在∀yP(x,y)中约束出现;
- $\bullet \ \forall x P(x) \to Q \not\vdash P(x) \to Q;$
- 原因: US规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子 公式.

全称指定规则(Universal Specification).

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)} (US) \qquad \frac{\forall x F(x)}{F(c)} (US)$$

☞V一定不是在公式A中出现的约束变量 噯对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(v)$

- $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y P(x, y), \ \mbox{\rlap/$\rlap/$\rlap/$\rlap/$\rlap/$\rlap/$\rlap/$\rlap/$\rlap/$\rlap/} \ \mbox{\rlap/$\rlap/$\rlap/$\rlap/$\rlap/} \ \mbox{\rlap/}\ \mbox{\rlap/}\$
- ∀x∃yP(x,y) ⊬∃yP(y,y), y在∀yP(x,y)中约東出现;
- $\forall x P(x) \rightarrow Q \not\vdash P(x) \rightarrow Q$:

全称指定规则

全称指定规则(Universal Specification).

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)} (US) \qquad \frac{\forall x F(x)}{F(c)} (US)$$

☞y一定不是在公式A中出现的约束变量 ☞叶京的工等す・∀VF(x) → F(y)

 \mathfrak{S} 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

- $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y P(x, y)$, $\not = r : F(x) \triangleq \forall y P(x, y)$;
- ∀x∃yP(x,y) ⊬ ∃yP(y,y), y在∀yP(x,y)中约束出现;
- $\forall x P(x) \rightarrow Q \not\vdash P(x) \rightarrow Q$;
- 原因: US规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子 公式.

特称指定规则

特称指定规则(Existential Specification).

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)}$$
 (ES)

曜 c是新引入的常量符号

嘽对应的不等式: ∃xF(x) ⇒ F(c)

特称指定规则

特称指定规则(Existential Specification).

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)}$$
 (ES)

障c是新引入的常量符号

[©]对应的不等式: $∃xF(x) \Rightarrow F(c)$

- $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y), \not = F(x) \triangleq \forall y P(x, y);$
- ∃xP(x,a) \(\mathcal{P}(a,a), a在P(x,a) 中已经出现; \)
- $\bullet \exists x P(x) \rightarrow Q(x) \not\vdash P(a) \rightarrow Q(x);$
- 原因: ES规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子公式.

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)}$$
 (ES)

障c是新引入的常量符号

『愛对应的不等式: $\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$

- $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y)$, $\not = F(x) \triangleq \forall y P(x, y)$;
- ∃xP(x,a) ⊬ P(a,a), a在P(x,a)中已经出现;
- $\bullet \ \exists x P(x) \to Q(x) \not\vdash P(a) \to Q(x);$
- 原因: ES规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子 公式...

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)}$$
 (ES)

曜 c 是新引入的常量符号

『愛对应的不等式: $\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$

- $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y)$, $\not = F(x) \triangleq \forall y P(x, y)$;
- ∃xP(x,a) ⊬ P(a,a), a在P(x,a)中已经出现;
- $\exists x P(x) \rightarrow Q(x) \not\vdash P(a) \rightarrow Q(x);$
- 原因: ES规则中的量词的辖域是整个公式,而不是局部的子公式。

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)}$$
 (ES)

障c是新引入的常量符号

「愛对应的不等式: $\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$

- $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y)$, $\not = \forall y P(x, y)$;
- ∃xP(x, a) ⊬ P(a, a), a在P(x, a) 中已经出现;
- $\exists x P(x) \rightarrow Q(x) \not\vdash P(a) \rightarrow Q(x)$;
- 原因: ES规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子 公式.

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)}$$
 (ES)

障c是新引入的常量符号

『愛对应的不等式: $\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$

- ∃xP(x, a) ⊬ P(a, a), a在P(x, a) 中已经出现;
- $\exists x P(x) \rightarrow Q(x) \not\vdash P(a) \rightarrow Q(x)$;
- 原因: ES规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子公式.

特称推广规则(Existential Generalization).

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)} \; (EG) \qquad \frac{F(x)}{\exists y F(y)} \; (EG)$$

障v是新引入的变量符号

 \mathfrak{G} 对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$

特称推广规则(Existential Generalization).

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)} \ (EG) \qquad \frac{F(x)}{\exists y F(y)} \ (EG)$$

障y是新引入的变量符号

 \mathfrak{G} 对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$

- ∃xP(x, a) ⊬ ∃x∃xP(x, x), x在∃xP(x, a)中已经约束出现
- $P(a) \rightarrow \exists y Q(y) \not\vdash \exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y), \exists x$ 的辖域是P(x), 而不是整个公式.

特称推广规则(Existential Generalization).

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)} \ (EG) \qquad \frac{F(x)}{\exists y F(y)} \ (EG)$$

障y是新引入的变量符号

[©]对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$

- $\exists x P(x, a) \vdash \exists y \exists x P(x, y), \not \perp P \colon F(y) \triangleq \exists x P(x, y);$
- ∃xP(x,a) ⊬ ∃x∃xP(x,x), x在∃xP(x,a)中已经约束出现。
- $P(a) \rightarrow \exists y Q(y) \not\vdash \exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y), \exists x$ 的辖域是P(x), 而不是整个公式。

特称推广规则(Existential Generalization).

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)} \ (EG) \qquad \frac{F(x)}{\exists y F(y)} \ (EG)$$

F y是新引入的变量符号

『愛对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$

- ∃xP(x,a) ⊬ ∃x∃xP(x,x), x在∃xP(x,a)中已经约束出现;
- $P(a) \rightarrow \exists y Q(y) \not\vdash \exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y), \exists x$ 的辖域是P(x), 而不是整个公式.

特称推广规则(Existential Generalization).

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)} (EG)$$
 $\frac{F(x)}{\exists y F(y)} (EG)$

曜y是新引入的变量符号

『野对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$

- ∃xP(x,a) ⊬ ∃x∃xP(x,x), x在∃xP(x,a)中已经约束出现;
- $P(a) \rightarrow \exists y Q(y) \not\vdash \exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y), \exists x$ 的辖域是P(x), 而不是整个公式.

全称推广规则(Universal Generalization).

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)} \ (UG)$$

圖x不在F中约束出现 圖对应的不等式: $F(x) \Rightarrow \forall y F(y)$

全称推广规则(Universal Generalization).

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)} (UG)$$

- P(x, a) $\vdash \forall x P(x, a)$, $\not = P(x, a)$;
- $P(x) \to \exists y Q(y) \not\vdash \forall x P(x) \to \exists y Q(y), \forall x$ 的辖域是P(x), 而不是整个公式:
- P(x,a) ⊬ ∀vP(x,v), a是常量符号,不能用UG规则.

全称推广规则(Universal Generalization).

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)} (UG)$$

- $P(x, a) \vdash \forall x P(x, a)$, $\not\perp P(x, a)$;
- $P(x) \rightarrow \exists y Q(y) \not\vdash \forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y), \forall x$ 的辖域是P(x), 而不是整个公式:
- P(x,a) ⊬ ∀yP(x,y), a是常量符号,不能用UG规则.

全称推广规则

全称推广规则(Universal Generalization).

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)} \ (UG)$$

☞x不在F中约束出现 ☞对应的不等式: F(x) ⇒ ∀yF(y)

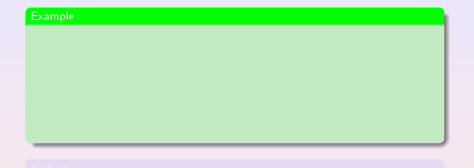
- $P(x, a) \vdash \forall x P(x, a)$, $\not\perp P(x) \triangleq P(x, a)$;
- $P(x) \rightarrow \exists y Q(y) \not\vdash \forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y), \forall x$ 的辖域是P(x), 而不是整个公式:
- P(x, a) ⊬ ∀yP(x, y), a是常量符号,不能用UG规则

全称推广规则

全称推广规则(Universal Generalization).

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)} \ (UG)$$

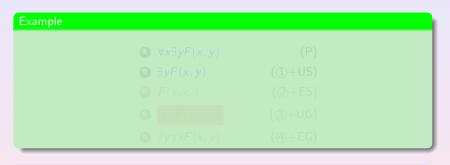
- $P(x) \rightarrow \exists y Q(y) \not\vdash \forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y), \forall x$ 的辖域是P(x), 而不是整个公式:
- P(x, a) ⊬ ∀yP(x, y), a是常量符号,不能用UG规则.



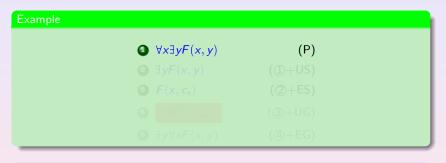




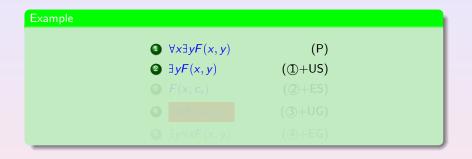


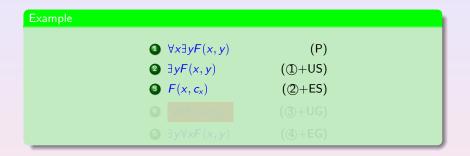


```
Remark
```



```
Remark
```







- $\exists y F(x, y)$

(1+US)

(P)

 \bullet $F(x, c_x)$

(2)+ES)

(3)+UG)

(P)

- 3 $F(x, c_x)$ (2)+ES)

Remark

 $\bullet \ \exists y \forall x F(x,y) \stackrel{\longrightarrow}{=} \forall x x$

○ US + ES/ES引入的常量符号

● 丝拌,US+ES后未化非对US中引力



- - (P)
- $\exists y F(x, y)$ (1)+US
- \bullet $F(x, c_x)$ (2) + ES
- (3)+UG)
- $\exists y \forall x F(x,y)$ (4)+EG

(P)

 $\exists y F(x, y)$

 $(\mathbb{1}+US)$

(②+ES)

- (3+UG)

(**4**+EG)

- $\bullet \exists y \forall x F(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x,y)$
- US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关
- 这样, US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则.

(P)

$$\exists y F(x, y)$$

 $(\mathbb{I}+US)$

(②+ES)

(3+UG)

(4+EG)

- $\bullet \exists y \forall x F(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x,y)$
- US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关;
- 这样, US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则

$$\forall x \exists y F(x, y) \tag{P}$$

$$\exists y F(x, y)$$
 (①+US)

3
$$F(x, c_x)$$
 (2+ES)

- $\bullet \exists y \forall x F(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x,y)$
- US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关;
- 这样, US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则.

- $\exists y P(y)$ (P) $\exists \forall x (P(x) \to Q(x))$ (P)

- $Q(c) \qquad (Z(4)+MP) \qquad Q(c) \qquad (Z(4)+MP) \qquad (Z$

- (4)用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系)
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES). 后一般(US)

$$\exists y P(y)$$
 (P) $\exists y X(P(x) \to Q(x))$ (P)

6
$$\exists x Q(x)$$
 (5)+EG) **9** $\exists x Q(x)$ **(5)**+EG)

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系)
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US)

3
$$Q(c)$$
 (2) (4) +MP) 3 $Q(c)$ **(2) 4+MP**

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系)
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES). 后一般(US)

3
$$Q(c)$$
 (2) (2) (4) (4) (4) (5) (6) (6) (6) (6) (6) (6)

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系)。
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES). 后一般(US)

$$\exists y P(y)$$
 (P) $\bigcirc \bigvee (P(y) \rightarrow O(x))$ (P)

4
$$P(c)$$
 (3+ES) $Q(c) \rightarrow Q(c)$ (2+US)

$$(0)+ES) \qquad (0)+ES) \qquad (0)+US$$

$$\exists y P(y)$$
 (P) $\bigcirc \forall x (P(x) \rightarrow O(x))$ (P)

4
$$P(c)$$
 (3+ES) $Q(c) \rightarrow Q(c)$ (2+US)

$$(0)+L3) \qquad (0+L3)$$

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量:
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES). 后一般(US)

-xampic

- $\exists y P(y)$ (P)
- **④** *P(c)* (③+ES)
- 3 O(a) (2) (2) (MR)
- **5** Q(c) (24+MP)

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系· 先特殊(FS) 后一般(IIS)

життрт

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

$$\exists y P(y)$$

$$(3+ES)$$

$$(2)(4)+MP)$$

$$\exists x Q(x)$$

$$(5)+EG$$

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

Example

(3+ES) (3+ES)
$$Q(c) \rightarrow Q(c)$$
 (2)+US

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

Example

(3+ES) (3+ES)
$$P(c) \rightarrow Q(c)$$
 (2+US)

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

Example

(3)+ES) 4
$$P(c) \rightarrow Q(c)$$
 (2)+US)

3
$$Q(c)$$
 (2)4+MP) **3** $Q(c)$ (2)4+MP)

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

Example

$$\exists y P(y)$$
 (P)
$$\exists y X(P(x) \to Q(x))$$
 (P)

(3)+ES) 4
$$P(c) \rightarrow Q(c)$$
 (2)+US)

5
$$Q(c)$$
 (②④+MP) **5** $Q(c)$ (②④+MP)

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

Example

(3)+ES) 4
$$P(c) \rightarrow Q(c)$$
 (2)+US)

3
$$Q(c)$$
 (②④+MP) **5** $Q(c)$ (②④+MP)

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

- 证明方法的选择: 直接证明; 间接证明(CP规则, 反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意:引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词), 注意: 避免US+ES后 再UG.

- 证明方法的选择: 直接证明; 间接证明(CP规则, 反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意:引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词), 注意: 避免US+ES后 再UG.

- 证明方法的选择: 直接证明; 间接证明(CP规则, 反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意: 引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词), 注意: 避免US+ES后再UG.

- 证明方法的选择: 直接证明; 间接证明(CP规则, 反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意:引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词), 注意: 避免US+ES后再UG.

- 证明方法的选择: 直接证明; 间接证明(CP规则, 反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意:引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词), 注意: 避免US+ES后 再UG.

- 证明方法的选择: 直接证明; 间接证明(CP规则, 反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意:引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词), 注意: 避免US+ES后再UG.

- **●** *H*₁:
 - $\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x)))$
- \odot $C: \exists x P(f(x))$

- $\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x)))$ (P
 - - $(\mathbb{O}+US)$
- **4** P(a)

- (P)
- **6** P(f(a)) **(3)4+M**
 - $\exists x P(f(x))$ (5+EG)

Evample

- $\begin{array}{ll}
 \bullet & H_1: \\
 \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x)))
 \end{array}$
- **2** $H_2: P(a)$
 - $C: \exists x P(f(x))$

- - (1+US)
- 3 $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (1)+ T
- **5** P(f(a)) (3.4+MP)

Evample

 $\begin{array}{ll}
\bullet & H_1: \\
\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x)))
\end{array}$

2 $H_2: P(a)$

 \bullet $C: \exists x P(f(x))$

5
$$P(f(a))$$
 (3.4+MP)

- $\mathbf{0} H_1: \\
 \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x)))$
- **2** $H_2: P(a)$

- $P(a) \vee P(f(a))$

- **6** P(f(a)) (3.4+MP)

- **2** $H_2: P(a)$

- $\begin{array}{c}
 \neg P(a) \lor P(f(a)) \\
 (\textcircled{1}+US)
 \end{array}$

- **2** $H_2: P(a)$

- $\begin{array}{ccc}
 \neg P(a) \lor P(f(a)) \\
 & (\textcircled{1} + US)
 \end{array}$
- - P(a)
- **6** P(f(a)) **(34)**+MP

- **2** $H_2: P(a)$

- $\begin{array}{c}
 \neg P(a) \lor P(f(a)) \\
 \text{(1)+US)}
 \end{array}$

- **5** P(f(a)) (3.4+MP)

- **2** $H_2: P(a)$

- $\begin{array}{ccc}
 \neg P(a) \lor P(f(a)) \\
 & (\textcircled{1} + US)
 \end{array}$
- **4** P(a)
- **5** P(f(a)) (3.4+MP)
 - $\exists x P(f(x))$ (5+EG)

(P)

- **2** $H_2: P(a)$

- $\begin{array}{c}
 \neg P(a) \lor P(f(a)) \\
 \text{(1)+US)}
 \end{array}$

- **5** P(f(a)) (34+MP)

$\overline{\text{Example}(2/2)}$





Example

条件: 纪检人员审查了该 部门的每一个 非VIP人员,该部门 有腐败分子存在并 且仅被同类审查过, VIP不是腐败分子;

结论:一定有纪检人员是腐败分子.

Example

条件: 纪检人员审查了该部门的每一个非VIP人员,该部门有腐败分子存在并且仅被同类审查过,VIP不是腐败分子;

告论:一定有纪检人员是 腐败分子.

Example

条件: 纪检人员审查了该

部门的每一个

非VIP人员,该部门 有腐败分子存在并

且仅被同类审查过,

VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是

腐败分子.

Example

条件: 纪检人员审查了该

部门的每一个 非VIP人员,该部门

有腐败分子存在并且仅被同类审查过,

VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是

腐败分子.

E(x): x是该部门的人员;

V(x): x是VIP;

S(x,y): x被y审查;

C(x): x 是纪检人员;

Example

条件: 纪检人员审查了该

部门的每一个 非VIP人员,该部门

有腐败分子存在并 且仅被同类审查过,

VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是

腐败分子.

E(x): x是该部门的人员;

V(x): x是VIP;

5(x,y): x被y审查;

C(x): x 是纪检人页;

◆ロト 4個ト 4厘ト 4厘ト 厘 からぐ

条件: 纪检人员审查了该

部门的每一个

非VIP人员,该部门 有腐败分子存在并

且仅被同类审查过,

VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是

腐败分子.

E(x): x是该部门的人员;

V(x): x是VIP;

5(x,y): x被y审查;

C(x): x是纪检人员;

条件: 纪检人员审查了该

部门的每一个

非VIP人员,该部门 有腐败分子存在并

且仅被同类审查过,

VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是

腐败分子.

E(x): x是该部门的人员;

V(*x*): *x*是VIP;

S(x,y): x被y审查;

C(x): x是纪检人员

条件: 纪检人员审查了该

部门的每一个

非VIP人员,该部门 有腐败分子存在并

且仅被同类审查过,

VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是

腐败分子.

E(x): x是该部门的人员;

V(x): *x*是VIP;

S(x,y): x被y审查;

C(x): x 是纪检人员;

Example

条件: 纪检人员审查了该

部门的每一个 非VIP人员,该部门

有腐败分子存在并

且仅被同类审查过, VIP不是腐败分子;

VIP不定周败分丁;

结论: 一定有纪检人员是

腐败分子.

E(x): x是该部门的人员;

V(x): x是VIP;

S(x,y): x被y审查;

C(x): x是纪检人员;

Example

条件: 纪检人员审查了该

部门的每一个 非VIP人员,该部门

有腐败分子存在并 且仅被同类审查过,

VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是

腐败分子.

E(x): x是该部门的人员;

V(x): *x*是VIP;

5(x,y): x被y审查;

C(x): x是纪检人员;

Example

条件: 纪检人员审查了该

部门的每一个

非VIP人员,该部门 有腐败分子存在并

且仅被同类审查过,

VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是

腐败分子.

E(x): x是该部门的人员;

V(x): x是VIP;

S(x,y): x被y审查;

C(x): x是纪检人员;

- 2 $H_2: \exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall y (S(x,y) \rightarrow P(y)))$

Example

条件: 纪检人员审查了该

部门的每一个

非VIP人员,该部门

有腐败分子存在并 且仅被同类审查过,

VIP不是腐败分子;

VIF 不足) 成为丁,

结论: 一定有纪检人员是

腐败分子.

E(x): x是该部门的人员;

V(x): x是VIP;

S(x,y): x被y审查;

C(x): x是纪检人员;

条件: 纪检人员审查了该

部门的每一个

非VIP人员,该部门

有腐败分子存在并 且仅被同类审查过,

VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是

腐败分子.

4D> 4B> 4B> B 990

E(x): x是该部门的人员;

V(x): x是VIP;

S(x, y): x被y审查;

C(x): x 是纪检人员;

Example

条件: 纪检人员审查了该

部门的每一个

非VIP人员,该部门

有腐败分子存在并 且仅被同类审查过,

VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是

腐败分子.

 $2 H_2: \exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall y (S(x,y) \rightarrow P(y))))$

E(x): x是该部门的人员;

V(x): x是VIP;

S(x, y): x被y审查;

C(x): x 是纪检人员;

Example

条件: 纪检人员审查了该

部门的每一个

非VIP人员,该部门

有腐败分子存在并 且仅被同类审查过,

VIP不是腐败分子;

VII A DOMACA 13

结论:一定有纪检人员是

腐败分子.

 $\bullet \quad C: \exists x (P(x) \land C(x))$

◆ロ > 4局 > 4 = > 4 = > 9 Q Q

E(x): x是该部门的人员;

V(x): x是VIP;

S(x,y): x被y审查;

C(x): x 是纪检人员;

◆□▶ ◆圖▶ ◆臺▶ ◆臺▶

- 2 $H_2: \exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall y (S(x,y) \rightarrow P(y)))$

- $2 H_2: \exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall y (S(x,y) \rightarrow P(y))))$

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \to P(y))))$ (P)
 - $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
 - ③ P(a) (②+简化式)
- ④ E(a) (②+简化式)

- $\bigcirc P(a) \rightarrow \neg V(a)$ ($\bigcirc +US$)
- $\exists y (E(x) \land \neg V(x) > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$ (P)

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
- $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
- ③ P(a) (②+简化式)
- (2)+简化式)

- $\exists y (E(x) \land \neg V(x) > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$ (P)

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
- $P(a) \land E(a) \land (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
- ③ P(a) (②+简化式)
- ④ E(a) (②+简化式)

- $\exists y (E(x) \land \neg V(x) > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$ (P)

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
- $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
- ③ P(a) (②+简化式)

- $\exists y (E(x) \land \neg V(x) > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$ (P)

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y)))))$ (P)
- $P(a) \land E(a) \land (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
- **3** P(a) (②+简化式)
- E(a)(②+简化式)

- $\exists y (E(x) \land \neg V(x) > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$ (P)

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y)))))$ (P)
- $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
- ③ P(a) (②+简化式)
- E(a)(②+简化式)

- $\forall x (E(x) \land \neg V(x) > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$ (P)

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
- $P(a) \land E(a) \land (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
- ③ P(a) (②+简化式)
- ④ E(a) (②+简化式)

- $\forall x (E(x) \land \neg V(x) > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$ (P

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y)))))$ (P)
- $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
- ③ P(a) (②+简化式)
- ④ E(a) (②+简化式)

- $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (6)+US)

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
- $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
- ③ P(a) (②+简化式)
- ④ E(a) (②+简化式)

- **③** ¬*V*(*a*) (③⑦+US)

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
- $P(a) \land E(a) \land (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
- ③ P(a) (②+简化式)
- ④ E(a) (②+简化式)
- **5** $\forall y (S(a, y) \to P(y))$ (2+...)

- **③** ¬*V*(*a*) (③⑦+US)
- $\exists y (E(x) \land \neg V(x) > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$ (P)

$$\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x,y) \rightarrow P(y))))$$

$$(P) \qquad E(a) \land \neg V(a) - > \exists y (S(a,y) \land C(y))$$

$$(9) + US(a) +$$

$$P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$$
 (①+ES)

$$\forall x (P(x) \to \neg V(x))$$
 (P)

$$\forall x (E(x) \land \neg V(x) - > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$$
 (P)
$$(E + EG)$$

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
- $\begin{array}{c} P(a) \land E(a) \land (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y))) \\ \end{array}$
- ③ P(a) (②+简化式)
- **④** E(a) (②+简化式)

- **3** ¬*V*(a) (**3**⑦+US)
- $\exists y (E(x) \land \neg V(x) > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$ (P)

- - $E(a) \wedge \neg V(a)$ (4+8)
 - $\exists y (S(a,y) \land C(y)) \text{ (IDI)} + MP$
 - $(S(a,b) \land C(b))$ (12+ES)
 - $S(a,b) \to P(b) \qquad (5+US)$
 -) C(b) (**①**+简化式)
 - $C(b) \wedge P(b)$ (\mathfrak{T}

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
- $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
- 3 P(a) (②+简化式)
- E(a)(②+简化式)

- **8** ¬*V*(a) (③⑦+US)
- $\forall x (E(x) \land \neg V(x) > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$ (P)

- $E(a) \wedge \neg V(a) >$ $\exists y (S(a, y) \wedge C(y))$ (9)+US)
- $\exists y (S(a,y) \land C(y)) (\textcircled{1}) + MP$

 - $S(a,b) \to P(b) \qquad (5+US)$
 - **O** C(b) (**O**3+简化式)
 - (L3+简化式)
 - P(b) (1915+M

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
- $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
- ③ P(a) (②+简化式)
- **④** E(a) (②+简化式)

- **3** ¬*V*(a) (③⑦+US)
- $\forall x (E(x) \land \neg V(x) > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$ (P)

- $\exists y (S(a,y) \land C(y)) (\textcircled{10}\textcircled{1}+MP)$
- $(S(a,b) \land C(b))$ (12+ES)

 - **D** C(b) (13+简化式)
 - 9 S(a,b) (13+简化式)
 - P(b) (DT+MI
 - $C(b) \wedge P(b) \qquad (45+1)$

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
- $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
- 3 P(a) (②+简化式)
- E(a)(②+简化式)

- $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (6)+US)
- **3** ¬*V*(*a*) (③⑦+US)
- $\forall x (E(x) \land \neg V(x) > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$ (P)

- $E(a) \wedge \neg V(a) >$ $\exists y (S(a, y) \wedge C(y))$ (9)+US)
- $\exists y (S(a,y) \land C(y)) (\textcircled{D} + MP)$
- $(S(a,b) \land C(b))$ (12+ES)
- (L)+ 间化式)
 - 3 D(4) (37/15 MD)
- **9** $\exists x (P(x) \land C(x))$ **(18+E0**

$$\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$$
 (P)

$$P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$$
 (①+ES)

5
$$\forall y (S(a, y) \to P(y))$$
 (2+...)

$$\forall x (E(x) \land \neg V(x) - > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$$
 (P)

$$\exists E(a) \land \neg V(a) - > \\ \exists y (S(a, y) \land C(y))$$
 (9)+US)

①
$$E(a) \land \neg V(a)$$
 (④+8)

$$\exists y (S(a,y) \land C(y)) (\textcircled{D} \textcircled{D} + MP)$$

$$(S(a,b) \land C(b))$$

$$(S(a,b) \rightarrow P(b)$$

$$(S+US)$$

$$\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$$
 (P)

$$P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$$
 (①+ES)

5
$$\forall y (S(a, y) \to P(y))$$
 (2)+...**)**

$$\forall x (E(x) \land \neg V(x) - > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$$
 (P)

$$\exists y (S(a,y) \land C(y)) (\textcircled{D} + MP)$$

$$(S(a,b) \wedge C(b))$$
 ($+ES$)

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
- $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
- 3 P(a) (②+简化式)
- **④** E(a) (②+简化式)

- **3** ¬V(a) (③⑦+US)
- $\forall x (E(x) \land \neg V(x) > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$ (P)

- $E(a) \wedge \neg V(a) >$ $\exists y (S(a, y) \wedge C(y))$ (9)+US)
- $\exists y (S(a,y) \land C(y)) (\textcircled{1} \textcircled{1} + MP)$
- $(S(a,b) \wedge C(b)) \qquad (\mathbb{Z} + ES)$
- (5+US)
- **⑤** C(b) (**①**+简化式)
- **⑤** S(a, b) (**③**+简化式)

- $\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
- $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
- ③ P(a) (②+简化式)
- E(a) (②+简化式)

- **③** ¬*V*(a) (③⑦+US)
- $\forall x (E(x) \land \neg V(x) > \exists y (S(x, y) \land C(y)))$ (P)

- $\exists y (S(a,y) \land C(y)) (\textcircled{1} \textcircled{1} + MP)$
- $(S(a,b) \wedge C(b)) \qquad (\mathbb{Z} + ES)$
- (5+US)
- **⑤** C(b) (**①**+简化式)
- **⑤** S(a, b) (瓜+筒化式)

$$\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$$
 (P)

$$P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$$
 (①+ES)

5
$$\forall y (S(a, y) \to P(y))$$
 (2)+...**)**

$$\exists y (E(x) \land \neg V(x) - > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$$
 (P)

$$\exists y (S(a,y) \land C(y)) (\textcircled{1} \textcircled{1} + MP)$$

$$(S(a,b) \wedge C(b))$$
 ($+ES$)

$$\exists x (P(x) \land E(x) \land (\forall x (S(x, y) \rightarrow P(y))))$$
 (P)

$$P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y (S(a, y) \rightarrow P(y)))$$
 (①+ES)

$$\bigcirc P(a) \rightarrow \neg V(a)$$
 ($\bigcirc +US$)

$$\exists y (E(x) \land \neg V(x) - > \\ \exists y (S(x, y) \land C(y)))$$
 (P)

$$E(a) \wedge \neg V(a) - >$$

$$\exists y (S(a, y) \wedge C(y))$$
 (9)+US)

①
$$E(a) \land \neg V(a)$$
 (④+8)

$$\exists y (S(a,y) \land C(y)) (\textcircled{1} \textcircled{1} + MP)$$

$$(S(a,b) \wedge C(b))$$
 ($+ES$)

$$(5+US)$$

- Coq a proof assistant base on the calculus of inductive constructions.
- HOL an interactive environment for machine-assisted theorem-proving in higher-order logic.
- Isabelle a generic theorem prover in which logics can be specified and used.

9

Mechanized Reasoning Systems

- Coq a proof assistant base on the calculus of inductive constructions.
- HOL an interactive environment for machine-assisted theorem-proving in higher-order logic.
- Isabelle a generic theorem prover in which logics can be specified and used.

9

Mechanized Reasoning Systems

- Coq a proof assistant base on the calculus of inductive constructions.
- HOL an interactive environment for machine-assisted theorem-proving in higher-order logic.



Mechanized Reasoning Systems

- Coq a proof assistant base on the calculus of inductive constructions.
- HOL an interactive environment for machine-assisted theorem-proving in higher-order logic.
- Isabelle a generic theorem prover in which logics can be specified and used.

Resolution of First Order Logic(FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的;
- 但是其一些特殊子集合是可计算的;
- 如: Prolog(https://www.tutorialspoint.com/prolog/index.htm) 中 的Horn子句(Clause)是可计算的。

Definition

形如: $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m)$ 的公式称为Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定.

Theorem

Resolution of First Order Logic(FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的;
- 但是其一些特殊子集合是可计算的;
- 如: Prolog(https://www.tutorialspoint.com/prolog/index.htm) 中 的Horn子句(Clause)是可计算的.

Definition

形如: $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m)$ 的公式称为Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定.

Theorem

Resolution of First Order Logic(FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的;
- 但是其一些特殊子集合是可计算的;
- 如: Prolog(https://www.tutorialspoint.com/prolog/index.htm) 中 的Horn子句(Clause)是可计算的.

Definition

形如: $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m)$ 的公式称为Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定.

Theorem

Resolution of First Order Logic(FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的;
- 但是其一些特殊子集合是可计算的;
- 如: Prolog(https://www.tutorialspoint.com/prolog/index.htm) 中 的Horn子句(Clause)是可计算的.

Definition

形如: $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m)$ 的公式称为Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定.

Theorem

Resolution of First Order Logic(FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的;
- 但是其一些特殊子集合是可计算的;
- 如: Prolog(https://www.tutorialspoint.com/prolog/index.htm) 中 的Horn子句(Clause)是可计算的.

Definition

形如: $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m)$ 的公式称为Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定.

Theorem

Resolution of First Order Logic(FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的;
- 但是其一些特殊子集合是可计算的;
- 如: Prolog(https://www.tutorialspoint.com/prolog/index.htm) 中 的Horn子句(Clause)是可计算的.

Definition

形如: $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m)$ 的公式称为Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定.

Theorem

$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

- $\bigcirc \neg P(a) \lor P(f(a)) \quad (\bigcirc + US)$

- (B) ∀v¬P(f(v)) (B) ImP)
- $\bigcirc \neg P(f(a))$ (\(\overline{0} + US\)
- **◎ F** (⑤⑦)

Resolution

- ② *P*(a) (P)
- P(f(a))(②③+删除)
- -) [(46) +删除,矛盾]

$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

- $\bigcirc \neg P(a) \lor P(f(a))$ (①+US)

- **6** P(f(a)) (3)4+MP)

- $\bigcirc \neg P(f(a)) \qquad (\bigcirc + US)$
- **◎ F** ((5)7)



$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

- $\bigcirc \neg P(a) \lor P(f(a))$ (1)+US)

- **6** P(f(a)) **(3.4**+MP)
- $\bigcirc \neg P(f(a))$ (6)+US)
- (50)

Resolution

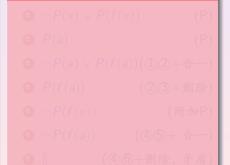
 $P(x) \lor P(f(x))$ (P) P(a) (P) $P(a) \lor P(f(a))$ (①②+合一) P(f(a)) (②③+删除) P(f(x)) (附加P)

$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

- $\bigcirc \neg P(a) \lor P(f(a))$ (①+US)
- **○** *P*(*a*) (P)
 - P(f(a)) (3.4+MP)
- **⑥** ∀x¬P(f(x)) (附カ□P)
- **◎ F** (57)



$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

5
$$P(f(a))$$
 (3.4+MP)



$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

5
$$P(f(a))$$
 (3.4+MP)

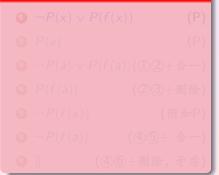
$$\bigcirc \neg P(f(a))$$
 ($\bigcirc + US$)

$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

3
$$P(f(a))$$
 (34+MP)

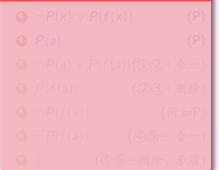


$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

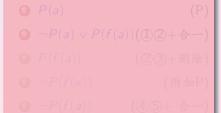
5
$$P(f(a))$$
 (3.4+MP)



$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

5
$$P(f(a))$$
 (3.4+MP)



$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

3
$$P(f(a))$$
 (3.4+MP)

$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

5
$$P(f(a))$$
 ((3)(4)+MP)

$$\neg P(f(x))$$
 (附加P)

$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

$$P(f(a))$$
 (3.4)+MP)

9
$$P(f(a))$$
 (23+删除)

$$\neg P(f(x)) \qquad \qquad (附加P)$$

$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

$$P(f(a))$$
 (3.4)+MP)

$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

5
$$P(f(a))$$
 (34+MP)

$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

$$\bigcirc \neg P(a) \lor P(f(a))$$
 (1)+US)

3
$$P(f(a))$$
 (3.4+MP)

$$3 \neg P(a) \lor P(f(a))(①②+合一)$$

本章小节

- 1 谓词与量词
 - 谓词
 - 符号化
 - 一阶逻辑公式的语义
- 2 公式间的关系式
 - 逻辑等价和永真蕴涵关系
 - 量词的逻辑关系
 - 前束范式
- ③ 谓词公式的自然推理
 - 相关概念的复习
 - 量词的推理规则
 - 形式证明的例子
 - Mechanized Reasoning