

2012-2013 上学期-计算机学院 离散数学 (A 卷)

一. 求下列公式的主析取范式和主合取范式: (10 分)

$$(P \rightarrow Q \wedge R) \wedge (\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R))$$

二. 分别证明下列结论的有效性 (写出证明序列): (8+8=16 分)

(1) 前提: $P \wedge Q \rightarrow R, \neg R \vee S, \neg S$

结论: $\neg P \vee \neg Q$

(2) 前提: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$

结论: $\neg \forall x(R(x) \rightarrow P(x))$

三. 设 A, B 为集合, $A \neq \emptyset, \langle B, \leq \rangle$ 为偏序集, 集合 $B^A = \{f | f: A \rightarrow B\}$, 定义关系 R 如下:

$$R \subseteq B^A \times B^A, \forall f, g \in B^A, f R g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad (\forall x \in A).$$

证明: R 为 B^A 上的偏序关系. (12 分)

四. 设集合 $S = \{1, 2, \dots, n\}$, $G = \{p | p: S \rightarrow S, \text{ 且 } p \text{ 为双射}\}$, 定义 S 上的二元关系 R 如下:

$$\forall i, j \in S, i R j \Leftrightarrow \exists f \in G, f(i) = j$$

完成下列各题: (4+6+2=12 分)

(1) 设 \circ 为函数的合成运算, 证明: $\langle G, \circ \rangle$ 构成群;

(2) 证明: 关系 R 为 S 上的等价关系;

(3) 求集合 S 关于关系 R 的商集 S/R .

五. 循环群 $\langle N_6, +_6 \rangle$, 其中 $N_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\forall a, b \in N_6, a +_6 b = (a + b) \bmod 6$

6. 试完成下列各题:

(6+6+2+2=16 分)

- (1) 求群 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 的每个元素的阶;
- (2) 求群 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 的所有子群和生成元;
- (3) 设函数 $h: N_6 \rightarrow N_6$ 是 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 上的自同构 (同态映射且为双射), 求出所有满足以上条件的函数 h ;
- (4) 写出同构意义下所有的 6 阶群。

六. 设 f 和 g 都是群 $\langle G, *, e_G \rangle$ 到 $\langle H, \circ, e_H \rangle$ 的同态映射, 且 $GI = \{ x \mid x \in G \wedge f(x) = g(x) \}$ 。完成下列各题: (7+7=14 分)

- (1) 试证: $\forall x \in G, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$;
- (2) 试证: $\langle GI, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群。

七. 设 $G(n, m)$ 是简单平面图, 且 $n = 7, m = 15$. 证明:

(6+6=12 分)

- (1) 图 G 是连通的;
- (2) 图 G 的每个面均有 3 条边围成。

八. 设 G 是简单连通赋权图, $e = (u, v)$ 是 G 中的一条边, 且对图 G 的任意一条异于 e 的边 e' , 均有: e 的权值小于 e' 的权值, 证明: G 的任意一个最小生成树必含有边 e 。 (8 分)