武汉大学数学与统计学院

2001－2002 学年第一学期期末考试

《离散数学》试卷

班级__________ 学号__________ 姓名____________ 成绩__________

一、判断题：（10 分，每小题 1 分，正确的打 √，错误的打×）

（1） $A-B=A$ 当且仅当 $B=\varnothing$。 （　　）

（2） $(A\times C)-(B\times D)=(A-B)\times(C-D)$。 （　　）

（3）设 $A=\{a,b,c\}$，$R\subseteq A\times A$ 且 $R=\{<a,b>,<a,c>\}$，则 R 是传递的。 （　　）

（4）函数 $f:A\to B$ 是单射，则 $f^{-1}:B\to A$ 也是单射。 （　　）

（5）设 R 为非空集合 A 上的关系，R 是可传递的，当且仅当 $R\circ R\subseteq R$。 （　　）

（6）有补格一定是有界格； （　　）

（7）在有补分配格中，每个元素有惟一的补元。 （　　）

（8）任何代数系统都存在子代数系统； （　　）

（9） $\forall x(F(y)\to G(x))\Leftrightarrow F(y)\to\exists xG(x)$。 （　　）

（10）任何图中的基本回路都是简单回路。 （　　）

二、填空题：（20 分，每空 1 分）

1．A，B 是两个集合，则 $A\oplus B=B$ 的充分必要条件是_________________。

2．在一个班级的 50 个学生中，有 26 个人在第一次考试中得 A，21 人在第二次考试中得 A，并且有 17 人两次考试均没有得 A，两次考试中均得 A 的有______人。

3．设 $A=\{a,b\}$，则

（1）A 上有____个函数，其中有______个满射，有____个单射，有______个双射。

（2）A 上可定义______个一元运算，______个二元运算。

（3）以 A 中元素作为群内元素，可以构成________个不同构的群，以 A 中元素作为格的元素，可以构成______个不同构的格。

4. 设 $S=Q\times Q$，Q 为有理数集合，$*$ 为 S 上的二元运算，对于任意的 $<a,b>,<x,y>\in S$，$<a,b>*<x,y>=<ax,ay+b>$。则 $*$ 的单位元是__________，存在逆元的元素 $<a,b>$ 的逆元是__________，$<a,b>$ 可逆的条件是__________。

5． 已知 $\langle L_1,|\rangle$，$\langle L_2,|\rangle$，$\langle L_3,|\rangle$ 为三个偏序集，其中 $L_1=\{1,2,3,5,6,15,30\}$，$L_2=\{2,3,6,12,24,36\}$，$L_3=\{1,2,3,6,18,54\}$，$|$ 为整除关系。则其中__________是格。

6．无向图 G 有 11 条边，2 度与 3 度顶点各 2 个，其余都是 4 度顶点，则 G 中共有____个顶点。

7．在无向树 T 中，有 2 个 2 度结点，3 个 3 度结点，…，5 个 5 度结点，其余都是树叶。则 T 有______片树叶，有______条边。将 T 变成完全图，需加__________条边。

8．设p：天下雨，q：天刮风，r：我去书店，则命题“如果天不下雨并且不刮风，我就去书店”的符号化形式为______________________。

9．若个体域为非负整数集，$A(x,y)$ 表示 $x+y=y$，则 $\exists x\forall yA(x,y)$ 的真值是__________。

三、单项选择题：（10 分，每小题 1 分，将正确答案的选项填在括号内横线上）

1．已知 $A\oplus B=\{1,2,3\}$，$A\oplus C=\{2,3,4\}$，若 $2\in B$，则（________）。

A．$1\in C$；　　B．$2\in C$；　　C．$3\in C$；　　D．$4\in C$。

2．对任何二元关系 R，在 $R\cap\tilde{R}$，$R\cup\tilde{R}$，$R\circ\tilde{R}$，$\tilde{R}\oplus R$ 中，有（______）个一定是对称关系，其中 $\tilde{R}$ 表示关系 R 的逆。

A．1；　B．2；　C．3；　D．4。

3．$R=\{<1,4>,<2,3>,<3,1>,<4,3>\}$，则（______）$\notin t(R)$。

A．<1，1>；　B．<1，2>；　C．<1，3>；　D．<1，4>。

4．集合 A 到 B 共有 64 个不同的函数，则 B 中元素个数不可能是（______）。

A．4；　B．8；　C．16；　D．64。

5．设 R_+、I_+ 分别是正实数集合和正整数集合，＋、－、×、／分别为普通的实数加法、减法、乘法、除法，则（________）是半群。

A．$\langle I_+,-\rangle$；　B．$\langle R_+,-\rangle$；　C．$\langle R_+,\times\rangle$；　D．$\langle R_+,/\rangle$。

6．设 $\langle G,*\rangle$ 是阶大于 1 的群，则下列命题中（______）不真。

A．存在零元；　　B．存在单位元；

C．运算 $*$ 是可结合的；　　D．G 中每个元素都有逆元。

7．二部图 $K_{2,3}$ 是（______）。

A．欧拉图；　B．哈密顿图；　C．非平面图；　D．平面图。

8．5 阶无向完全图的边数为（______）。

A．5；　B．10；　C．15；　D．20。

9．带权 4，6，8，10，12 的最优树的权是（______）。

A．80；　B．90；　C．100；　D．110。

10．下列式子（______）是永真的。

A．$Q \to (P \wedge Q)$；B． $P \to (P \wedge Q)$；C． $(P \wedge Q) \to P$；D． $(P \vee Q) \to Q$ 。

四、简答题：（解答写在答题纸上）

1．（6 分）R 是集合 A 上自反和传递的关系，证明： $R \circ R = R$ 。

2．（7 分）设 A={1,2,3}，f 是 A 上函数，且 $f(1) = f(2) = 1$，$f(3) = 2$，定义 $G: A \to P(A)$，$G(x) = f^{-1}(x) = \{y \mid y \in A, f(y) = x\}$。说明 G 有何性质(单、满或双射)，计算值域 ranG。

3．（8 分）设 $A = \{1,2,3\}$，B 是 A 上等价关系的集合。

（1）列出 B 的元素；

（2）给出代数系统 $V = (B, \cap)$ 的运算表。

（3）求出 V 的单位元，零元和所有可逆元素的逆元；

（4）说明 V 是否为半群，独异点和群？

4．（5 分）设 $(G, *)$ 是一群， $a \in G$， 定义函数 $f: G \to G, f(x) = a * x * a^{-1}$；

证明： f 是 G 的自同构；

5．（6 分）设 S＝{1，2，4，6，9，12，18，36}，设 D 是 S 上的整除关系：

$< x, y > \in D$ 当且仅当 y 是 x 的倍数；

证明：

（1）D 是一个偏序关系；试画出关系 D 的哈斯图，并由此简要说明＜S，D＞是一个格；

（2）D 是分配格吗？简要说明理由。

（3）求集合{2，4，6，12，18}的下界，最大下界，最小元及上界，最小上界和最大元。

6．（6 分）设 G 是一个简单无向平面图，n 和 m 分别是图 G 的顶点数和边数，设图 G 的所有的基本回路的长度都大于 4。证明： $m \le \dfrac{5n}{3} - \dfrac{10}{3}$ 。

7.（6 分）给定以下 4 组数：

（a）4，4，4，4；

（b）2，3，3，3，1，1，1，1；

（c）2，2，3，3，1，1，1，1；

（d）2，2，3，3，3，3，1，1，1，1；

（1）以上 4 组数中，哪些能构成无向图的度序列？

（2）哪些能构成无向简单图的度序列？

（3）哪些能构成无向树的度序列？

（4）画出能构成无向树的度序列的至少二个非同构的无向树。

8.（8 分）设命题公式 G 的定义如下：

$$((P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)) \wedge ((P \vee \neg R) \leftrightarrow (Q \vee \neg R))\text{ 。}$$

（1）计算公式 G 的真值表；

（2）求公式 G 的主析取范式和主合取范式；

（3）由此证明：$G \Longleftrightarrow P \leftrightarrow Q$ 。

9.（8 分）如下图所示，求 v_1 到各顶点的最短路径，并给出它们的权。