范式和基本定理

School of Computer Wuhan University



- 1 命题逻辑
  - 命题
  - 符号化
  - 合式公式的形式文法
  - 合式公式的形式语义
- ② 公式之间的关系
  - 公式的语义性质
  - 逻辑等价
  - 永真蕴涵关系
  - 恒等变换与不等变换
  - 对偶性
- 3 范式和基本定理
  - 极大项
  - 主合取范式
  - 主析取范式
  - 联结词的扩充与规约
- 4 推理和证明方法
  - 有效结论
  - 自然推理的形式证明
  - 证明方法

- 1 命题逻辑
  - 命题
  - 符号化
  - 合式公式的形式文法
  - 合式公式的形式语义
  - ② 公式之间的关系
    - 公式的语义性质
    - 逻辑等价
    - 永真蕴涵关系
    - 恒等变换与不等变换
    - 对偶性
- 3 范式和基本定理
  - 极大项
  - 主合取范式
  - 主析取范式
  - 联结词的扩充与规约
- 4 推理和证明方法
  - 有效结论
  - 自然推理的形式证明
  - 证明方法

- 命题
- 符号化
- 合式公式的形式文法
- 合式公式的形式语义
- ② 公式之间的关系
  - 公式的语义性质
  - 逻辑等价
  - 永真蕴涵关系
  - 恒等变换与不等变换
  - 对偶性
- 3 范式和基本定理
  - 极大项
  - 主合取范式
  - 主析取范式
  - 联结词的扩充与规约
- 4 推理和证明方法
  - 有效结论
  - 自然推理的形式证明
  - 证明方法

命题逻辑

设G是公式:

- ① 如果对G的任意一个解释I,都有I(G) = 1,称G为重言式(永真式);
- ② 如果存在G的一个解释I, I(G) = 1, 称G为可满足公式(satisfiable);
- ③ 如果对G的任意一个解释I,都有I(G) = 0,称G为矛盾式(invalid).

#### Example

公式 $G = \neg((P \lor Q) \land P) \leftrightarrow \neg P$ 为重言式

命题逻辑

设 G 是公式:

- ① 如果对G的任意一个解释I,都有I(G) = 1,称G为重言式(永真式);
- ② 如果存在G的一个解释I, I(G) = 1, 称G为可满足公式(satisfiable);
- ③ 如果对G的任意一个解释I,都有I(G) = 0,称G为矛盾式(invalid).

公式 $G = \neg((P \lor Q) \land P) \leftrightarrow \neg P$ 为重言式.

	P	Q	$P \lor Q$	$(P \lor Q) \land P$	$\neg((P \lor Q) \land P)$	$\neg P$	G
$I_0 = 00$	0	0	0	0	1	1	1
$I_1 = 01$	0	1	1	0	1	1	1
$I_2 = 10$	1	0	1	1	0	0	1
$I_3 = 11$	1	1	1	1	0	0	1

命题逻辑

称公式F和G逻辑等价, iff, 公式(F) ↔ (G)是重言式, 记为:  $F \Leftrightarrow G$ .

$$\neg((P \lor Q) \land P) \Leftrightarrow \neg P$$

命题逻辑

称公式F和G逻辑等价, iff, 公式(F) ↔ (G)是重言式, 记为:  $F \Leftrightarrow G$ 

$$\neg((P \lor Q) \land P) \Leftrightarrow \neg P$$

命题逻辑

称公式F和G逻辑等价, iff, 公式(F) ↔ (G)是重言式, 记为:  $F \Leftrightarrow G$ 

$$\neg((P \lor Q) \land P) \Leftrightarrow \neg P$$

### **Properties**

- $\bullet$   $A \Leftrightarrow A$ :
- $\bigcirc$  if  $A \Leftrightarrow B$ , then  $B \Leftrightarrow A$ ;
- 3 if  $A \Leftrightarrow B$ , and  $B \Leftrightarrow C$ , then  $A \Leftrightarrow C$ ;

## 常用的"恒等式"

$\neg \neg P \Leftrightarrow P$	双重否定律
$P \wedge P \Leftrightarrow P$	可签件
$P \lor P \Leftrightarrow P$	<b>幂等律</b>
$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	六ム体
$P \lor Q \Leftrightarrow Q \lor P$	交換律
$(P \land Q) \land R \Leftrightarrow P \land (Q \land R)$	从人体
$(P \lor Q) \lor R \Leftrightarrow P \lor (Q \lor R)$	结合律 
$(P \land Q) \lor R \Leftrightarrow (P \lor R) \land (Q \lor R)$	分配律
$(P \lor Q) \land R \Leftrightarrow (P \land R) \lor (Q \land R)$	力"的件
$(P \wedge Q) \vee P \Leftrightarrow P$	可业体
$(P \lor Q) \land P \Leftrightarrow P$	吸收律
$(P \to Q) \Leftrightarrow \neg P \lor Q$	蕴涵表达式
$\neg (P \land Q) \Leftrightarrow \neg P \lor \neg Q$	Da Mauman 体
$\neg (P \lor Q) \Leftrightarrow \neg P \land \neg Q$	De Morgan律
$(P \to Q) \land (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$	
$(P \lor \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{T}$	排中律

称公式F永真蕴涵(Logical Implication)公式G, iff, 公式(F) → (G)是重言式, 记为:  $F \Rightarrow G$ .

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

## 永真蕴涵关系

称公式F永真蕴涵(Logical Implication)公式G, iff, 公式(F)  $\rightarrow$  (G)是重言式, 记为:  $F \Rightarrow G$ .

#### Example

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

#### Remark

对F和G中出现的所有原子的一个指派I,都有 $I(F) \leq I(G)$ ;即F为真的所有可能涵盖在G的为真的可能之中;相当于代数中的"不等式".

#### **Properties**

- ② if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow C$ , then  $A \Rightarrow C$ ;

称公式F永真蕴涵(Logical Implication)公式G, iff, 公式(F) → (G)是重言式, 记为:  $F \Rightarrow G$ 

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

#### Remarks

对F和G中出现的所有原子的一个指派I,都有I(F) < I(G);即F为真的所有可 能涵盖在G的为真的可能之中: 相当于代数中的"不等式".

## 永真蕴涵关系

命题逻辑

称公式F永真蕴涵(Logical Implication)公式G, iff, 公式(F)  $\rightarrow$  (G)是重言式, 记为:  $F \Rightarrow G$ .

#### Example

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

#### Remarks

对F和G中出现的所有原子的一个指派I,都有 $I(F) \leq I(G)$ ;即F为真的所有可能涵盖在G的为真的可能之中;相当于代数中的"不等式".

#### **Properties**

- 2 if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow C$ , then  $A \Rightarrow C$ ;
- ① if  $A \Rightarrow B$ , then  $\neg B \Rightarrow \neg A$ ;

1	$P \Rightarrow P \lor Q$
2	$P \wedge Q \Rightarrow P$
3	$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$
4	$\neg Q \land (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$
5	$\neg P \land (P \lor Q) \Rightarrow Q$
6	$(P \to Q) \land (Q \to R) \Rightarrow P \to R$
7	$(P \rightarrow Q) \Rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$
8	$(P \to Q) \land (R \to S) \Rightarrow (P \land R) \to (Q \land S)$

## 恒等式与不等式的证明

#### 方法

- 真值表法: 判断A ↔ B或A → B的真值表是否恒为1;
- 对不等式 $A \Rightarrow B$ ,只需要判断在A为真时,B亦真;或者,B为假时,A亦假;
- 恒等、不等变换.

#### Example

#### Method 1

- ① 设,  $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为真;
- ② 则,P为真, $P \rightarrow Q$ 亦真;
- ③ 所以, Q为真.

#### Method 2:

- ① 设, Q为假
- ② 分情况讨论
  - P为真,则, $P \to Q$ 为假,所以, $P \land (P \to Q)$ 为假;
  - P为假,则,P∧(P → Q)为假;

#### 方法

命题逻辑

- 真值表法: 判断A ↔ B或A → B的真值表是否恒为1;
- 对不等式 $A \Rightarrow B$ ,只需要判断在A为真时,B亦真;或者,B为假时,A亦假;
- 恒等、不等变换.

### Example: $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

#### Method 1:

- ① 设,  $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为真;
- ② 则, P为真,  $P \rightarrow Q$ 亦真;
- ⑥ 所以, Q为真.

#### Method 2:

- ① 设, Q为假;
- ② 分情况讨论:
  - P为真,则,P → Q为假,所以,P ∧ (P → Q)为假;
  - P为假,则,P∧(P→Q)为假;



## 恒等变换与不等变换

### Definition (Substitution)

设 $G(P_1, P_2, ..., P_n)$ 是一公式,F是另一公式,设 $P_i$ 是公式G中的某一原子,将公式G中的 $P_i$ 的每个出现用F替换,称为代入,代入后所得到的公式 $G(P_1, ..., P_{i-1}, F/P_i, P_{i+1}, ..., P_n)$ 称为代入实例.

### Example

### Theorem (代入规则)

设公式 $G(P_1, P_2, ..., P_n)$ 是重言式,则其任意的一个代入实例 $G(P_1, ..., P_{i-1}, F/P_i, P_{i+1}, ..., P_n)$  也是重言式.

### Corollary (代入规则)

- $\partial A \Leftrightarrow B = MA(F/P) \Leftrightarrow B(F/P) + M + B = \pm 3$
- 设A⇒B MA(F/P)⇒ B(F/P)机是重言式

## 恒等变换与不等变换

### Definition (Substitution)

设 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 是一公式, F是另一公式, 设 $P_i$ 是公式G中的某一原子, 将 公式G中的P的每个出现用F替换, 称为代入, 代入后所得到的公 式 $G(P_1,\ldots,P_{i-1},F/P_i,P_{i+1},\ldots,P_n)$ 称为代入实例.

- 3  $G(F) \neq (\neg P \lor R \land Q) \lor \neg P \lor R$

### Definition (Substitution)

设 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 是一公式, F是另一公式, 设 $P_i$ 是公式G中的某一原子, 将公式G中的 $P_i$ 的每个出现用F替换, 称为代入, 代入后所得到的公式 $G(P_1, \ldots, P_{i-1}, F/P_i, P_{i+1}, \ldots, P_n)$ 称为代入实例.

#### Example

### Theorem (代入规则)

设公式 $G(P_1, P_2, ..., P_n)$ 是重言式,则其任意的一个代入实例 $G(P_1, ..., P_{i-1}, F/P_i, P_{i+1}, ..., P_n)$  也是重言式.

### Corollary (代入规则)

- 设 $A \Leftrightarrow B$ , 则 $A(F/P) \Leftrightarrow B(F/P)$ 也是重言式;

## 恒等变换与不等变换

### Definition (Substitution)

设 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 是一公式, F是另一公式, 设 $P_i$ 是公式, G中的某一原子, 将 公式G中的P的每个出现用F替换, 称为代入, 代入后所得到的公 式 $G(P_1,\ldots,P_{i-1},F/P_i,P_{i+1},\ldots,P_n)$ 称为代入实例.

公式之间的关系

3  $G(F) \neq (\neg P \lor R \land Q) \lor \neg P \lor R$ 

### Theorem (代入规则)

设公式 $G(P_1, P_2, ..., P_n)$ 是重言式,则其任意的一个代入实 例 $G(P_1,\ldots,P_{i-1},F/P_i,P_{i+1},\ldots,P_n)$  也是重言式.

### Corollary (代入规则)

- 设A ⇔ B, 则A(F/P) ⇔ B(F/P)也是重言式;
- 设 $A \Rightarrow B$ , 则 $A(F/P) \Rightarrow B(F/P)$ 也是重言式.

## 替换规则

### Definition (Replacement)

设G是一公式,A是在G的某一个位置出现的子公式,将该子公式用公式B置换的过程称为替换.

Example

### Theorem (替换规则)

设,G/是公式G中的某个子公式A用B替换后得到的公式,如果 $A \Leftrightarrow B$ ,则 $G \Leftrightarrow G$ /.

Example



# Definition (Replacement)

设G是一公式,A是在G的某一个位置出现的子公式,将该子公式用公式B置换 的过程称为替换.

$$\underbrace{(P \to Q) \land P}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{(\neg P \lor Q) \land P}_{B}$$

### Definition (Replacement)

设G是一公式,A是在G的某一个位置出现的子公式,将该子公式用公式B置换 的过程称为替换.

### Theorem (替换规则)

设, G/是公式G中的某个子公式A用B替换后得到的公式, 如果A ⇔ B. 则 $G \Leftrightarrow G'$ .



### Definition (Replacement)

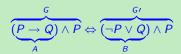
设G是一公式,A是在G的某一个位置出现的子公式,将该子公式用公式B置换的过程称为替换。

#### Example

### Theorem (替换规则)

设,G/是公式G中的某个子公式A用B替换后得到的公式,如果 $A \Leftrightarrow B$ ,则 $G \Leftrightarrow G$ /.

#### Example



## 替换规则只能对恒等式成立,对不等式不成立! 即: if $A \Rightarrow B$ , 则 $G \Rightarrow G'$ .

$$\underbrace{P \wedge Q}_{A} \Rightarrow \underbrace{P}_{B}$$

$$\neg (P \wedge Q) \Rightarrow \neg P$$

## Example

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

Proof

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \lor R)$$

$$(\neg P \lor Q) \to (Q \lor K)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg \neg P \land \neg Q) \lor (Q \lor F)$$

$$4 \Leftrightarrow \underline{(P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)}$$

$$5 \Leftrightarrow (\underline{(P \land \neg Q) \lor Q}) \lor R$$

$$7 \leftrightarrow ((B \lor Q) \land T) \lor B$$

$$8 \Leftrightarrow (\overrightarrow{P} \vee Q) \vee R$$

$$9 = RHS$$

4 D > 4 P > 4 B > 4 B >

## Example (1/3)

```
(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R
Proof.
```

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

### Proof.

$$(\underline{P \to Q}) \to (Q \vee R)$$

4 D > 4 P > 4 B > 4 B >

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

### Proof.

$$\begin{array}{ccc} & (\underline{P \rightarrow Q}) \rightarrow (Q \vee R) \\ 1 & \Leftrightarrow & (\neg P \vee Q) \rightarrow (Q \vee R) \end{array}$$

$$2 \Leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)$$

$$\Rightarrow \overline{(\neg \neg P \land \neg Q)} \lor (Q \lor R)$$

$$\Leftrightarrow \quad (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$A = ((P \lor O) \land (\neg O \lor O)) \lor A$$

$$7 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \overline{\mathbb{T}}) \vee R$$

$$8 \Leftrightarrow (\overline{P \vee Q}) \vee R$$

$$9 = RHS$$

$$9 = RHS$$

(替换+蕴涵表达式)

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

$$(\underline{P o Q}) o (Q \lor R)$$

$$1 \Leftrightarrow \underline{(\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)}$$

$$2 \Leftrightarrow \overline{\neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)}$$

$$B \Leftrightarrow (\neg \neg P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$\cdot \Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$\Rightarrow \overline{((P \land \neg Q) \lor Q) \lor R}$$

$$6 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee$$

$$7 \Leftrightarrow ((P \lor Q) \land \mathbb{T}) \lor F$$

$$8 \Leftrightarrow (\overline{P \vee Q}) \vee R$$

$$9 = RHS$$

## Example (1/3)

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

$$(P o Q) o (Q \lor R)$$

$$1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)$$

$$2 \Leftrightarrow \overline{\neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)}$$

$$3 \Leftrightarrow \overline{(\neg \neg P \land \neg Q)} \lor (Q \lor R)$$

$$\Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$((P \land \neg Q) \lor Q) \lor P$$

$$\Leftrightarrow (P \lor Q) \land (\neg Q \lor Q)) \lor R$$

$$7 \Leftrightarrow ((P \lor O) \land \overline{\mathbb{T}}) \lor R$$

$$8 \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

$$9 = RHS$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

$$(P \to Q) \to (Q \lor R)$$

$$1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)$$

$$2 \Leftrightarrow \overline{\neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)}$$

$$3 \Leftrightarrow (\neg \neg P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$4 \Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$\Leftrightarrow ((P \land \neg Q) \lor Q) \lor R$$

$$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee R$$

$$7 \Leftrightarrow ((P \lor Q) \land \mathbb{T}) \lor R$$

$$8 \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

$$\delta \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

$$9 = RHS$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

$$(\underline{P \to Q}) \to (Q \vee R)$$

$$1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)$$

$$3 \Leftrightarrow (\neg \neg P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$4 \Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$5 \Leftrightarrow \overline{((P \land \neg Q) \lor Q) \lor R}$$

$$6 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee R$$

$$7 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \mathbb{T}) \vee R$$

$$8 \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

$$9 = RHS$$

$$9 = RHS$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

$$(\underline{P \to Q}) \to (Q \vee R)$$

$$1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)$$

$$3 \Leftrightarrow \overline{(\neg \neg P \land \neg Q)} \lor (Q \lor R)$$

$$4 \Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$5 \Leftrightarrow \overline{((P \land \neg Q) \lor Q) \lor R}$$

$$5 \Leftrightarrow (\underline{(P \land \neg Q) \lor Q}) \lor R$$

$$6 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee R$$

$$7 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \mathbb{T}) \vee R$$

$$8 \Leftrightarrow (\overline{P \vee Q}) \vee R$$

$$9 = RHS$$

$$9 = RHS$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

$$\begin{array}{ccc} (\underline{P \rightarrow Q}) \rightarrow (Q \lor R) \\ 1 & \Leftrightarrow & (\neg P \lor Q) \rightarrow (Q \lor R) \end{array}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}$$

$$2 \Leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)$$

$$3 \Leftrightarrow \overline{(\neg \neg P \land \neg Q)} \lor (Q \lor R)$$

$$4 \Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$5 \Leftrightarrow \overline{((P \land \neg Q) \lor Q) \lor R}$$

$$6 \Leftrightarrow ((P \lor Q) \land (-Q \lor Q)) \lor ($$

$$6 \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{(P \vee Q)} \wedge \underline{(\neg Q \vee Q)}) \vee R$$

$$7 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \mathbb{T}) \vee R$$

$$8 \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee F$$

$$9 = RHS$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

### Proof.

4 D > 4 P > 4 B > 4 B >

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

### Proof.

$$(P \to Q) \to (Q \lor R)$$

$$1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)$$

$$2 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)$$

$$3 \Leftrightarrow (\neg \neg P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$4 \Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$5 \Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor Q \lor R$$

$$(K \land + 4 \Leftrightarrow + 4 \Rightarrow +$$

RHS

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

$$\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg(\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$$

$$3 \Leftrightarrow \neg \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg \neg P)$$

$$4 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$$

$$6 \quad \Leftrightarrow \quad ((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(\neg P \land \neg Q) \land P}{(\neg P \land \neg Q) \land P}$$

$$\Rightarrow \overline{\mathbb{F} \wedge \neg Q}$$

$$9 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbb{F} \wedge \neg Q}$$

$$9 \Leftrightarrow \underline{\mathbb{F} \wedge \neg Q}$$

$$(P \rightarrow Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: 
$$(P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P$$
 永真;

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

$$1 \quad \Leftrightarrow \quad \neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg(\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$$

$$3 \Leftrightarrow \neg\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg\neg P)$$

$$4 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$$

$$7 \Leftrightarrow (\overline{\neg P \land \neg Q) \land P}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{F} \wedge \neg Q$$

$$\begin{array}{ccc} 9 & \Leftrightarrow & \underline{\mathbb{F}} \wedge \neg Q \\ & & \end{array}$$

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于:  $(P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P$  永真; 等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ ;

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

$$3 \Leftrightarrow \neg\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg\neg P)$$

$$4 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$$

$$7 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{(\neg P \land \neg Q) \land P}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{F} \wedge \neg Q$$

$$9 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbb{F} \land \neg Q}$$

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

### Example

$$(P \rightarrow Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

```
等价于: (P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P 永真;
等价于: (P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T};
等价于: \neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F};
Proof.
```

公式之间的关系

### Example

$$(P o Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

```
等价于: (P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P 永真;
等价于: (P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T};
等价于: \neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F};
Proof.
                    \neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)
```

$$(P \rightarrow Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: 
$$(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$$
 永真;  
等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ ;  
等价于:  $\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ ;  
Proof.
$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow \mathbb{F};$$

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Rightarrow$$

(替换+蕴涵表达式)

$$(P \rightarrow Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: 
$$(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$$
 永真;  
等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ ;  
等价于:  $\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ ;  
Proof.
$$\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$$
;
$$\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \neg (\neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P) \Leftrightarrow \neg (\neg P \lor Q) \land \neg P) \Leftrightarrow \neg (\neg P \lor Q) \land \neg P \Leftrightarrow \neg (\neg P \lor Q) \land \neg P \Leftrightarrow \neg P \Leftrightarrow \neg P \lor Q) \land \neg P \Leftrightarrow \neg P \lor Q \Leftrightarrow \neg P \Leftrightarrow \neg P \Leftrightarrow \neg P \lor Q \Leftrightarrow \neg P \Leftrightarrow \neg P \lor Q \Leftrightarrow \neg P \Leftrightarrow \neg P \lor P \Leftrightarrow \neg P \Leftrightarrow \neg P \lor P \Leftrightarrow \neg P \Leftrightarrow$$

命题逻辑

$$(P \rightarrow Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

(替换+蕴涵表达式)

(代入+替换+蕴涵表达式)

(代入+替换+De Morgan)

- 34/77 -

$$(P \rightarrow Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

(替换+蕴涵表达式)

(代入+替换+蕴涵表达式)

(代入+替换+De Morgan)

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

```
等价于: (P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P 永真;
等价于: (P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T};
等价于: \neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F};
Proof.
                   \neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)
                \neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P)
                                                                               (替换+蕴涵表达式)
          \Leftrightarrow \neg(\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)
                                                                     (代入+替换+蕴涵表达式)
   3
          \Leftrightarrow \neg \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg \neg P)
                                                                     (代入+替换+De Morgan)
          \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P
                                                                        (代入+替换+双重否定)
                  \overline{((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q))} \land P
                                                                            (代入+替换+分配律)
          \Leftrightarrow
                  ((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P
                                                                                      (替换+排中律)
          \Leftrightarrow
```

$$(P \rightarrow Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

```
等价于: (P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P 永真;
等价于: (P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T};
等价于: \neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F};
Proof.
                  \neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)
          \Leftrightarrow \neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)
                                                                              (替换+蕴涵表达式)
          \Leftrightarrow \neg(\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)
                                                                    (代入+替换+蕴涵表达式)
   3
          \Leftrightarrow \neg \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg \neg P)
                                                                   (代入+替换+De Morgan)
          \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P
                                                                       (代入+替换+双重否定)
                  \overline{((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q))} \land P
                                                                           (代入+替换+分配律)
   6
                ((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P
                                                                                     (替换+排中律)
          \Leftrightarrow
   7
                  (\neg P \land \neg Q) \land P
                                                                                     (替换+简化式)
          \Leftrightarrow
```

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

```
等价于: (P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P 永真;
等价于: (P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T};
等价于: \neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F};
Proof.
                   \neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)
         \Leftrightarrow \neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)
                                                                               (替换+蕴涵表达式)
         \Leftrightarrow \neg(\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)
                                                                     (代入+替换+蕴涵表达式)
   3
          \Leftrightarrow \neg \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg \neg P)
                                                                    (代入+替换+De Morgan)
          \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P
                                                                        (代入+替换+双重否定)
                  \overline{((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q))} \land P
                                                                            (代入+替换+分配律)
   6
                ((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P
                                                                                      (替换+排中律)
          \Leftrightarrow
   7
                 (\neg P \land \neg Q) \land P
                                                                                      (替换+简化式)
          \Leftrightarrow
                  \overline{(\neg P \land P) \land \neg Q}
                                                                                               (结合律)
```

### Example

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

```
等价于: (P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P 永真;
等价于: (P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T};
等价于: \neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F};
Proof.
                   \neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)
          \Leftrightarrow \neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)
                                                                                 (替换+蕴涵表达式)
         \Leftrightarrow \neg (\neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)
                                                                      (代入+替换+蕴涵表达式)
   3
          \Leftrightarrow \neg \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg \neg P)
                                                                     (代入+替换+De Morgan)
          \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P
                                                                          (代入+替换+双重否定)
                  \overline{((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q))} \land P
                                                                              (代入+替换+分配律)
   6
                   ((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P
                                                                                        (替换+排中律)
          \Leftrightarrow
                 (\neg P \land \neg Q) \land P
                                                                                        (替换+简化式)
          \Leftrightarrow
          \Leftrightarrow \overline{(\neg P \land P) \land \neg Q}
                                                                                                 (结合律)
   9
                   \mathbb{F} \wedge \neg Q
                                                                                        (替换+排中律)
           \Leftrightarrow
```

 $(\neg P \land \neg Q) \land P$ 

 $\Leftrightarrow (\neg P \land P) \land \neg Q$ 

 $\mathbb{F} \wedge \neg Q$ 

 $\Leftrightarrow$ 

 $\Leftrightarrow$ 

 $\Leftrightarrow$ 

## Example (2/3)

### Example

 $(P \rightarrow Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$ 

(替换+简化式)

(替换+排中律)

(结合律)

(简化式)

9

10

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ ;

解

$$(P \rightarrow Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$$

1 ⇔  $(\neg P \lor Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$  (代入+替换+蕴涵表达式

2 ⇔ ¬P∧Q (代入+替换+吸收律

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$ ;

解:

$$(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$$

 $1 \quad \Leftrightarrow \quad (\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R)$ 

 $\rightarrow P \vee (Q \wedge R)$ 

 $3 \Leftrightarrow \overline{P \to (Q \land R)}$ 

(替换+蕴涵表达式)

(代入+分配率)

(代入+蕴涵表达式)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ ;

解:

$$(P \rightarrow Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$$

1 ⇔ (¬P∨Q∨¬R)∧¬P∧Q (代入+替换+蕴涵表达式

2 ⇔ ¬P∧Q (代入+替换+吸收律

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$ ;

解:

$$(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$$

 $\Rightarrow (\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R)$ 

 $P \Leftrightarrow \overline{\neg P \lor (Q \land R)}$ 

 $3 \Leftrightarrow \overline{P \to (Q \land R)}$ 

(替换+蕴涵表达式)

(代入+分配率)

(代入+蕴涵表达式)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ ;

解:

$$(P \rightarrow Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$$

1  $\Leftrightarrow$  (¬P∨Q∨¬R)∧¬P∧Q (代入+替换+蕴涵表达式

 $2 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$ 

(代入+替换+吸收律)

### **E**xample

化简公式:  $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$ ;

解:

$$(P \to Q) \land (\underline{P} \to \underline{R})$$

 $1 \quad \Leftrightarrow \quad (\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R)$ 

 $2 \Leftrightarrow \neg P \lor (Q \land R)$ 

 $\frac{1}{P} \times (0 \land P)$ 

(替换+蕴涵表达式)

(ハバコカル干)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ ;

解:

$$(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$$

1  $\Leftrightarrow$   $(\neg P \lor Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$  (代入+替换+蕴涵表达式)

 $2 \Leftrightarrow \neg P \land Q$ 

(代入+替换+吸收律)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$ 

解

$$(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$$

 $\Rightarrow (\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R)$ 

 $\neg P \lor (Q \land R)$ 

 $P \to (O \land R)$ 

(替换+蕴涵表达式)

(代入十分配平)

(代入+蕴涵表达式)

解:

$$(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$$

 $\Leftrightarrow$   $(\neg P \lor Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ (代入+替换+蕴涵表达式)

 $\Leftrightarrow \neg P \land Q$ (代入+替换+吸收律)

### Example

$$(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$$

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ ;

解:

$$(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$$

1 ⇔ (¬P∨Q∨¬R)∧¬P∧Q (代入+替换+蕴涵表达式)

2 ⇔ ¬P∧Q (代入+替换+吸收律)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$ ;

解:

$$(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$$

 $. \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R)$ 

 $\frac{(P)(Q)(P)}{P}$ 

 $3 \Leftrightarrow \overline{P \to (O \land R)}$ 

(替换+蕴涵表达式)

(代入+分配率)

(代入+蕴涵表达式)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ ;

解:

$$(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$$

1 ⇔ (¬P∨Q∨¬R)∧¬P∧Q (代入+替换+蕴涵表达式)

2 ⇔ ¬P∧Q (代入+替换+吸收律)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$ ;

解:

$$(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$$

$$1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R)$$

$$\neg P \lor (Q \land R)$$

$$3 \Leftrightarrow \overline{P \to (Q \land R)}$$

解:

$$(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$$

 $\Leftrightarrow$   $(\neg P \lor Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$  (代入+替换+蕴涵表达式)

 $\Leftrightarrow \neg P \wedge Q$ (代入+替换+吸收律)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$ :

解:

$$(P \rightarrow Q) \wedge (\underline{P \rightarrow R})$$

4 D > 4 A > 4 B > 4 B >

解:

命题逻辑

$$(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$$

⇔ (¬P∨Q∨¬R)∧¬P∧Q (代入+替换+蕴涵表达式)

 $\Leftrightarrow \neg P \land Q$ (代入+替换+吸收律)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$ ;

解:

$$(P \rightarrow Q) \wedge (\underline{P \rightarrow R})$$

解:

命题逻辑

$$(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$$

⇔ (¬P∨Q∨¬R)∧¬P∧Q (代入+替换+蕴涵表达式)

 $\Leftrightarrow \neg P \land Q$ (代入+替换+吸收律)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$ ;

解:

$$(P \to Q) \land (\underline{P \to R})$$

1 
$$\Leftrightarrow$$
  $(\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R)$  (替换+蕴涵表达式)

$$2 \Leftrightarrow \overline{\neg P \lor (Q \land R)}$$

$$3 \Leftrightarrow P \to (Q \land R)$$

解:

命题逻辑

$$(P \rightarrow Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$$

⇔ (¬P∨Q∨¬R)∧¬P∧Q (代入+替换+蕴涵表达式)

 $\Leftrightarrow \neg P \land Q$ (代入+替换+吸收律)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$ :

解:

$$(P \rightarrow Q) \land (\underline{P \rightarrow R})$$

$$1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R)$$
 (替换+蕴涵表达式)

$$2 \Leftrightarrow \neg P \lor (Q \land R)$$

$$3 \Leftrightarrow \overline{P \to (Q \land R)}$$

(代入+分配率)

(代入+蕴涵表达式)

### Remarks

- ① 公式的整体变换:代入+恒等式:
- ② 公式的局部变换: 替换+恒等式
- ⑤ 局部变换的子公式与恒等式的形式不一样: 代入+替换+恒等式;
- @ 蕴涵表达式的使用;
- ⑤ 所有的恒等式和不等式都能够用基本恒等式和不等式用通过 代入和替换推出

- ❶ 公式的整体变换: 代入+恒等式;
- ② 公式的局部变换: 替换+恒等式
- ③ 局部变换的子公式与恒等式的形式不一样: 代入+替换+恒等式;
- @ 蕴涵表达式的使用;
- ⑤ 所有的恒等式和不等式都能够用基本恒等式和不等式用通过 代入和恭操推出

- ❶ 公式的整体变换: 代入+恒等式;
- ② 公式的局部变换: 替换+恒等式;
- ⑤ 局部变换的子公式与恒等式的形式不一样: 代入+替换+恒等式;
- @ 蕴涵表达式的使用;
- ⑤ 所有的恒等式和不等式都能够用基本恒等式和不等式用通过 代入和基本推出

- 公式的整体变换: 代入+恒等式;
- 公式的局部变换:替换+恒等式;
- ③ 局部变换的子公式与恒等式的形式不一样: 代入+替换+恒 等式.

- 公式的整体变换: 代入+恒等式:
- 公式的局部变换:替换+恒等式;
- ③ 局部变换的子公式与恒等式的形式不一样: 代入+替换+恒 等式.
- ◎ 蕴涵表达式的使用;

- 公式的整体变换: 代入+恒等式:
- 公式的局部变换:替换+恒等式;
- ③ 局部变换的子公式与恒等式的形式不一样: 代入+替换+恒 等式.
- ◎ 蕴涵表达式的使用;
- 所有的恒等式和不等式都能够用基本恒等式和不等式用通过 代入和替换推出.

## 对偶性(Duality)

### **Definition**

设G是一个仅含有 $\neg$ ,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式; G的对偶公式G\*是将G中的 $\land$ ,  $\lor$ ,  $\blacksquare$ 和 $\blacksquare$ 分别替换为 $\lor$ ,  $\land$ 和 $\blacksquare$ ,  $\blacksquare$ ,  $\dotplus$  并且 $\mathbf{保持原有的运算关系所得到的公式.$ 

### Example

$$(P \land Q \lor \neg R)^*$$

$$= (P \lor Q) \land \neg R$$

$$\neq P \lor Q \land \neg R$$

$$= P \lor (Q \land \neg R)$$

### Property

 $A^{**} = A$ 

#### Definition

命题逻辑

设G是一个仅含有 $\neg$ ,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式; G的对偶公式 $G^*$ 是 将G中的 $\land$ ,  $\lor$ ,  $\mathbb{T}$ 和 $\mathbb{F}$ 分别替换为 $\lor$ ,  $\land$ 和 $\mathbb{F}$ ,  $\mathbb{T}$ , 并且保持原有的运 算关系所得到的公式.

$$(P \land Q \lor \neg R)^*$$

$$= (P \lor Q) \land \neg R$$

$$\neq P \lor Q \land \neg R$$

$$= P \lor (Q \land \neg R)$$

#### Definition

命题逻辑

设G是一个仅含有 $\neg$ ,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式; G的对偶公式G\*是 将G中的 $\land$ ,  $\lor$ ,  $\mathbb{T}$ 和 $\mathbb{F}$ 分别替换为 $\lor$ ,  $\land$ 和 $\mathbb{F}$ ,  $\mathbb{T}$ , 并且保持原有的运 算关系所得到的公式.

$$(P \land Q \lor \neg R)^*$$

$$= (P \lor Q) \land \neg R$$

$$\neq P \lor Q \land \neg R$$

$$= P \lor (Q \land \neg R)$$

## Property

$$A^{**} = A$$

#### Theorem

设
$$G(P_1,P_2,\ldots,P_n)$$
是一个仅含有 $\neg$ ,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式,则:  $\neg G(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$ 



#### Theorem

设 $G(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 是一个仅含有 $\neg$ ,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式,则: $\neg G(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$ 

### Proof (对公式的递归结构用归纳法).

- Base: if G是P, T, F, 则原恒等式成立;
- ② 设 $G(P_1, P_2, \dots, P_n) = A(P_1, P_2, \dots, P_n) \land B(P_1, P_2, \dots, P_n)$ , 并且,  $A \Rightarrow B$  满足上述恒等式:则:

③ 同理对:  $G = \neg A \rightarrow G = A \lor B$ 有相同的结论.

#### Theorem

设 $G(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 是一个仅含有 $\neg$ ,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式,则: $\neg G(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$ 

### Proof (对公式的递归结构用归纳法).

- Base: if G是P, T, F, 则原恒等式成立;
- ② 设 $G(P_1, P_2, \dots, P_n) = A(P_1, P_2, \dots, P_n) \land B(P_1, P_2, \dots, P_n)$ ,并且, A和R满足上状恒等式、删、



#### **Theorem**

设
$$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$
是一个仅含有 $\neg$ ,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式,则:
$$\neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

### Proof (对公式的递归结构用归纳法).

- Base: if G是P, T, F, 则原恒等式成立;
- ② 设 $G(P_1, P_2, \dots, P_n) = A(P_1, P_2, \dots, P_n) \land B(P_1, P_2, \dots, P_n)$ , 并且, A和B满足上述恒等式; 则:  $\neg G(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 
  - $= \neg (A(P_1, P_2, \dots, P_n) \land B(P_1, P_2, \dots, P_n))$
  - $\Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$  (1)
  - $= (A(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \land B(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n))^*$ =  $C^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$
  - $= G (\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$
- ③ 同理对:  $G = \neg A \pi G = A \vee B$ 有相同的结论.

#### **Theorem**

设
$$G(P_1, P_2, \dots, P_n)$$
是一个仅含有 $\neg$ ,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式,则:
$$\neg G(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$

### Proof (对公式的递归结构用归纳法).

- Base: if G是P, T, F, 则原恒等式成立;
- ② 设 $G(P_1, P_2, \dots, P_n) = A(P_1, P_2, \dots, P_n) \land B(P_1, P_2, \dots, P_n)$ , 并且, A和B满足上述恒等式; 则:  $\neg G(P_1, P_2, \dots, P_n)$

$$= \neg (A(P_1, P_2, \dots, P_n) \land B(P_1, P_2, \dots, P_n))$$

(假设)

- $\Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$ 
  - P2,...,¬Pn) (归纲仮及)

- $= G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$
- The Control Aventually
- ③ 同理对:  $G = \neg A \rightarrow G = A \lor B$ 有相同的结论.

#### Theorem

设
$$G(P_1, P_2, ..., P_n)$$
是一个仅含有 $\neg$ ,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式,则:
$$\neg G(P_1, P_2, ..., P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)$$

### Proof (对公式的递归结构用归纳法).

- Base: if G是P, T, F, 则原恒等式成立;
- ② 设 $G(P_1, P_2, ..., P_n) = A(P_1, P_2, ..., P_n) \land B(P_1, P_2, ..., P_n)$ , 并且, A和B满足上述恒等式; 则:

$$\neg G(P_1, P_2, ..., P_n) = \neg (A(P_1, P_2, ..., P_n) \land B(P_1, P_2, ..., P_n))$$
(假设)

$$\Leftrightarrow \neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \vee \neg B(P_1, P_2, \dots, P_n)$$
 (De Morgan)

$$\Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

$$= (A(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \land B(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n))$$
 (£

$$=G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

③ 同理对:  $G = \neg A \pi G = A \vee B$ 有相同的结论.

#### **Theorem**

设
$$G(P_1, P_2, ..., P_n)$$
是一个仅含有 $\neg$ ,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式,则:
$$\neg G(P_1, P_2, ..., P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)$$

### Proof (对公式的递归结构用归纳法).

- Base: if G是P, T, F, 则原恒等式成立;
- ② 设 $G(P_1, P_2, \dots, P_n) = A(P_1, P_2, \dots, P_n) \land B(P_1, P_2, \dots, P_n)$ , 并且, A和B满足上述恒等式; 则:

$$\neg G(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

$$= \neg (A(P_1, P_2, \dots, P_n) \land B(P_1, P_2, \dots, P_n)) \tag{@\emptyset}$$

$$\Leftrightarrow \neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \lor \neg B(P_1, P_2, \dots, P_n)$$
 (De Morgan)

$$\Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \qquad (\mu)$$

$$=(A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \land B(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n))^*$$

$$= G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

⑤ 同理对:  $G = \neg A \rightarrow G = A \lor B$ 有相同的结论.

#### **Theorem**

设
$$G(P_1, P_2, ..., P_n)$$
是一个仅含有 $\neg$ ,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式,则:
$$\neg G(P_1, P_2, ..., P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)$$

### Proof (对公式的递归结构用归纳法).

- Base: if G是P, T, F, 则原恒等式成立;
- ② 设 $G(P_1, P_2, ..., P_n) = A(P_1, P_2, ..., P_n) \land B(P_1, P_2, ..., P_n)$ , 并且, A和B满足上述恒等式; 则:  $\neg G(P_1, P_2, ..., P_n)$   $= \neg (A(P_1, P_2, ..., P_n) \land B(P_1, P_2, ..., P_n))$  (假设)  $\Leftrightarrow \neg A(P_1, P_2, ..., P_n) \lor \neg B(P_1, P_2, ..., P_n)$  (De Morgan)  $\Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n) \lor B^*(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)$  (归纳假设)  $= (A(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n) \land B(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n))^*$  (定义)
  - $=G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$
- ③ 同理对:  $G = \neg A \pi G = A \lor B$ 有相同的结论



#### **Theorem**

设
$$G(P_1, P_2, \dots, P_n)$$
是一个仅含有 $\neg$ ,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式,则: 
$$\neg G(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$

#### Proof (对公式的递归结构用归纳法).

- Base: if G是P, T, F,则原恒等式成立;
- ② 设 $G(P_1, P_2, ..., P_n) = A(P_1, P_2, ..., P_n) \land B(P_1, P_2, ..., P_n)$ , 并且,  $A \Rightarrow B$ 满足上述恒等式; 则:  $\neg G(P_1, P_2, ..., P_n)$   $= \neg (A(P_1, P_2, ..., P_n) \land B(P_1, P_2, ..., P_n))$  (假设)  $\Leftrightarrow \neg A(P_1, P_2, ..., P_n) \lor \neg B(P_1, P_2, ..., P_n)$  (De Morgan)  $\Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n) \lor B^*(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)$  (归纳假设)  $= (A(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n) \land B(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n))^*$  (定义)

$$= G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$

③ 同理对:  $G = \neg A \pi G = A \vee B$ 有相同的结论



#### Theorem

设
$$G(P_1, P_2, \dots, P_n)$$
是一个仅含有 $\neg$ ,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式,则:
$$\neg G(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$

### Proof (对公式的递归结构用归纳法).

- Base: if G是P, T, F, 则原恒等式成立;
- ② 设 $G(P_1, P_2, ..., P_n) = A(P_1, P_2, ..., P_n) \land B(P_1, P_2, ..., P_n)$ ,并且, A和B满足上述恒等式; 则:  $\neg G(P_1, P_2, ..., P_n)$   $= \neg (A(P_1, P_2, ..., P_n) \land B(P_1, P_2, ..., P_n))$  (假设)  $\Leftrightarrow \neg A(P_1, P_2, ..., P_n) \lor \neg B(P_1, P_2, ..., P_n)$  (De Morgan)  $\Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n) \lor B^*(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)$  (归纳假设)  $= (A(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n) \land B(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n))^*$  (定义)  $= G^*(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)$
- ③ 同理对:  $G = \neg A \rightarrow G = A \lor B$ 有相同的结论.



# 相关推论(1/2)

#### **Theorem**

设F和G是仅含有¬, ∧和V运算符号的公式; 则:

 $F \Leftrightarrow G$  iff  $F^* \Leftrightarrow G^*$ 



设F和G是仅含有¬, ∧和V运算符号的公式; 则:

 $F \Leftrightarrow G$  iff  $F^* \Leftrightarrow G^*$ 

#### Proof.

```
F \Leftrightarrow G
```

iff  $F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$  (广义De Morgan iff  $F^*(\neg \neg P_1, \neg \neg P_2, \dots, \neg \neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg \neg P_1, \neg \neg P_2, \dots, \neg \neg P_n)$  (代入)

 $iff \ F^*(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow G^*(P_1, P_2, \dots, P_n)$  (双重否定)

设F和G是仅含有¬, ∧和∨运算符号的公式; 则:

 $F \Leftrightarrow G$  iff  $F^* \Leftrightarrow G^*$ 

$$F \Leftrightarrow G$$

iff 
$$\neg F \Leftrightarrow \neg G$$

iff 
$$F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$
 (产义De Morgan iff  $F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$  (代入)

设F和G是仅含有¬, ∧和V运算符号的公式; 则:

 $F \Leftrightarrow G$  iff  $F^* \Leftrightarrow G^*$ 

#### Proof.

$$F \Leftrightarrow G$$
$$iff \neg F \Leftrightarrow \neg G$$

iff  $F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$  (广义De Morga iff  $F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$  (承入

iff  $F^*(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow G^*(P_1, P_2, \dots, P_n)$  (双重否定)

设F和G是仅含有¬, ∧和∨运算符号的公式; 则:

 $F \Leftrightarrow G$  iff  $F^* \Leftrightarrow G^*$ 

$$F\Leftrightarrow G$$
iff  $\neg F\Leftrightarrow \neg G$ 
iff  $F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)\Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$  (广义De Morgan)
iff  $F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)\Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$  (代入)
iff  $F^*(P_1, P_2, \dots, P_n)\Leftrightarrow G^*(P_1, P_2, \dots, P_n)$  (双重否定)

设F和G是仅含有¬, ∧和∨运算符号的公式; 则:

 $F \Leftrightarrow G$  iff  $F^* \Leftrightarrow G^*$ 

$$F \Leftrightarrow G$$
iff  $\neg F \Leftrightarrow \neg G$ 

iff 
$$F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$
 (广义De Morgan) iff  $F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$  (代入)



命题逻辑

设F和G是仅含有¬,∧和V运算符号的公式;则:

$$F \Leftrightarrow G$$
 iff  $F^* \Leftrightarrow G^*$ 

$$\begin{array}{c} F\Leftrightarrow G\\ \textit{iff} \ \neg F\Leftrightarrow \neg G\\ \textit{iff} \ F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)\Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \ (广义De\ Morgan)\\ \textit{iff} \ F^*(\neg \neg P_1, \neg \neg P_2, \ldots, \neg \neg P_n)\Leftrightarrow G^*(\neg \neg P_1, \neg \neg P_2, \ldots, \neg \neg P_n) \ (代入)\\ \textit{iff} \ F^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)\Leftrightarrow G^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \end{array}$$
 (双重否定)



设F和G是仅含有¬, ∧和V运算符号的公式; 则:

 $F \Rightarrow G$  iff  $G^* \Rightarrow F^*$ 

#### Proof

设F和G是仅含有¬, ∧和∨运算符号的公式; 则:

 $F \Rightarrow G$  iff  $G^* \Rightarrow F^*$ 

设F和G是仅含有¬, ∧和∨运算符号的公式; 则:

 $F \Rightarrow G$  iff  $G^* \Rightarrow F^*$ 

#### Proof.

 $F \Rightarrow G$ 

4 □ → 4 □ → 4 □ → 4 □ →

设F和G是仅含有¬, ∧和∨运算符号的公式; 则:

$$F \Rightarrow G$$
 iff  $G^* \Rightarrow F^*$ 

$$F \Rightarrow G$$

iff 
$$\neg G \Rightarrow \neg F$$

iff 
$$\neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T}$$

iff 
$$G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \to F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T}(f \times De Morgan)$$

$$Iff G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \dots, \neg\neg P_n) \to F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \dots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} (\mathcal{K}\Delta)$$

$$:(\mathcal{C}^* \to \Gamma^* \to \Gamma^*) \wedge \mathbb{T}$$

iff 
$$G^* o F^*\Leftrightarrow \mathbb{T}$$
 (双重否定<sub>)</sub>

$$\mathcal{F}|G^*\Rightarrow F^*$$
 (定り

设F和G是仅含有¬, ∧和∨运算符号的公式; 则:

$$F \Rightarrow G$$
 iff  $G^* \Rightarrow F^*$ 

$$F \Rightarrow G$$

iff 
$$\neg G \Rightarrow \neg F$$

iff 
$$\neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T}$$

iff 
$$G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \to F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T}$$
 (广义De Morgan

iff 
$$C^* \to F^* \to \mathbb{T}$$
 (2,511)

$$(X \supseteq C \subset X) \longrightarrow (X \supseteq C \subset X)$$

设F和G是仅含有¬, ∧和∨运算符号的公式; 则:

$$F \Rightarrow G$$
 iff  $G^* \Rightarrow F^*$ 

$$F \Rightarrow G$$

iff 
$$\neg G \Rightarrow \neg F$$

iff 
$$\neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T}$$

$$III \neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{I}$$

iff 
$$G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \to F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T}$$
 (广义De Morgan)

$$iff G^* \to F^* \Leftrightarrow \mathbb{T} \qquad (\text{奴重否定})$$

iff 
$$G^* \Rightarrow F^*$$
 (定义)

设F和G是仅含有¬, ∧和V运算符号的公式;则:

$$F \Rightarrow G$$
 iff  $G^* \Rightarrow F^*$ 

#### Proof.

$$F \Rightarrow G$$
iff  $\neg G \Rightarrow \neg F$ 
iff  $\neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T}$ 
iff  $G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \rightarrow F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T}$  (广义De Morgan)
iff  $G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \rightarrow F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T}$  (代入)

iff  $G^* \Rightarrow F^*$  (定义



设F和G是仅含有¬, ∧和∨运算符号的公式; 则:

$$F \Rightarrow G$$
 iff  $G^* \Rightarrow F^*$ 

$$F \Rightarrow G$$

iff 
$$\neg G \Rightarrow \neg F$$

iff 
$$\neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T}$$

$$III \neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{I}$$

iff 
$$G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \to F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T}$$
 (广义De Morgan)

$$\begin{array}{ll} \textit{iff } G^*(\neg\neg P_1,\neg\neg P_2,\ldots,\neg\neg P_n) \to F^*(\neg\neg P_1,\neg\neg P_2,\ldots,\neg\neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} & (代入) \\ \textit{iff } G^* \to F^* \Leftrightarrow \mathbb{T} & (双重否定) \end{array}$$

$$IH G^* \to F^* \Leftrightarrow \mathbb{T}$$
 (\$\text{X}\$)



设F和G是仅含有¬, ∧和V运算符号的公式; 则:

$$F \Rightarrow G$$
 iff  $G^* \Rightarrow F^*$ 

$$\begin{array}{l} F \Rightarrow G \\ \textit{iff} \ \neg G \Rightarrow \neg F \\ \textit{iff} \ \neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T} \\ \textit{iff} \ G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \rightarrow F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \ (\mathring{\Gamma} \ \& \text{De Morgan}) \\ \textit{iff} \ G^*(\neg P_1, \neg \neg P_2, \ldots, \neg \neg P_n) \rightarrow F^*(\neg P_1, \neg \neg P_2, \ldots, \neg \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \ (\mathcal{K} \ \land) \\ \textit{iff} \ G^* \rightarrow F^* \Leftrightarrow \mathbb{T} \qquad \qquad (双重否定) \\ \textit{iff} \ G^* \Rightarrow F^* \qquad \qquad (定义) \end{array}$$

范式和基本定理

命题逻辑

- 命题
- 符号化
- 合式公式的形式文法
- 合式公式的形式语义
- 2 公式之间的关系
  - 公式的语义性质
  - 逻辑等价
  - 永真蕴涵关系
  - 恒等变换与不等变换
  - 对偶性
- ③ 范式和基本定理
  - 极大项
  - 主合取范式
  - 主析取范式
  - 联结词的扩充与规约
- 4 推理和证明方法
  - 有效结论
  - 自然推理的形式证明
  - 证明方法

## Remark (n个原子的公式共有220个不同的运算)

- 一元运算: 2<sup>21</sup> = 4个: 恒等, 恒为1, 恒为0, 否定;
- ② 二元运算:  $2^{2^2} = 16$  个, 恒为1, 恒为0,  $\land$ ,  $\lor$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ , ...
- 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算, 称为 对联结词的扩充。

## Remark (n个原子的公式共有220个不同的运算)

- 一元运算: 2<sup>21</sup> = 4个: 恒等, 恒为1, 恒为0, 否定;
- ② 二元运算:  $2^{2^2} = 16$ 个, 恒为1, 恒为0,  $\land$ ,  $\lor$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ , ...
- 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算, 称为 对联结词的扩充.

## Remark (n个原子的公式共有220个不同的运算)

- 一元运算: 2<sup>21</sup> = 4个: 恒等, 恒为1, 恒为0, 否定;
- ② 二元运算: 2<sup>22</sup> = 16个, 恒为1, 恒为0, ∧, ∨, →, ↔, ...
- 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算, 称为 对联结词的扩充.

## Remark (n个原子的公式共有22"个不同的运算)

- 一元运算: 2<sup>21</sup> = 4个: 恒等, 恒为1, 恒为0, 否定;
- ② 二元运算:  $2^{2^2} = 16$  个, 恒为1, 恒为0,  $\land$ ,  $\lor$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ , ...
- ◎ 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算, 称为 对联结词的扩充.

## Remark (n个原子的公式共有220个不同的运算)

- 一元运算: 2<sup>21</sup> = 4个: 恒等, 恒为1, 恒为0, 否定;
- ② 二元运算:  $2^{2^2} = 16$  个, 恒为1, 恒为0,  $\land$ ,  $\lor$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ , ...
- ③ 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算, 称为 对联结词的扩充.

		与非(NAND)	或非(NOR)	异或(XOR)
P	Q	$P \uparrow Q$	$P \downarrow Q$	$P \oplus Q$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
等价式		$\neg (P \land Q)$	$\neg (P \lor Q)$	$(P \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q)$

# 程序设计中的位运算

C语言的位运算(bitwise operator):

~(取否), &(合取), |(析取), ^(异或), <<(左位移), >>(右位移)

# 程序设计中的位运算

## Example

C语言的位运算(bitwise operator):

~(取否), &(合取), |(析取), ^(异或), <<(左位移), >>(右位移)

# 程序设计中的位运算

## Example

C语言的位运算(bitwise operator):

~(取否), &(合取), |(析取), ^(异或), <<(左位移), >>(右位移)

# 程序设计中的位运算

## Example

C语言的位运算(bitwise operator):

~(取否), &(合取), |(析取), ^(异或), <<(左位移), >>(右位移)

# 程序设计中的位运算

## Example

C语言的位运算(bitwise operator):

~(取否), &(合取), |(析取), ^(异或), <<(左位移), >>(右位移)

## 计算正数二进制表示中1出现的次数

```
int cardinal(unsigned long x)
  int count = 0;
  while (x != (unsigned long) 0) {
    x = x & -x;
    count++;
  return count;
```

命题逻辑

## **Definition**

- 一个联结词的集合是全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再 是全功能的.



## **Definition**

- 一个联结词的集合是全功能的, iff, 所有的运算均能用该集 合中的联结词表示;
  - 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再 是全功能的.

## **Definition**

- 一个联结词的集合是全功能的, iff, 所有的运算均能用该集 合中的联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再 是全功能的.

## **Definition**

- 一个联结词的集合是全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再 是全功能的.

- {¬,∧,∨}是全功能的;
- {¬,∧}和{¬,∨}是极小全功能的;
- $\bullet$  {¬,→}是极小全功能的;
- {¬,↔}不是全功能的,因为: ↔ +¬永远只能有偶数个成假
  - 指派;
- {∧, ∨}不是全功能的,因为: ∧ + ∨的组合中面对每个原子都
  - 取直值的指派只能取直.

## **Definition**

- 一个联结词的集合是全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再 是全功能的.

- {¬,∧,∨}是全功能的;
- {¬,∧}和{¬,∨}是极小全功能的;
- {¬,→}是极小全功能的;
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$  不是全功能的,因为:  $\leftrightarrow + \neg$ 永远只能有偶数个成假
  - 指派;
- {Λ,V}不是全功能的,因为: Λ + V的组合中面对每个原子都
- 取真值的指派只能取真.

## **Definition**

- 一个联结词的集合是全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再 是全功能的.

- {¬,∧,∨}是全功能的;
- {¬,∧}和{¬,∨}是极小全功能的;
- {¬,→}是极小全功能的:
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$  不是全功能的,因为:  $\leftrightarrow$  +¬永远只能有偶数个成假指派;
- {Λ,V}不是全功能的,因为: Λ + V的组合中面对每个原子都
  - 取真值的指派只能取真.

## **Definition**

- 一个联结词的集合是全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再 是全功能的.

- {¬,∧,∨}是全功能的;
- {¬,∧}和{¬,∨}是极小全功能的;
- {¬,→}是极小全功能的;
- {¬,↔}不是全功能的,因为: ↔ +¬永远只能有偶数个成假 指派;
- {∧,∨}不是全功能的,因为: ∧ + ∨的组合中面对每个原子都 取真值的指派只能取真.

## Definition

- 一个联结词的集合是全功能的, iff, 所有的运算均能用该集 合中的联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再 是全功能的.

- {¬,∧,∨}是全功能的;
- {¬,∧}和{¬,∨}是极小全功能的;

公式之间的关系

- $\{\neg, \rightarrow\}$ 是极小全功能的;
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$  不是全功能的,因为:  $\leftrightarrow$  +¬永远只能有偶数个成假 指派;

命题逻辑

## **Definition**

- 一个联结词的集合是全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再 是全功能的.

- {¬,∧,∨}是全功能的;
- {¬,∧}和{¬,∨}是极小全功能的;
- {¬,→}是极小全功能的;
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$  不是全功能的,因为:  $\leftrightarrow$  +¬永远只能有偶数个成假指派;
- $\{\land,\lor\}$  不是全功能的,因为:  $\land$  +  $\lor$  的组合中面对每个原子都取真值的指派只能取真.

# Example ({ | } 是全功能的)

## Example ({ | } 是全功能的)

## Example ({ | } 是全功能的)

- $\bigcirc \neg P \Leftrightarrow P \downarrow P;$
- ③ 考虑P→Q:

## Example ({ \} 是全功能的)

- $\bullet P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg (P \lor Q);$
- $\bigcirc \neg P \Leftrightarrow P \downarrow P$
- 3 考虑P→Q:

$$P \rightarrow Q$$
 $\Rightarrow \neg P \lor Q$ 

$$\Leftrightarrow \neg \underline{\neg ((P \downarrow P) \lor Q)}$$

$$\Leftrightarrow \neg((P \downarrow P) \downarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)$$

## Example ({ \} 是全功能的)

$$\bullet P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg (P \lor Q);$$

$$\bigcirc \neg P \Leftrightarrow P \downarrow P;$$

$$P \rightarrow Q$$

$$\Leftrightarrow \neg P \lor Q$$

$$\Leftrightarrow \neg\neg((P \mid P))$$

$$\Leftrightarrow \neg \overline{((P \downarrow P) \downarrow Q)}$$

$$A ((P \mid P) \mid O) \mid$$

4□ > 4周 > 4 = > 4 = > ■ 900

## Example ({↓}是全功能的)

 $\bullet P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg (P \lor Q);$ 

$$\bigcirc \neg P \Leftrightarrow P \downarrow P$$

3 考虑P→Q:

$$P \to Q$$

$$\Leftrightarrow \neg P \lor Q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg ((P \downarrow P) \lor Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg \overline{((P \downarrow P) \downarrow Q)}$$

## Example ({↓}是全功能的)

- $\bullet P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg (P \lor Q);$
- $\bigcirc \neg P \Leftrightarrow P \downarrow P;$
- 3 考虑P→Q:

$$P \to Q$$

$$\Leftrightarrow \neg P \lor Q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg ((P \downarrow P) \lor Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg ((P \downarrow P) \downarrow Q)$$

4□ > 4周 > 4 = > 4 = > ■ 900

## Example ({↓}是全功能的)

- $\bigcirc \neg P \Leftrightarrow P \downarrow P;$
- 3 考虑P→Q:

$$P \to Q$$

$$\Leftrightarrow \neg P \lor Q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg ((P \downarrow P) \lor Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg ((P \downarrow P) \downarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)$$

- 1 命题逻辑
  - 命题
  - 符号化
  - 合式公式的形式文法
  - 合式公式的形式语义
- 2 公式之间的关系
  - 公式的语义性质
  - 逻辑等价
  - 永真蕴涵关系
  - 恒等变换与不等变换
  - 对偶性
- ③ 范式和基本定理
  - 极大项
  - 主合取范式
  - 主析取范式
  - 联结词的扩充与规约
- 4 推理和证明方法
  - 有效结论
  - 自然推理的形式证明
  - 证明方法

# 有效结论

## Definition

设 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ , C是公式, 称C是 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I, 如果,  $I(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) = 1$ , 则: I(C) = 1. 记为:  $H_1, H_2, ..., H_n \vdash C$ .

### Definition

设 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ , C是公式, 称C是 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I, 如果,  $I(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) = 1$ , 则: I(C) = 1. 记为:  $H_1, H_2, ..., H_n \vdash C$ .

#### Theorem

命题逻辑

### Definition

设 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ , C是公式, 称C是 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I, 如果,  $I(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) = 1$ , 则: I(C) = 1. 记为:  $H_1, H_2, ..., H_n \vdash C$ .

### Theorem

# 有效结论

命题逻辑

## Definition

设 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ , C是公式, 称C是 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I, 如果,  $I(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) = 1$ , 则: I(C) = 1. 记为:  $H_1, H_2, ..., H_n \vdash C$ .

### Theorem

- ②  $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \rightarrow C$ 是重言式;

命题逻辑

### Definition

设 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ , C是公式, 称C是 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I, 如果,  $I(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) = 1$ , 则: I(C) = 1. 记为:  $H_1, H_2, ..., H_n \vdash C$ .

#### Theorem

- $\bullet$   $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ :
- ②  $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \rightarrow C$ 是重言式;

命题逻辑

### Definition

设 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ , C是公式, 称C是 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I, 如果,  $I(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) = 1$ , 则: I(C) = 1. 记为:  $H_1, H_2, ..., H_n \vdash C$ .

#### Theorem

- $\bullet$   $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ :
- ②  $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- **4** ¬(( $H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n$ ) → C) 是矛盾式;

# 有效结论

命题逻辑

### Definition

设 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ , C是公式, 称C是 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I, 如果,  $I(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) = 1$ , 则: I(C) = 1. 记为:  $H_1, H_2, ..., H_n \vdash C$ .

### Theorem

- ②  $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- **4** ¬(( $H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n$ ) → C) 是矛盾式;
- ⑤ H<sub>1</sub> ∧ H<sub>2</sub> ∧ · · · ∧ H<sub>2</sub> ∧ ¬C是矛盾式:

命题逻辑

### Definition

设 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ , C是公式, 称C是 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I, 如果,  $I(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) = 1$ , 则: I(C) = 1. 记为:  $H_1, H_2, ..., H_n \vdash C$ .

#### Theorem

- ②  $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- **4** ¬(( $H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n$ ) → C) 是矛盾式;
- ⑤ H<sub>1</sub> ∧ H<sub>2</sub> ∧ · · · ∧ H<sub>2</sub> ∧ ¬C是矛盾式:
- **⑥**  $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n \land \neg C) \rightarrow \mathbb{F}$ 是永真;

命题逻辑

### Definition

设 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ , C是公式, 称C是 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I, 如果,  $I(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) = 1$ , 则: I(C) = 1. 记为:  $H_1, H_2, ..., H_n \vdash C$ .

### Theorem

- ②  $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- **4** ¬(( $H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n$ ) → C) 是矛盾式;
- ⑤ H<sub>1</sub> ∧ H<sub>2</sub> ∧ · · · ∧ H<sub>2</sub> ∧ ¬C是矛盾式:
- **⑥**  $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n \land \neg C) \rightarrow \mathbb{F}$ 是永真;
- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}.$

A, B, C和D参加球赛: 条件如下:

A参加,则B或C也参加  $H_1 = A \rightarrow B \lor C$ 

B参加、则A不参加  $H_2 = B \rightarrow \neg A$ 

D参加,则C不参加  $H_3 = D \rightarrow \neg C$ 

证明: "如果A参加,则D不参加"( $A \rightarrow \neg D$ )是上述条件的有效结论.

命题逻辑

A. B. C和D参加球赛:条件如下:

A参加、则B或C也参加  $H_1 = A \rightarrow B \lor C$ 

B参加、则A不参加  $H_2 = B \rightarrow \neg A$ 

D 参加、则 C 不 参加  $H_3 = D \rightarrow \neg C$ 

证明: "如果A参加,则D不参加"( $A \rightarrow \neg D$ )是上述条件的有效结论.

## 方法1.

 $(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$ Equivalent to:

命题逻辑

A. B. C和D参加球赛:条件如下:

A参加、则B或C也参加  $H_1 = A \rightarrow B \lor C$ 

B参加、则A不参加  $H_2 = B \rightarrow \neg A$ 

D 参加、则 C 不 参加  $H_3 = D \rightarrow \neg C$ 

证明: "如果A参加,则D不参加"( $A \rightarrow \neg D$ )是上述条件的有效结论.

## 方法1.

Equivalent to:  $(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$ 

 $(A \rightarrow B \lor C) \land (\underline{B} \rightarrow \neg A) \land (D \rightarrow \neg C)$ 

命题逻辑

A. B. C和D参加球赛:条件如下:

A参加、则B或C也参加  $H_1 = A \rightarrow B \lor C$ 

B参加、则A不参加  $H_2 = B \rightarrow \neg A$ D 参加、则 C 不 参加  $H_3 = D \rightarrow \neg C$ 

证明: "如果A参加,则D不参加"( $A \rightarrow \neg D$ )是上述条件的有效结论.

## 方法1.

Equivalent to:  $(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$ 

 $(A \rightarrow B \lor C) \land (B \rightarrow \neg A) \land (D \rightarrow \neg C)$ 

1  $\Leftrightarrow$   $(A \rightarrow B \lor C) \land (A \rightarrow \neg B) \land (D \rightarrow \neg C)$ 

命题逻辑

A. B. C和D参加球赛:条件如下:

A参加、则B或C也参加  $H_1 = A \rightarrow B \lor C$ 

B参加、则A不参加  $H_2 = B \rightarrow \neg A$ 

D 参加、则 C 不 参加  $H_3 = D \rightarrow \neg C$ 

证明: "如果A参加,则D不参加"( $A \rightarrow \neg D$ )是上述条件的有效结论.

## 方法1.

Equivalent to:  $(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$ 

 $(A \rightarrow B \lor C) \land (B \rightarrow \neg A) \land (D \rightarrow \neg C)$ 

 $1 \Leftrightarrow (A \to B \lor C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$ 

 $2 \Leftrightarrow \overline{(A \to (B \lor C) \land \neg B) \land (D \to \neg C)}$ 

A. B. C和D参加球赛:条件如下:

A参加、则B或C也参加  $H_1 = A \rightarrow B \lor C$ 

B参加、则A不参加  $H_2 = B \rightarrow \neg A$ 

D 参加、则 C 不 参加  $H_3 = D \rightarrow \neg C$ 

证明: "如果A参加,则D不参加"( $A \rightarrow \neg D$ )是上述条件的有效结论.

### 方法1.

Equivalent to:  $(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$ 

 $(A \rightarrow B \lor C) \land (B \rightarrow \neg A) \land (D \rightarrow \neg C)$ 

1  $\Leftrightarrow$   $(A \rightarrow B \lor C) \land (A \rightarrow \neg B) \land (D \rightarrow \neg C)$ 

 $2 \Leftrightarrow (A \to (B \lor C) \land \neg B) \land (D \to \neg C)$ 

 $3 \Leftrightarrow (A \to (\overline{C \wedge \neg B})) \land (D \to \neg C)$ 

命题逻辑

A. B. C和D参加球赛:条件如下:

A参加、则B或C也参加  $H_1 = A \rightarrow B \lor C$ 

B参加、则A不参加  $H_2 = B \rightarrow \neg A$ 

D 参加、则 C 不 参加  $H_3 = D \rightarrow \neg C$ 

证明: "如果A参加,则D不参加"( $A \rightarrow \neg D$ )是上述条件的有效结论.

### 方法1.

Equivalent to:  $(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$ 

 $(A \rightarrow B \lor C) \land (B \rightarrow \neg A) \land (D \rightarrow \neg C)$ 

1  $\Leftrightarrow$   $(A \rightarrow B \lor C) \land (A \rightarrow \neg B) \land (D \rightarrow \neg C)$ 

 $2 \Leftrightarrow (A \to (B \lor C) \land \neg B) \land (D \to \neg C)$ 

 $3 \Leftrightarrow (A \to (C \land \neg B)) \land (D \to \neg C)$ 

 $4 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$ 

命题逻辑

A. B. C和D参加球赛:条件如下:

A参加、则B或C也参加  $H_1 = A \rightarrow B \lor C$ 

B参加、则A不参加  $H_2 = B \rightarrow \neg A$ 

D 参加、则 C 不 参加  $H_3 = D \rightarrow \neg C$ 

证明: "如果A参加,则D不参加"( $A \rightarrow \neg D$ )是上述条件的有效结论.

### 方法1.

Equivalent to:  $(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$ 

 $(A \rightarrow B \lor C) \land (B \rightarrow \neg A) \land (D \rightarrow \neg C)$ 

1  $\Leftrightarrow$   $(A \rightarrow B \lor C) \land (A \rightarrow \neg B) \land (D \rightarrow \neg C)$ 

 $2 \Leftrightarrow (A \to (B \lor C) \land \neg B) \land (D \to \neg C)$ 

 $3 \Leftrightarrow (A \to (C \land \neg B)) \land (D \to \neg C)$ 

 $4 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$ 

 $5 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (C \to \neg D)$ 

A. B. C和D参加球赛:条件如下:

A参加、则B或C也参加  $H_1 = A \rightarrow B \lor C$ 

B参加、则A不参加  $H_2 = B \rightarrow \neg A$ 

D 参加、则 C 不 参加  $H_3 = D \rightarrow \neg C$ 

证明: "如果A参加,则D不参加"( $A \rightarrow \neg D$ )是上述条件的有效结论.

### 方法1.

Equivalent to:  $(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$ 

 $(A \rightarrow B \lor C) \land (B \rightarrow \neg A) \land (D \rightarrow \neg C)$ 

1  $\Leftrightarrow$   $(A \rightarrow B \lor C) \land (A \rightarrow \neg B) \land (D \rightarrow \neg C)$ 

 $2 \Leftrightarrow (A \to (B \lor C) \land \neg B) \land (\overline{D} \to \neg C)$ 

 $3 \Leftrightarrow (A \to (C \land \neg B)) \land (D \to \neg C)$ 

 $4 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$ 

 $5 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (C \to \neg D)$ 

 $6 \Rightarrow (A \rightarrow C) \land (C \rightarrow \neg D)$ 

A. B. C和D参加球赛:条件如下:

A参加、则B或C也参加  $H_1 = A \rightarrow B \lor C$ 

B参加、则A不参加  $H_2 = B \rightarrow \neg A$ D 参加、则 C 不 参加  $H_3 = D \rightarrow \neg C$ 

证明: "如果A参加,则D不参加"( $A \rightarrow \neg D$ )是上述条件的有效结论.

### 方法1.

Equivalent to:  $(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$ 

$$(A \to B \lor C) \land (\underline{B} \to \neg A) \land (D \to \neg C)$$

$$1 \Leftrightarrow (A \to B \lor C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$$

$$2 \Leftrightarrow (A \to (B \lor C) \land \neg B) \land (D \to \neg C)$$

$$2 \Leftrightarrow (A \to (B \lor C) \land \neg B) \land (D \to \neg C)$$

$$3 \Leftrightarrow (A \to \overline{(C \land \neg B)}) \land (D \to \neg C)$$

$$4 \Leftrightarrow \overline{(A \to C) \land (A \to \neg B)} \land (D \to \neg C)$$

$$5 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (C \to \neg D)$$

$$6 \Rightarrow \overline{(A \rightarrow C) \land (C \rightarrow \neg D)}$$

$$7 \Rightarrow A \rightarrow \neg D$$
 (注意: 不等变换不能用替换规则)

# 方法2.

真值表【略】



 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$ 



## 方法2.

真值表【略】

# 方法3.

 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$ 

- ① 设结论为假, 即:  $A \rightarrow \neg D$ 为假;
- ② :. A为真, D为真;
- ③ 设B为真:
- ④ 设B为假:

⑤ 由③④得: 前提为假

## 方法2.

真值表【略】

## 方法3.

 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$ 

- ① 设结论为假,即:  $A \rightarrow \neg D$ 为假;

### 方法2.

真值表【略】

## 方法3.

 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$ 

- ① 设结论为假,即:  $A \rightarrow \neg D$ 为假;
- ② : A为真, D为真;

### 方法2.

真值表【略】

### 方法3.

 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$ 

- ① 设结论为假, 即:  $A \rightarrow \neg D$ 为假;
- ② : A为真, D为真;
- ③ 设B为真:

•  $B \to \neg A$ 为假,所以前提为假

④ 设B为假

6 由(3)(4)得: 前提为假

### 方法2.

真值表【略】

## 方法3.

 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$ 

- ① 设结论为假, 即:  $A \rightarrow \neg D$ 为假;
- ② :. A为真, D为真;
- ③ 设B为真:
  - $B \rightarrow \neg A \lambda R$ , 所以前提为假;
- ④ 设B为假:

⑤ 由(3)(4)得: 前提为假.



### 方法2.

真值表【略】

### 方法3.

 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$ 

- ① 设结论为假,即:  $A \rightarrow \neg D$ 为假;
- ② : A为真, D为真;
- ③ 设B为真:
  - $B \to \neg A$ 为假,所以前提为假;
- △ 设B为假:



### 方法2.

真值表【略】

## 方法3.

 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$ 

- ① 设结论为假,即:  $A \rightarrow \neg D$ 为假;
- ② : A为真, D为真;
- ③ 设B为真:
  - $B \to \neg A$ 为假,所以前提为假;
- 個 设B为假:
  - 当C为真时: D→¬C为假;



### 方法2.

真值表【略】

### 方法3.

 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$ 

① 设结论为假,即:  $A \rightarrow \neg D$ 为假;

公式之间的关系

- ② : A为真, D为真;
- ③ 设B为真:
  - $B \to \neg A$ 为假,所以前提为假;
- 個 设B为假:
  - 当C为真时: D → ¬C为假;
  - 当C为假时:  $A \rightarrow B \lor C$ 为假;



### 方法2.

真值表【略】

### 方法3.

 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$ 

- ① 设结论为假, 即:  $A \rightarrow \neg D$ 为假;
- ② ∴ A为真, D为真;
- ◎ 设B为真:
  - $B \to \neg A$ 为假,所以前提为假;
- 设B为假:
  - 当C为真时: D → ¬C为假;
  - 当C为假时: A → B ∨ C为假;
- ⑤ 由③④得: 前提为假.





- ① 设前提为真, 即:  $A \rightarrow B \lor C$ ,  $B \rightarrow \neg A$  和 $D \rightarrow \neg C$  均为真;



- ① 设前提为真, 即:  $A \rightarrow B \lor C$ ,  $B \rightarrow \neg A$  和 $D \rightarrow \neg C$  均为真:
- ②  $\therefore A \rightarrow \neg B$ 为真;



- ① 设前提为真, 即:  $A \rightarrow B \lor C$ ,  $B \rightarrow \neg A$  和 $D \rightarrow \neg C$  均为真:
- ②  $\therefore A \rightarrow \neg B$ 为真;
- **3** :  $(A \rightarrow \neg B) \land (A \rightarrow B \lor C)$  为真;



- ① 设前提为真, 即:  $A \rightarrow B \lor C$ ,  $B \rightarrow \neg A$  和 $D \rightarrow \neg C$  均为真:
- ②  $\therefore A \rightarrow \neg B$ 为真;
- **3** :  $(A \rightarrow \neg B) \land (A \rightarrow B \lor C)$  为真;
- ④ ∴  $A \rightarrow (\neg B \land (B \lor C))$  为真;



- ① 设前提为真、即:  $A \rightarrow B \lor C$ ,  $B \rightarrow \neg A$  和 $D \rightarrow \neg C$  均为真;
- ②  $\therefore A \rightarrow \neg B$ 为真;
- **3** :  $(A \rightarrow \neg B) \land (A \rightarrow B \lor C)$  为真;
- ④ ∴  $A \rightarrow (\neg B \land (B \lor C))$  为真;
- **⑤** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land C)$  为真;



- ① 设前提为真、即:  $A \rightarrow B \lor C$ ,  $B \rightarrow \neg A$  和 $D \rightarrow \neg C$  均为真;
- ② :  $A \rightarrow \neg B$ 为真;
- **3** :  $(A \rightarrow \neg B) \land (A \rightarrow B \lor C)$  为真;
- ④ :  $A \rightarrow (\neg B \land (B \lor C))$  为真;
- **⑤** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land C)$  为真;
- **6** ∴  $A \rightarrow C$  为真;



- ① 设前提为真、即:  $A \rightarrow B \lor C$ ,  $B \rightarrow \neg A$  和 $D \rightarrow \neg C$  均为真;
- ② :  $A \rightarrow \neg B$ 为真;
- **3** :  $(A \rightarrow \neg B) \land (A \rightarrow B \lor C)$  为真;
- ④ ∴  $A \rightarrow (\neg B \land (B \lor C))$  为真;
- **⑤** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land C)$  为真;
- **6** ∴  $A \rightarrow C$  为真;
- 由①得: C → ¬D 为真;



- ① 设前提为真、即:  $A \rightarrow B \lor C$ ,  $B \rightarrow \neg A$  和 $D \rightarrow \neg C$  均为真;
- ② :  $A \rightarrow \neg B$ 为真;
- **3** :  $(A \rightarrow \neg B) \land (A \rightarrow B \lor C)$  为真;
- ④ ∴  $A \rightarrow (\neg B \land (B \lor C))$  为真;
- **⑤** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land C)$  为真;
- **6** ∴  $A \rightarrow C$  为真;
- ② 由①得:  $C \rightarrow \neg D$  为真;
- 3 由(6)(7)得: A → ¬D 为真.



- 恒等和不等变换;

- 恒等和不等变换;
- ② 真值表;

- 恒等和不等变换;
- ② 真值表;
- 3 设结论为假,证明条件亦假;

# 证明有效结论的方法

- 恒等和不等变换;
- ② 真值表;
- 3 设结论为假,证明条件亦假;
- 设条件为真,证明结论亦真;

# 证明有效结论的方法

- 恒等和不等变换;
- ② 真值表;
- 3 设结论为假,证明条件亦假;
- 设条件为真,证明结论亦真;
- 证明序列.

命题逻辑

$$A \rightarrow B \lor C$$
,  $B \rightarrow \neg A$ ,  $D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$ 

### 证明序列.

(P) 
$$\bigcirc$$
  $(A \rightarrow C) \land (A \rightarrow \neg B)$   $\bigcirc$   $\bigcirc$   $\bigcirc$   $\bigcirc$   $\bigcirc$ 

$$B \to \neg A$$

$$((2)+T)$$

$$(2)+T) \quad \textbf{3} \quad D \rightarrow \neg C$$

$$(4)+T$$

### **Notation**

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

# Definition

# Definition

- 存在H<sub>i</sub>, 使得: C<sub>i</sub> = H<sub>i</sub>; (引入条件)

# **Definition**

- 存在H<sub>i</sub>, 使得: C<sub>i</sub> = H<sub>i</sub>; (引入条件)
- ②  $C_i = \mathbb{T}$ ; (引入永真)

## **Definition**

- 存在H<sub>i</sub>, 使得: C<sub>i</sub> = H<sub>i</sub>; (引入条件)
- ②  $C_i = \mathbb{T}$ ; (引入永真)
- ③ 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$ , 其中:  $i_i \leq i$ , 并且:  $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_\ell} \Leftrightarrow C_{i_\ell}$  (恒等变换)

## **Definition**

- 存在H<sub>i</sub>, 使得: C<sub>i</sub> = H<sub>i</sub>; (引入条件)
- ②  $C_i = \mathbb{T}$ ; (引入永真)
- ⑤ 存在C<sub>i1</sub>, C<sub>i2</sub>,..., C<sub>ik</sub>, 其中: i<sub>i</sub> ≤ i, 并且:  $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_{i_r}$  (恒等变换)
- ④ 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$ , 其中:  $i_i \leq i$ , 并且:  $C_{i_1} \wedge C_{i_1} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_{i_i}$  (不等变换)

# Theorem (Soundness & Completeness)

设 $C_1, C_2, \ldots, C_m$ 是关于条件 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 是一证明序列,则对每个 $C_i$ 都有:  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$ 

即:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$ . 反之亦然.



## Theorem (Soundness & Completeness)

 $\mathcal{C}C_1, C_2, \ldots, C_m$ 是关于条件 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 是一证明序列,则对每个 $C_i$  都有:  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$ 

即:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$ . 反之亦然.

### Proof.

命题逻辑

- □ 由于C<sub>1</sub>满足足义中的条件,所以结论成立
- ② 设对任意的j < i, C;都是前提的有效结论; 则



## Theorem (Soundness & Completeness)

 $\mathcal{C}C_1, C_2, \ldots, C_m$ 是关于条件 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 是一证明序列,则对每个 $C_i$  都有:  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$ 

即:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$ . 反之亦然.

### Proof.

命题逻辑

- ① 由于C1满足定义中的条件, 所以结论成立;
- ② 设对任意的j < i, C;都是前提的有效结论; 则



## Theorem (Soundness & Completeness)

设 $C_1, C_2, \ldots, C_m$ 是关于条件 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 是一证明序列,则对每个 $C_i$  都有:  $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \Rightarrow C_i$  即:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$ . 反之亦然.

### Proof.

命题逻辑

- ① 由于C1满足定义中的条件, 所以结论成立;
- ② 设对任意的j < i, Cj都是前提的有效结论; 则:

  - ② if  $C_i = \mathbb{T}$ :  $( \vec{A} ) \land \vec{A} \land \vec{A}$   $( H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n ) \Rightarrow \mathbb{T}$
  - If C<sub>i</sub>, ∧ C<sub>i</sub>, ∧ · · · ∧ C<sub>i</sub>, ⇒ C<sub>i</sub>, 而由归纳假设:
    - $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_{i_j}$ 
      - $\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow (C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k}) \Rightarrow C_i$
  - 同理可证明,当 $C_i \wedge C_i \wedge \cdots \wedge C_k \Leftrightarrow C_i$ 时结论成立;

# Theorem (Soundness & Completeness)

设 $C_1, C_2, \ldots, C_m$ 是关于条件 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 是一证明序列,则对每个 $C_i$ 都有:  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$ 

### Proof.

命题逻辑

对证明序列的下标用归纳法(正确性):

 $p: H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$ . 反之亦然.

- ① 由于Ci满足定义中的条件、所以结论成立;
- ② 设对任意的j < i,  $C_i$ 都是前提的有效结论; 则:
  - ① if  $C_i = H_k$ : (引入条件)  $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \Rightarrow H_k$

# Theorem (Soundness & Completeness)

设 $C_1, C_2, \ldots, C_m$ 是关于条件 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 是一证明序列,则对每个 $C_i$ 都有:  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$ 

### Proof.

命题逻辑

对证明序列的下标用归纳法(正确性):

即: H<sub>1</sub>, H<sub>2</sub>,..., H<sub>n</sub> ⊢ C<sub>i</sub>. 反之亦然.

- ① 由于Ci满足定义中的条件、所以结论成立;
- ② 设对任意的i < i,  $C_i$ 都是前提的有效结论;则:
  - ① if  $C_i = H_k$ : (引入条件)  $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \Rightarrow H_k$
  - ② if  $C_i = \mathbb{T}$ : (引入永真)  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow \mathbb{T}$

# Theorem (Soundness & Completeness)

 $\mathcal{C}C_1, C_2, \ldots, C_m$ 是关于条件 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 是一证明序列,则对每个 $C_i$ 都有:  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$ 

### Proof.

对证明序列的下标用归纳法(正确性):

即:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$ . 反之亦然.

- ① 由于Ci满足定义中的条件、所以结论成立;
- ② 设对任意的i < i,  $C_i$ 都是前提的有效结论;则:
  - ① if  $C_i = H_k$ : (引入条件)  $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \Rightarrow H_k$
  - ② if  $C_i = \mathbb{T}$ : (引入永真)  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow \mathbb{T}$
  - 3 if  $C_i \wedge C_i \wedge \cdots \wedge C_i \Rightarrow C_i$ , 而由归纳假设:  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_{i_1}$  $\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow (C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k}) \Rightarrow C_{i_k}$

# Theorem (Soundness & Completeness)

 $\mathcal{C}C_1, C_2, \ldots, C_m$ 是关于条件 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 是一证明序列,则对每个 $C_i$ 都有:  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$ 即:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$ . 反之亦然.

### Proof.

- ① 由于Ci满足定义中的条件、所以结论成立;
- ② 设对任意的i < i,  $C_i$ 都是前提的有效结论;则:
  - ① if  $C_i = H_k$ : (引入条件)  $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \Rightarrow H_k$
  - ② if  $C_i = \mathbb{T}$ : (引入永真)  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow \mathbb{T}$
  - 3 if  $C_i \wedge C_i \wedge \cdots \wedge C_i \Rightarrow C_i$ , 而由归纳假设:  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_{i_1}$  $\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow (C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k}) \Rightarrow C_{i_k}$
  - ④ 同理可证明, 当 $C_{i_1} \land C_{i_2} \land \cdots \land C_{i_k} \Leftrightarrow C_{i_k}$ 时结论成立;

## Theorem (Soundness & Completeness)

 $\mathcal{C}C_1, C_2, \ldots, C_m$ 是关于条件 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 是一证明序列,则对每个 $C_i$ 都有:  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$ 即:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$ . 反之亦然.

### Proof.

- ① 由于Ci满足定义中的条件、所以结论成立;
- ② 设对任意的i < i,  $C_i$ 都是前提的有效结论;则:
  - ① if  $C_i = H_k$ : (引入条件)  $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \Rightarrow H_k$
  - ② if  $C_i = \mathbb{T}$ : (引入永真)  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow \mathbb{T}$
  - 3 if  $C_i \wedge C_i \wedge \cdots \wedge C_i \Rightarrow C_i$ , 而由归纳假设:  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_{i_1}$  $\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow (C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k}) \Rightarrow C_{i_k}$
  - ④ 同理可证明, 当 $C_{i_1} \land C_{i_2} \land \cdots \land C_{i_k} \Leftrightarrow C_{i_k}$ 时结论成立;
  - 故结论成立.

# **Definition**

常用的永真蕴涵关系的竖式表示称为推理规则(Inference Rule)

# Example (三段论)

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

其对应的推理规则表示为:

$$\frac{P}{Q}$$
  $(P \rightarrow Q)$  (三段论)

### Remark

在推理过程中的不等变换仅能使用代入规则!

### 推理规则.

名称	推理规则	对应的永真蕴涵关系
加法式	$\frac{P}{P \lor Q}$	$P \Rightarrow P \lor Q$
简化式	$\frac{P \wedge Q}{P}$	$P \wedge Q \Rightarrow P$
三段论,分离规则 Modus Ponens(MP)	$\frac{P  P \to Q}{Q}$	$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$
拒取式 Modus Tollens(MT)	$\frac{\neg Q  P \to Q}{\neg P}$	$\neg Q \land (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$
前提三段论 Hypothetical syllo- gism	$\frac{P \to Q  Q \to R}{P \to R}$	$(P \to Q) \land (Q \to R) \Rightarrow P \to R$
复合式 Composition	$\frac{P \to Q  P \to R}{P \to Q \land R}$	$(P \to Q) \land (P \to R) \Rightarrow P \to Q \land R$

## 推理规则.

名称	推理规则	对应的永真蕴涵关系
析取三段论 Disjunctive syllogism	$\frac{P \vee Q  \neg Q}{P}$	$(P \lor Q) \land \neg Q \Rightarrow P$
合取式	$\frac{P}{P \wedge Q}$	$P \wedge Q \Rightarrow P \wedge Q$
构造性二难推理 Constructive dilemma	$P \rightarrow Q$ $R \rightarrow S$ $P \lor R$ $Q \lor S$	$(P \to Q) \land (R \to S) \land (P \lor R) \Rightarrow Q \lor S$
破坏性二难推理 Destructive dilemma	$P \to Q$ $R \to S$ $\neg Q \lor \neg S$ $\neg P \lor \neg R$	$(P \to Q) \land (R \to S) \land (\neg Q \lor \neg S) \Rightarrow \neg P \lor \neg R$

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

$$A \rightarrow B \lor C$$
,  $B \rightarrow \neg A$ ,  $D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$ 

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

# 方法1.

(P)

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

## 方法1.

(P)

(P)

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

## 方法1.

(P)

(P)

 $A \rightarrow \neg B$ 

(2)+T)

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

### 方法1.

(P)

(P)

 $A \rightarrow \neg B$ 

- (2)+T)
- **4**  $A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$  (①3)+复合式)

$$A \rightarrow B \lor C$$
,  $B \rightarrow \neg A$ ,  $D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$ 

### 方法1.

(P)

(P)

 $A \rightarrow \neg B$ 

(2)+T)

**4**  $A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$  (①③+复合式)

(4)+T

命题逻辑

$$A \rightarrow B \lor C$$
,  $B \rightarrow \neg A$ ,  $D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$ 

(P) 
$$\bigcirc A \rightarrow C$$

$$A \rightarrow \neg B$$

$$(2+T) \bigcirc D \rightarrow \neg C$$

$$C \rightarrow \neg D$$
 (8+T)

命题逻辑

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

(P) 
$$(A \rightarrow C) \land (A \rightarrow \neg B)$$
 (5)+T)

$$B \to \neg A$$

$$(2+T) \bigcirc D \rightarrow \neg C$$

$$(4)+1)$$

$$\bigcirc$$
 A → ¬D (⑦⑨+前提三段

命题逻辑

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

(P) **6** 
$$(A \rightarrow C) \land (A \rightarrow \neg B)$$
 (5)+T)

$$A \rightarrow \neg B$$

$$(2)+T) \quad \bigcirc \quad D \rightarrow \neg C$$

**③** 
$$A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$$
 (①③+复合式) ◎  $C \rightarrow \neg D$  (⑧+T)

$$(8+T)$$

$$(4+T)$$

命题逻辑

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

(P) 
$$\bullet$$
  $(A \rightarrow C) \land (A \rightarrow \neg B)$   $(5)+T$ 

$$B \to \neg A$$

$$A \rightarrow \neg B$$

$$(2+T)$$
 8  $D \rightarrow \neg C$ 

$$(8)+T$$

$$(4+T)$$

命题逻辑

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

(P) 
$$\bullet$$
  $(A \rightarrow C) \land (A \rightarrow \neg B)$   $\bullet$ 

$$A \rightarrow \neg B$$

$$((2)+T)$$

$$(2)+T) \quad \textbf{3} \quad D \rightarrow \neg C$$

$$O \to \neg L$$

$$(8+T)$$

$$(4+T)$$

命题逻辑

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

(P) 
$$\bullet$$
  $(A \rightarrow C) \land (A \rightarrow \neg B)$   $(5)+T$ 

$$B \to \neg A$$

$$A \rightarrow \neg B$$

$$((2)+T)$$

$$(2)+T) \quad \textbf{3} \quad D \rightarrow \neg C$$

$$()$$
  $\bigcirc$   $($ 

$$(8+T)$$

$$(4+T)$$

命题逻辑

$$A \rightarrow B \lor C$$
,  $B \rightarrow \neg A$ ,  $D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$ 

### 方法1.

(P) 
$$\bigcirc$$
  $(A \rightarrow C) \land (A \rightarrow \neg B)$   $\bigcirc$   $\bigcirc$   $\bigcirc$   $\bigcirc$   $\bigcirc$ 

$$B \to \neg A$$

$$((2)+T)$$

$$(2)+T) \quad \textbf{3} \quad D \rightarrow \neg C$$

(④+T) <sup>1</sup> A → ¬D (⑦⑨+前提三段论)

## Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

# 证明方法

# Remark

$$\mathbf{H} \to (P \to Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg H \lor \neg P \lor Q$$

$$\Rightarrow \neg (\sqcap \land P) \lor Q$$

$$\triangle$$
 ( $\square$   $\wedge$   $D$ )  $\wedge$   $Q$ 

So, if 
$$\mathbf{H} \to (P \to Q)$$
 永真, iff.  $(\mathbf{H} \land P) \to Q$ 永真

# 证明方法

## Remark

- 直接对结论些证明序列;

$$H \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\Pi \land \Gamma) \lor Q$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{H} \land P) \rightarrow 0$$

So, if 
$$H \to (P \to Q)$$
  $\hat{x}$ , iff,  $(H \land P) \to Q\hat{x}$ 

## Remark

- 直接对结论些证明序列;
- ② 间接证明:条件和结论的等价变换,如,CP规则(Conditional Proof),反 证法等.

### Theorem

 $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash P \rightarrow Q \text{ iff } H_1, H_2, \ldots, H_n, P \vdash Q$ 

### Proof.

设.  $\mathbf{H} = H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ . 则:

$$\mathbf{H} \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg H \lor \neg P \lor Q$$

$$\Leftrightarrow \neg (\mathbf{H} \wedge P) \vee Q$$

$$\Rightarrow \neg (\mathbf{H} \land P) \lor G$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{H} \land P) \rightarrow Q$$

So, if 
$$H \to (P \to Q)$$
  $\hat{x}$ , iff,  $(H \land P) \to Q\hat{x}$ ,  $\hat{x}$ .

### Remark

- 直接对结论些证明序列;
- 间接证明:条件和结论的等价变换,如,CP规则(Conditional Proof),反 证法等.

# Theorem

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash P \rightarrow Q \text{ iff } H_1, H_2, \ldots, H_n, P \vdash Q$$

$$H \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg H \lor \neg P \lor Q$$

$$\Leftrightarrow \neg (\mathbf{H} \wedge P) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow \neg (\mathbf{H} \wedge P) \vee G$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{H} \wedge P) \to Q$$

### Remark

- ① 直接对结论些证明序列;
- ② 间接证明:条件和结论的等价变换,如,CP规则(Conditional Proof),反证法等.

### **Theorem**

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash P \rightarrow Q \text{ iff } H_1, H_2, \ldots, H_n, P \vdash Q$$

# Proof.

设, 
$$\mathbf{H} = H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$$
, 则:

$$\mathbf{H} \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg \mathbf{H} \vee \neg P \vee Q$$

$$\Leftrightarrow \neg (\mathbf{H} \wedge P) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow \neg (\mathbf{H} \wedge P) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow$$
  $(\mathbf{H} \land P) \rightarrow Q$ 

So, if 
$$\mathbf{H} \to (P \to Q)$$
  $\hat{\mathbf{x}}$ , iff,  $(\mathbf{H} \land P) \to Q\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{q}}$ .

 $A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$ 



$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

## 方法2.

用CP规则等价于:  $H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$ 





$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

## 方法2.

用CP规则等价于:  $H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$ 



$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

用CP规则等价于:  $H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$ 

 $A \rightarrow B \lor C$ ,  $B \rightarrow \neg A$ ,  $D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$ 

# 方法2.

用CP规则等价于:  $H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$ 

**1** A

(附加前提)

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

用CP规则等价于:  $H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$ 

- **1** A

(附加前提)

(P)

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

用CP规则等价于:  $H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$ 

- **1** A (附加前提)
  - (P)
  - $\bullet$   $B \lor C$ ((1)(2)+MP)



 $A \rightarrow B \lor C$ ,  $B \rightarrow \neg A$ ,  $D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$ 

## 方法2.

用CP规则等价于:  $H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$ 

**1** A (附加前提)

(P)

 $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$ ((1)(2)+MP)

(P)

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

用CP规则等价于:  $H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$ 

**1** A (附加前提)

(P)

 $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$ ((1)(2)+MP)

(P)

 $A \rightarrow \neg B$ (4)+T

(P) (1)(5)+析取三段论)

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

## 方法2.

用CP规则等价于:  $H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$ 

- $\mathbf{Q}$   $\mathbf{A}$ 
  - (附加前提) **⑤** ¬B

- $\bigcirc A \rightarrow B \lor C$  $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$
- (1)(2)+MP)

(P)  $\bigcirc C \rightarrow \neg D$ 

 $A \rightarrow \neg B$ 

(4)+T

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

用CP规则等价于:  $H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$ 

 $\mathbf{Q}$   $\mathbf{A}$ 

- (附加前提) **⑥** ¬B
  - (P) (1)(5)+析取三段论)
- (1)(5)+MP

 $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$ 

- $(1)(2)+MP) \qquad 0 \qquad D \rightarrow \neg C$

- (P)

(4)+T

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

用CP规则等价于:  $H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$ 

- $\mathbf{Q}$   $\mathbf{A}$  $A \rightarrow B \lor C$
- (附加前提)
- **⑥** ¬*B* (P) **(C)**

(1)(5)+MP)

 $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$ 

- $(1)(2)+MP) \qquad 0 \qquad D \rightarrow \neg C$
- (①⑤+析取三段论)

- (P)  $\bigcirc C \rightarrow \neg D$

- (4)+T



$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

用CP规则等价于:  $H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$ 

 $\mathbf{Q}$   $\mathbf{A}$ 

 $A \rightarrow B \lor C$ 

- - (P) **(**C
  - (附加前提) **⑥** ¬B
- (1)(5)+MP(①⑤+析取三段论)

- $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$ 
  - $(\textcircled{1}\textcircled{2} + \mathsf{MP}) \qquad \textcircled{3} \quad D \to \neg C$

(P)

- (P)  $\bigcirc C \rightarrow \neg D$

- (4)+T)  $\Box \neg D$

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

用CP规则等价于:  $H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$ 

- $\mathbf{Q}$   $\mathbf{A}$ 
  - (附加前提) **⑥** ¬B
    - (P) **(**C
- (①⑤+析取三段论)

- $A \rightarrow B \lor C$  $\bullet$   $B \lor C$
- ((1)(2)+MP) **3**  $D \rightarrow \neg C$

(P)

- (P)  $\bigcirc$   $C \rightarrow \neg D$

(8)+T

- (4)+T)  $\bigcirc \neg D$

(1)(5)+MP)

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

用CP规则等价于:  $H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$ 

- $\mathbf{Q}$   $\mathbf{A}$ 
  - (附加前提) **⑥** ¬B
    - (P) **(**C
- (1)(5)+MP)(①⑤+析取三段论)

- $A \rightarrow B \lor C$  $\bullet$   $B \lor C$
- - $(\textcircled{1}\textcircled{2} + \mathsf{MP}) \qquad \textcircled{3} \quad D \to \neg C$

(P)

- (P)  $\bigcirc$   $C \rightarrow \neg D$

(8)+T

- (4)+T)  $\bigcirc \neg D$

(7)9+MP

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$  称这样的条件和结论的变换为反证法.

Example

 $A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$ 

方法3

# 反证法

## Remark

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 称这样的条件和结论的变换为反证法.

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 称这样的条件和结论的变换为反证法.

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

# 方法3.



# 反证法

### Remark

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 称这样的条件和结论的变换为反证法.

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

# 方法3.



由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$  称这样的条件和结论的变换为反证法.

### Evample

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

# 方法3.

用反正法等价于:  $H_1, H_2, H_3, \neg (A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$ 

- - (附加前提)

 $\bigcirc$   $A \wedge l$ 

 $(\mathbb{1}+T)$ 

1

(①+简化式)

**4** D

- (①+简化式)
- **6** D → −C
- (P)

**a** -c

(45)+MP)

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 称这样的条件和结论的变换为反证法.

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

# 方法3.

- (附加前提)

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$  称这样的条件和结论的变换为反证法.

### Example

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

## 方法3.

用反正法等价于:  $H_1, H_2, H_3, \neg (A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$ 

- - (附加前提)

 $\mathbf{Q} A \wedge D$ 

 $(\mathbb{T}+T)$ 

O 1

(①+简化式

**a** D

①+简化式)

(P)

**6** -C

(4)(5) + MP

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 称这样的条件和结论的变换为反证法.

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

## 方法3.

- (附加前提)
- $\triangle$   $A \wedge D$ (T)+T
- **3** A (①+简化式)

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$  称这样的条件和结论的变换为反证法.

### Example

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

## 方法3.

- **3** A (①+简化式)
- **4** D (①+简化式)
  - $D \rightarrow \neg C$  (P
- **⑥** ¬*C* (**④⑤**+MP)

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 称这样的条件和结论的变换为反证法.

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

### 方法3.

- (附加前提)
- $\triangle$   $A \wedge D$ (T)+T
- **3** A (①+简化式)
- **a** D (①+简化式)
- (P)

# 反证法

命题逻辑

### Remark

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 称这样的条件和结论的变换为反证法.

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

## 方法3.

- (附加前提)
- $\triangle$   $A \wedge D$ (T)+T
- **3** A (①+简化式)
- **a** D (①+简化式)
- (P)
- **6** ¬*C* (45+MP)

### Remark

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 称这样的条件和结论的变换为反证法.

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

### 方法3.

- (附加前提)  $\bigcirc A \rightarrow B \lor C$
- $\triangle$   $A \wedge D$  $(\textcircled{1}+\textbf{T}) \qquad \textcircled{3} \quad B \lor C \qquad (\textcircled{3}(\textcircled{7}+\textbf{MP})$
- **3** A (①+简化式)
- **4** D (①+简化式)
- (P)
- **6** ¬*C* (4)(5)+MP

# Remark

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 称这样的条件和结论的变换为反证法.

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

### 方法3.

用反正法等价于:  $H_1, H_2, H_3, \neg (A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$ 

- (附加前提)  $\mathbf{0} A \rightarrow B \lor C$

(P)

 $\triangle$   $A \wedge D$ 

- $(\textcircled{1}+\textbf{T}) \qquad \textcircled{3} \quad B \lor C \qquad (\textcircled{3}(\textcircled{7}+\textbf{MP})$

**3** A

- (①+简化式) ② B (⑥8+析取三段论)

**4** D

- (①+简化式)

- (P)

**6** ¬*C* 

(4)(5)+MP

### Remark

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 称这样的条件和结论的变换为反证法.

$$A \rightarrow B \lor C$$
,  $B \rightarrow \neg A$ ,  $D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$ 

### 方法3.

用反正法等价于:  $H_1, H_2, H_3, \neg (A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$ 

- - (附加前提)  $\mathbf{0} A \rightarrow B \lor C$

(P)

 $\triangle$   $A \wedge D$ 

- (1)+T

((3)(7)+MP)

**3** A

- (①+简化式) ② B (⑥8+析取三段论)

**4** D

- (①+简化式) <sup>□</sup> B → ¬A

- (P)

### Remark

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 称这样的条件和结论的变换为反证法.

$$A \rightarrow B \lor C$$
,  $B \rightarrow \neg A$ ,  $D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$ 

### 方法3.

用反正法等价于:  $H_1, H_2, H_3, \neg (A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$ 

- (附加前提)  $\mathbf{0} A \rightarrow B \lor C$

 $\triangle$   $A \wedge D$ 

- (1)+T
- (①+简化式) **᠑** B
- (⑥8)+析取三段论)

**3** A

**4** D

- (①+简化式) <sup>®</sup> B → ¬A

(3) (+MP)

(P)

- (P)

**6** ¬*C* 

- (4)(5)+MP

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 称这样的条件和结论的变换为反证法.

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

### 方法3.

用反正法等价于:  $H_1, H_2, H_3, \neg (A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$ 

- - (附加前提)  $\mathbf{0} A \rightarrow B \lor C$
- $\triangle$   $A \wedge D$ 
  - (1)+T
- (3) (+MP)

- **3** A

- (①+简化式) **9** B (⑥⑧+析取三段论)

**4 D** 

- (①+简化式) **⑩** B → ¬A

(P)

(P)

- (P)

**6** ¬*C* 

- (4)(5)+MP

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 称这样的条件和结论的变换为反证法.

$$A \rightarrow B \lor C$$
,  $B \rightarrow \neg A$ ,  $D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$ 

### 方法3.

用反正法等价于:  $H_1, H_2, H_3, \neg (A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$ 

- (附加前提)  $\mathbf{0} A \rightarrow B \lor C$

(P) ((3)(7)+MP)

 $\triangle$   $A \wedge D$ **3** A

- (1)+T
- (①+简化式) **᠑** B
- (⑥8)+析取三段论)

**4 D** 

- (①+简化式) **⑩** B → ¬A

(P)

- (P) **1** ¬A

(9)(0+MP)

**6** ¬*C* 

- (4)(5)+MP

# 反证法

### Remark

由有效结论的等价定理有:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$  iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 称这样的条件和结论的变换为反证法.

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

### 方法3.

用反正法等价于:  $H_1, H_2, H_3, \neg (A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$ 

- (附加前提)  $\mathbf{0} A \rightarrow B \lor C$

(P) ((3)(7)+MP)

 $\triangle$   $A \wedge D$ **3** A

- (1)+T

(⑥8)+析取三段论)

**4 D** 

- (①+简化式) **⑩** B → ¬A
- (P)

- - (P) **1** ¬A

(910+MP)

**6** ¬*C* 

- (4)(5)+MP

(③①+合取式)

- 命题逻辑
  - 命题
  - 符号化
  - 合式公式的形式文法
  - 合式公式的形式语义
- 2 公式之间的关系
  - 公式的语义性质
  - 逻辑等价
  - 永真蕴涵关系
  - 恒等变换与不等变换
  - 对偶性
- 3 范式和基本定理
  - 极大项
  - 主合取范式
  - 主析取范式
  - 联结词的扩充与规约
- 4 推理和证明方法
  - 有效结论
  - 自然推理的形式证明
  - 证明方法

