武汉大学计算机学院2019-2020学年第二学期

《离散数学》(计算机类)期末考试(A)卷

学号：__________ 姓名：__________ 成绩：__________

注意：所有答案写在答题纸上并注明题号，并要有解题过程！

一.（12分）求下列公式的主析取范式和主合取范式：

$$(p \to q) \wedge (p \leftrightarrow r)$$

二. 完成以下各题：（8+4=12分）

（1）用公式序列证明：公式 $p \to (p \wedge q)$ 是 $p \to q$ 的逻辑结论（有效结论）；

（2）公式 $p \to q$ 共有多少个逻辑结论（真值表相同的公式是同一个逻辑结论）？

三.（12分）设集合A, B, C均为自然数集$\mathbb{N}$的子集，$A = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 100 \wedge x \bmod 2 = 1\}$，$B = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 100 \wedge x \bmod 3 = 0\}$，$C = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 100 \wedge x \bmod 5 = 2\}$，求集合$A \cap B \cap C =$?（用列举法表示）.

四. 设S为非空集合，$\pi_1 = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$，$\pi_2 = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$均为$S$的划分，设 $P = \{A_i \cap B_j \mid A_i \in \pi_1, i = 1, ..., m;\ B_j \in \pi_2, j = 1, ..., n\} - \{\varnothing\}$，完成以下各题：（6+4+4=14分）

（1）证明：P是S的划分；

（2）若$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$\pi_1 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\}$，

$\pi_2 = \{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$，求$P=?$

(3) 求题(2)中的P所诱导的等价关系R_P(用列举法表示).

五. 设S为非空集合，$n \in \mathbb{N}$，$n > 0$，集合P，Q分别定义为:

$P = \{ f \mid f : \{1, 2..., n\} \to S \}$,

$Q = \{ \langle a_1, a_2..., a_n \rangle \mid a_i \in S, 1 \leqslant i \leqslant n \}$.

完成以下各题：（5+5+6=16分）

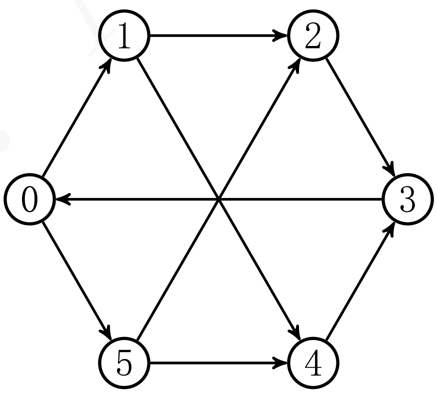
(1) 若$|S| = m \in \mathbb{N}$，求$|P| = ?$，$|Q| = ?$

(2) 构造一个从P到Q的双射函数；

(3) 设$\langle S, \preccurlyeq \rangle$是全序集，定义$S^n$上的二元关系$R$为：$\forall \langle a_1, ..., a_n \rangle$，$\langle b_1, ..., b_n \rangle \in S^n$，$\langle a_1, ..., a_n \rangle \ R \ \langle b_1, ..., b_n \rangle$ iff $a_i \preccurlyeq b_i$ $(i = 1, ..., n)$. 判断R是否为偏序关系、全序关系，说明判断理由。

六. 简单无向图G有$n(n \geqslant 2)$个顶点，证明：若$\delta(G) \geqslant \frac{n}{2}$，$G$为连通图。($\delta(G) = min\{ deg(v) | v \in V \}$，即$G$的最小度.)（12分）

七. 有向图$D(V, E)$如下图所示，其中，顶点集$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，边集$E = \{01, 05, 12, 14, 23, 30, 43, 52, 54\}$.（其中‘01’即为边$\langle 0, 1 \rangle$，依此类推。） 完成以下各题：（6+10+6=22分）



D

（1）用图示说明图D的底图是二分图；

（2）设字符集合$\Sigma = \{\,\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{v}\,\}$，$\Sigma^*$是$\Sigma$中的字符组成的字符串的集合（其中含空串‘$\varepsilon$’，空串为不含任何字符的字符串）。

定义函数 $\phi : E \to \Sigma^*$，$\phi = \{\langle 01, \mathrm{c}\rangle, \langle 05, \varepsilon\rangle, \langle 12, \varepsilon\rangle, \langle 14, \mathrm{o}\rangle, \langle 23, \mathrm{d}\rangle, \langle 30, \varepsilon\rangle, \langle 43, \mathrm{v}\rangle, \langle 52, \mathrm{i}\rangle, \langle 54, \varepsilon\rangle\}$. 设$\mathbb{P}$为$D$的所有通路组成的集合，函数$\Phi : \mathbb{P} \to \Sigma^*$ 递归定义如下：

①$\forall P \in \mathbb{P}$，若P的长度$|P| = 0$，则$\Phi(P) = \varepsilon$；

②设$P = (v_0 v_1 \cdots v_n v_{n+1})$是长度为$n+1$的路径，则

$$\Phi(P) = \Phi(v_0 v_1 \cdots v_n) \cdot \phi(v_n v_{n+1})$$

(其中‘$\cdot$’是字符串连接运算).

试用归纳法证明：$\forall P = (v_0 \cdots v_i v_{i+1} \cdots v_n) \in \mathbb{P}$,

$$\Phi(P) = \Phi(v_0 \cdots v_i) \cdot \Phi(v_{i+1} \cdots v_n).$$

（3）证明：存在$P \in \mathbb{P}$，$\Phi(P) = (\mathrm{covid})^{19}$. (即，19个‘covid’串连接。）