

武汉大学计算机学院2006-2007学年第一学期
2005级《离散数学》考试标准答案

一、试求下述命题公式 G 的主析取和主合取范式: (10分)

$$P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

主析取范式: $(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R);$

主合取范式: $(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R).$

二、 (12分, 6+6)

(1) 试证明: $\forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \rightarrow \exists x Q(x);$

Proof:

$$\begin{aligned} & \forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \\ \Leftrightarrow & \neg \neg \forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \\ \Leftrightarrow & \neg \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\ \Leftrightarrow & \exists x \neg P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \end{aligned}$$

(2) 试证明下列结论的有效性(要求写证明序列):

前提: $\forall x (P(x) \vee Q(x))$, 结论: $\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$ 。

CP规则: 由(1) 结论等价于 $\exists x \neg P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

- | | |
|--------------------------------|-----------|
| ① $\exists x \neg P(x)$ | 引入前提 |
| ② $\neg P(a)$ | ①+ES |
| ③ $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ | 引入前提 |
| ④ $P(a) \vee Q(a)$ | ③+US |
| ⑤ $Q(a)$ | ②+④+析取三段论 |
| ⑥ $\exists x Q(x)$ | ⑤+EG |

三、设集合 $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ 。定义 A 上的二元关系“ $|$ ”, $m|n$ 表示 m 整除 n ($m, n \in A$), 完成下列各题: (12分, 4+4+4)

(1) 证明 $\langle A, | \rangle$ 是偏序集;

Proof:

- ① 自反性: $\because x = 1 \times x, \therefore x|x;$
- ② 反对称性: 设 $x|y \wedge y|x$, 则 $\exists p, q \in \mathbb{N} \wedge x = py \wedge y = qx, \therefore x = y.$
- ③ 传递性: 设 $x|y \wedge y|z$, 则 $\exists p, q \in \mathbb{N} \wedge x = py \wedge y = qz, \therefore x = pqz, x|z.$

(2) 设 $B \subseteq A$, 求下列元素(若存在):

(i) $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, 求 B 的最大元和极大元;

解: 无最大元素, 极大元素为: 6, 8, 10.

(ii) $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, 求 B 的最大下界和最小上界;

解: 最大下界1, 无最小上界。

- (3) 求 A 的真子集 C , 使得 $\langle C, | \rangle$ 是全序集, 且使 $|C|$ 为满足上述条件的最大值.
解: $C = \{1, 2, 4, 8\}$.

四、设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c\}$, 设 $B^A = \{f | f: A \rightarrow B\}$, 设 $X = \{f | f \in B^A \wedge f(A) \subseteq \{a, b\}\}$, $Y = \{f | f \in B^A \wedge f(A) \subseteq \{b, c\}\}$, $Z = \{f | f \in B^A \wedge f(A) \subseteq \{a, c\}\}$, $T = \{f | f \in B^A \wedge f \text{ 是满射}\}$ (16分, 4+4+4+4)

- (1) 试求 $|B^A|$, $|X|$, $|Y|$ 和 $|Z|$;

解: $|B^A| = 3^5 = 243$, $|X| = |Y| = |Z| = 2^5 = 32$.

- (2) 试用枚举法表示集合 $A \cap B$, $B \cap C$ 和 $C \cap A$;

解: $X \cap Y = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 4, b \rangle, \langle 5, b \rangle\}$,

$Y \cap Z = \{\langle 1, c \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, c \rangle, \langle 4, c \rangle, \langle 5, c \rangle\}$,

$Z \cap X = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 4, a \rangle, \langle 5, a \rangle\}$.

- (3) 证明: $T = B^A - (X \cup Y \cup Z)$;

Proof: 设 f 是满射, 则 $f \notin X \wedge f \notin Y \wedge f \notin Z$, so $f \in B^A - X \wedge f \in B^A - Y \wedge f \in B^A - Z$, hence $f \in B^A - (X \cup Y \cup Z)$, 故 $T \subseteq B^A - (X \cup Y \cup Z)$.
设 f 不是满射, 则 $f \in X \vee f \in Y \vee f \in Z$, so $f \in X \cup Y \cup Z$, 故 $B^A - T \subseteq X \cup Y \cup Z$, 即 $B^A - (X \cup Y \cup Z) \subseteq T$

- (4) 试利用容斥原理求 $|T|$.

解: $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |Y \cap Z| - |Z \cap X| + |X \cap Y \cap Z| = 3 \times 2^5 - 3 = 93$

$|T| = 3^5 - 93 = 150$

五、设 $\langle G, *, e \rangle$ 是一个群, 并且对群 G 中的任意两个元素 a 和 b 有: $(a * b)^3 = a^3 * b^3$: (18分, 每小题3分)

- (1) 试证明: $\forall a, b \in G, (a * b)^2 = b^2 * a^2$;

Proof: $\forall a, b \in G, (b * a)^3 = b * (a * b)^2 * a$, 由条件有 $b * (a * b)^2 * a = b^3 * a^3$; 由消去律有 $(a * b)^2 = b^2 * a^2$.

- (2) 试证明: $\forall a, b \in G, a^3 * b^2 = b^2 * a^3$;

Proof:

$$\begin{aligned} & a^3 * b^2 \\ &= a * a^2 * b^2 \\ &= a * (b * a)^2 \\ &= (a * b)^2 * a \\ &= b^2 * a^2 * a \\ &= b^2 * a^3 \end{aligned}$$

- (3) 试证明: 如果 $c \in G$ 并且 $|c| = n$, 则 $c^{n+1} = c$;

Proof: if $|c| = n$, then $c^n = e$, so $c^{n+1} = c * c^n = c * e = c$.

- (4) 设 $c \in G$, $|c| = 5$, 则 $\forall x \in G, c * x^2 = x^2 * c$;

Proof: 由上题 $c^6 = c$, so $c * x^2 = c^6 * x^2 = (c^2)^3 * x^2 = x^2 * (c^2)^3 = x^2 * c$

- (5) 设 c 如上题所述, 则 $\forall x \in G, c * x^3 = x^3 * c$;

Proof: 由题(3) $c^6 = c$, so $c * x^3 = c^6 * x^3 = (c^3)^2 * x^3 = x^3 * (c^3)^2 = x^3 * c$

(6) 设 c 如题(4)所述, 则 $\forall x \in G, c * x = x * c$ 。

Proof: $\because 2$ 和 3 互素, so $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, 即 $\exists p, q \in \mathbb{Z} \wedge 2p + 3q = 1$, so $x = x^1 = x^{2p+3q} = (x^p)^2 * (x^q)^3$, hence $c * x = c * (x^p)^2 * (x^q)^3 = (x^p)^2 * c * (x^q)^3 = (x^p)^2 * (x^q)^3 * c = x * c$

六、设 $\langle G, *, e_G \rangle$ 和 $\langle H, \cdot, e_H \rangle$ 是两个群, $h: G \rightarrow H$ 是群 G 到群 H 的同态, 记 h 的同态核为 $N = \{a \mid a \in G \wedge h(a) = e_H\}$, 设 K 是 G 的子群, 试证明: (12分, 6+6)

(1) $h^{-1}(h(K)) = KN$, 其中, $KN = \{k * n \mid k \in K \wedge n \in N\}$;

Proof: $\forall x \in h^{-1}(h(K))$, so $h(x) \in h(K)$, hence $\exists k \in K \wedge h(x) = h(k)$.
 $\because h$ 是同态, $\therefore h(k^{-1} * x) = (h(k))^{-1} \cdot h(x) = e_H$, so $k^{-1} * x \in N$, hence $\exists n \in N \wedge x = k * n \in KN$, 故 $h^{-1}(h(K)) \subseteq KN$;
 $\forall k * n \in KN$, where $k \in K \wedge n \in N$, so $h(k * n) = h(k) \cdot h(n) = h(k) \cdot e_H = h(k) \in h(K)$, so $k * n \in h^{-1}(h(K))$, 即 $KN \subseteq h^{-1}(h(K))$; 故 $h^{-1}(h(K)) = KN$.

(2) $h^{-1}(h(K)) = K$, 当且仅当, N 是 K 的子群。

Proof:

\Rightarrow : $KN = K, e_G \in K, \forall n \in N$, so $n = e_G * n \in KN = K$, hence $N \subseteq K$;
 \Leftarrow : $\because N \subseteq K$, so $\forall n \in N, k \in K, k * n \in K$, hence $KN \subseteq K$, but $e_G \in N$, so $\forall k \in K, k = k * e_G \in KN$, so $K \subseteq KN$; 故 $h^{-1}(h(K)) = KN = K$.

七、 $G = \langle V, E \rangle$, G 为简单连通平面图, $|V| = 6, |E| = 12$, 证明: G 的每个区域均由3条边围成。 (10分)

反证法: 设图 G 至少有一个面是有4条边或4条以上的边围成, 设 k 为图 G 的面数, 则根据Euler公式有: $6 - 12 + k = 2$, 即 $k = 8$; 又每个面至少由3条边围成, 并且每条边最多围2个面, 则 $4 + 7 \times 3 \leq 2 \times 12$, 即 $25 \leq 24$, 矛盾。

八、设有向树 T 有17条边, 12片树叶, 4个4度内点 (即入度为1出度大于0的顶点), 1个3度内点, 求 T 的树根的度数。 (10分)

解: 设树根的度数为 x , 则有: $x + 4 \times 4 + 1 \times 3 + 12 \times 1 = 2 \times 17$, $\therefore x = 3$.