武汉大学 2013-2014 学年第一学期期末考试

概率统计 B（A）参考答案

一、（12 分）已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(B|A)=0.8$，求 $P(A\cup B)$ 和 $P(B|\overline{A})$。

解 $P(AB)=P(A)P(B|A)=0.4$ ………………… 4

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7$ ……………4

$P(B|\overline{A})=\dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(BA)}{1-P(A)}=\dfrac{2}{5}$ ………………4

二、（12 分）抛掷两枚骰子，在第一枚出现的点数能被 3 整除的条件下，求两枚骰子出现的点数之和大于 8 的概率？

解　设 A 表示“第一枚出现的点数能被 3 整除”， B 表示“两枚骰子出现的点数之和大于 8” ………………………………………………………2'

则

$P(A)=\dfrac{1}{3}(\dfrac{2}{6})$ ………………………………3'

$P(AB)=\dfrac{5}{36}$ ………………………………3'

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{5}{12}$ …………………4'

三、（12 分）若随机变量 X_1, X_2 相互独立而且分别服从参数为 λ_1, λ_2 的泊松分布；（1）证明： X_1+X_2 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布。（2）若 $P\{X_1+X_2>0\}=1-e^{-1}$，求 $E[(X_1+X_2)^2]$。

解　（1）证明：由题设， X_1+X_2 的可能取值为 0, 1, 2， $\cdots, k, \cdots$， ………2'

$$P(X_1+X_2=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X_1=i, X_2=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(X_1=i)P(X_2=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}=\frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-1)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$(k=0,1,2,\cdots)$

所以， X_1+X_2 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布。………………………………………………4'

（2）由（1）的结论， X_1+X_2 服从泊松分布，又， $P\{X_1+X_2>0\}=1-e^{-1}$，

所以，此泊松分布的参数 $\lambda=1$，……………………………………………………2'

故

$$E[(X_1+X_2)^2]=\{E[(X_1+X_2)]\}^2+D[(X_1+X_2)]=2 \quad 。…………4'$$

四、（12 分）一批元件其寿命 X 服从参数为 λ 的指数分布，取两个这种元件，分别（1）并联，（2）串联；求形成的新电路的各自平均使用寿命。

解　　X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}\text{……………………………………………2'}$$

（1）$F_M(x)=F^2(x)=\begin{cases}(1-e^{-\lambda x})^2 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$$\therefore \quad f_M(x)=\begin{cases}2\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x}) & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$\therefore \quad E(M)=\int_0^{+\infty}2\lambda x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})dx=\frac{3}{2\lambda}\text{……………………………..5'}$$

（2）$F_N(x)=1-(1-F(x))^2=\begin{cases}1-e^{-2\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$$\therefore \quad f_N(x)=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$\therefore \quad E(N)=\frac{1}{2\lambda}\text{……………………………………………………………5'}$$

五、（16 分）2013 年的红牛 CNBA·联赛决赛在开封雄狮队和宁波南虎队之间进行，决赛采取五局三胜制（先胜三局后比赛终止），由以往的数据表示，两队的胜率相同；第一局雄狮队获胜。（1）求南虎队取得冠军的概率。（2）若一场比赛的收入为 160 万元，胜利的队可以分得 120 万，其余归失败的队，求南虎队收入的数学期望。

解　　设 $A=\{$南虎队得冠军$\}$，$B_i=\{$第i场南虎队获胜$\}$（i=1, 2, …5）…………2'

（1）

$$P(A)=P(B_2B_3B_4+(\overline{B_2}B_3B_4+B_2\overline{B_3}B_4+B_2B_3\overline{B_4})B_5)$$

$$=\frac{1}{8}+C_3^2\frac{1}{2^3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}\text{…………………4'}$$

（2）南虎队收入函数为

$$L=\begin{cases}40\times 3 & p=1/4\\ 40\times 3+120 & p=1/4\\ 40\times 3+120\times 2 & p=3/16\\ 40+120\times 3 & p=1/8\\ 40\times 2+120\times 3 & p=3/16\end{cases}$$

所以，$EL=290$万。……………………………………………………………10'

六、（12分）若 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 是正态总体 $N(0,4)$ 的样本，（1）求常数 a,b,c,n（这里 $abc\neq 0$），使 $Y=aX_1^2+b(2X_2-X_3)^2+c(3X_4-2X_5-X_6)^2\sim\chi^2(n)$；（2）问 $\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{X_1+X_2+X_3}{|X_5-X_6|}$ 服从什么分布？

解　（1）显然

$$X_1\sim N(0,4)$$
$$2X_2-X_3\sim N(0,20)$$
$$3X_4-2X_5-X_6\sim N(0,56)$$

$$\therefore\quad a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{20},c=\frac{1}{56},n=3$$ ……………………………6'

（2）因为

$$\frac{X_1+X_2+X_3}{2\sqrt{3}}\sim N(0,1)$$

$$\frac{1}{8}(X_5-X_6)^2\sim\chi^2(1)$$

又，显然 $\frac{X_1+X_2+X_3}{2\sqrt{3}}$ 与 X_5-X_6 独立。所以

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{X_1+X_2+X_3}{|X_5-X_6|}\sim t(1)$$ 。……………………………………6'

七、（12分）若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的样本，已知 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}|x|},-\infty<x<+\infty,\lambda>0$$

试求 λ 的矩估计和最大似然估计，并判别最大似然估计的无偏性。

解　（1）先求矩估计

因为 $E(X)=0$，所以考虑 $E(X^2)$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\lambda}x^2e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=2\lambda^2$$

故，可令 $2\lambda^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，可得 λ 的矩估计 $\hat{\lambda}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$。……………6'

（2）似然函数 $L=(\frac{1}{2\lambda})^n e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$

$$\ln L=-n\ln 2-n\ln\lambda-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=-\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

令 $\frac{d\ln L}{d\lambda}=0$，得 $\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$；

故 λ 的最大似然估计为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$。……………………………………4'

其数学期望为 $E(\hat{\lambda})=E(|X_i|)=\lambda$，所以最大似然估计是无偏的。…………2'

八、(12 分) 某装置的平均工作温度据制造厂讲是 190℃，今从一个由 16 台装置构成的随机样本得出的工作温度平均值和标准差分别为 195℃和 8℃。这些数据是否提供了充分证据，说明平均工作温度比制造厂讲的要高？取 $\alpha=0.05$，可以假定工作温度服从正态分布。(已知 $t_{0.05}(15)=1.73$)。

解　由题设，作出假设 $H_0:\mu=190, H_1:\mu>190$ ………………2'

这里，$n=16, \overline{X}=195, s=8, \alpha=0.05$

检验统计量 $t=\frac{\overline{X}-190}{s}\sqrt{n}$ ……………………………………………2'

拒绝域为　$t\ge t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(15)=1.73$ ……………………………2'

计算得：$t=2.5\ge 1.73$ ……………………………………………………4'

所以，拒绝 H_0；即认为平均工作温度比制造厂讲的要高。………2'