武汉大学 2013-2014 第一学期《离散数学》考试题

1. (8 分) 120 名学生参加考试，考试有 A 、B 和 C 共 3 道题，其中 12 名学生 3 道题都做对了；20 名学生做对了 A 题与 B 题；16 名学生做对 A 题与 C 题；28 个学生做对 B 题与 C 题；做对 A 题的有 48 名学生；做对 B 题的有 56 名学生；还有 16 名学生一道题也没做对。试求做对 C 题的学生有多少个？

2. (8 分) 设 R 是集合 A 上的关系，证明 R 传递的充分必要条件是 $R^2 \subseteq R$。

3. (10 分) $A=\{1,2,3\}\times\{1,2,3,4\}$，$A$ 上关系 R 定义为：

$$<x,y> R <u,v>\text{，当且仅当}\left|x-y\right|=\left|u-v\right|\text{，}$$

证明 R 是等价关系，并求由 R 确定的 A 的划分。

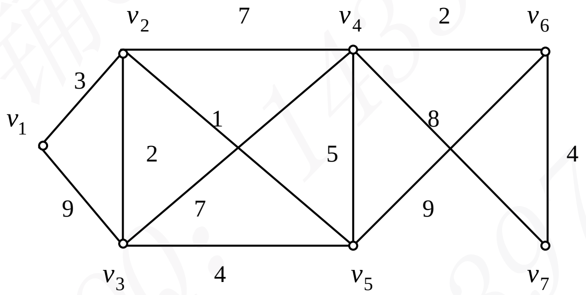
4. (10 分) 有理数集 Q 中的 $*$ 定义如下：$a*b=a+b-ab$.
   （1）$(Q,*)$ 是半群吗？是可交换的吗？
   （2）求单位元；
   （3） $*$ 中是否有可逆元？若有，指出哪些是可逆元？并指出逆元是什么？

5. (8 分) 设 G 是一群，H 是 G 的子群，$x\in G$。证明 $x\cdot H\cdot x^{-1}=\{x\cdot h\cdot x^{-1}\mid h\in H\}$ 是 G 的子群。

6. (8 分) 设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一个分配格，而且是一个有界格，若元素 x 是有补元，证明它的补元是惟一的。

7. （8 分）已知 n 阶简单图 G 有 m 条边，各结点的度数均为 3。
   （1）若 $m=3n-6$，证明：在同构意义下 G 惟一，并求 m,n；
   （2）若 $n=6$，证明在同构意义下 G 不惟一。

8. （8 分）对如下给出的赋权图 G，求出结点 v_1 到其余各个结点的最短路径。



9. （8 分）在通讯中要传输八进制数字 0，1，2，…，7。这些数字出现的频率为

   0：30%； 1：20%； 2：15%； 3：10%； 4：10%； 5：6%； 6：5%；7：4%。

   编一个最佳前缀码，使通讯中出现的二进制数字尽可能地少。具体要求如下：
   （1）画出相应的二元树；
   （2）写出每个数字对应的前缀码；
   （3）传输按上述比例出现的数字 10000 个时，至少要用多少个二进制数字？

10. （8 分）求下面公式 G 的主析取范式与主合取范式，并写出相应的为真赋值。

$$\neg(P\to Q)\leftrightarrow(P\to\neg Q)$$

11. （8 分）用谓词和量词将下列命题符号化：
    （1）所有的人都学习和工作；
    （2）没有不犯错误的人；
    （3）尽管有人聪明，但未必一切人都很聪明；

12. （8 分）将下列推理形式化，并对正确的推理给出推理过程，要求指明所设命题或谓词的含义。

每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车，每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车，并非每个人都喜欢骑自行车，因而有人不喜欢步行。

武汉大学 2013-2014 第一学期《离散数学》考试题答案

1．**解**　设做对 A 题的学生构成的集合为 A，做对 B 题的学生构成的集合为 B，做对 C 题的学生构成的集合为 C，由题意可知：$|A\cap B\cap C|=12$，$|A\cap B|=20$，$|A\cap C|=16$，$|B\cap C|=28$，$|A|=48$，$|B|=56$，

$|\overline{A\cup B\cup C}|=16$，$|A\cup B\cup C|=120-16=104$，根据容斥原理可知：

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|,$$

$|C|=20+16+28+104-12-48-56=52$，　故做对 C 题的学生有 52 个。

2．**证**　若 R 传递，则 $\forall <x,z>\in R^2=R\circ R$，存在 $y\in A$，使得 $<x,y>\in R$，$<y,z>\in R$，由 R 传递，有 $<x,z>\in R$，从而 $R^2\subseteq R$。

另一方面，若 $R^2\subseteq R$，对任意的 $x,y,z\in A$，若 $<x,y>\in R$，$<y,z>\in R$，则 $<x,z>\in R^2$，由 $R^2\subseteq R$，有 $<x,z>\in R$，故 R 传递。

3．**解**　首先证明 R 是等价的。

a．对任意的 $<x,y>\in A$，因 $\left|x-y\right|=\left|x-y\right|$，故 $<x,y>R<x,y>$，R 自反。

b．对任意 $<x,y>\in A, <u,v>\in A$，若 $<x,y>R<u,v>$，即 $\left|x-y\right|=\left|u-v\right|$，则 $\left|u-v\right|=\left|x-y\right|$，从而 $<u,v>R<x,y>$，R 对称。

c．若 $<x,y>R<u,v>$，$<u,v>R<p,q>$，即 $\left|x-y\right|=\left|u-v\right|$，$\left|u-v\right|=\left|p-q\right|$，从而 $\left|x-y\right|=\left|p-q\right|$，得证 $<x,y>R<p,q>$。R 传递。

综上所述，R 是等价关系。

由定理知由 R 的等价类确定对集合 A 的划分。

$[<1,1>]_R=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$；$[<1,2>]_R=\{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>,<3,4>\}$；

$[<1,3>]_R=\{<1,3>,<3,1>,<2,4>\}$；$[<1,4>]_R=\{<1,4>\}$。

即划分 $\Pi=\left\{[<1,1>]_R,[<1,2>]_R,[<1,3>]_R,[<1,4>]_R\right\}$。

4．（1）$\forall a,b,c\in Q$，易证 $a*(b*c)=(a*b)*c$，故 $(Q,*)$ 是半群。因 $a*b=b*a$，$\forall a,b\in Q$,故 $*$ 可交换。

（2）设 e 为其单位元，则应有：$\forall a\in Q$，$a*e=e*a=a$，即 $a+e-ae=a$，由 a 的任意性，有 $e=0$。所以单位元为 0。

（3）设 a 有逆元 b，则应有：$a*b=a+b-ab=0$，故当 $a\neq 1$ 时，有逆元为：$a^{-1}=\dfrac{a}{a-1}$，当 $a=1$ 时，没有逆元。

5．由 H 非空，知 $x\cdot H\cdot x^{-1}$ 非空。$\forall a,b\in x\cdot H\cdot x^{-1}$，即存在 $h_1,h_2\in H$ 使得 $a=x\cdot h_1\cdot x^{-1},b=x\cdot h_2\cdot x^{-1}$，有

$$a\cdot b^{-1}=(x\cdot h_1\cdot x^{-1})\cdot(x\cdot h_2\cdot x^{-1})^{-1}=x\cdot h_1\cdot x^{-1}\cdot(x^{-1})^{-1}\cdot h_2^{-1}\cdot x^{-1}=x\cdot(h_1\cdot h_2^{-1})\cdot x^{-1},$$

因 H 为子群，有 $h_1\cdot h_2^{-1}\triangleq h\in H$，从而 $a\cdot b^{-1}=x\cdot h\cdot x^{-1}\in x\cdot H\cdot x^{-1}$。所以 $x\cdot H\cdot x^{-1}$ 为子群。

6．**证**　设 x 有补元 y 和 z，即 $x\wedge y=0$，$x\vee y=1$，$x\wedge z=0$，$x\vee z=1$，则

$$\begin{aligned} y&=y\vee 0 \\ &=y\vee(x\wedge z) && \text{由条件 } x\wedge z=0 \\ &=(y\vee x)\wedge(y\vee z) && \text{分配律} \end{aligned}$$

$= 1 \wedge (y \vee z)$　　由条件 $x \vee y = 1$

$= (x \vee z) \wedge (y \vee z)$　　由条件 $x \vee z = 1$

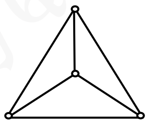
$= z \vee (x \wedge y)$　　分配律

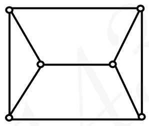
$= z \vee 0$　　由条件 $x \wedge y = 0$

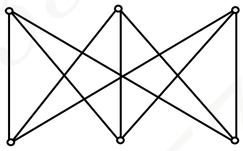
$= z$

7.（1）由于各结点的度数均为 3，现有 n 个结点，m 条边，由握手定理知 $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i) = 3 \times n = 2m$，又 $m = 3n - 6$，从而 $m = 6$，$n = 4$，所得无向图如图（1）所示，该图是 4 个结点的简单无向图中边最多的图，即无向完全图 K_4，在同构意义下，是惟一的。

（2）若 $n = 6$，易求得 $m = 9$，因每个结点的度为 3，满足这些条件的无向图可以画出两个，如图（2）（3）所示，它们显然是不同构的，其中（2）是平面图，（3）是 $K_{3,3}$，不是平面图。


（1）


（2）


（3）

8．计算过程如下表。表中有记号*的数表示相应的结点已具有 P 标号，该数即是对应结点的 P 标号。

$d(v_1)$	$d(v_2)$	$d(v_3)$	$d(v_4)$	$d(v_5)$	$d(v_6)$	$d(v_7)$
∞^*	3	9	∞	∞	∞	∞
∞^*	$3^*/v_1$	$5/v_2$	$10/v_2$	$4/v_2$	∞	∞
∞^*		$5/v_2$	$9/v_5$	$4^*/v_2$	$13/v_5$	∞
∞^*		$5^*/v_2$	$9/v_5$		$13/v_5$	∞
∞^*			$9^*/v_5$		$11/v_4$	$17/v_4$
∞^*					$11^*/v_4$	$15/v_5$
∞^*						$15^*/v_6$

9．应该用较短的符号串传输出现频率高的数字，因而可用 100 乘各数字出现的频率作为权，求最优二元树，然后用这样的二元树产生前缀码传输上面给定的数字。具体做法如下：用 100 乘各频率得权 $w_0 = 30$，$w_1 = 20$，$w_2 = 15$，$w_3 = 10$，$w_4 = 10$，$w_5 = 6$，$w_6 = 5$，$w_7 = 4$。将这些权由小到大排列得到 4，5，6，10，10，15，20，30。求出对应的最优二元树。用所求的最优树产生二元前缀码。带权为 w_i 的树叶对应的符号串就为传输 i 的符号串。数字 i 对应的符号串为

0：01　1：11　2：001　3：100　4：101　5：0001　6：00000　7：00001

用这样的符号串传输按上述比例出现的数字最少。

$10^4\times0.3\times2+10^4\times0.2\times2+10^4\times0.15\times3+10^4\times0.1\times3+10^4\times0.1\times3+10^4\times0.06\times4$
$+10^4\times0.05\times5+10^4\times0.04\times5=27400$

所以传输 10000 个按上述比例出现的数字至少要用 27400 个二进制数字。

10．本题可用真值表，也可通过等值演算来确定其主范式，并给出其为真赋值。

$\neg(P \to Q) \leftrightarrow (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)) \wedge (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee \neg Q) \wedge ((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$ 　　主析取范式

$\Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \neg Q) \Leftrightarrow P$

$\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$ 　　主合取范式

真值表如下。

P	Q	$\neg(P \to Q)$	$P \to \neg Q$	$\neg(P \to Q) \leftrightarrow (P \to \neg Q)$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

其为真赋值为：10，11。

11．（1）设 $M(x)$ 表示“x 是人”，$S(x)$ 表示“x 要学习”，$W(x)$ 表示“x 要工作”，则此语句表示为：

$$\forall x\big(M(x) \to (S(x) \wedge W(x))\big)$$

（2）设 $F(x)$ 表示“x 犯错误”，$N(x)$ 表示“x 为人”，则此语句表示为：$\neg\exists x\big(N(x) \wedge \neg F(x)\big)$

（3）设 $F(x)$ 表示“x 聪明”，$M(x)$ 表示“x 是人”，则此语句表示为：$\exists x\big(M(x) \wedge F(x)\big) \wedge \neg\forall x\big(M(x) \to F(x)\big)$

12．论域：全体人的集合。设谓词 $A(x)$：x 喜欢步行；$B(x)$：x 喜欢坐汽车；$C(x)$：x 喜欢骑自行车，则推理形式化为：

前提：$\forall x\big(A(x) \to \neg B(x)\big)$；$\forall x\big(B(x) \vee C(x)\big)$；$\neg\forall x C(x)$；

结论：$\exists x \neg A(x)$

下面给出证明：

①$\neg\forall x C(x)$	前提引入
②$\exists x \neg C(x)$	①，E
③$\neg C(c)$	②，ES
④$\forall x\big(B(x) \vee C(x)\big)$	前提引入
⑤$B(c) \vee C(c)$	④，US
⑥$B(c)$	③，⑤，I
⑦$\forall x\big(A(x) \to \neg B(x)\big)$	前提引入
⑧$A(c) \to \neg B(c)$	⑦，US
⑨$\neg A(c)$	⑥，⑧，T，I
⑩$\exists x \neg A(x)$	⑨，EG