武汉大学 2010-2011 第一学期

概率论与数理统计 B 期末试题（A 卷）

1. （12 分）若 $p(A)=p(B)=p(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$。

(1)求 A,B,C 三个事件中至少出现一个的概率。 (2)求 $p(C|A\cup B)$。

2. （12 分）若随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，记 A 为事件 $\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$；

对随机变量 X 进行 4 次观测，以 Y 表示事件 A 出现的次数；

(1) $p(A)$； (2)求 $p(Y=2)$。

3. （14 分）若随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(x+2y)}, x>0, y>0\\ 0,\text{其它}\end{cases}$，

（1）求 A 的值？ （2）求 $f_X(x), f_Y(y)$；

（3）随机变量 X 与 Y 是否独立？ （4）求 $Z=X+Y$ 的密度。

4. （12 分）设某种商品每周的需求量 X 是服从区间 $[10,30]$ 上均匀分布的随机变量，而经销商进货数量 Y 为区间 $[10,30]$ 中的某一整数，商店每销售一单位商品可获利 500 元；若供大于求则削价处理，每处理 1 单位商品亏损 100 元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每单位仅获利 300 元。为使商店所获利润期望值不少于 9280，试确定最小进货量。

5. （12 分）若随机变量 (X,Y) 在 $D: 0<x<1, x^2<y<x$ 上服从均匀分布，求随机变量 X 与 Y 的相关系数 ρ_{xy}。

6. （12 分）若 $X_1\cdots X_{16}$ 是正态总体 $N(0,4)$ 的样本， $S^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{16}^2$

求 k 使 kS^2 服从 χ^2 分布，并求 $E(S^2), D(S^2)$

7. （14 分）若总体 X 在 $(\theta,1)$ 上服从均匀分布，$X_1\cdots X_n$ 为样本，（1）求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$；

（2）求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_2$；（3）判别他们是否为无偏估计。

8. （12 分）某种清漆的 9 个样品，其干燥时间平均为 6.60 小时，样本标准差为 0.577 小时。若假设其干燥时间服从正态分布，问是否可认为其干燥时间显著小于 7 小时 $(\alpha=0.05)$？（已知：$z_{0.05}=1.65, z_{0.025}=1.96, t_{0.05}(8)=1.86, t_{0.05}(9)=1.83$）

武汉大学 2010-2011 第一学期

概率论与数理统计 B 期末试题（A 卷）参考答案

1. （12 分） (1) $P(A+B+C)=\frac{5}{8}$ (2) $p(C\mid A\cup B)=\frac{1}{4}$。

2. （12 分）

(1) $p(A)=\frac{1}{4}$； (2) $p(Y=2)=\frac{27}{128}$。

3. （14 分）

（1） $A=2$ （2） $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$； $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, y>0\\ 0, y\le 0\end{cases}$

（3）随机变量 X 与 Y 独立 （4） $f_z(z)=\begin{cases}2(e^{-z}-e^{-2z}), z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}$。

4. （12 分） 最小进货量为 21。

设利润为 Z，则

$Z=g(x)=\begin{cases}500x, & x=y\\ 500x-(y-x)100, & y>x\\ 500y+(x-y)300, & y<x\end{cases}$

$=\begin{cases}500x, & x=y\\ 600x-100y, & x<y\\ 300x+200y, & y<x\end{cases}$

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{20}, & 10\le x\le 30\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)dx$

$=\int_{10}^{y}\frac{1}{20}(600x-100y)dx+\int_{y}^{30}\frac{1}{20}(300x+200y)dx$

$=-\frac{15}{2}y^2+350y+5250\ge 9280$

令 $\varphi(y)=15y^2-700y+8060\le 0$.

$\varphi(y)=0$ 的根为 $y_1=\frac{62}{3}\approx 20.67$，

$y_2=26$.

$\therefore$ 由 $\varphi(y)\le 0 \Rightarrow 20.67\le y\le 26$.

$\therefore$ 最小进货量为 $y=21$.

5. （12 分） $\rho_{xy}=\sqrt{\frac{35}{38}}\approx 0.96$. $f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

6. （12 分） $k=\frac{1}{4}$，kS^2 服从 $\chi^2(16)$ 分布， $E(S^2)=64, D(S^2)=\cancel{1024}$ 512

7. （14 分）（1） θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1=2\overline{X}-1$；

（2） θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_2=Min(x_1,x_2,\ldots x_n)$

（3） $E(\hat{\theta}_1)=\theta$，所以，$\hat{\theta}_1$ 是无偏估计；

$E(\hat{\theta}_2)=\frac{n\theta+1}{n+1}$，所以，$\hat{\theta}_2$ 不是无偏估计；

8. （12 分） 解：$H_0:\mu=7, H_1:\mu<7$

$\alpha=0.05$ 检验统计量 $t=\frac{\overline{X}-7}{S}\sqrt{n}$

拒绝域：$t<-t_{0.05}(8)=-1.86$。

计算得：$t=-2.08$

所以，拒绝 H_0，接受 H_1。

5、 $f_X(x)=\begin{cases}6x-6x^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & (0<y<1)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$EX=\int_0^1 x(6x-6x^2)dx=\frac{1}{2}$ $EY=\int_0^1 y(6y^{\frac{1}{2}}-6y)dy=\frac{2}{5}$

$EX^2=\frac{3}{10}$ $EY^2=\frac{3}{14}$

$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{20}$ $DY=\frac{19}{350}$

$E(XY)=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} 6xy\,dy=\frac{1}{4}$

$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\sqrt{\frac{35}{38}}$

$F_{Min}(x)=\begin{cases}0, & x<\theta\\ 1-\left(1-\frac{x-\theta}{1-\theta}\right)^n, & \theta\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$

$f_{min}(x)=F'_{min}(x)=\begin{cases}\frac{n(1-x)^{n-1}}{(1-\theta)^n}, & \theta\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$E(\hat{\theta}_2)=\int_\theta^1 x f_{min}(x)dx=$

$=\int_\theta^1 \frac{nx(1-x)^{n-1}}{(1-\theta)^n}dx \overset{1-x=t}{=\!=\!=} \frac{n}{(1-\theta)^n}\int_0^{1-\theta}(1-t)t^{n-1}dt$

$=\frac{n\theta+1}{n+1}$.