武汉大学数学与统计学院

2008−2009 学年第一学期《离散数学》考试试卷

学号：　　　　　　　姓名：　　　　　　　成绩：

注意：所有答案均写在答题纸上，试卷与答题纸一并上交。

1．(8 分)设 $A=\{\varnothing,\{a\},\{a\}\}$。

（1）是否 $\{a\}\in P(A)$？　　（2）是否 $\{a\}\subseteq P(A)$？

（3）是否 $\{\{a\}\}\in P(A)$？　　（4）是否 $\{\{a\}\}\subseteq P(A)$？

2．(8 分)令 $S=\{100,101,\cdots,999\}$，$|S|=900$。

（1）在 S 中有多少个数，其中至少含有数字 3 或 7？例如：300，707，736，997。

（2）在 S 中有多少个数，其中至少含有一个数字 3 和一个数字 7？如：736，377。

3．(8 分)设 $A=\{1,2,3\}$，R 是 $P(A)$ 上的二元关系，且 $R=\{<a,b>|a\cap b\neq\varnothing\}$。则 R 不满足下列哪些性质？为什么？

（1）自反性；（2）反自反性；（3）对称性；（4）反对称性；（5）传递性。

4．(8 分) R 是集合 A 上自反和传递的关系，试证明：$R\circ R=R$。

5．(6 分)设 $A=\{1,2,3\}$，$f\in A^A$，且 $f(1)=f(2)=1$，$f(3)=2$，定义 $G:A\to P(A)$，$G(x)=f^{-1}(x)$。说明 G 有什么性质(单射、满射和双射)，计算值域 $\mathrm{Ran}\ G$。

6．(8 分)在整数集 Z 上定义：$a\circ b=a+b-2,\forall a,b\in Z$，证明 $(Z,\circ)$ 是一个群。

7．(6 分)设 $(G,*)$ 是一群，令

$$R=\{<a,b>|\ a,b\in G\text{，存在}\theta\in G\text{，使}b=\theta*a*\theta^{-1}\}。$$

验证 R 是 G 上的等价关系。

8．(6 分) D_{90} 表示 90 的全体因子的集合，包括 1 和 90，D_{90} 与整除 $|$ 构成格。

（1）画出格的哈斯图；

（2）计算 $6\vee10$，$6\wedge10$，$9\vee30$ 和 $9\wedge30$；

（3）求 D_{90} 的至少 8 个含 4 个元素且包含 1 和 90 的子格。

9．(8 分)已知 n 阶简单图 G 有 m 条边，各结点的度数均为 3。

（1）若 $m = 3n - 6$ ，证明：在同构意义下 G 惟一，并求 m, n ；

（2）若 $n = 6$ ，证明在同构意义下 G 不惟一。

10．(6 分)对字母表 $\Sigma = \{A, B, C, D, E, F\}$ ，Σ 中符号在符号串中出现的频率仍依次为 25%，10%，10%，20%，15%，20%。确定二元前缀码，使一定长度的符号串的编码长度尽可能短。

11．(8 分)证明蕴含式 $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$ 。

12．(8 分)求下面公式的主析取范式与主合取范式，并写出相应的为真赋值。

$$\neg(P \to Q) \leftrightarrow (P \to \neg Q)。$$

13．(6 分)在谓词逻辑中，将下列命题符号化：

（1）并非所有的自然数都是偶数；

（2）尽管有人聪明，但未必一切人都很聪明。

14．(6 分)设 $A(x)$ ，$B(x)$ 均为含有自由变量 x 的任意谓词公式，证明：

$$\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)。$$

2008－2009 学年第一学期《离散数学》考试试卷

答 案

1．(1)(3)(4)正确，(2)错误。

2．(1)不含有 3 和 7 的有$7\cdot 8\cdot 8=448$，故至少含有 3 或 7 的有 900 - 448 = 452。

(2)用 A 表示含有数字 3 的集合，用 B 表示含有数字 7 的集合，则$|\bar{A}|=8\cdot 9\cdot 9$为不含 3 的集合的基数，$|\bar{B}|=8\cdot 9\cdot 9$为不含 7 的集合的基数，$|\bar{A}\cap\bar{B}|=7\cdot 8\cdot 8=448$为不含 3 和 7 的集合的基数。而$|\bar{A}\cup\bar{B}|=|\bar{A}|+|\bar{B}|-|\bar{A}\cap\bar{B}|=648+648-448=848$，故由$|A\cap B|=|U|-|\bar{A}\cup\bar{B}|$，有$|A\cap B|=900-848=52$。

3．(1)因$\varnothing\in P(A)$，但$\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$，有$<\varnothing,\varnothing>\notin R$，$R$不满足自反性。

(2)$\{1\}\in P(A)$且$\{1\}\cap\{1\}=\{1\}\neq\varnothing$，有$\langle\{1\},\{1\}\rangle\in R$。$R$不满足反自反性。

(3)若$<x,y>\in R$，则$x\cap y\neq\varnothing$，从而$y\cap x\neq\varnothing$，有$<y,x>\in R$，R满足对称性。

(4)令$x=\{1,2\},y=\{1,3\}$，则$x\cap y=y\cap x=\{1\}\neq\varnothing$，由$R$的定义易知：$<x,y>\in R$，且$<y,x>\in R$，但$x\neq y$，$R$不满足反对称性。

(5)令$x=\{1\},y=\{1,2\},z=\{2\}$，则有$x\cap y=\{1\}\neq\varnothing$且$y\cap z=\{2\}\neq\varnothing$，有$<x,y>\in R$且$<y,z>\in R$，但$x\cap z=\varnothing$，故$<x,z>\notin R$，$R$不满足传递性。

4．$\forall<x,z>\in R\circ R$，由关系复合的定义，存在$y\in A$，使得$<x,y>\in R$，$<y,z>\in R$，因R传递，有$<x,z>\in R$，可得$R\circ R\subseteq R$。另一方面，$\forall<x,y>\in R$，因R自反，$<y,y>\in R$，由R传递，$<x,y>\in R\circ R$，可得$R\subseteq R\circ R$。综合可得$R\circ R=R$。

5．根据定义可得：$G(1)=\{1,2\}$，$G(2)=\{3\}$，$G(3)=\varnothing$，G显然是单射，不是满射（$P(A)$中有 8 个元素）。其值域 $\mathrm{ran}\ G=\{\{1,2\},\{3\},\varnothing\}$。

6．显然$\circ$是二元运算，根据群的定义，需证运算满足结合律，有单位元，每个元素有逆元。

$\forall a,b,c\in Z$，有$(a\circ b)\circ c=a\circ b+c-2=(a+b-2)+c-2=a+b+c-4=a\circ(b\circ c)$

故$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$，结合律成立。

2 是单位元，事实上，$a\circ 2=a+2-2=a$；$2\circ a=2+a-2=a$；$\forall a\in Z$。

$\forall a\in Z$，由$a\circ(4-a)=a+(4-a)-2=2$；$(4-a)\circ a=(4-a)+a-2=2$可知$4-a$是a的逆元。

由上可知$(Z,\circ)$是群。

7．需证R具有自反、对称、传递性。

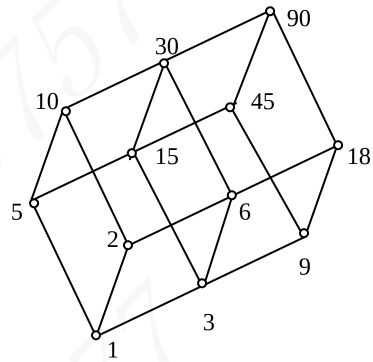
$\forall x\in G$，因为$x=e*x*e^{-1}$，其中e为G中单位元，故xRx。R自反。

$\forall a,b \in G$，若 aRb，即 $\exists\theta \in G$，使 $b=\theta * a * \theta^{-1}$，则 $a=\theta^{-1} * b * \theta=\theta^{-1} * b *(\theta^{-1})^{-1}$，因 G 为群，$\theta \in G$，有 $\theta^{-1} \in G$，故 bRa。R 对称。

$\forall a,b,c \in G$，若 aRb，bRc，即 $\exists\theta_1 \in G$ 使 $b=\theta_1 * a * \theta_1^{-1}$，$\exists\theta_2 \in G$，使 $c=\theta_2 * b * \theta_2^{-1}$，则 $c=\theta_2 * \theta_1 * a * \theta_1^{-1} * \theta_2^{-1}=(\theta_2 * \theta_1) * a *(\theta_2 * \theta_1)^{-1}$，因 $\theta_1,\theta_2 \in G$，有 $\theta_1 * \theta_2 \in G$，故 aRc。R 传递。

得证 R 等价。

8.（1）格 $\left(D_{90}, |\right)$ 所对应的哈斯图如图所示：



（2）从图中可以看出：

$6 \vee 10=30;\ \ 6 \wedge 10=2$，

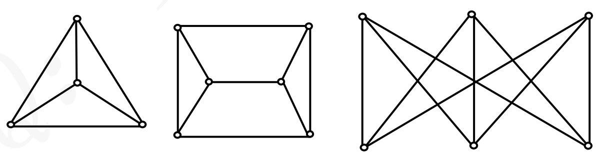
$9 \vee 30=90;\ \ 9 \wedge 30=3$。

（3）通过对除去 1，90 之后的 10 个元素的二元素组合共 $C_{10}^{2}=45$ 个进行验证，可求出满足条件的子格共 24 个，有：

{1，2，6，90}；{1，2，10，90}；{1，2，18，90}；{1，2，30，90}；
{1，2，45，90}；{1，3，6，90}；{1，3，9，90}；{1，3，15，90}；
{1，3，18，90}；{1，3，30，90}；{1，3，45，90}；{1，5，10，90}；
{1，5，15，90}；{1，5，18，90}；{1，5，30，90}；{1，5，45，90}；
{1，6，18，90}；{1，6，30，90}；{1，9，10，90}；{1，9，18，90}；
{1，9，45，90}；{1，10，30，90}；{1，15，30，90}；{1，15，45，90}。

9.（1）由于各结点的度数均为 3，现有 n 个结点，m 条边，由握手定理知 $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=3\times n=2m$，又 $m=3n-6$，从而 $m=6$，$n=4$，所得无向图如图 6-4 中（1）所示，该图是 4 个结点的简单无向图中边最多的图，即无向完全图 K_4，在同构意义下，是惟一的。

（2）若 $n=6$，易求得 $m=9$，因每个结点的度为 3，满足这些条件的无向图可以画出两个，如图（2）（3）所示，它们显然是不同构的，其中（2）是平面图，（3）是 $K_{3,3}$，不是平面图。

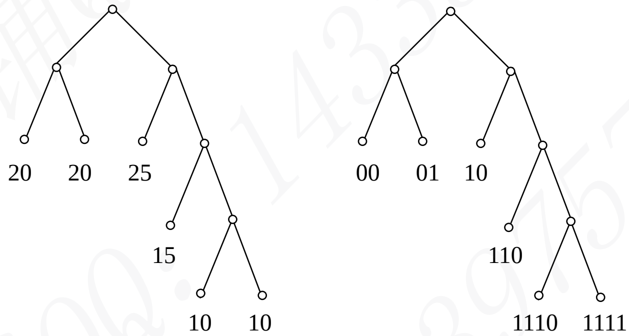


（1）　　（2）　　（3）

10．对权 10，10，15，20，20，25，图（1）是用 Huffman 算法作出的最优二元树，对该树的树叶作出二进制标记，如图（2）所示，我们就得到字母表 Σ 的最有效的二元前缀码

$\{00, 01, 10, 110, 1110, 1111\}$ ，对一个由 100 个符号组成的符号串，其编码长度是：

$$20 \times 2 + 20 \times 2 + 25 \times 2 + 15 \times 3 + 10 \times 4 + 10 \times 4 = 255 .$$



（1）　　　　　　（2）

11． $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$

$$\Leftrightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \to (\neg A \vee C)$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \vee (\neg A \vee C)$$

$$\Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C)) \vee (\neg A \vee C)$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee ((B \vee \neg A \vee C) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee C))$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee ((B \vee \neg A \vee C) \wedge 1)$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A \vee C)$$

$$\Leftrightarrow (A \vee B \vee \neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee B \vee \neg A \vee C)$$

$$\Leftrightarrow 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1$$

所以有 $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$ 。

12．本题可用真值表，也可通过等值演算来确定其主范式，并给出其为真赋值。

$\neg(P \to Q) \leftrightarrow (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)) \wedge (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee \neg Q) \wedge ((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q))$$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$　　主析取范式

$$\Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \neg Q) \Leftrightarrow P$$

$\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$　　主合取范式

真值表如下。

P	Q	$\neg(P \to Q)$	$P \to \neg Q$	$\neg(P \to Q) \leftrightarrow (P \to \neg Q)$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1

1	1	0	0	1

其为真赋值为：10，11。

13.（1）设 $N(x):x$ 是自然数， $G(x):x$ 是偶数，则此语句表示为：

$$\neg\forall x\big(N(x)\to G(x)\big)$$

本命题也可叙述为：存在着自然数为非偶数，从而可符号化为 $\exists x\big(N(x)\wedge\neg G(x)\big)$ ，可以证明两者等值。

（2）设 $F(x)$ 表示"x 聪明"，$M(x)$ 表示"x 是人"，则此语句表示为：

$$\exists x\big(M(x)\wedge F(x)\big)\wedge\neg\forall x\big(M(x)\to F(x)\big)$$

14．$\forall x\big(A(x)\to B(x)\big)\to\big(\forall xA(x)\to\forall xB(x)\big)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\neg\forall x\big(\neg A(x)\vee B(x)\big)\vee\big(\neg\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\big) && \text{联结词化归律}\\
&\Leftrightarrow\neg\big(\forall x\big(\neg A(x)\vee B(x)\big)\wedge\forall xA(x)\big)\vee\forall xB(x) && \text{结合律与德摩根律}\\
&\Leftrightarrow\neg\big(\forall x\big(\big(\neg A(x)\vee B(x)\big)\wedge A(x)\big)\big)\vee\forall xB(x) && \text{作用域的收缩与扩张}\\
&\Leftrightarrow\neg\big(\forall x\big((\neg A(x)\wedge A(x))\vee(B(x)\wedge A(x))\big)\big)\vee\forall xB(x) && \text{分配律}\\
&\Leftrightarrow\neg\big(\forall x\big(B(x)\wedge A(x)\big)\big)\vee\forall xB(x) && \text{交换律、矛盾律}\\
&\Leftrightarrow\neg\big(\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)\big)\vee\forall xB(x) && \text{作用域}\\
&\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\neg\forall xB(x)\vee\forall xB(x) && \text{德摩根律}\\
&\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee 1 && \text{排中律}\\
&\Leftrightarrow 1 && \text{零律}
\end{aligned}$$

故有 $\forall x\big(A(x)\to B(x)\big)\Rightarrow\forall xA(x)\to\forall xB(x)$。