武汉大学计算机学院2006-2007学年第一学期
2005级《离散数学》考试试题

学号：________　　姓名：________　　　　成绩：________

注意：所有答案请一律写在试卷纸上并请注明题目序号！计算题要求有计算过程！

一、 试求下述命题公式G的主析取和主合取范式：　(10分)

$$P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

二、　(12分，6+6)

(1) 试证明：$\forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \to \exists x$Q(x);

(2) 试证明下列结论的有效性(**要求写证明序列**)：
前提：$\forall x(P(x) \vee Q(x))$, 结论：$\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$。

三、 设集合$A=\{1,2,\cdots,10\}$。定义A上的二元关系"$|$"，$m|n$表示m整除$n(m,n \in A)$，完成下列各题：　(12分，4+4+4)

(1) 证明$\langle A,|\rangle$是偏序集；

(2) 设$B \subseteq A$，求下列元素（若存在）：

(i) $B=\{2,4,6,8,10\}$，求B的最大元和极大元；

(ii) $B=\{1,2,3,4,6\}$，求B的最大下界和最小上界;

(3) 求A的真子集C，使得$\langle C,|\rangle$是全序集，且使$|C|$为满足上述条件的最大值。

四、 设集合$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{a,b,c\}$，设$B^A=\{f \mid f: A \longrightarrow B\}$，设$X=\{f \big| f \in B^A \wedge f(A) \subseteq \{a,b\}\}$，$Y=\{f \big| f \in B^A \wedge f(A) \subseteq \{b,c\}\}$，$Z=\{f \big| f \in B^A \wedge f(A) \subseteq \{a,c\}\}$，$T=\{f \big| f \in B^A \wedge f$是满射$\}$　(16分，4+4+4+4)

(1) 试求$|B^A|$，$|X|$，$|Y|$和$|Z|$；

(2) 试用枚举法表示集合$X \cap Y, Y \cap Z$和$Z \cap X$；

(3) 证明：$T=B^A-(X \cup Y \cup Z)$；

(4) 试利用容斥原理求$|T|$；

五、 设$\langle G, *, e\rangle$是一个群，并且对群G中的任意两个元素a和b有: $(a * b)^3 = a^3 * b^3$: (18分，每小题3分)

(1) 试证明：$\forall a, b \in G$, $(a * b)^2 = b^2 * a^2$;

(2) 试证明：$\forall a, b \in G$, $a^3 * b^2 = b^2 * a^3$；

(3) 试证明: 如果$c \in G$并且$|c| = n$，则$c^{n+1} = c$;

(4) 设$c \in G$, $\big|c\big| = 5$, 则$\forall x \in G$, $c * x^2 = x^2 * c$;

(5) 设c如上题所述，则$\forall x \in G$, $c * x^3 = x^3 * c$;

(6) 设c如题(4)所述，则$\forall x \in G$, $c * x = x * c$。

六、 设$\langle G, *, e_G\rangle$和$\langle H, \cdot, e_H\rangle$是两个群, $h : G \longrightarrow H$是群G到群H的同态, 记h的同态核为$N = \{\, a \mid a \in G \wedge h(a) = e_H \,\}$, 设$K$是$G$的子群，试证明： (12分，6+6)

(1) $h^{-1}(h(K)) = KN$, 其中, $KN = \{\, k * n \mid k \in K \wedge n \in N \,\}$;

(2) $h^{-1}(h(K)) = K$, 当且仅当, N是K的子群。

七、 $G = \langle V, E\rangle$，G为简单连通平面图，$|V| = 6$，$|E| = 12$，证明：G的每个区域均由3条边围成。 (10分)

八、 设有向树T有17条边，12片树叶，4个4度内点（即入度为1出度大于0的顶点），1个3度内点，求T的树根的度数。 (10分)