武汉大学计算机学院2010-2011学年第一学期

2009级《离散数学》(A)考试标准答案

一、 试求下述命题公式G的主析取和主合取范式： (10分)

$$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow R$$

主析取范式:

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee$$
$$\vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

主合取范式: $(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee\ Q \vee R)$.

二、 写出下列结论的证明序列： (16分，8+8)

(1) 前提：$\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)$, $(Q \rightarrow P) \vee \neg R$, R.
结论：$P \leftrightarrow Q$;
证明:

① $(Q \rightarrow P) \vee \neg R$ 引入前提
② R 引入前提
③ $Q \rightarrow P$ ①＋②+析取三段论
④ $R \vee S$ ②+加法式
⑤ $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)$ 引入前提
⑥ $P \rightarrow Q$ ④＋⑤+MT
⑦ $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ ③＋⑥+合取式
⑧ $P \leftrightarrow Q$ ⑦+T

(2) 前提：$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$, $\forall x(Q(x) \vee R(x))$, $\exists x \neg R(x)$.
结论：$\exists x \neg P(x)$.
证明:

① $\exists x \neg R(x)$ 引入前提
② $\neg R(a)$ ①+ES
③ $\forall x(Q(x) \vee R(x))$ 引入前提
④ $Q(a) \vee R(a)$ ③+US
⑤ $Q(a)$ ②＋④+析取三段论
⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ 引入前提
⑦ $P(a) \rightarrow \neg Q(a)$ ⑥+US
⑧ $\neg P(a)$ ⑦＋⑤+MT
⑨ $\exists x \neg P(x)$ ⑧+EG

三、 偏序集$\langle\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 72\}, |\rangle$, $m \mid n$当且仅当m整除n. 完成下列各题 (15分，5+5+5)

(1) 求极大元素和极小元素;
解：极小元素：$2, 9$；极大元素: $27, 48, 72$.

(2) 求子集$\{48, 72\}$的所有下界和最大下界;
解：下界：$2, 4, 6, 12$，最大下界12.

(3) 证明：偏序集$\langle P, \leqslant\rangle$, 若$a$是$P$的最大元素，则$P$仅有一个极大元素。
证明：反证法，$\because a$是最大元素，$\therefore a$是极大元素. 设$b \in P$，b是极大元素，且$b \neq a$. 因为a是最大元素，所以$b \leqslant a$，而b是极大元素，则所有的元素与b要么不可比较，要么小于等于b，而a和b是可比较的，则$a \leqslant b$. 由偏序关系的反对称性有$a = b$. 矛盾

四、设A为非空集合，$A^A = \{ f \mid f : A \to A\}$，关系$\mathcal{R} \subseteq A^A \times A^A$, $\forall f, g \in A^A$, $f \,\mathcal{R}\, g \Leftrightarrow f(A) = g(A)$, 完成下列各题： (15分，9+3+3)

(1) 证明$\mathcal{R}$是A^A上的等价关系；
证明：
① 自反性：$\forall f \in A^A$，$f(A) = f(A)$，即$f \,\mathcal{R}\, f$；
② 对称性：设$f \,\mathcal{R}\, g$，则$f(A) = g(A)$，即$g(A) = f(A)$，$\therefore g \,\mathcal{R}\, f$；
③ 传递性：设$f \,\mathcal{R}\, g \wedge g \,\mathcal{R}\, h$, 则$f(A) = g(A)$, $g(A) = h(A)$, 这样$f(A) = h(A)$，$\therefore f \,\mathcal{R}\, g$；
故$\mathcal{R}$是等价关系.

(2) 若$|A| = n$, 求$|[\mathbb{1}_A]_{\mathcal{R}}|$, 其中$\mathbb{1}_A$是集合$A$上的恒等变换；
解：设$f \,\mathcal{R}\, \mathbb{1}_A$，则$f(A) = \mathbb{1}_A(A) = A$，即$f$是满射，而$A$是有限集合，则$A$上的满射也是单射，故$f \,\mathcal{R}\, \mathbb{1}_A$当且仅当$f$是双射，这样$[\mathbb{1}_A]_{\mathcal{R}} = \{ f \mid f \in A^A \wedge f\text{是双射} \}$，故$|[\mathbb{1}_A]_{\mathcal{R}}| = n!$.

(3) 证明：集合$A^A/\mathcal{R}$和集合$2^A - \{\varnothing\}$存在双射.
证明：定义函数$h : A^A \to 2^A, f \mapsto f(A)$. 则$\forall B \subseteq A \wedge B \neq \varnothing$, 设$b \in B$，定义函数$g_B : A \to A$,

$$g_B(x) = \begin{cases} x & if\ \ x \in B \\ b & if\ \ x \notin B \end{cases}.$$

则$g_B(A) = B$，这样$h(A^A) = 2^A - \{\varnothing\}$.
设$=_h$是h所诱导的等价关系，则$f =_h g$ iff $h(f) = h(f)$，即$f(A) = g(A)$，或$f \,\mathcal{R}\, g$，$\therefore =_h = \mathcal{R}$. 由函数标准分解定理，存在双射$\overline{h} : A^A/=_h \to h(A^A)$，即$A^A/\mathcal{R}$和$2^A - \{\varnothing\}$间存在双射.

五、设$\langle S_n, \circ\rangle$是$n$次对称群，其中$S_n$是集合$\{1, 2, \ldots, n\}$上所有置换的集合，$\circ$是函数的合成运算. 设$H \subseteq S_n$, $H = \{\pi \mid \pi \in S_n$, 且$\pi$是保持元素1不变的置换$\}$: (12分, 8+4)

(1) 证明H是S_n的子群;
证明：
① $\mathbb{1} \in H$：设$\mathbb{1}$是集合$\{1, 2, \ldots, n\}$上的恒等变换，则$\mathbb{1}$是S_n的幺，而$\mathbb{1}(1) = 1$，$\therefore \mathbb{1} \in H$.
② 运算封闭性：设$f, g \in H$，则$g \circ f(1) = g(1) = 1$，$\therefore g \circ f \in H$.
③ 取逆运算封闭性：设$f \in H$，则$f^{-1} \in S_n$，$f^{-1} \circ f = \mathbb{1}$，这样$f^{-1}(1) = f^{-1}(f(1)) = (f^{-1} \circ f)(1) = 1$. $\therefore f^{-1} \in H$.
综上所述，$H \leqslant S_n$.

(2) 设P为H在S_n中的所有左陪集组成的集合，用性质法描述集合P, 并求$|P|$.

解：$P = \{\{f \mid f \in S_n \wedge f(1) = i\} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$.

设$\mathcal{R}_l$是H所诱导的左同余关系，则$P = S_n/R_l$，而$|H| = (n-1)!$，$\therefore |P| = n$.

六、循环群$\langle N_m, +_m \rangle$，其中$N_m = \{0, 1, \ldots m-1\}(n \in \mathbb{N}, m > 0)$, $a +_m b = (a+b) \bmod m$，完成下列各题： (16分，6+2+6+2)

(1) 求$\langle N_6, +_6 \rangle$的所有子群；

解：$\{0\}$, $\{0, 3\}$, $\{0, 2, 4\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(2) 求$\langle N_6, +_6 \rangle$到$\langle N_5, +_5 \rangle$的所有同态；

解：只有唯一的一个平凡同态$h : N_6 \to N_5$, $i \mapsto 0$.

(3) 设h是$\langle N_m, +_m \rangle$到$\langle N_k, +_k \rangle$上的同态，证明$h(N_m)$是N_k的循环子群;

证明：由于h是同态，则$h(N_m) \leqslant N_k$；定义函数$f : \mathbb{Z} \to N_m, i \mapsto i \bmod m$, 则$f$是$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$到$N_m$上的满同态. 这样$h(N_m) = h(f(\mathbb{Z})) = \{h(f(i)) \mid i \in \mathbb{Z}\} = \{ih(f(1)) \mid i \in \mathbb{N}\}$. 即$h(N_m)$是循环群.

(4) 证明$N_m \simeq N_k (m \geqslant k)$，当且仅当$k \mid m$.

证明：

必要性：设h是N_m到N_k上的满同态，则$N_m / \ker(h) \cong N_k$，$\therefore |N_m| / |\ker(h)| = |N_k|$. 即$m = k|\ker(h)|$. 故$k \mid m$.

充分性：设$m = pk$，定义函数$h : N_m \to N_m, i \mapsto pi$，则$h$是$N_m$上的自同态，且$h(N_m) = \langle p \rangle$. 而$|\langle p \rangle| = m/p = k$，这样$\langle p \rangle$是一个阶数为$k$的循环群，而阶数为$p$的循环群彼此同构，因此存在$\langle p \rangle$到$N_k$上的同构$f$，这样$f \circ h$是$N_m$到$N_k$上的满同态，故$N_k \simeq N_k$.

七、简单无向图$G(n, m)$, 其中顶点数n为奇数. 证明：图G中奇数度数顶点的个数与图$\overline{G}$中奇数度数的顶点个数相等. (8分)

证明：设v是图G的一个顶点，记$\deg_G(v)$为v在图G中的度数，$\deg_{\overline{G}}(v)$为v在图$\overline{G}$中的度数，则$\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = n - 1$（偶数）. 这样如果$\deg_G(v)$为奇数，则$\deg_{\overline{G}}(v)$也是奇数；反之也然. 故图$G$中奇数度数顶点的个数与图$\overline{G}$中奇数度数的顶点个数相等.

八、设$G = \langle V, E \rangle$是无向连通图. 边$e \in E$称为桥边，当且仅当G删除边e后不再连通. 证明：e是桥边，当且仅当e属于图G的每颗生成树. (8分)

证明：必要性（反证法）：设T是G的生成树，且边e不在T上，这样T是G的一个删除边e后还保持连通的子图，矛盾.

充分性（反证法）：设e不是桥边，则图G删除e后还是连通图（记为G'），则对G'也存在生成树T, T也是G的生成树且e不在T中，这与条件矛盾.