

武汉大学计算机学院

2011-2012 学年度第一学期期末考试

《离散数学》试卷 (A 卷) 参考答案

1. (15 分) 用推理规则证明下列各式:

(a) $\neg A \vee B, (C \rightarrow \neg D) \rightarrow \neg B \Rightarrow A \rightarrow C$ (7 分)

(b) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$ (8 分)

证 (a)

- 1 A
- 2 $\neg A \vee B$
- 3 B
- 4 $(C \rightarrow \neg D) \rightarrow \neg B$
- 5 $\neg(C \rightarrow \neg D)$
- 6 $\neg(\neg C \vee \neg D)$
- 7 $C \wedge D$
- 8 C
- 9 $A \rightarrow C$

(b)

- 1 $\neg \forall x P(x)$
- 2 $\exists x \neg P(x)$
- 3 $\neg P(c)$
- 4 $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
- 5 $P(c) \vee Q(c)$
- 6 $Q(c)$
- 7 $\exists x Q(x)$
- 8 $\neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

2. (15 分) 设 A, B, C 是集合, 证明:

(a) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$ (7 分)

(b) 若 $A \cap C \subseteq B \cap C, A \cap \bar{C} \subseteq B \cap \bar{C}$, 则 $A \subseteq B$ (8 分)

证 (a)

$$\begin{aligned}(A - C) - (B - C) &= (A \cap \bar{C}) \cap \overline{B - C} = (A \cap \bar{C}) \cap \overline{B \cap \bar{C}} = (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C) \\ &= (A \cap \bar{C}) \cap \bar{B} \cup (A \cap \bar{C}) \cap C = A \cap \bar{C} \cap \bar{B} = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = (A - B) - C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} A &= A \cap (C \cup \bar{C}) = (A \cap C) \cup (A \cap \bar{C}) \subseteq (B \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \\ &= B \cap (C \cup \bar{C}) = B \end{aligned}$$

3. (15 分)

(a) 设 R_1, R_2 是集合 A 上的二元关系, 对任 $a, b \in A$, aR_2b 当且仅当存在 $c \in A$ 使得

aR_1c, cR_1b 。证明: 若 R_1 是 A 上的等价关系, 则 R_2 也是 A 上的等价关系。(7 分)

(b) 设 (A, \leq) 是一个偏序集, \leq_R 是 A 上的一个二元关系, 对 $\forall a, b \in A$, $a \leq_R b$ 当且仅

当 $b \leq a$ 。证明 \leq_R 是一个偏序关系。(8 分)

证 (a) 自反性: 对任 $a \in A$, 由 aR_1a 知, aR_2a , 故 R_2 是自反的。

对称性: 若 aR_2b , 则存在 $c \in A$ 使得 aR_1c, cR_1b 。由 R_1 之对称性知 bR_1c, cR_1a 。

因此有 bR_2a

传递性: 若 aR_2b, bR_2c , 则存在 $e, f \in A$ 使得 aR_1e, eR_1b 以及 bR_1f, fR_1c 。由 R_1

之传递性知 aR_1b, bR_1c , 故有 aR_2c 。

(b) 自反性: 对任 $a \in A$, 由 $a \leq a$ 知, $a \leq_R a$, 故 \leq_R 是自反的。

反对称性: 若 $a \leq_R b, b \leq_R a$, 则 $b \leq a, a \leq b$, 由 \leq 是反对称的知 $a = b$ 。

传递性: 若 $a \leq_R b, b \leq_R c$, 则 $b \leq a, c \leq b$, 由 \leq 是传递的知 $c \leq a$, 所以 $a \leq_R c$

4(10 分) 设 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X, g \circ f = 1_X$ 。用定义证明: f 是单射和 g 是满射。

证 f 是单射:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = 1_X(x_1) = g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) = 1_X(x_2) = x_2 \end{aligned}$$

故 f 是单射。

g 是满射: 对任 $x \in X$, 由 $x = 1_X(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$ 知, 存在 $y = f(x)$ 使

得 $g(y) = x$, 故 g 是满射

5(18 分)

(a) 设 $\langle G, * \rangle$ 是一个群, H_1, H_2 是 G 的两个互不包含的子群, 证明: G 中存在一个元素, 它既不属于 H_1 也不属于 H_2 。(8 分)

(b) 设 f 和 g 是群 $\langle G_1, * \rangle$ 到群 $\langle G_2, \bullet \rangle$ 的两个同态. 证明: $\langle H, * \rangle$ 是 $\langle G_1, * \rangle$ 的子群, 其中 $H = \{x \in G_1 \mid f(x) = g(x)\}$ (10 分)

证 (a) 因为 H_1, H_2 不相互包含, 故 G 中存在元素 h_1, h_2 使得 $h_1 \in H_1$, 但 $h_1 \notin H_2$ 。

$h_2 \in H_2$, 但 $h_2 \notin H_1$ 。

下面证明 $h_1 * h_2 \notin H_1$ 并且 $h_1 * h_2 \notin H_2$ 。

若 $h_1 * h_2 \in H_1$, 则有 $h \in H_1$ 使得 $h_1 * h_2 = h \Rightarrow h_2 = h_1^{-1} * h \in H_1$, 不可。

若 $h_1 * h_2 \in H_2$, 则有 $h \in H_2$ 使得 $h_1 * h_2 = h \Rightarrow h_1 = h * h_2^{-1} \in H_2$, 不可。

(b) 由 $f(e) = g(e)$ 知 $e \in H$ 。

设 a 和 b 是 H 中任意两个元素, 则有 $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ 。

由 $f(b^{-1}) = f(b)^{-1}, g(b^{-1}) = g(b)^{-1}$ 知, $f(b^{-1}) = g(b^{-1})$

于是有

$$f(a * b^{-1}) = f(a) \bullet f(b^{-1}) = g(a) \bullet g(b^{-1}) = g(a * b^{-1}) \Rightarrow a * b^{-1} \in H$$

所以 $\langle H, * \rangle$ 是 $\langle G_1, * \rangle$ 的子群。

6. (15 分, 每小题 5 分)

(a) 若图 $G = \langle V, E \rangle$ 不是哈密尔顿图, $n = |V| \geq 3$ 。证明: G 中至少有一个顶点的度数小于 $n/2$ 。

(b) 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是简单平面图, $|V| \geq 4$ 且 $\forall v \in V, \deg(v) \geq 2$ 。证明: G 中至少有 3 个顶点的度数不超过 5。

(c) 证明: 若树 $T = \langle V, E \rangle$ 中有一个顶点的度数为 d , 则 T 中至少有 d 片树叶。

证 (a) 用反证法。若 G 中每个顶点的度数大于或等于 $n/2$, 则 G 中任何两个不相邻的顶点的度数之和大于或等于 n , 因而 G 是哈密尔顿图, 与假设矛盾。

(b) 用反证法。

若 G 中最多有 2 个顶点的度数不超过 5, 则边数

$$m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \deg(v_i) > \frac{1}{2} (6(n-2) + 1 + 1) = 3n - 5, \text{ 不可。}$$

(c) 将度为 d 的顶点从 T 中删除, 得到 T 之 d 个连通分支, 而每一个连通分支是一棵树, 因而至少有一片树叶。所以 T 中至少有 d 片树叶。

7(12 分). 设 S 为非空集合 A 的所有划分所构成的集合, $R \subseteq S \times S$, 且对任 $\pi_1, \pi_2 \in S$,

$\pi_1 R \pi_2$ 当且仅当 $B_1 \in \pi_1 \Rightarrow \exists B_2 \in \pi_2, B_1 \subseteq B_2$ 。证明: R 是 S 上的偏序关系。

证 自反性: 对任 $\pi \in S$, $\forall B \in \pi \Rightarrow \exists B \in \pi, B \subseteq B \Rightarrow \pi R \pi$

反对称性: 若 $\pi_1 R \pi_2, \pi_2 R \pi_1$, 则

$$B_1 \in \pi_1 \Rightarrow \exists B_2 \in \pi_2, B_1 \subseteq B_2$$

$$B_2 \in \pi_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \pi_1, B_2 \subseteq B_3$$

$$\Rightarrow B_1 \subseteq B_3 \Rightarrow B_1 = B_3 \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \pi_1 \subseteq \pi_2$$

$$\text{同理可证 } \pi_2 \subseteq \pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \pi_2$$

传递性: 若 $\pi_1 R \pi_2, \pi_2 R \pi_3$, 则

$$B_1 \in \pi_1 \Rightarrow \exists B_2 \in \pi_2, B_1 \subseteq B_2$$

$$B_2 \in \pi_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \pi_3, B_2 \subseteq B_3$$

$$\therefore B_1 \in \pi_1 \Rightarrow \exists B_3 \in \pi_3, B_1 \subseteq B_3 \Rightarrow \pi_1 R \pi_3$$