武汉大学 2014-2015 学年第一学期期末考试

概率统计 B（A 卷答题卡）

姓名 ________　　学院 ________

考生学号											
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]
[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]
[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]
[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]
[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]
[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]
[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]
[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]
[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]

注意事项

1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。
2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。
3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4.保持卷面清洁，不要折叠、不要弄破。

一、（12 分）若事件 A,B 独立，$P(A)=0.5, P(B)=0.4$，求(1) $P(\overline{AB})$；(2) $P((A-B)|(A+B))$。

解：$P(\overline{AB}) = 1-P(AB) = 1-P(A)P(B) = 0.8$

$$P((A-B)|A+B) = \frac{P((A-B)(A+B))}{P(A+B)} = \frac{P(A-B)}{P(A+B)} = \frac{P(A)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$

$$= \frac{0.5-0.2}{0.5+0.4-0.2} = \frac{3}{7}$$

二、（12 分）若甲乙两人约好在 10 点至 12 点之间在某地见面；（1）求甲乙两人到达时间相差不超过半小时的概率？（2）求甲比乙先到半小时以上的概率？

解：设甲、乙到的时刻分别为 X(分)，Y(分)

则 $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 120,\ 0 \le y \le 120\}$

(1) $A = \{(x,y) \mid |x-y| \le 30\}$　　$S_A = 120^2 - 90^2 = 6300$

$S_\Omega = 120^2 = 14400$

$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{7}{16} = 0.4375$

(2) $B = \{(x,y) \mid y-x \ge 30\}$　　$S_B = \frac{90^2}{2} = 4050$

$P(B) = \frac{S_B}{S_\Omega} = \frac{4050}{14400} = \frac{9}{32} = 0.28125$

三、（12 分）若随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} ax(1-x) & 0<x<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$；（1）求事件 $\{x\geq\frac{1}{2}\}$ 的概率。

（2）求 $Y=-\ln X$ 的概率密度。

解：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1 ax(1-x)dx=\frac{1}{6}a=1$.

$\therefore a=6$.

(1) $P(X\geq\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{1} 6x(1-x)\,dx=\frac{1}{2}$

(2) $f_Y(y)=f(e^{-y})\left|(e^{-y})'\right|=\begin{cases} 6e^{-y}(1-e^{-y})e^{-y}, & 0<e^{-y}<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$=\begin{cases} 6(e^{-2y}-e^{-3y}), & y>0 \\ 0, & y\leq 0 \end{cases}$

四、（16 分）若随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} Ay & 0<x<1,0<y<x \\ 0 & 其他 \end{cases}$；

(1)求随机变量 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_x(x);f_y(y)$；（2）求 $Z=X-Y$ 的概率密度。

解：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\frac{A}{6}=1$, $A=6$

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^x 6y\,dy, & 0<x<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}=\begin{cases} 3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases} \int_y^1 6y\,dx, & 0<y<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}=\begin{cases} 6y(1-y), & 0<y<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

(2) $E(h(x-y))=\int_0^1 dx\int_0^x h(x-y)6y\,dy \xlongequal{z=x-y} 6\int_0^1 dx\int_0^x h(z)(x-z)dz$

$=6\int_0^1 h(z)(\frac{1}{2}z^2-z+\frac{1}{2})dz$.

$\therefore f_Z(z)=\begin{cases} 3z^2-6z+3, & 0\leq z\leq 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

五、（12 分）某生产线一次加工每件产品的合格率为0.5，不合格品立即再加工，再加工的合格率为0.5，剩下的为废品，已知：合格品每件可获利 80 元，再加工费用为 20 元，而废品每件总亏损 20 元。

（1）为保证每天的平均利润不低于 5 万元，问他们至少要加工多少件产品？

（2）如果想每天利润多于 5 万的概率大于0.977，利用中心极限定理，问至少要加工多少件？（$\Phi(2.)=0.977$ 本试卷中 $\Phi(x)$ 表标准正态分布的分布函数）

解：(1) 设至少要加工 n 件产品，$X_i=\{$第 i 件产品获利数$\}$ $(i=1,2\cdots n)$

则 $P(X_i=80)=0.5$，$P(X_i=60)=0.5^2$，$P(X_i=-20)=0.5^2$

$EX_i=50 \quad (i=1,2\cdots n)$

总获利 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i \quad \therefore EX=\sum_{i=1}^{n}EX_i=50n$.

由 $E(X)\geq 50000$ 得 $n\geq 1000$.

(2) $DX=1700n$, $\therefore X \overset{\text{近似}}{\sim} N(50n, 1700n)$

$P(X\geq 50000)=1-P(X\leq 50000)\approx 1-\phi\left(\frac{50000-50n}{\sqrt{1700n}}\right)\geq 0.977$

$\frac{50n-50000}{\sqrt{1700n}}\geq 2$. $\therefore n\geq 1054$.

六、（12 分）若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$；

$T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$;（1）求 T 的数学期望；（2）当 $\mu=0$ 时，求 T 的方差。

解：(1) $ET=E(\overline{X}^2)-\frac{1}{n}E(S^2)=D(\overline{X})+(E\overline{X})^2-\frac{1}{n}\sigma^2$

$=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-\frac{1}{n}\sigma^2=\mu^2$

(2) $DT=D(\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}D(S^2)$ $\quad \overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，即 $\overline{X}\sim N(0,\frac{\sigma^2}{n})$

$\therefore \frac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$. $\quad \left(\frac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\sim \chi^2(1)$

$D(\overline{X})^2=D\left[\left(\frac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\cdot\frac{\sigma^2}{n}\right]=\frac{\sigma^4}{n^2}D\left(\frac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2=\frac{2\sigma^4}{n^2}$.

$S^2=\frac{\sigma^2}{n-1}\cdot\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$. $\quad D(S^2)=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}(2(n-1))$.

$\therefore DT=\frac{2\sigma^4}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{2\sigma^4}{n-1}=\frac{2\sigma^4}{n(n-1)}$.

七、（12分）若总体X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\theta)} & x>\theta\\ 0 & x\le\theta\end{cases}$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为样本，分别求$\lambda,\theta$的极大似然估计，并判别他们是否无偏。

解：$L(\lambda,\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x_i-\theta)}, & x_1x_2\cdots x_n>\theta\\ 0 & 其它\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{1}{\lambda^n}e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & x_1x_2\cdots x_n>\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$

$\ln L(\lambda,\theta)=-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)-n\ln\lambda$

$\frac{\partial\ln L}{\partial\lambda}=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)-\frac{n}{\lambda}=0$　　$\therefore\hat{\lambda}=\overline{X}-\theta$

$\hat{\theta}=\min\{x_1x_2\cdots x_n\}$.　　$\therefore\hat{\lambda}=\overline{X}-\min\{x_1x_2\cdots x_n\}$

$E(\hat{\lambda})=\frac{n-1}{n}\lambda$.　$E(\hat{\theta})=\frac{\lambda}{n}+\theta$

故它们都不是无偏估计.

八、（12分）设正常生产时，轴承内环的锻压零件的高度ξ服从正态分布$N(\mu,0.16)$，现从中抽取16只内环，其平均高度$\bar{x}=30.3$毫米；（1）求内环的平均高度的置信度95%的置信区间。

（2）若正常生产时零件平均高度为30毫米，试在显著性水平为5%的条件下，检验现在的样品是否正常？（$\Phi(1.65)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$）

解：(1)　$\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$

$\alpha=0.05$.　$\sigma=0.4$.　$n=16$,　$z_{\alpha/2}=z_{0.025}$.　$\overline{X}=30.3$

$\Phi(z_{0.025})=0.975$.　$\therefore z_{\alpha/2}=1.96$

置信区间为：$(30.3-\frac{0.4}{4}\cdot1.96,\ 30.3+\frac{0.4}{4}\cdot1.96)=(30.1,30.5)$

(2).　H_0: $\mu=30$.　H_1: $\mu\neq30$

拒绝域为：$\left|\frac{\overline{X}-30}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\ge z_{\alpha/2}$

$\left|\frac{\overline{X}-30}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{(30.3-30)4}{0.4}\right|=3\ge z_{\alpha/2}=1.96$

$\therefore$拒绝H_0.接受H_1，认为样品不正常.