武汉大学 2019-2020 第一学期

概率统计 B 期终试题（A 卷）答案

一、（(12 分）已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(A|B)=0.5,$ 求 $P(\overline{A\cup B})$ 和 $P(A\bar{B}|(AUB))$。

一、（12 分） 解：$P(AB)=0.3, P(AUB)=0.8; \therefore P(\overline{AUB})=0.2,$

$P(A\bar{B})=0.2, P(A\bar{B}\,|\,AUB)=0.25$

二、（12 分）一批外表完全一样的元件，来自甲乙丙三厂，各占比例为 $5:3:2$，已知他们各自的次品率分别为 $0.02, 0.01, 0.03$；从这批元件中任取一件；求 ⑴它是次品的概率？ ⑵若它是次品，它来自甲乙丙三厂的概率各是多少？

二、（12 分）解：记 $A=$ “次品”，$B_i=$ “来自三厂”，$i=1,2,3$，则

$$P(A)=0.019, P(B_1|A)=\frac{10}{19}, P(B_2|A)=\frac{3}{19}, P(B_3|A)=\frac{6}{19}$$

三、（12 分）若公司经理每天上班的时间在 9 到 10 点的任意时刻，而秘书在 8:30 到 9:30 的任意时刻；以 A 记事件“两人到达时间相差不超过 20 分钟”。 （1）求 A 发生的概率。⑵ 平常的一周（5 天）中，求 A 恰好发生三次的概率。

三、（12 分）解：（1）$\frac{1}{3}$，（2）X 服从 B（5，$\frac{1}{3}$），$P=\frac{40}{243}$

四、（16 分）若随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，

⑴求随机变量 X 和 Y 的边沿缘概率密度 $f_x(x); f_y(y)$；并判别他们是否独立？（2）求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度。

四、（16 分）解：（1） $f_x(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} & x>0 \\ 0 & \text{x} \le 0\end{cases}$， $f_y(y)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2} & y>0 \\ 0 & y\le 0\end{cases}$；独立

（2） $f_x(x)=\begin{cases}ze^{-\frac{1}{2}z^2} & z>0 \\ 0 & \text{z}\le 0\end{cases}$

五、（12 分）某机器一天正常工作的概率为 0.8，已知：正常时一台机器每天获利 8 万元，故障时每台机器亏损 2 万元。现有 100 台此机器；（1）求每天的平均利润。若希望平均利润达到 700 万元，试提出一个解决办法。

（2）现有情况下，为保证一天的利润不低于 3000 万元的概率大于 0.977，问要增加工多少台机器？（已知 $\Phi(2.0)=0.977$）

五、（12 分）解：（1） $EX_i=6, DX_i=16$，600 万，方法：将正常工作的概率提高到 0.9。

（2）$P(\sum_{i=1}^{n+100} X_i \geq 3000) = 0.977, n = 431$

六、（12 分）若 $X_1, X_2, \cdots, X_8$ 是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，（1）求常数 a,b,c,d （这里 $abc \neq 0$），使 $Y = a(X_1 - X_2)^2 + b(2X_3 - X_4 - X_5)^2 + c(3X_6 - 2X_7 - X_8)^2 \sim \chi^2(d)$；

（2）若 $Z = \sum_{i=1}^{8}(X_i - \mu)^2$，求 Z 的期望与方差。

六、（12分）解：（1）$a = \frac{1}{2\sigma^2}, b = \frac{1}{6\sigma^2}, c = \frac{1}{14\sigma^2}, d = 3$

（2）$\because \frac{Z}{\sigma^2} \sim \chi^2(8), \therefore EZ = 8\sigma^2, DZ = 16\sigma^4$

七、（12 分）已知 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\mu)} & x > \mu \\ 0 & x \leq \mu \end{cases}$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是样本，

试求参数 μ, λ 的最大似然估计，并判别是否无偏。

七、（12 分）解：$L = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)}$，$\lambda = \overline{X} - \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \mu = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

都是有偏。$E\mu = \mu + \frac{\lambda}{n}$

八、（12 分）某作物的产量近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现发现新的种子，取 25 块样田做实验，发现平均亩产为 1864 公斤，样本标准差为 50 公斤；问：此新种子的亩产量是不是显著大于 1800 公斤？（$\alpha = 0.05$）已知：$u_{0.05} = 1.65, u_{0.025} = 1.96$，

$t_{0.05}(25) = 1.708, t_{0.05}(24) = 1.712, t_{0.025}(25) = 2.060, t_{0.025}(24) = 2.064$

八、（12 分）解;$H : \mu = 1800, H_1 : \mu > 1800$

$n = 25, \overline{x} = 1864, s = 50, \alpha = 0.05, t_\alpha(24) = 1.708$

检验统计量为 $t = \frac{\overline{x} - 1800}{s}\sqrt{n}$，拒接域：$t \geq 1.708$，

计算：$t = 6.4 \geq 1.708$，所以拒接 H_0，认为显著大于 1800.