武汉大学计算机学院2008-2009学年第一学期 2007级《离散数学》考试试题

学号：________ 姓名：________ 成绩：________

注意：所有答案请一律写在试卷纸上并请注明题目序号！计算题要求有计算过程！

一、 试求下述命题公式G的主析取和主合取范式： (10分)

$$(P \to Q \vee R) \wedge (R \to \neg P)$$

二、 试证明下列结论的有效性(**要求写证明序列**)： (10分，5+5)

(1) 前提：$P \to (Q \to R)$, $R \to (S \to T)$, $\neg U \to (S \wedge \neg T)$,
结论：$P \to (Q \to U)$ (提示：用CP规则);

(2) 前提：$\exists x \forall y Q(x,y)$, $\forall x (Q(x,x) \to \exists y R(x,y))$,
结论：$\exists x \exists y R(x,y)$。

三、 设A是非空集合，R合A上的二元关系： (20分，10+5+5)

(1) 试证明：如果R是传递关系，则$R^2 \subseteq R$;

(2) 试证明：如果R是传递和自反关系，则$R^2 = R$;

(3) 设$A = \{0,1,2,3,4\}$, 设关系$R = \{\langle m,n\rangle \mid m,n \in A \wedge n-m \equiv 1 \pmod 5\}$，试求关系$R$的传递闭包$t(R)$。

四、 设X和Y是两个非空集合，$f: X \longrightarrow Y$是集合X到集合Y的函数： (16分，6+6+4)

(1) 试证明：$\forall B \subseteq Y$，有$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$;

(2) 试证明：如果f是满射，则$\forall B \subseteq Y$，有$B = f(f^{-1}(B))$;

(3) 设$X = \{0,1,2,3,4\}$, $Y = \{0,1,2\}$，函数$g: Y \longrightarrow X$, $g(y) = y$，试求集合$\{f \mid f: X \to Y \wedge f \circ g = \mathbb{1}_Y\}$的基数，其中$\mathbb{1}_Y$是$Y$到$Y$上的恒等映射。

五、 设$\langle G, *, e\rangle$是一个群，$|G| = 2009(41 \times 49)$；设H和K是G的两个**正规子群**且$|H| = 41 \wedge |K| = 49$。在集合$H \times K$上定义运算$\otimes$: $\langle h,k\rangle \otimes \langle h',k'\rangle = \langle h * h', k * k'\rangle$，试证明: (24分，每小题4分)

(1) $\langle H\times K,\otimes\rangle$是一个群并求出该群的阶数；

(2) 利用Langrange定理证明$H\cap K=\{e\}$；

(3) 利用(2)的结论证明$\forall h\in H,\ k\in K$, 有$h*k=k*h$ (**提示**：考虑$h*k*h^{-1}*k^{-1}$)；

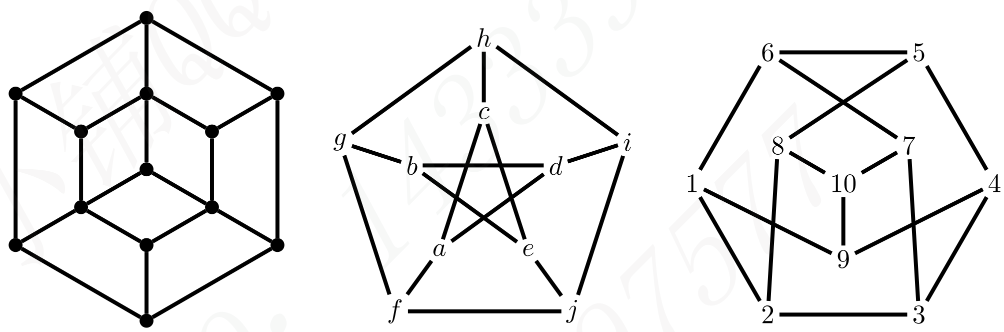
(4) 函数$f:H\times K\longrightarrow G,\ f(\langle h,k\rangle)=h*k$ 是群$\langle H\times K,\otimes\rangle$ 到群$\langle G,*\rangle$的同态；

(5) 设f的同态核ker(f)为集合$\{\langle h,k\rangle\,|\,\langle h,k\rangle\in H\times K\wedge f(\langle h,k\rangle)=e\}$, 则$\ker(f)=\{\langle e,e\rangle\}$；

(6) f是群$\langle H\times K,\otimes\rangle$到群$\langle G,*\rangle$的同构。

六、 设$G(n,m)$为n个结点m条边的简单无向图，如果图G的每个结点的度数均为r，且r是奇数，试证明n一定是偶数，且m是r的倍数。 (10分)

七、 设有如下三个简单无向图： (10分，5+5)



(a) (b) (c)

(1) 试利用结点着色的方法证明图(a)没有哈密顿回路；

(2) 已知图(b)与图(c)同构，设Φ为图(b)的结点集合$\{a,b,\ldots,j\}$到图(c)的结点集合$\{1,2,\ldots,10\}$的同构函数，已知$\Phi(a)=8$; $\Phi(b)=6$. 试写出剩余结点的对应关系。