武汉大学计算机学院2019-2020学年第二学期

《离散数学》(计算机类)期末(A)卷参考答案

学号: ＿＿＿＿＿＿　　姓名: ＿＿＿＿＿＿　　成绩: ＿＿＿＿＿＿

注意：所有答案写在答题纸上并注明题号，并要有解题过程！

一.（12分）求下列公式的主析取范式和主合取范式：

$$(p \to q) \wedge (p \leftrightarrow r)$$

解： 主析取范式:

$\Sigma(0,2,7) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

主合取范式:

$\Pi(1,3,4,5,6) \Leftrightarrow (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge$
$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

二. 完成以下各题：（8+4=12分）

(1) 用公式序列证明：公式 $p \to (p \wedge q)$ 是 $p \to q$ 的逻辑结论（有效结论）；

(2) 公式 $p \to q$ 共有多少个逻辑结论（真值表相同的公式是同一个逻辑结论）？

解： 共有$2^1 = 2$个不同的逻辑结论。

三.（12分）设集合A, B, C均为自然数集$\mathbb{N}$的子集， $A = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 100 \wedge x \bmod 2 = 1\}$， $B = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 100 \wedge x \bmod 3 = 0\}$， $C = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 100 \wedge x \bmod 5 = 2\}$， 求集合$A \cap B \cap C =$? (用列举法表示).

解： $A\cap B\cap C=\{27,57,87\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 100\wedge x\equiv 27(\mathrm{mod}\ 30)\}$

四. 设S为非空集合，$\pi_1=\{A_1,A_2,...,A_m\}$，$\pi_2=\{B_1,B_2,...,B_n\}$均为$S$的划分，设 $P=\{A_i\cap B_j\mid A_i\in\pi_1,i=1,...,m;\ B_j\in\pi_2,j=1,...,n\}-\{\varnothing\}$，完成以下各题：（6+4+4=14分）

（1）证明：P是S的划分；

证： ①P中划分块非空：显然$\forall p_s\in P,\ p_s\neq\varnothing$;

②P中划分块相交必相等：$\forall p_s,p_t\in P$, 设$p_s=A_{i_1}\cap B_{j_1}$，$p_t=A_{i_2}\cap B_{j_2}$, 则$\forall x\in p_s\cap p_t$, 有$x\in p_s$且$x\in p_t$, 即$x\in A_{i_1}\cap B_{j_1}$且$x\in A_{i_2}\cap B_{j_2}$, $\because\pi_1,\pi_2$是S的划分，$\therefore A_{i_1}=A_{i_2},B_{j_1}=B_{j_2}$，$\therefore p_s=p_t$.

③P中划分块的并等于S($\bigcup\limits_{p_s\in P}p_s=S$): $\forall p_s=A_i\cap B_j\subseteq S,\therefore\bigcup\limits_{p_s\in P}p_s\subseteq S$; 又$\forall x\in S$, $\exists A_i,B_j$, 使得$x\in A_i$且$x\in B_j$, 则$x\in A_i\cap B_j\in P$，$\therefore S\subseteq\bigcup\limits_{p_s\in P}p_s$. 所以$\bigcup\limits_{p_s\in P}p_s=S$.

（2）若$S=\{1,2,3,4,5\}$，$\pi_1=\{\{1,3,5\},\{2,4\}\}$，$\pi_2=\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$，求$P=?$

解： $P=\{\{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\}\}$.

（3）求题(2)中的P所诱导的等价关系R_P(用列举法表示).

解： $R_P=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle\}$.

五. 设S为非空集合，$n\in\mathbb{N}$，$n>0$，集合P，Q分别定义为：

$P=\{f\mid f:\{1,2...,n\}\to S\}$,

$Q=\{\langle x_1,x_2...,x_n\rangle\mid x_i\in S(1\leqslant i\leqslant n)\}$.

完成以下各题：（5+5+6=16分）

（1） 若$|S| = m \in \mathbb{N}$，求$|P| =?$，$|Q| =?$

解： $|P| = m^n$, $|Q| = m^n$.

(2) 构造一个从P到Q的双射函数；

解： 构造$\phi : P \to Q$, $\phi(f) = \langle f(1), f(2), ..., f(n)\rangle$. ($\phi$ 不唯一.)

(3) 设$\langle S, \preccurlyeq\rangle$是全序集，定义$S^n$上的二元关系$R$为：$\forall\langle a_1, ..., a_n\rangle$，$\langle b_1, ..., b_n\rangle \in S^n$，$\langle a_1, ..., a_n\rangle\ R\ \langle b_1, ..., b_n\rangle$ iff $a_i \preccurlyeq b_i$ $(i = 1, ..., n)$. 判断R是否为偏序关系、全序关系，说明判断理由。

解： R是偏序关系，满足自反性、反对称性、传递性；

自反性：$\forall\langle a_1, ..., a_n\rangle \in S^n$, $a_i \preccurlyeq a_i\,(i = 1, ..., n)$, $\therefore \langle a_1, ..., a_n\rangle\ R\ \langle a_1, ..., a_n\rangle$, R自反；

反对称性：$\forall\langle a_1, ..., a_n\rangle, \langle b_1, ..., b_n\rangle \in S^n$, 若$\langle a_1, ..., a_n\rangle\ R\ \langle b_1, ..., b_n\rangle$, $\langle b_1, ..., b_n\rangle\ R\ \langle a_1, ..., a_n\rangle$, 则$a_i \preccurlyeq b_i$ 且$b_i \preccurlyeq a_i\,(i = 1, ..., n)$,

$\because \preccurlyeq$ 反对称，$\therefore a_i = b_i$, 即$\langle a_1, ..., a_n\rangle = \langle b_1, ..., b_n\rangle$, R反对称；

传递性：$\forall\langle a_1, ..., a_n\rangle, \langle b_1, ..., b_n\rangle, \langle c_1, ..., c_n\rangle \in S^n$, 若$\langle a_1, ..., a_n\rangle\ R\ \langle b_1, ..., b_n\rangle$, $\langle b_1, ..., b_n\rangle\ R\ \langle c_1, ..., c_n\rangle$,则$a_i \preccurlyeq b_i$, $b_i \preccurlyeq c_i\,(i = 1, ..., n)$,

$\because \preccurlyeq$ 传递，$\therefore a_i \preccurlyeq c_i\,(i = 1, ..., n)$, 即$\langle a_1, ..., a_n\rangle\ R\ \langle c_1, ..., c_n\rangle$, R传递；

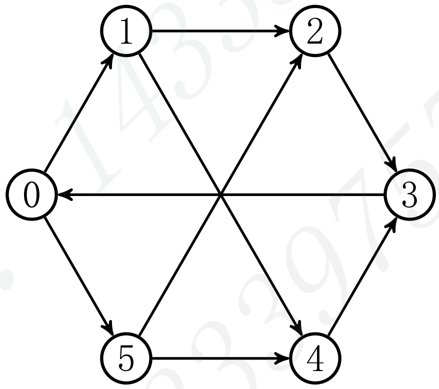
R不为全序关系，因$\exists\langle a_1, ..., a_n\rangle, \langle b_1, ..., b_n\rangle$, $a_1 \preccurlyeq b_1$但$b_2 \preccurlyeq a_2$，

因此$\langle a_1, ..., a_n\rangle \not R \langle b_1, ..., b_n\rangle$, 且 $\langle b_1, ..., b_n\rangle \not R \langle a_1, ..., a_n\rangle$.

六. 简单无向图G有$n(n \geqslant 2)$个顶点，证明：若$\delta(G) \geqslant \frac{n}{2}$，$G$为连通图。($\delta(G) = min\{\, deg(v)|v \in V\,\}$，即$G$的最小度.)（12 分）

证： (反证法)假设G不连通，则至少存在两个连通分支G_1, G_2, 因为$\delta(G) \geqslant \frac{n}{2}$，则$G_1, G_2$中的结点数均至少为$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$，则$G$中结点数至少为$n+2$, 矛盾。所以$G$为连通图。

七. 有向图$D(V,E)$如下图所示，其中，顶点集$V = \{0,1,2,3,4,5\}$，边集$E = \{01,05,12,14,23,30,43,52,54\}$.（其中‘01’即为边$\langle 0,1 \rangle$，依此类推。） 完成以下各题：（6+10+6=22分）



D

（1） 用图示说明图D的底图是二分图；

（2） 设字符集合$\Sigma = \{\mathrm{c},\mathrm{d},\mathrm{i},\mathrm{o},\mathrm{v}\}$，$\Sigma^*$是$\Sigma$中的字符组成的字符串的集合（其中含空串‘$\varepsilon$’，空串为不含任何字符的字符串）。

定义函数 $\phi : E \to \Sigma^*$，$\phi = \{\langle 01,\mathrm{c}\rangle, \langle 05,\varepsilon\rangle, \langle 12,\varepsilon\rangle, \langle 14,\mathrm{o}\rangle, \langle 23,\mathrm{d}\rangle, \langle 30,\varepsilon\rangle, \langle 43,\mathrm{v}\rangle, \langle 52,\mathrm{i}\rangle, \langle 54,\varepsilon\rangle\}$. 设$\mathbb{P}$为$D$的所有通路组成的集合，函数$\Phi : \mathbb{P} \to \Sigma^*$ 递归定义如下：

①$\forall P \in \mathbb{P}$，若P的长度$|P| = 0$，则$\Phi(P) = \varepsilon$；

②设$P = (v_0 v_1 \cdots v_n v_{n+1})$是长度为$n+1$的路径，则

$$\Phi(P) = \Phi(v_0 v_1 \cdots v_n) \cdot \phi(v_n v_{n+1})$$

(其中‘$\cdot$’是字符串连接运算).

试用归纳法证明：$\forall P = (v_0 \cdots v_i v_{i+1} \cdots v_n) \in \mathbb{P}$,

$$\Phi(P)=\Phi(v_0\cdots v_i)\cdot\Phi(v_i\cdots v_n).$$

证： 对n做归纳法，$n\geqslant i+1$:

①当$n=i+1$时，$P=(v_0...v_i)(v_iv_{i+1})$, 则

$$\Phi(P)=\Phi((v_0...v_i)(v_iv_{i+1}))=\Phi(v_0...v_i)\cdot\phi(v_iv_{i+1})$$
$$=\Phi(v_0...v_i)\cdot(\varepsilon\cdot\phi(v_iv_{i+1}))=\Phi(v_0...v_i)\cdot(\Phi(P_0)\cdot\phi(v_iv_{i+1}))$$
$$=\Phi(v_0...v_i)\cdot\Phi(v_iv_{i+1})\text{（注：}|P_0|=0).$$

②假设当$n=k(k\geqslant i{+}1)$时成立，即$P=(v_0\cdots v_i\cdots v_k)$,有$\Phi(P)=\Phi(v_0\cdots v_i)\cdot\Phi(v_i\cdots v_k)$, 则$n=k+1$时, 设$P'=(v_0\cdots v_kv_{k+1})$

$$\Phi(P')=\Phi((v_0...v_k)\cdot(v_kv_{k+1}))=\Phi(v_0...v_k)\cdot\phi(v_kv_{k+1})$$
$$=(\Phi(v_0\cdots v_i)\cdot\Phi(v_i\cdots v_k))\cdot\phi(v_kv_{k+1})$$
$$=\Phi(v_0\cdots v_i)\cdot(\Phi(v_i\cdots v_k)\cdot\phi(v_kv_{k+1}))$$
$$=\Phi(v_0\cdots v_i)\cdot\Phi(v_i\cdots v_{k+1})$$

综上，结论成立。

(3) 证明：存在$P\in\mathbb{P}$，$\Phi(P)=(\text{covid})^{19}$.(即，19个‘covid’串连接。)

证： 由图D知，存在回路$C=\{01,14,43,05,52,23,30\}$，$\Phi(C)=\text{covid}$, 由(2)结论，$\Phi(C^{19})=(\Phi(C))^{19}=(\text{covid})^{19}$.