武汉大学2012——2013第一学期概率统计B试题参考答案

（54学时A）

学院________________专业____________学号__________姓名_____________

一、（14分）某系有三个班，1班有24位同学，其中12人是特长生；2班有20位同学，其中8人是特长生；3班有26位同学，其中8人是特长生；现从此70个同学中任找一个同学；（1）求他是特长生的概率？（2）若他是特长生，求他来自1班的概率？（3）若每班任找一人组成三人队参加数模竞赛，求此队的三人全是特长生的概率？

解：（1）$P=\dfrac{28}{70}=\dfrac{2}{5}$ ……………………………………6'

（2）$P=\dfrac{12}{28}=\dfrac{3}{7}$ ……………………………………………………10'

（3）$P=\dfrac{12}{24}\dfrac{8}{20}\dfrac{8}{26}=\dfrac{4}{65}$ ……………………………………14'

二、（12分）某真菌的寿命（单位：小时）在区间（0,5）服从均匀分布；

（1）求其寿命大于3小时的概率？

（2）观测3个此类真菌，求恰有2个寿命大于3小时的概率？

解：（1）$P=\int_3^5\frac{1}{5}dx=0.4$ ……………………………………6'

（2）设3个 真菌中寿命大于3小时的个数为X，则$X\sim B(3,0.4)$

所以 $P(X=2)=C_3^2 0.4^2 0.6=0.288$ 或$\dfrac{36}{125}$。…………12'

三、（14分）若随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\text{；}\ k\text{为常数。}$$

⑴求随机变量X和Y的边沿概率密度$f_x(x);f_y(y)$；

⑵X和Y是否独立 ？

（3）求$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的概率密度。

解：显然，$k=\dfrac{1}{\pi}$

（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & -1<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$；

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$； …………………8'

（2）显然，X 和 Y 不独立。 ……………………………10'

（3）设 $h(z)$ 是一非负连续函数，$\iint\limits_{R^2} h(\sqrt{x^2+y^2})f(x,y)dxdy=\int_0^1 h(z)2zdz$；

所以，$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度为：$f_z(z)=\begin{cases}2z & 0\le z\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$。………14'

四、（12 分）设 A,B 为随机事件，$P(A)=\frac{1}{4},P(B\mid A)=\frac{1}{3},P(A\mid B)=\frac{1}{2}$,设 X,Y 分别表示一次实验中 A,B 发生的次数。求：（1）二维随机变量（X,Y）的联合概率分布。

（2）X,Y 的相关系数 ρ。

解：（1）$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{12},P(B)=\frac{P(AB)}{P(A\mid B)}=\frac{1}{6}$

所以 $P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12},P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6}$

$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{3}$

故 （X,Y）的联合概率分布为

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

……………………………………………6'

(2) $EX=\frac{1}{4},EY=\frac{1}{6},EXY=\frac{1}{12},DX=\frac{3}{16},DY=\frac{5}{36}$

故 $COV(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{1}{24}$,

X,Y 的相关系数 $\rho=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$. ……………………………………………………12'

五、(12 分) 若一批种子的发芽率为 0.8，分别用切比雪夫不等式和中心极限定理估计这样的种子 10000 粒发芽数在 7800——8200 之间的概率。(标准正态分布的分布函数用 $\Phi(x)$ 表示)

解：用 X 表示 10000 粒种子的发芽数，则 $X\sim B(10000,0.8)$

$EX=8000, DX=1600$;

所以，由切比雪夫不等式

$$P\{7800\le X\le 8200\}=P\{|X-EX|\le 200\}\ge 1-\frac{DX}{200^2}=0.96 \quad ……………6'$$

由中心极限定理

$$P\{7800\le X\le 8200\}=\Phi(\frac{8200-8000}{40})-\Phi(\frac{7800-8000}{40})=2\Phi(5)-1=1 \quad …….12'$$

六、(12 分) 若 $X_1\cdots X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，

$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是样本方差。

(1) 求 S^2 的期望和方差。

(2) 选取常数 a,b，使得 $t=a\dfrac{\overline{X}-b}{S}$ 服从 $t(n-1)$ 分布。

解：(1) 因为 $\dfrac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$，

又 $E\chi^2(n-1)=n-1, D\chi^2(n-1)=2(n-1)$

所以 $ES^2=\sigma^2, DS^2=\dfrac{2}{n-1}\sigma^4$ ……………………. 6'

(2) $a=\sqrt{n}, b=\mu$ ……………………………………………………………12'

七、(12 分) 若总体在区间 $(1,\theta)$ 服从均匀分布，$X_1\cdots X_n$ 是其样本，

(1) 求 θ 的矩估计和极大似然估计。 (2) 判别他们的无偏性。并将不是无偏估计的估计化为无偏估计。

解：(1) 矩估计

$$令 \quad EX=\frac{\theta+1}{2}=\overline{X}, 得 \quad \hat{\theta}_1=2\overline{X}-1$$

再求极大似然估计

似然函数 $L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\theta-1)^n} & 1<X_1,X_2,\ldots X_n<\theta \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

所以，θ 的极大似然估计 $\widehat{\theta}_2=\max\{X_1,X_2,\ldots X_n\}$ ……………………6'

（2）因为 $E(\widehat{\theta}_1)=\theta$，所以，矩估计 $\hat{\theta}_1=2\overline{X}-1$ 是无偏估计。

而 $E(\widehat{\theta}_2)=\dfrac{n\theta+1}{n+1}\neq\theta$，

故 θ 的极大似然估计 $\widehat{\theta}_2=\max\{X_1,X_2,\ldots X_n\}$ 不是 θ 的无偏估计。

可将其化为无偏估计 $\widehat{\theta}_2'=\dfrac{(n+1)\max\{X_1,X_2,\ldots X_n\}-1}{n}$。 ……….12'

八、（12 分）据报道：12 月 7 日，全球有感地震 18 次，其中 6 级以上 2 次，某专家说：全球每年发生 6 级以上地震大约 250 次，标准差约为 60 次，最近 9 年，测得 6 级以上地震年平均约 274.0 次，问：可否认为最近 9 年地球的 6 级以上地震次数有大幅增加？

（$\alpha=0.05$）（假设地震次数近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，数据为计算方便有改动）

已知：$\Phi(1.65)=0.95,\Phi(1.96)=0.975$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数。

解：由题意，做假设，$H_0:\mu=250,H_1:\mu>250$

$\overline{X}=274.0,n=9,\sigma=60.0$，$\alpha=0.05$ …………….4'

检验统计量 $u=\dfrac{\overline{X}-250}{\sigma}\sqrt{n}$

拒接域为 $u>1.65$ ……………………………………………8'

计算得 $u=1.2$，不落在拒接域内。所以，接受 H_0，即认为最近 9 年地球的 6 级以上地震次数没有大幅增加。………………………………………………..12'