

武汉大学 2011–2012 学年第一学期期末考试

资源与环境学院 2009 级 地理信息系统专业

《离散数学》试题 (A 卷)

注意事项:

1. 本试卷共 20 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.
2. 请将答案全部写在武汉大学试卷纸上, 写在其他位置无效.

一、选择题(本题满分 10 分, 每小题 2 分)

1. 下列推理中, 不正确的是 **【 】**
(A) $Q \Rightarrow P \vee Q$ (B) $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$
(C) $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow P$ (D) $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$
2. 命题逻辑中一组公式 H_1, H_2, \dots, H_n, C 存在关系 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C$ 当且仅当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \rightarrow C$ 是 **【 】**
(A) 永真式 (B) 永假式 (C) 可满足式 (D) 矛盾式
3. 设 P, Q, R 为任意命题公式, 则 $P \Leftrightarrow Q$ 的充要条件是 **【 】**
(A) $\neg P \Leftrightarrow \neg Q$ (B) $P \vee R \Leftrightarrow Q \vee R$
(C) $P \wedge R \Leftrightarrow Q \wedge R$ (D) $R \rightarrow P \Leftrightarrow R \rightarrow Q$
4. 一个 8 阶群的任何子群一定不是 **【 】**
(A) 2 阶的 (B) 3 阶的 (C) 4 阶的 (D) 8 阶的
5. 一个无向图有 4 个节点, 其中 3 个的度数为 2, 3, 3. 则第 4 个节点的度数不可能是 **【 】**
(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 0

二、填空题(本题满分 10 分, 每小题 2 分)

6. 设 $A = \{a, b, c\}$, R 是 A 上的二元关系, 且给定 $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle\}$, 则 R 的对称闭包 $s(R) = \underline{\hspace{2cm}}$.
7. 集合 $\{\emptyset, a, \{b\}\}$ 的幂集为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
8. 设在 100 个同学中, 有 47 位同学熟悉 C 语言, 有 35 位同学熟悉 Java 语言, 有 23 位同学熟悉这两种语言. 则其中有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 位同学对这两种语言都不熟悉.
9. 具有 n 个结点的无向完全图 K_n 的结点度数的总和为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
10. 设有 56 盏灯, 拟公用一个电源, 则至少需要有六插头的接线板数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(本题满分 80 分, 每小题 8 分)

11. 求 $(P \rightarrow Q) \wedge Q$ 的主析取范式与主合取范式.

12. 给出下式的推理证明:

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D), (B \rightarrow E) \wedge (D \rightarrow F), \neg(E \wedge F), A \rightarrow C \Rightarrow \neg A.$$

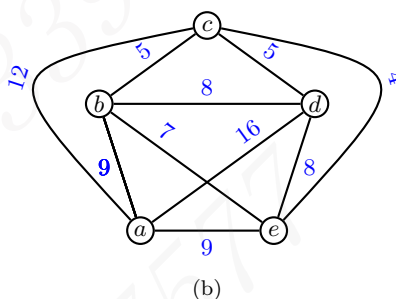
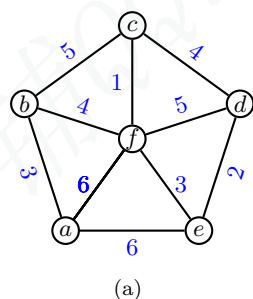
13. 写出下面推理的形式证明: 如果今天是星期一, 则要进行英语或离散数学考试. 如果今天英语老师有会, 则不考英语. 今天是星期一, 英语老师有会, 所以今天进行离散数学考试.

14. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 15, 27, 36, 45\}$ 上的整除关系 $R = \{\langle a_1, a_2 \rangle \mid a_1, a_2 \in A, a_1 \text{ 整除 } a_2\}$. 问 R 是否为 A 上的偏序关系? 若是, 则 (1) 画出 R 的哈斯图; (2) 求出 $\{2, 9\}$ 的最小上界和最大下界.

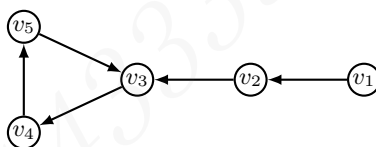
15. 在整数集 \mathbb{Z} 上定义运算: $a \circ b = a + b - 2, \forall a, b \in \mathbb{Z}$. 证明 $\langle \mathbb{Z}, \circ \rangle$ 是一个群.

16. 已知 $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x \equiv y \pmod{5}\}$, 其中 \mathbb{N} 为自然数集合. 证明 R 为等价关系, 并求 12 关于 R 的等价类.

17. 在下图所示的两图中, 各求一棵最小生成树, 并计算它们的权. 要求对图 (a) 使用 Kruskal 算法, 对图 (b) 使用 Prim 算法.



18. 求下图 G 的邻接矩阵, 并用 Warshall 算法求可达性矩阵.



19. 设 T 是 2 叉正则树, 有 t 片树叶, i 个分支点. 证明 T 的边数 $m = 2t - 2$.

20. 请结合你所学到的离散数学知识, 举例说明离散数学的一个具体应用. 要求说明是何具体问题, 具体使用了怎样的解决方法.

参考答案 · 卷 (A)

1. C
2. A
3. A
4. B
5. C
6. $\{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle a, c \rangle\}$ (或 $R \cup R^{-1}$)
7. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{\{b\}\}, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{a, \{b\}\}, \{\emptyset, a, \{b\}\}\}$.
8. 41
9. $n(n-1)$.
10. 11.
11. 主析取范式为:

$$\begin{aligned}(P \rightarrow Q) \wedge Q \\&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge Q \\&\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge Q) \\&\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P)) \\&\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \\&\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q).\end{aligned}$$

主合取范式为:

$$\begin{aligned}(P \rightarrow Q) \wedge Q \\&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge Q \\&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee Q) \\&\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q).\end{aligned}$$

12. 列表证明如下:

(1)	$\neg(E \wedge F)$	P
(2)	$\neg E \vee \neg F$	T(1) E
(3)	$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$	P
(4)	$A \rightarrow B$	T(3) I
(5)	$(B \rightarrow E) \wedge (D \rightarrow F)$	P
(6)	$B \rightarrow E$	T(5) I
(7)	$A \rightarrow E$	T(4),(6) I
(8)	$\neg E \rightarrow \neg A$	T(7) E
(9)	$A \rightarrow C$	P
(10)	$C \rightarrow D$	T(3) I
(11)	$D \rightarrow F$	T(5) I
(12)	$A \rightarrow F$	T(9),(10),(11) I
(13)	$\neg F \rightarrow \neg A$	T(12) E
(14)	$\neg A$	T(2),(8),(13) I

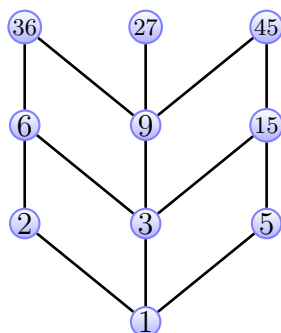
13. 设 A : 今天是星期一; B : 今天进行英语考试; C : 今天进行离散数学考试; D : 今天英语老师有会. 即要证明:

$$A \rightarrow (B \vee C), D \rightarrow \neg B, A, D \Rightarrow C.$$

列表证明如下:

(1)	A	P
(2)	$A \rightarrow (B \vee C)$	P
(3)	$B \vee C$	T(1),(2) I
(4)	D	P
(5)	$D \rightarrow \neg B$	P
(6)	$\neg B$	T(4),(5) I
(7)	C	T(3),(6) I

14. (1) 哈斯图为(形式不唯一):



(2) $\{2, 9\}$ 的最小上界为 $\{36\}$ 和最大下界为 $\{1\}$.

15. (1) 运算的结果仍然是整数, 所以运算 \circ 对集合 \mathbb{Z} 封闭;

(2) 对任意 $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a \circ b) \circ c = (a + b - 2) + c - 2 = a + b + c - 4$, $a \circ (b \circ c) = a + (b + c - 2) - 2 = a + b + c - 4$, 即 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, 所以运算 \circ 是可结合的;

(3) 对任意 $a \in \mathbb{Z}$, 有 $a \circ 2 = a + 2 - 2 = a$, $2 \circ a = 2 + a - 2 = a$, 即 2 是运算 \circ 的幺元;

(4) 对任意 $a \in \mathbb{Z}$, 有 $a \circ (4 - a) = a + (4 - a) - 2 = 2$, 即 $4 - a$ 是 a 关于运算 \circ 的逆元.

综上, 得证 $\langle \mathbb{Z}, \circ \rangle$ 是一个群.

16. 证明 R 是等价关系

(1) $\forall x \in \mathbb{N}, 5|(x - x) \Rightarrow x \equiv x \pmod{5} \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$. 所以, R 具有自反性.

(2) $\forall x, y \in \mathbb{N}$, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 则 $x \equiv y \pmod{5} \Rightarrow 5|(x - y) \Rightarrow 5|(y - x) \Rightarrow y \equiv x \pmod{5} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$. 所以, R 具有对称性.

(3) $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 且 $\langle y, z \rangle \in R$. 则 $x \equiv y \pmod{5}$ 且 $y \equiv z \pmod{5} \Rightarrow 5|(x - y)$ 且 $5|(y - z) \Rightarrow 5|((x - y) + (y - z)) \Rightarrow 5|(x - z) \Rightarrow x \equiv z \pmod{5} \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$.

所以, R 具有传递性.

综上所述, R 是等价关系.

12 关于 R 的等价类 $[12] = \{y \mid y = 5x + 2, x \in \mathbb{N}\}$.

17. $W(T_a) = 13; W(T_b) = 23;$

18. 图 G 的邻接矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

用 Warshall 算法计算: 逐列进行. 在第 i 列中若有 $a_{ji} = 1$, 则把第 i 行叠加到第 j 行.

$$M := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{i=1} := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{i=2}$$

$$:= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{i=3} := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{i=4} := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{i=5} = P.$$

19. 设 T 有 m 条边, 可得:

$$t + 3i - 1 = 2m \quad (1)$$

根据树的性质可得:

$$m = t + i - 1 \quad (2)$$

解由 (1), (2) 构成的方程组得: $m = 2t - 2$.

故结论成立.