命题逻辑

School of Computer
Wuhan University

1. 命题逻辑
   - 命题
   - 符号化
   - 合式公式的形式文法
   - 合式公式的形式语义
2. 公式之间的关系
   - 公式的语义性质
   - 逻辑等价
   - 永真蕴涵关系
   - 恒等变换与不等变换
   - 对偶性
3. 范式和基本定理
   - 极大项
   - 主合取范式
   - 主析取范式
   - 联结词的扩充与规约
4. 推理和证明方法
   - 有效结论
   - 自然推理的形式证明
   - 证明方法

1. 命题逻辑
   - 命题
   - 符号化
   - 合式公式的形式文法
   - 合式公式的形式语义
2. 公式之间的关系
   - 公式的语义性质
   - 逻辑等价
   - 永真蕴涵关系
   - 恒等变换与不等变换
   - 对偶性
3. 范式和基本定理
   - 极大项
   - 主合取范式
   - 主析取范式
   - 联结词的扩充与规约
4. 推理和证明方法
   - 有效结论
   - 自然推理的形式证明
   - 证明方法

1 命题逻辑
- 命题
- 符号化
- 合式公式的形式文法
- 合式公式的形式语义

2 公式之间的关系
- 公式的语义性质
- 逻辑等价
- 永真蕴涵关系
- 恒等变换与不等变换
- 对偶性

3 范式和基本定理
- 极大项
- 主合取范式
- 主析取范式
- 联结词的扩充与规约

4 推理和证明方法
- 有效结论
- 自然推理的形式证明
- 证明方法

重言式(Tautology)

Definition

设G是公式：

1. 如果对G的任意一个解释I，都有$I(G)=1$，称G为重言式（永真式）；
2. 如果存在G的一个解释I，$I(G)=1$，称G为可满足公式(satisfiable)；
3. 如果对G的任意一个解释I，都有$I(G)=0$，称G为矛盾式(invalid).

Example

公式$G=\neg((P\vee Q)\wedge P)\leftrightarrow\neg P$为重言式.

	P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg((P\vee Q)\wedge P)$	$\neg P$	G
$I_0=00$	0	0	0	0	1	1	1
$I_1=01$	0	1	1	0	1	1	1
$I_2=10$	1	0	1	1	0	0	1
$I_3=11$	1	1	1	1	0	0	1

重言式(Tautology)

Definition

设G是公式:

1. 如果对G的任意一个解释I, 都有$I(G)=1$, 称G为重言式(永真式);
2. 如果存在G的一个解释I, $I(G)=1$, 称G为可满足公式(satisfiable);
3. 如果对G的任意一个解释I, 都有$I(G)=0$, 称G为矛盾式(invalid).

Example

公式$G=\neg((P\vee Q)\wedge P)\leftrightarrow\neg P$为重言式.

	P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg((P\vee Q)\wedge P)$	$\neg P$	G
$I_0=00$	0	0	0	0	1	1	1
$I_1=01$	0	1	1	0	1	1	1
$I_2=10$	1	0	1	1	0	0	1
$I_3=11$	1	1	1	1	0	0	1

逻辑等价（Logical Equivalences）

Definition

称公式F和G逻辑等价，iff，公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式，记为：$F \Leftrightarrow G$.

Example

$$\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$$

Properties

1. $A \Leftrightarrow A$;
2. if $A \Leftrightarrow B$, then $B \Leftrightarrow A$;
3. if $A \Leftrightarrow B$, and $B \Leftrightarrow C$, then $A \Leftrightarrow C$;

逻辑等价 (Logical Equivalences)

Definition

称公式F和G逻辑等价, iff, 公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式, 记为: $F \Leftrightarrow G$.

Example

$$\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$$

Properties

1. $A \Leftrightarrow A$;
2. if $A \Leftrightarrow B$, then $B \Leftrightarrow A$;
3. if $A \Leftrightarrow B$, and $B \Leftrightarrow C$, then $A \Leftrightarrow C$;

逻辑等价(Logical Equivalences)

Definition

称公式F和G逻辑等价, iff, 公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式, 记为: $F \Leftrightarrow G$.

Example

$$\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$$

Properties

1. $A \Leftrightarrow A$;
2. if $A \Leftrightarrow B$, then $B \Leftrightarrow A$;
3. if $A \Leftrightarrow B$, and $B \Leftrightarrow C$, then $A \Leftrightarrow C$;

常用的"恒等式"

$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	双重否定律
$P \wedge P \Leftrightarrow P$ $P \vee P \Leftrightarrow P$	幂等律
$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	交换律
$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	结合律
$(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	分配律
$(P \wedge Q) \vee P \Leftrightarrow P$ $(P \vee Q) \wedge P \Leftrightarrow P$	吸收律
$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	蕴涵表达式
$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	De Morgan律
$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$	
$(P \vee \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{T}$	排中律

永真蕴涵关系

称公式F永真蕴涵(Logical Implication)公式G, iff, 公式$(F) \to (G)$是重言式, 记为: $F \Rightarrow G$.

Example

$$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$$

Remarks

对F和G中出现的所有原子的一个指派I, 都有$I(F) \leq I(G)$; 即F为真的所有可能涵盖在G的为真的可能之中; 相当于代数中的"不等式".

Properties

1. $A \Rightarrow A$;
2. if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow C$, then $A \Rightarrow C$;
3. $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow A$ iff $A \Leftrightarrow B$;
4. if $A \Rightarrow B$, then $\neg B \Rightarrow \neg A$;

永真蕴涵关系

称公式F永真蕴涵(Logical Implication)公式G, iff, 公式$(F) \to (G)$是重言式, 记为: $F \Rightarrow G$.

Example

$$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$$

Remarks

对F和G中出现的所有原子的一个指派I, 都有$I(F) \leq I(G)$; 即F为真的所有可能涵盖在G的为真的可能之中; 相当于代数中的"不等式".

Properties

1. $A \Rightarrow A$;
2. if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow C$, then $A \Rightarrow C$;
3. $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow A$ iff $A \Leftrightarrow B$;
4. if $A \Rightarrow B$, then $\neg B \Rightarrow \neg A$;

永真蕴涵关系

称公式F永真蕴涵(Logical Implication)公式G, iff, 公式$(F) \to (G)$是重言式, 记为: $F \Rightarrow G$.

Example

$$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$$

Remarks

对F和G中出现的所有原子的一个指派I, 都有$I(F) \leq I(G)$; 即F为真的所有可能涵盖在G的为真的可能之中; 相当于代数中的“不等式”.

Properties

1. $A \Rightarrow A$;
2. if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow C$, then $A \Rightarrow C$;
3. $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow A$ iff $A \Leftrightarrow B$;
4. if $A \Rightarrow B$, then $\neg B \Rightarrow \neg A$;

永真蕴涵关系

称公式F永真蕴涵(Logical Implication)公式G, iff, 公式$(F) \to (G)$是重言式，记为：$F \Rightarrow G$.

Example

$$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$$

Remarks

对F和G中出现的所有原子的一个指派I，都有$I(F) \le I(G)$；即F为真的所有可能涵盖在G的为真的可能之中；相当于代数中的"不等式".

Properties

1. $A \Rightarrow A$;
2. if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow C$, then $A \Rightarrow C$;
3. $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow A$ iff $A \Leftrightarrow B$;
4. if $A \Rightarrow B$, then $\neg B \Rightarrow \neg A$;

常用的永真蕴涵关系

1	$P \Rightarrow P \vee Q$
2	$P \wedge Q \Rightarrow P$
3	$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$
4	$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$
5	$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$
6	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$
7	$(P \rightarrow Q) \Rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$
8	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S)$

恒等式与不等式的证明

方法

- 真值表法：判断$A \leftrightarrow B$或$A \rightarrow B$的真值表是否恒为1;
- 对不等式$A \Rightarrow B$,只需要判断在A为真时，B亦真；或者，B为假时，A亦假；
- 恒等、不等变换.

Example: $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

Method 1:

1. 设，$P \wedge (P \rightarrow Q)$为真；
2. 则，P为真，$P \rightarrow Q$亦真；
3. 所以，Q为真. □

Method 2:

1. 设，Q为假；
2. 分情况讨论：
   - P为真，则，$P \rightarrow Q$为假，所以，$P \wedge (P \rightarrow Q)$为假；
   - P为假，则，$P \wedge (P \rightarrow Q)$为假； □

恒等式与不等式的证明

方法

- 真值表法：判断$A \leftrightarrow B$或$A \rightarrow B$的真值表是否恒为1;
- 对不等式$A \Rightarrow B$,只需要判断在A为真时，B亦真；或者，B为假时，A亦假；
- 恒等、不等变换.

Example: $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

Method 1:

1. 设，$P \wedge (P \rightarrow Q)$为真；
2. 则，P为真，$P \rightarrow Q$亦真；
3. 所以，Q为真. □

Method 2:

1. 设，Q为假；
2. 分情况讨论：
   - P为真，则，$P \rightarrow Q$为假，所以，$P \wedge (P \rightarrow Q)$为假；
   - P为假，则，$P \wedge (P \rightarrow Q)$为假； □

恒等变换与不等变换

Definition (Substitution)

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一公式，F是另一公式，设P_i是公式G中的某一原子，将公式G中的P_i的每个出现用F替换，称为代入，代入后所得到的公式$G(P_1, \ldots, P_{i-1}, F/P_i, P_{i+1}, \ldots, P_n)$称为代入实例.

Example

1. $G = (P \wedge Q) \vee P$, $F = \neg P \vee R$;
2. $G(F) = ((\neg P \vee R) \wedge Q) \vee (\neg P \vee R)$
3. $G(F) \neq (\neg P \vee R \wedge Q) \vee \neg P \vee R$

Theorem (代入规则)

设公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是重言式，则其任意的一个代入实例$G(P_1, \ldots, P_{i-1}, F/P_i, P_{i+1}, \ldots, P_n)$ 也是重言式.

Corollary (代入规则)

- 设$A \Leftrightarrow B$，则$A(F/P) \Leftrightarrow B(F/P)$也是重言式;
- 设$A \Rightarrow B$，则$A(F/P) \Rightarrow B(F/P)$也是重言式.

恒等变换与不等变换

Definition (Substitution)

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一公式，F是另一公式，设P_i是公式G中的某一原子，将公式G中的P_i的每个出现用F替换，称为代入，代入后所得到的公式$G(P_1, \ldots, P_{i-1}, F/P_i, P_{i+1}, \ldots, P_n)$称为代入实例.

Example

1. $G = (P \wedge Q) \vee P$, $F = \neg P \vee R$;
2. $G(F) = ((\neg P \vee R) \wedge Q) \vee (\neg P \vee R)$
3. $G(F) \neq (\neg P \vee R \wedge Q) \vee \neg P \vee R$

Theorem (代入规则)

设公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是重言式，则其任意的一个代入实例$G(P_1, \ldots, P_{i-1}, F/P_i, P_{i+1}, \ldots, P_n)$ 也是重言式.

Corollary (代入规则)

- 设$A \Leftrightarrow B$，则$A(F/P) \Leftrightarrow B(F/P)$也是重言式;
- 设$A \Rightarrow B$，则$A(F/P) \Rightarrow B(F/P)$也是重言式.

恒等变换与不等变换

Definition (Substitution)

设$G(P_1,P_2,\ldots,P_n)$是一公式，F是另一公式，设P_i是公式G中的某一原子，将公式G中的P_i的每个出现用F替换，称为代入，代入后所得到的公式$G(P_1,\ldots,P_{i-1},F/P_i,P_{i+1},\ldots,P_n)$称为代入实例.

Example

1. $G=(P\wedge Q)\vee P$, $F=\neg P\vee R$;
2. $G(F)=((\neg P\vee R)\wedge Q)\vee(\neg P\vee R)$
3. $G(F)\neq(\neg P\vee R\wedge Q)\vee\neg P\vee R$

Theorem (代入规则)

设公式$G(P_1,P_2,\ldots,P_n)$是重言式，则其任意的一个代入实例$G(P_1,\ldots,P_{i-1},F/P_i,P_{i+1},\ldots,P_n)$ 也是重言式.

Corollary (代入规则)

- 设$A\Leftrightarrow B$，则$A(F/P)\Leftrightarrow B(F/P)$也是重言式;
- 设$A\Rightarrow B$，则$A(F/P)\Rightarrow B(F/P)$也是重言式.

恒等变换与不等变换

Definition (Substitution)

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一公式，F是另一公式，设P_i是公式G中的某一原子，将公式G中的P_i的每个出现用F替换，称为代入，代入后所得到的公式$G(P_1, \ldots, P_{i-1}, F/P_i, P_{i+1}, \ldots, P_n)$称为代入实例.

Example

1. $G = (P \wedge Q) \vee P$, $F = \neg P \vee R$;
2. $G(F) = ((\neg P \vee R) \wedge Q) \vee (\neg P \vee R)$
3. $G(F) \neq (\neg P \vee R \wedge Q) \vee \neg P \vee R$

Theorem (代入规则)

设公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是重言式，则其任意的一个代入实例$G(P_1, \ldots, P_{i-1}, F/P_i, P_{i+1}, \ldots, P_n)$ 也是重言式.

Corollary (代入规则)

- 设$A \Leftrightarrow B$, 则$A(F/P) \Leftrightarrow B(F/P)$也是重言式;
- 设$A \Rightarrow B$, 则$A(F/P) \Rightarrow B(F/P)$也是重言式.

替换规则

Definition (Replacement)

设G是一公式，A是在G的某一个位置出现的子公式，将该子公式用公式B置换的过程称为替换.

Example

1. $G = (P \rightarrow Q) \wedge P$, $A = \neg P \vee Q$;
2. $G' = (\neg P \vee Q) \wedge P$

Theorem (替换规则)

设，G'是公式G中的某个子公式A用B替换后得到的公式，如果$A \Leftrightarrow B$，则$G \Leftrightarrow G'$.

Example

$$\overbrace{\underbrace{(P \rightarrow Q)}_{A} \wedge P}^{G} \Leftrightarrow \overbrace{\underbrace{(\neg P \vee Q)}_{B} \wedge P}^{G'}$$

替换规则

Definition (Replacement)

设G是一公式，A是在G的某一个位置出现的子公式，将该子公式用公式B置换的过程称为替换.

Example

1. $G = (P \to Q) \wedge P, \quad B = \neg P \vee Q;$
2. $G\prime = (\neg P \vee Q) \wedge P$

Theorem (替换规则)

设，$G\prime$是公式G中的某个子公式A用B替换后得到的公式，如果$A \Leftrightarrow B$，则$G \Leftrightarrow G\prime$.

Example

$$\overbrace{\underbrace{(P \to Q)}_{A} \wedge P}^{G} \Leftrightarrow \overbrace{\underbrace{(\neg P \vee Q)}_{B} \wedge P}^{G\prime}$$

替换规则

Definition (Replacement)

设G是一公式，A是在G的某一个位置出现的子公式，将该子公式用公式B置换的过程称为替换.

Example

1. $G = (P \to Q) \wedge P, \quad B = \neg P \vee Q;$
2. $G\prime = (\neg P \vee Q) \wedge P$

Theorem (替换规则)

设，$G\prime$是公式G中的某个子公式A用B替换后得到的公式，如果$A \Leftrightarrow B$，则$G \Leftrightarrow G\prime$.

Example

$$\overbrace{\underbrace{(P \to Q)}_{A} \wedge P}^{G} \Leftrightarrow \overbrace{\underbrace{(\neg P \vee Q)}_{B} \wedge P}^{G\prime}$$

替换规则

Definition (Replacement)

设G是一公式，A是在G的某一个位置出现的子公式，将该子公式用公式B置换的过程称为替换.

Example

1. $G = (P \to Q) \wedge P$, $B = \neg P \vee Q$;
2. $G\prime = (\neg P \vee Q) \wedge P$

Theorem (替换规则)

设，$G\prime$是公式G中的某个子公式A用B替换后得到的公式，如果$A \Leftrightarrow B$，则$G \Leftrightarrow G\prime$.

Example

$$\overbrace{(\underbrace{P \to Q}_{A}) \wedge P}^{G} \Leftrightarrow \overbrace{(\underbrace{\neg P \vee Q}_{B}) \wedge P}^{G\prime}$$

Remark

替换规则只能对恒等式成立，对不等式不成立！即：if $A \Rightarrow B$，则 $G \not\Rightarrow G\prime$.

Example

$$\underbrace{P \wedge Q}_{A} \Rightarrow \underbrace{P}_{B}$$

$$\underbrace{\neg(P \wedge Q)}_{G} \not\Rightarrow \underbrace{\neg P}_{G\prime}$$

Example (1/3)

Example

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

Proof.

		$\underline{(P \rightarrow Q)} \rightarrow (Q \vee R)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\underline{(\neg P \vee Q) \rightarrow (Q \vee R)}$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg\underline{(\neg P \vee Q)} \vee (Q \vee R)$	(代入+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$(\underline{\neg\neg P} \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$\underline{(P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)}$	(替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$(\underline{(P \wedge \neg Q) \vee Q}) \vee R$	(代入+结合律)
6	$\Leftrightarrow$	$((P \vee Q) \wedge \underline{(\neg Q \vee Q)}) \vee R$	(代入+替换+分配律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\underline{(P \vee Q) \wedge \mathbb{T}}) \vee R$	(替换+排中律)
8	$\Leftrightarrow$	$(P \vee Q) \vee R$	(替换+简化式)
9	$=$	RHS	

Example (1/3)

Example

$$(P \to Q) \to (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

Proof.

		$(\underline{P \to Q}) \to (Q \vee R)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\underline{(\neg P \vee Q) \to (Q \vee R)}$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\underline{\neg(\neg P \vee Q)} \vee (Q \vee R)$	(代入+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$(\underline{\neg\neg P} \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$\underline{(P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)}$	(替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$(\underline{(P \wedge \neg Q) \vee Q}) \vee R$	(代入+结合律)
6	$\Leftrightarrow$	$((P \vee Q) \wedge \underline{(\neg Q \vee Q)}) \vee R$	(代入+替换+分配律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\underline{(P \vee Q) \wedge \mathbb{T}}) \vee R$	(替换+排中律)
8	$\Leftrightarrow$	$(P \vee Q) \vee R$	(替换+简化式)
9	$=$	RHS	

Example (1/3)

Example

$$(P \to Q) \to (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

Proof.

		$(\underline{P \to Q}) \to (Q \vee R)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\underline{(\neg P \vee Q) \to (Q \vee R)}$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\underline{\neg(\neg P \vee Q)} \vee (Q \vee R)$	(代入+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$(\underline{\neg\neg P} \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$\underline{(P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)}$	(替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$(\underline{(P \wedge \neg Q) \vee Q}) \vee R$	(代入+结合律)
6	$\Leftrightarrow$	$((P \vee Q) \wedge \underline{(\neg Q \vee Q)}) \vee R$	(代入+替换+分配律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\underline{(P \vee Q) \wedge \mathbb{T}}) \vee R$	(替换+排中律)
8	$\Leftrightarrow$	$(P \vee Q) \vee R$	(替换+简化式)
9	$=$	RHS	

Example (1/3)

Example

$$(P \to Q) \to (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

Proof.

$$\begin{array}{llll}
 & & (\underline{P \to Q}) \to (Q \vee R) & \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q) \to (Q \vee R)} & (\text{替换+蕴涵表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow & \underline{\neg(\neg P \vee Q)} \vee (Q \vee R) & (\text{代入+蕴涵表达式}) \\
3 & \Leftrightarrow & (\underline{\neg\neg P} \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R) & (\text{代入+替换+De Morgan}) \\
4 & \Leftrightarrow & \underline{(P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)} & (\text{替换+双重否定}) \\
5 & \Leftrightarrow & (\underline{(P \wedge \neg Q) \vee Q}) \vee R & (\text{代入+结合律}) \\
6 & \Leftrightarrow & ((P \vee Q) \wedge \underline{(\neg Q \vee Q)}) \vee R & (\text{代入+替换+分配律}) \\
7 & \Leftrightarrow & (\underline{(P \vee Q) \wedge \mathbb{T}}) \vee R & (\text{替换+排中律}) \\
8 & \Leftrightarrow & (P \vee Q) \vee R & (\text{替换+简化式}) \\
9 & = & RHS &
\end{array}$$

Example (1/3)

Example

$$(P \to Q) \to (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

Proof.

		$(\underline{P \to Q}) \to (Q \vee R)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\underline{(\neg P \vee Q) \to (Q \vee R)}$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\underline{\neg(\neg P \vee Q)} \vee (Q \vee R)$	(代入+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$(\underline{\neg\neg P} \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$\underline{(P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)}$	(替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$(\underline{(P \wedge \neg Q) \vee Q}) \vee R$	(代入+结合律)
6	$\Leftrightarrow$	$((P \vee Q) \wedge \underline{(\neg Q \vee Q)}) \vee R$	(代入+替换+分配律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\underline{(P \vee Q) \wedge \mathbb{T}}) \vee R$	(替换+排中律)
8	$\Leftrightarrow$	$(P \vee Q) \vee R$	(替换+简化式)
9	$=$	RHS	

Example (1/3)

Example

$$(P \to Q) \to (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

Proof.

$$
\begin{array}{lll r}
 & & (\underline{P \to Q}) \to (Q \vee R) & \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q) \to (Q \vee R)} & (\text{替换+蕴涵表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow & \underline{\neg(\neg P \vee Q)} \vee (Q \vee R) & (\text{代入+蕴涵表达式}) \\
3 & \Leftrightarrow & (\underline{\neg\neg P} \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R) & (\text{代入+替换+De Morgan}) \\
4 & \Leftrightarrow & \underline{(P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)} & (\text{替换+双重否定}) \\
5 & \Leftrightarrow & \underline{((P \wedge \neg Q) \vee Q)} \vee R & (\text{代入+结合律}) \\
6 & \Leftrightarrow & ((P \vee Q) \wedge \underline{(\neg Q \vee Q)}) \vee R & (\text{代入+替换+分配律}) \\
7 & \Leftrightarrow & (\underline{(P \vee Q) \wedge \mathbb{T}}) \vee R & (\text{替换+排中律}) \\
8 & \Leftrightarrow & (P \vee Q) \vee R & (\text{替换+简化式}) \\
9 & = & RHS &
\end{array}
$$

Example (1/3)

Example

$$(P \to Q) \to (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

Proof.

		$(P \to Q) \to (Q \vee R)$	
1	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \vee Q) \to (Q \vee R)$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \vee R)$	(代入+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$(\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$(P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)$	(替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$((P \wedge \neg Q) \vee Q) \vee R$	(代入+结合律)
6	$\Leftrightarrow$	$((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee R$	(代入+替换+分配律)
7	$\Leftrightarrow$	$((P \vee Q) \wedge \mathbb{T}) \vee R$	(替换+排中律)
8	$\Leftrightarrow$	$(P \vee Q) \vee R$	(替换+简化式)
9	$=$	RHS	

Example (1/3)

Example

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

Proof.

$$\begin{array}{lll} & & \underline{(P \rightarrow Q)} \rightarrow (Q \vee R) & \\ 1 & \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q) \rightarrow (Q \vee R)} & (\text{替换+蕴涵表达式}) \\ 2 & \Leftrightarrow & \underline{\neg(\neg P \vee Q)} \vee (Q \vee R) & (\text{代入+蕴涵表达式}) \\ 3 & \Leftrightarrow & (\underline{\neg\neg P} \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R) & (\text{代入+替换+De Morgan}) \\ 4 & \Leftrightarrow & \underline{(P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)} & (\text{替换+双重否定}) \\ 5 & \Leftrightarrow & (\underline{(P \wedge \neg Q) \vee Q}) \vee R & (\text{代入+结合律}) \\ 6 & \Leftrightarrow & ((P \vee Q) \wedge \underline{(\neg Q \vee Q)}) \vee R & (\text{代入+替换+分配律}) \\ 7 & \Leftrightarrow & (\underline{(P \vee Q) \wedge \mathbb{T}}) \vee R & (\text{替换+排中律}) \\ 8 & \Leftrightarrow & (P \vee Q) \vee R & (\text{替换+简化式}) \\ 9 & = & RHS & \end{array}$$

Example (1/3)

Example

$$(P \to Q) \to (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

Proof.

$$
\begin{array}{lll r}
 & & \underline{(P \to Q)} \to (Q \vee R) & \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q) \to (Q \vee R)} & (\text{替换+蕴涵表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow & \underline{\neg(\neg P \vee Q)} \vee (Q \vee R) & (\text{代入+蕴涵表达式}) \\
3 & \Leftrightarrow & (\underline{\neg\neg P} \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R) & (\text{代入+替换+De Morgan}) \\
4 & \Leftrightarrow & \underline{(P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)} & (\text{替换+双重否定}) \\
5 & \Leftrightarrow & \underline{((P \wedge \neg Q) \vee Q)} \vee R & (\text{代入+结合律}) \\
6 & \Leftrightarrow & ((P \vee Q) \wedge \underline{(\neg Q \vee Q)}) \vee R & (\text{代入+替换+分配律}) \\
7 & \Leftrightarrow & \underline{((P \vee Q) \wedge \mathbb{T})} \vee R & (\text{替换+排中律}) \\
8 & \Leftrightarrow & (P \vee Q) \vee R & (\text{替换+简化式}) \\
9 & = & RHS &
\end{array}
$$

Example (1/3)

Example

$$(P \to Q) \to (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

Proof.

$$
\begin{array}{lll l}
 & & \underline{(P \to Q)} \to (Q \lor R) & \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)} & (\text{替换+蕴涵表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow & \underline{\neg(\neg P \lor Q)} \lor (Q \lor R) & (\text{代入+蕴涵表达式}) \\
3 & \Leftrightarrow & (\underline{\neg\neg P} \land \neg Q) \lor (Q \lor R) & (\text{代入+替换+De Morgan}) \\
4 & \Leftrightarrow & \underline{(P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)} & (\text{替换+双重否定}) \\
5 & \Leftrightarrow & (\underline{(P \land \neg Q) \lor Q}) \lor R & (\text{代入+结合律}) \\
6 & \Leftrightarrow & ((P \lor Q) \land \underline{(\neg Q \lor Q)}) \lor R & (\text{代入+替换+分配律}) \\
7 & \Leftrightarrow & (\underline{(P \lor Q) \land \mathbb{T}}) \lor R & (\text{替换+排中律}) \\
8 & \Leftrightarrow & (P \lor Q) \lor R & (\text{替换+简化式}) \\
9 & = & RHS &
\end{array}
$$

Example (1/3)

Example

$$(P \to Q) \to (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

Proof.

		$(\underline{P \to Q}) \to (Q \vee R)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\underline{(\neg P \vee Q) \to (Q \vee R)}$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\underline{\neg(\neg P \vee Q)} \vee (Q \vee R)$	(代入+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$(\underline{\neg\neg P} \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$\underline{(P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)}$	(替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$(\underline{(P \wedge \neg Q) \vee Q}) \vee R$	(代入+结合律)
6	$\Leftrightarrow$	$((P \vee Q) \wedge \underline{(\neg Q \vee Q)}) \vee R$	(代入+替换+分配律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\underline{(P \vee Q) \wedge \mathbb{T}}) \vee R$	(替换+排中律)
8	$\Leftrightarrow$	$(P \vee Q) \vee R$	(替换+简化式)
9	$=$	RHS	

Example (1/3)

Example

$$(P \to Q) \to (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

Proof.

		$(P \to Q) \to (Q \vee R)$	
1	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \vee Q) \to (Q \vee R)$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \vee R)$	(代入+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$(\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$(P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)$	(替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$((P \wedge \neg Q) \vee Q) \vee R$	(代入+结合律)
6	$\Leftrightarrow$	$((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee R$	(代入+替换+分配律)
7	$\Leftrightarrow$	$((P \vee Q) \wedge \mathbb{T}) \vee R$	(替换+排中律)
8	$\Leftrightarrow$	$(P \vee Q) \vee R$	(替换+简化式)
9	$=$	RHS	

Example (2/3)

Example

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$ 永真;
等价于: $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;
等价于: $\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$;
Proof.

		$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$	(代入+替换+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$\neg\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg\neg P)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$	(代入+替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$	(代入+替换+分配律)
6	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$	(替换+排中律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \land \neg Q) \land P$	(替换+简化式)
8	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \land P) \land \neg Q$	(结合律)
9	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F} \land \neg Q$	(替换+排中律)
10	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F}$	(简化式)

Example (2/3)

Example

$$(P \to Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: $(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P$ 永真;

等价于: $(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;

等价于: $\neg((P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$;

Proof.

		$\neg((P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \to \neg P)$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee \neg P)$	(代入+替换+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$\neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \wedge \neg\neg P)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge P$	(代入+替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge P$	(代入+替换+分配律)
6	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \wedge \neg Q) \vee \mathbb{F}) \wedge P$	(替换+排中律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \wedge \neg Q) \wedge P$	(替换+简化式)
8	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \wedge P) \wedge \neg Q$	(结合律)
9	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F} \wedge \neg Q$	(替换+排中律)
10	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F}$	(简化式)

Example (2/3)

Example

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$ 永真;
等价于: $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;
等价于: $\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$;

Proof.

		$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$	(代入+替换+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$\neg\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg\neg P)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$	(代入+替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$	(代入+替换+分配律)
6	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$	(替换+排中律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \land \neg Q) \land P$	(替换+简化式)
8	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \land P) \land \neg Q$	(结合律)
9	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F} \land \neg Q$	(替换+排中律)
10	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F}$	(简化式)

Example (2/3)

Example

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$ 永真;
等价于: $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;
等价于: $\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$;

Proof.

		$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$	(代入+替换+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$\neg\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg\neg P)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$	(代入+替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$	(代入+替换+分配律)
6	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$	(替换+排中律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \land \neg Q) \land P$	(替换+简化式)
8	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \land P) \land \neg Q$	(结合律)
9	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F} \land \neg Q$	(替换+排中律)
10	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F}$	(简化式)

Example (2/3)

Example

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$ 永真;
等价于: $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;
等价于: $\neg((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$;
Proof.

		$\neg((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P)$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee \neg P)$	(代入+替换+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$\neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \wedge \neg\neg P)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge P$	(代入+替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge P$	(代入+替换+分配律)
6	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \wedge \neg Q) \vee \mathbb{F}) \wedge P$	(替换+排中律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \wedge \neg Q) \wedge P$	(替换+简化式)
8	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \wedge P) \wedge \neg Q$	(结合律)
9	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F} \wedge \neg Q$	(替换+排中律)
10	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F}$	(简化式)

Example (2/3)

Example

$$(P \to Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于：$(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P$ 永真；
等价于：$(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$；
等价于：$\neg((P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$；
Proof.

$$\begin{array}{llll}
 & & \neg((\underline{P \to Q}) \wedge \neg Q \to \neg P) & \\
1 & \Leftrightarrow & \neg(\underline{(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \to \neg P}) & (\text{替换+蕴涵表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow & \underline{\neg(\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee \neg P)} & (\text{代入+替换+蕴涵表达式}) \\
3 & \Leftrightarrow & \underline{\neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q)} \wedge \underline{\neg\neg P} & (\text{代入+替换+De Morgan}) \\
4 & \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q} \wedge P & (\text{代入+替换+双重否定}) \\
5 & \Leftrightarrow & ((\neg P \wedge \neg Q) \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge P & (\text{代入+替换+分配律}) \\
6 & \Leftrightarrow & (\underline{(\neg P \wedge \neg Q) \vee \mathbb{F}}) \wedge P & (\text{替换+排中律}) \\
7 & \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \wedge \neg Q) \wedge P} & (\text{替换+简化式}) \\
8 & \Leftrightarrow & (\underline{\neg P \wedge P}) \wedge \neg Q & (\text{结合律}) \\
9 & \Leftrightarrow & \underline{\mathbb{F} \wedge \neg Q} & (\text{替换+排中律}) \\
10 & \Leftrightarrow & \mathbb{F} & (\text{简化式})
\end{array}$$

Example (2/3)

Example

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$ 永真;
等价于: $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;
等价于: $\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$;
Proof.

		$\neg((\underline{P \to Q}) \land \neg Q \to \neg P)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\neg(\underline{(\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P})$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$	(代入+替换+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$\neg\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg\neg P$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$	(代入+替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$	(代入+替换+分配律)
6	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$	(替换+排中律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \land \neg Q) \land P$	(替换+简化式)
8	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \land P) \land \neg Q$	(结合律)
9	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F} \land \neg Q$	(替换+排中律)
10	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F}$	(简化式)

Example (2/3)

Example

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于：$(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$ 永真；
等价于：$(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$；
等价于：$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$；
Proof.

		$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$	(代入+替换+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$\neg\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg\neg P)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$	(代入+替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$	(代入+替换+分配律)
6	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$	(替换+排中律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \land \neg Q) \land P$	(替换+简化式)
8	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \land P) \land \neg Q$	(结合律)
9	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F} \land \neg Q$	(替换+排中律)
10	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F}$	(简化式)

Example (2/3)

Example

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$ 永真;
等价于: $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;
等价于: $\neg((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$;
Proof.

		$\neg((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P)$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee \neg P)$	(代入+替换+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$\neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \wedge \neg\neg P)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge P$	(代入+替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge P$	(代入+替换+分配律)
6	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \wedge \neg Q) \vee \mathbb{F}) \wedge P$	(替换+排中律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \wedge \neg Q) \wedge P$	(替换+简化式)
8	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \wedge P) \wedge \neg Q$	(结合律)
9	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F} \wedge \neg Q$	(替换+排中律)
10	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F}$	(简化式)

Example (2/3)

Example

$$(P \to Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: $(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P$ 永真;
等价于: $(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;
等价于: $\neg((P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$;
Proof.

		$\neg((P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \to \neg P)$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee \neg P)$	(代入+替换+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$\neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \wedge \neg\neg P)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge P$	(代入+替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge P$	(代入+替换+分配律)
6	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \wedge \neg Q) \vee \mathbb{F}) \wedge P$	(替换+排中律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \wedge \neg Q) \wedge P$	(替换+简化式)
8	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \wedge P) \wedge \neg Q$	(结合律)
9	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F} \wedge \neg Q$	(替换+排中律)
10	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F}$	(简化式)

Example (2/3)

Example

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$ 永真;
等价于: $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;
等价于: $\neg((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$;
Proof.

		$\neg((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P)$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee \neg P)$	(代入+替换+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$\neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \wedge \neg\neg P)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge P$	(代入+替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge P$	(代入+替换+分配律)
6	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \wedge \neg Q) \vee \mathbb{F}) \wedge P$	(替换+排中律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \wedge \neg Q) \wedge P$	(替换+简化式)
8	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \wedge P) \wedge \neg Q$	(结合律)
9	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F} \wedge \neg Q$	(替换+排中律)
10	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F}$	(简化式)

Example (2/3)

Example

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$ 永真;
等价于: $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;
等价于: $\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$;
Proof.

		$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$	(代入+替换+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$\neg\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg\neg P)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$	(代入+替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$	(代入+替换+分配律)
6	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$	(替换+排中律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \land \neg Q) \land P$	(替换+简化式)
8	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \land P) \land \neg Q$	(结合律)
9	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F} \land \neg Q$	(替换+排中律)
10	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F}$	(简化式)

Example (2/3)

Example

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$ 永真;
等价于: $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;
等价于: $\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$;

Proof.

		$\neg(\underline{(P \to Q)} \land \neg Q \to \neg P)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\neg(\underline{(\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P})$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\underline{\neg(\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)}$	(代入+替换+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$\underline{\neg\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q)} \land \underline{\neg\neg P})$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$\underline{(\neg P \lor Q) \land \neg Q} \land P$	(代入+替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \land \neg Q) \lor \underline{(Q \land \neg Q)}) \land P$	(代入+替换+分配律)
6	$\Leftrightarrow$	$(\underline{(\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}}) \land P$	(替换+排中律)
7	$\Leftrightarrow$	$\underline{(\neg P \land \neg Q) \land P}$	(替换+简化式)
8	$\Leftrightarrow$	$(\underline{\neg P \land P}) \land \neg Q$	(结合律)
9	$\Leftrightarrow$	$\underline{\mathbb{F} \land \neg Q}$	(替换+排中律)
10	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F}$	(简化式)

Example (2/3)

Example

$$(P \to Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: $(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P$ 永真;
等价于: $(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;
等价于: $\neg((P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$;
Proof.

$$\begin{array}{clll}
 & & \neg((P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P) & \\
1 & \Leftrightarrow & \neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \to \neg P) & (\text{替换+蕴涵表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow & \neg(\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee \neg P) & (\text{代入+替换+蕴涵表达式}) \\
3 & \Leftrightarrow & \neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \wedge \neg\neg P) & (\text{代入+替换+De Morgan}) \\
4 & \Leftrightarrow & (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge P & (\text{代入+替换+双重否定}) \\
5 & \Leftrightarrow & ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge P & (\text{代入+替换+分配律}) \\
6 & \Leftrightarrow & ((\neg P \wedge \neg Q) \vee \mathbb{F}) \wedge P & (\text{替换+排中律}) \\
7 & \Leftrightarrow & (\neg P \wedge \neg Q) \wedge P & (\text{替换+简化式}) \\
8 & \Leftrightarrow & (\neg P \wedge P) \wedge \neg Q & (\text{结合律}) \\
9 & \Leftrightarrow & \mathbb{F} \wedge \neg Q & (\text{替换+排中律}) \\
10 & \Leftrightarrow & \mathbb{F} & (\text{简化式})
\end{array}$$

Example (2/3)

Example

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$ 永真;
等价于: $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;
等价于: $\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$;
Proof.

		$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$	
1	$\Leftrightarrow$	$\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$	(代入+替换+蕴涵表达式)
3	$\Leftrightarrow$	$\neg\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg\neg P)$	(代入+替换+De Morgan)
4	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$	(代入+替换+双重否定)
5	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$	(代入+替换+分配律)
6	$\Leftrightarrow$	$((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$	(替换+排中律)
7	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \land \neg Q) \land P$	(替换+简化式)
8	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \land P) \land \neg Q$	(结合律)
9	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F} \land \neg Q$	(替换+排中律)
10	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{F}$	(简化式)

Example (2/3)

Example

$$(P \to Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: $(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P$ 永真;
等价于: $(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;
等价于: $\neg((P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$;
Proof.

$$\begin{array}{cclr}
 & & \neg((P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P) & \\
1 & \Leftrightarrow & \neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \to \neg P) & (\text{替换+蕴涵表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow & \neg(\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee \neg P) & (\text{代入+替换+蕴涵表达式}) \\
3 & \Leftrightarrow & \neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \wedge \neg\neg P) & (\text{代入+替换+De Morgan}) \\
4 & \Leftrightarrow & (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge P & (\text{代入+替换+双重否定}) \\
5 & \Leftrightarrow & ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge P & (\text{代入+替换+分配律}) \\
6 & \Leftrightarrow & ((\neg P \wedge \neg Q) \vee \mathbb{F}) \wedge P & (\text{替换+排中律}) \\
7 & \Leftrightarrow & (\neg P \wedge \neg Q) \wedge P & (\text{替换+简化式}) \\
8 & \Leftrightarrow & (\neg P \wedge P) \wedge \neg Q & (\text{结合律}) \\
9 & \Leftrightarrow & \mathbb{F} \wedge \neg Q & (\text{替换+排中律}) \\
10 & \Leftrightarrow & \mathbb{F} & (\text{简化式})
\end{array}$$

Example (3/3)

Example

化简公式: $(P \to Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$;

解:

$$
\begin{array}{lll}
 & & \underline{(P \to Q \vee \neg R)} \wedge \neg P \wedge Q \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q} \quad (\text{代入+替换+蕴涵表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow & \neg P \wedge Q \quad (\text{代入+替换+吸收律})
\end{array}
$$

Example

化简公式: $(P \to Q) \wedge (P \to R)$;

解:

$$
\begin{array}{lll}
 & & (\underline{P \to Q}) \wedge (\underline{P \to R}) \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)} \quad (\text{替换+蕴涵表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow & \underline{\neg P \vee (Q \wedge R)} \quad (\text{代入+分配率}) \\
3 & \Leftrightarrow & P \to (Q \wedge R) \quad (\text{代入+蕴涵表达式})
\end{array}
$$

Example (3/3)

Example

化简公式: $(P \to Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$;

解:

$$
\begin{array}{lll}
 & & \underline{(P \to Q \vee \neg R)} \wedge \neg P \wedge Q \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q} \quad (\text{代入+替换+蕴涵表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow & \neg P \wedge Q \quad (\text{代入+替换+吸收律})
\end{array}
$$

Example

化简公式: $(P \to Q) \wedge (P \to R)$;

解:

$$
\begin{array}{lll}
 & & (\underline{P \to Q}) \wedge (\underline{P \to R}) \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)} \quad (\text{替换+蕴涵表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow & \underline{\neg P \vee (Q \wedge R)} \quad (\text{代入+分配率}) \\
3 & \Leftrightarrow & P \to (Q \wedge R) \quad (\text{代入+蕴涵表达式})
\end{array}
$$

Example (3/3)

Example

化简公式: $(P \rightarrow Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$;

解:

$$\underline{(P \rightarrow Q \vee \neg R)} \wedge \neg P \wedge Q$$

1 $\Leftrightarrow$ $\underline{(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge \neg P} \wedge Q$ (代入+替换+蕴涵表达式)

2 $\Leftrightarrow$ $\neg P \wedge Q$ (代入+替换+吸收律)

Example

化简公式: $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$;

解:

$$(\underline{P \rightarrow Q}) \wedge (\underline{P \rightarrow R})$$

1 $\Leftrightarrow$ $\underline{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)}$ (替换+蕴涵表达式)

2 $\Leftrightarrow$ $\underline{\neg P \vee (Q \wedge R)}$ (代入+分配率)

3 $\Leftrightarrow$ $P \rightarrow (Q \wedge R)$ (代入+蕴涵表达式)

Example (3/3)

Example

化简公式: $(P \to Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$;

解:

$$\begin{array}{lll} & \underline{(P \to Q \vee \neg R)} \wedge \neg P \wedge Q & \\ 1 \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge \neg P} \wedge Q & (代入+替换+蕴涵表达式) \\ 2 \Leftrightarrow & \neg P \wedge Q & (代入+替换+吸收律) \end{array}$$

Example

化简公式: $(P \to Q) \wedge (P \to R)$;

解:

$$\begin{array}{lll} & (\underline{P \to Q}) \wedge (\underline{P \to R}) & \\ 1 \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)} & (替换+蕴涵表达式) \\ 2 \Leftrightarrow & \underline{\neg P \vee (Q \wedge R)} & (代入+分配率) \\ 3 \Leftrightarrow & P \to (Q \wedge R) & (代入+蕴涵表达式) \end{array}$$

Example (3/3)

Example

化简公式: $(P \rightarrow Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$;

解:

$$
\begin{array}{lll}
 & \underline{(P \rightarrow Q \vee \neg R)} \wedge \neg P \wedge Q & \\
1 \quad \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge \neg P} \wedge Q & \text{(代入+替换+蕴涵表达式)} \\
2 \quad \Leftrightarrow & \neg P \wedge Q & \text{(代入+替换+吸收律)}
\end{array}
$$

Example

化简公式: $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$;

解:

$$
\begin{array}{lll}
 & (\underline{P \rightarrow Q}) \wedge (\underline{P \rightarrow R}) & \\
1 \quad \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)} & \text{(替换+蕴涵表达式)} \\
2 \quad \Leftrightarrow & \underline{\neg P \vee (Q \wedge R)} & \text{(代入+分配率)} \\
3 \quad \Leftrightarrow & P \rightarrow (Q \wedge R) & \text{(代入+蕴涵表达式)}
\end{array}
$$

Example (3/3)

Example

化简公式: $(P \rightarrow Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$;

解:

$$
\begin{array}{lll}
 & & (\underline{P \rightarrow Q \vee \neg R}) \wedge \neg P \wedge Q \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge \neg P} \wedge Q \quad (\text{代入+替换+蕴涵表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow & \neg P \wedge Q \quad (\text{代入+替换+吸收律})
\end{array}
$$

Example

化简公式: $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$;

解:

$$
\begin{array}{lll}
 & & (\underline{P \rightarrow Q}) \wedge (\underline{P \rightarrow R}) \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)} \quad (\text{替换+蕴涵表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow & \underline{\neg P \vee (Q \wedge R)} \quad (\text{代入+分配率}) \\
3 & \Leftrightarrow & P \rightarrow (Q \wedge R) \quad (\text{代入+蕴涵表达式})
\end{array}
$$

Example (3/3)

Example

化简公式: $(P \to Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$;

解:

$$
\begin{array}{lll}
 & & \underline{(P \to Q \vee \neg R)} \wedge \neg P \wedge Q & \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge \neg P} \wedge Q & (\text{代入+替换+蕴涵表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow & \neg P \wedge Q & (\text{代入+替换+吸收律})
\end{array}
$$

Example

化简公式: $(P \to Q) \wedge (P \to R)$;

解:

$$
\begin{array}{lll}
 & & (\underline{P \to Q}) \wedge (\underline{P \to R}) & \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)} & (\text{替换+蕴涵表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow & \underline{\neg P \vee (Q \wedge R)} & (\text{代入+分配率}) \\
3 & \Leftrightarrow & P \to (Q \wedge R) & (\text{代入+蕴涵表达式})
\end{array}
$$

Example (3/3)

Example

化简公式: $(P \rightarrow Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$;

解:

		$\underline{(P \rightarrow Q \vee \neg R)} \wedge \neg P \wedge Q$	
1	$\Leftrightarrow$	$\underline{(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge \neg P} \wedge Q$	(代入+替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg P \wedge Q$	(代入+替换+吸收律)

Example

化简公式: $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$;

解:

		$\underline{(P \rightarrow Q)} \wedge \underline{(P \rightarrow R)}$	
1	$\Leftrightarrow$	$\underline{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)}$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\underline{\neg P \vee (Q \wedge R)}$	(代入+分配率)
3	$\Leftrightarrow$	$P \rightarrow (Q \wedge R)$	(代入+蕴涵表达式)

Example (3/3)

Example

化简公式: $(P \rightarrow Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$;

解:

$$
\begin{array}{lll}
 & \underline{(P \rightarrow Q \vee \neg R)} \wedge \neg P \wedge Q & \\
1 \quad \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge \neg P} \wedge Q & \text{(代入+替换+蕴涵表达式)} \\
2 \quad \Leftrightarrow & \neg P \wedge Q & \text{(代入+替换+吸收律)}
\end{array}
$$

Example

化简公式: $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$;

解:

$$
\begin{array}{lll}
 & (\underline{P \rightarrow Q}) \wedge (\underline{P \rightarrow R}) & \\
1 \quad \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)} & \text{(替换+蕴涵表达式)} \\
2 \quad \Leftrightarrow & \underline{\neg P \vee (Q \wedge R)} & \text{(代入+分配率)} \\
3 \quad \Leftrightarrow & P \rightarrow (Q \wedge R) & \text{(代入+蕴涵表达式)}
\end{array}
$$

Example (3/3)

Example

化简公式: $(P \to Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$;

解:

$$
\begin{array}{lll}
 & \underline{(P \to Q \vee \neg R)} \wedge \neg P \wedge Q & \\
1 \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge \neg P} \wedge Q & \text{(代入+替换+蕴涵表达式)} \\
2 \Leftrightarrow & \neg P \wedge Q & \text{(代入+替换+吸收律)}
\end{array}
$$

Example

化简公式: $(P \to Q) \wedge (P \to R)$;

解:

$$
\begin{array}{lll}
 & (\underline{P \to Q}) \wedge (\underline{P \to R}) & \\
1 \Leftrightarrow & \underline{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)} & \text{(替换+蕴涵表达式)} \\
2 \Leftrightarrow & \underline{\neg P \vee (Q \wedge R)} & \text{(代入+分配率)} \\
3 \Leftrightarrow & P \to (Q \wedge R) & \text{(代入+蕴涵表达式)}
\end{array}
$$

Example (3/3)

Example

化简公式: $(P \rightarrow Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$;

解:

		$\underline{(P \rightarrow Q \vee \neg R)} \wedge \neg P \wedge Q$	
1	$\Leftrightarrow$	$\underline{(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge \neg P} \wedge Q$	(代入+替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\neg P \wedge Q$	(代入+替换+吸收律)

Example

化简公式: $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$;

解:

		$(\underline{P \rightarrow Q}) \wedge (\underline{P \rightarrow R})$	
1	$\Leftrightarrow$	$\underline{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)}$	(替换+蕴涵表达式)
2	$\Leftrightarrow$	$\underline{\neg P \vee (Q \wedge R)}$	(代入+分配率)
3	$\Leftrightarrow$	$P \rightarrow (Q \wedge R)$	(代入+蕴涵表达式)

Remarks

1. 公式的整体变换：代入＋恒等式;
2. 公式的局部变换：替换＋恒等式;
3. 局部变换的子公式与恒等式的形式不一样：代入＋替换＋恒等式;
4. 蕴涵表达式的使用;
5. 所有的恒等式和不等式都能够用基本恒等式和不等式用通过代入和替换推出.

Remarks

1. 公式的整体变换：代入＋恒等式；
2. 公式的局部变换：替换＋恒等式；
3. 局部变换的子公式与恒等式的形式不一样：代入＋替换＋恒等式；
4. 蕴涵表达式的使用；
5. 所有的恒等式和不等式都能够用基本恒等式和不等式用通过代入和替换推出．

Remarks

1. 公式的整体变换：代入＋恒等式；
2. 公式的局部变换：替换＋恒等式；
3. 局部变换的子公式与恒等式的形式不一样：代入＋替换＋恒等式；
4. 蕴涵表达式的使用；
5. 所有的恒等式和不等式都能够用基本恒等式和不等式用通过代入和替换推出．

Remarks

1. 公式的整体变换：代入+恒等式；
2. 公式的局部变换：替换+恒等式；
3. 局部变换的子公式与恒等式的形式不一样：代入+替换+恒等式；
4. 蕴涵表达式的使用；
5. 所有的恒等式和不等式都能够用基本恒等式和不等式用通过代入和替换推出.

Remarks

1. 公式的整体变换：代入＋恒等式；
2. 公式的局部变换：替换＋恒等式；
3. 局部变换的子公式与恒等式的形式不一样：代入＋替换＋恒等式；
4. 蕴涵表达式的使用；
5. 所有的恒等式和不等式都能够用基本恒等式和不等式用通过代入和替换推出.

Remarks

1. 公式的整体变换：代入＋恒等式;
2. 公式的局部变换：替换＋恒等式;
3. 局部变换的子公式与恒等式的形式不一样：代入＋替换＋恒等式;
4. 蕴涵表达式的使用;
5. 所有的恒等式和不等式都能够用基本恒等式和不等式用通过代入和替换推出.

对偶性(Duality)

Definition

设G是一个仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；G的对偶公式G^*是将G中的$\wedge$, $\vee$, $\mathbb{T}$和$\mathbb{F}$分别替换为$\vee$, $\wedge$和$\mathbb{F}$, $\mathbb{T}$，并且保持原有的运算关系所得到的公式.

Example

$$
\begin{aligned}
& (P \wedge Q \vee \neg R)^* \\
= \quad & (P \vee Q) \wedge \neg R \\
\neq \quad & P \vee Q \wedge \neg R \\
= \quad & P \vee (Q \wedge \neg R)
\end{aligned}
$$

Property

$$A^{**} = A$$

对偶性(Duality)

Definition

设G是一个仅含有$\neg$，$\wedge$和$\vee$运算符号的公式；G的对偶公式G^*是将G中的$\wedge$，$\vee$，$\mathbb{T}$和$\mathbb{F}$分别替换为$\vee$，$\wedge$和$\mathbb{F}$，$\mathbb{T}$，并且保持原有的运算关系所得到的公式.

Example

$$
\begin{aligned}
& (P \wedge Q \vee \neg R)^* \\
= \quad & (P \vee Q) \wedge \neg R \\
\neq \quad & P \vee Q \wedge \neg R \\
= \quad & P \vee (Q \wedge \neg R)
\end{aligned}
$$

Property

$$A^{**} = A$$

对偶性(Duality)

Definition

设G是一个仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式; G的对偶公式G^*是将G中的$\wedge$, $\vee$, $\mathbb{T}$和$\mathbb{F}$分别替换为$\vee$, $\wedge$和$\mathbb{F}$, $\mathbb{T}$, 并且保持原有的运算关系所得到的公式.

Example

$$\begin{aligned}
& (P \wedge Q \vee \neg R)^* \\
= \ & (P \vee Q) \wedge \neg R \\
\neq \ & P \vee Q \wedge \neg R \\
= \ & P \vee (Q \wedge \neg R)
\end{aligned}$$

Property

$$A^{**} = A$$

广义De Morgan Law

Theorem

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一个仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式，则:

$$\neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

Proof (对公式的递归结构用归纳法).

广义De Morgan Law

Theorem

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一个仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式，则:

$$\neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

Proof (对公式的递归结构用归纳法).

1. Base: if G是P, $\mathbb{T}$, $\mathbb{F}$, 则原恒等式成立;
2. 设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n) = A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, 并且, A和B满足上述恒等式; 则:

$$\begin{aligned}
&\neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \\
&= \neg(A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)) \\
&\Leftrightarrow \neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \vee \neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n) && \text{(De Morgan)} \\
&\Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \\
&= (A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \wedge B(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n))^* \\
&= G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)
\end{aligned}$$

3. 同理对: $G = \neg A$和$G = A \vee B$有相同的结论.

$\square$

广义De Morgan Law

Theorem

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一个仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式，则:

$$\neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

Proof (对公式的递归结构用归纳法).

1. Base: if G是P, $\mathbb{T}$, $\mathbb{F}$, 则原恒等式成立;
2. 设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n) = A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, 并且, A和B满足上述恒等式; 则:

$$\begin{aligned} & \neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \\ & = \neg(A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)) && \text{(假设)} \\ & = \neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \vee \neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n) && \text{(De Morgan)} \\ & \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) && \text{[illegible]} \\ & = (A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \wedge B(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n))^* && \text{[illegible]} \\ & = G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \end{aligned}$$

3. 同理对: $G = \neg A$和$G = A \vee B$有相同的结论.

□

广义De Morgan Law

Theorem

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一个仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式，则:

$$\neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

Proof (对公式的递归结构用归纳法).

1. Base: if G是P, $\mathbb{T}$, $\mathbb{F}$，则原恒等式成立；
2. 设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n) = A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$，并且，$A$和$B$满足上述恒等式；则:

$$\begin{aligned}
& \neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \\
= \ & \neg(A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)) && \text{(假设)} \\
\Leftrightarrow \ & \neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \vee \neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n) && \text{(De Morgan)} \\
\Leftrightarrow \ & A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) && \text{(归纳假设)} \\
= \ & (A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \wedge B(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n))^* && \text{(定义)} \\
= \ & G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)
\end{aligned}$$

3. 同理对：$G = \neg A$和$G = A \vee B$有相同的结论.

□

广义De Morgan Law

Theorem

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一个仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式，则：

$$\neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

Proof (对公式的递归结构用归纳法).

1. Base: if G是P, $\mathbb{T}$, $\mathbb{F}$，则原恒等式成立；
2. 设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n) = A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$，并且，$A$和$B$满足上述恒等式；则：

$$\begin{aligned}
& \neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \\
= \ & \neg(A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)) && \text{(假设)} \\
\Leftrightarrow \ & \neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \vee \neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n) && \text{(De Morgan)} \\
\Leftrightarrow \ & A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) && \text{(归纳假设)} \\
= \ & (A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \wedge B(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n))^* && \text{(定义)} \\
= \ & G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)
\end{aligned}$$

3. 同理对：$G = \neg A$和$G = A \vee B$有相同的结论.

□

广义De Morgan Law

Theorem

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一个仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式，则:

$$\neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

Proof (对公式的递归结构用归纳法).

1. Base: if G是P, $\mathbb{T}$, $\mathbb{F}$，则原恒等式成立；
2. 设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n) = A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$，并且，$A$和$B$满足上述恒等式；则:

$$\begin{aligned}
& \neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) & \\
= \ & \neg(A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)) & \text{(假设)} \\
\Leftrightarrow \ & \neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \vee \neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n) & \text{(De Morgan)} \\
\Leftrightarrow \ & A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) & \text{(归纳假设)} \\
= \ & (A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \wedge B(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n))^* & \text{(定义)} \\
= \ & G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) &
\end{aligned}$$

3. 同理对: $G = \neg A$和$G = A \vee B$有相同的结论.

□

广义De Morgan Law

Theorem

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一个仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式，则:

$$\neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

Proof (对公式的递归结构用归纳法).

1. Base: if G是P, $\mathbb{T}$, $\mathbb{F}$, 则原恒等式成立;
2. 设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n) = A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, 并且, A和B满足上述恒等式; 则:

$$\begin{aligned} & \neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) & \\ = & \neg(A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)) & \text{(假设)} \\ \Leftrightarrow & \neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \vee \neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n) & \text{(De Morgan)} \\ \Leftrightarrow & A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) & \text{(归纳假设)} \\ = & (A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \wedge B(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n))^* & \text{(定义)} \\ = & G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) & \end{aligned}$$

3. 同理对: $G = \neg A$和$G = A \vee B$有相同的结论.

□

广义De Morgan Law

Theorem

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一个仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式，则:

$$\neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

Proof (对公式的递归结构用归纳法).

1. Base: if G是P, $\mathbb{T}$, $\mathbb{F}$, 则原恒等式成立;
2. 设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n) = A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, 并且, A和B满足上述恒等式; 则:

$$\begin{aligned}
& \neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \\
= & \neg(A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)) && \text{(假设)} \\
\Leftrightarrow & \neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \vee \neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n) && \text{(De Morgan)} \\
\Leftrightarrow & A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) && \text{(归纳假设)} \\
= & (A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \wedge B(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n))^* && \text{(定义)} \\
= & G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)
\end{aligned}$$

3. 同理对: $G = \neg A$和$G = A \vee B$有相同的结论.

$\square$

广义De Morgan Law

Theorem

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一个仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式，则:

$$\neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

Proof (对公式的递归结构用归纳法).

1. Base: if G是P, $\mathbb{T}$, $\mathbb{F}$, 则原恒等式成立;
2. 设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n) = A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, 并且，$A$和$B$满足上述恒等式; 则:

$$\begin{aligned}
& \neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) & \\
= & \neg(A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)) & \text{(假设)} \\
\Leftrightarrow & \neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \vee \neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n) & \text{(De Morgan)} \\
\Leftrightarrow & A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) & \text{(归纳假设)} \\
= & (A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \wedge B(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n))^* & \text{(定义)} \\
= & G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) &
\end{aligned}$$

3. 同理对: $G = \neg A$和$G = A \vee B$有相同的结论.

□

广义De Morgan Law

Theorem

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一个仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式，则:

$$\neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

Proof (对公式的递归结构用归纳法).

1. Base: if G是P, $\mathbb{T}$, $\mathbb{F}$, 则原恒等式成立;
2. 设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n) = A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, 并且, A和B满足上述恒等式; 则:

$$\begin{aligned}
& \neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) & \\
= \ & \neg(A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)) & \text{(假设)} \\
\Leftrightarrow \ & \neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \vee \neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n) & \text{(De Morgan)} \\
\Leftrightarrow \ & A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) & \text{(归纳假设)} \\
= \ & (A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \wedge B(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n))^* & \text{(定义)} \\
= \ & G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) &
\end{aligned}$$

3. 同理对: $G = \neg A$和$G = A \vee B$有相同的结论.

□

相关推论(1/2)

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Leftrightarrow G \qquad \textit{iff} \qquad F^* \Leftrightarrow G^*$$

Proof.

$F \Leftrightarrow G$

iff $\neg F \Leftrightarrow \neg G$

iff $F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$ (广义De Morgan)

iff $F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n)$ (代入)

iff $F^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ (双重否定)

$\square$

相关推论(1/2)

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Leftrightarrow G \quad \textit{iff} \quad F^* \Leftrightarrow G^*$$

Proof.

$$\begin{aligned}
& F \Leftrightarrow G \\
\textit{iff}\ & \neg F \Leftrightarrow \neg G \\
\textit{iff}\ & F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \ (\text{广义De Morgan}) \\
\textit{iff}\ & F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \ (\text{代入}) \\
\textit{iff}\ & F^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \qquad (\text{双重否定})
\end{aligned}$$

□

相关推论(1/2)

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Leftrightarrow G \qquad \text{iff} \qquad F^* \Leftrightarrow G^*$$

Proof.

$F \Leftrightarrow G$

iff $\neg F \Leftrightarrow \neg G$

iff $F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$ (广义De Morgan)

iff $F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n)$ (代入)

iff $F^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ (双重否定)

$\square$

相关推论(1/2)

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Leftrightarrow G \quad \text{iff} \quad F^* \Leftrightarrow G^*$$

Proof.

$F \Leftrightarrow G$

iff $\neg F \Leftrightarrow \neg G$

iff $F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$ (广义De Morgan)

iff $F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n)$ (代入)

iff $F^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ (双重否定)

$\square$

相关推论(1/2)

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Leftrightarrow G \quad \text{iff} \quad F^* \Leftrightarrow G^*$$

Proof.

$F \Leftrightarrow G$

iff $\neg F \Leftrightarrow \neg G$

iff $F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$ (广义De Morgan)

iff $F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n)$ (代入)

iff $F^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ (双重否定)

□

相关推论(1/2)

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Leftrightarrow G \quad \text{iff} \quad F^* \Leftrightarrow G^*$$

Proof.

$$\begin{aligned}
& F \Leftrightarrow G \\
\text{iff}\ & \neg F \Leftrightarrow \neg G \\
\text{iff}\ & F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \ (\text{广义De Morgan}) \\
\text{iff}\ & F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \ (\text{代入}) \\
\text{iff}\ & F^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \quad (\text{双重否定})
\end{aligned}$$

$\square$

相关推论(1/2)

Theorem

设F和G是仅含有$\neg, \wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Leftrightarrow G \quad \text{iff} \quad F^* \Leftrightarrow G^*$$

Proof.

$$\begin{aligned}
& F \Leftrightarrow G \\
\text{iff}\ & \neg F \Leftrightarrow \neg G \\
\text{iff}\ & F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \ (\text{广义De Morgan}) \\
\text{iff}\ & F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \ (\text{代入}) \\
\text{iff}\ & F^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \quad (\text{双重否定})
\end{aligned}$$

□

相关推论2/2

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Rightarrow G \quad \text{iff} \quad G^* \Rightarrow F^*$$

Proof.

相关推论2/2

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Rightarrow G \qquad \text{iff} \qquad G^* \Rightarrow F^*$$

Proof.

$$\begin{aligned}
& F \Rightarrow G \\
\text{iff } & \neg G \Rightarrow \neg F \\
\text{iff } & \neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T} \\
\text{iff } & G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \rightarrow F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \ (\text{广义De Morgan}) \\
\text{iff } & G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \rightarrow F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \ (\text{代入}) \\
\text{iff } & G^* \rightarrow F^* \Leftrightarrow \mathbb{T} \qquad (\text{双重否定}) \\
\text{iff } & G^* \Rightarrow F^* \qquad (\text{定义})
\end{aligned}$$

$\square$

相关推论2/2

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Rightarrow G \qquad \text{iff} \qquad G^* \Rightarrow F^*$$

Proof.

$$\begin{aligned}
& F \Rightarrow G \\
\text{iff}\ & \neg G \Rightarrow \neg F \\
\text{iff}\ & \neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T} \\
\text{iff}\ & G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \rightarrow F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \ (\text{广义De Morgan}) \\
\text{iff}\ & G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \rightarrow F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \ (\text{代入}) \\
\text{iff}\ & G^* \rightarrow F^* \Leftrightarrow \mathbb{T} \qquad (\text{双重否定}) \\
\text{iff}\ & G^* \Rightarrow F^* \qquad (\text{定义})
\end{aligned}$$

$\square$

相关推论2/2

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Rightarrow G \quad \text{iff} \quad G^* \Rightarrow F^*$$

Proof.

$$\begin{aligned}
& F \Rightarrow G \\
\text{iff}\ & \neg G \Rightarrow \neg F \\
\text{iff}\ & \neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T} \\
\text{iff}\ & G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \rightarrow F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \text{ (广义De Morgan)} \\
\text{iff}\ & G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \rightarrow F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \text{ (代入)} \\
\text{iff}\ & G^* \rightarrow F^* \Leftrightarrow \mathbb{T} \qquad \text{(双重否定)} \\
\text{iff}\ & G^* \Rightarrow F^* \qquad \text{(定义)}
\end{aligned}$$

$\square$

相关推论2/2

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Rightarrow G \quad \text{iff} \quad G^* \Rightarrow F^*$$

Proof.

$F \Rightarrow G$

iff $\neg G \Rightarrow \neg F$

iff $\neg G \to \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T}$

iff $G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \to F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (广义De Morgan)

iff $G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \to F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (代入)

iff $G^* \to F^* \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (双重否定)

iff $G^* \Rightarrow F^*$ (定义)

$\square$

相关推论2/2

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Rightarrow G \qquad \textit{iff} \qquad G^* \Rightarrow F^*$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
& F \Rightarrow G \\
\textit{iff}\ & \neg G \Rightarrow \neg F \\
\textit{iff}\ & \neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T} \\
\textit{iff}\ & G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \rightarrow F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \ (\text{广义De Morgan}) \\
\textit{iff}\ & G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \rightarrow F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \ (\text{代入}) \\
\textit{iff}\ & G^* \rightarrow F^* \Leftrightarrow \mathbb{T} \qquad (\text{双重否定}) \\
\textit{iff}\ & G^* \Rightarrow F^* \qquad (\text{定义})
\end{aligned}
$$

□

相关推论2/2

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Rightarrow G \quad \text{iff} \quad G^* \Rightarrow F^*$$

Proof.

$$\begin{aligned}
& F \Rightarrow G \\
\text{iff} \quad & \neg G \Rightarrow \neg F \\
\text{iff} \quad & \neg G \to \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T} \\
\text{iff} \quad & G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \to F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \ (\text{广义De Morgan}) \\
\text{iff} \quad & G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \to F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \ (\text{代入}) \\
\text{iff} \quad & G^* \to F^* \Leftrightarrow \mathbb{T} \quad (\text{双重否定}) \\
\text{iff} \quad & G^* \Rightarrow F^* \quad (\text{定义})
\end{aligned}$$

□

相关推论2/2

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Rightarrow G \quad \text{iff} \quad G^* \Rightarrow F^*$$

Proof.

$$\begin{aligned}
& F \Rightarrow G \\
\text{iff} \ & \neg G \Rightarrow \neg F \\
\text{iff} \ & \neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T} \\
\text{iff} \ & G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \rightarrow F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \ (\text{广义De Morgan}) \\
\text{iff} \ & G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \rightarrow F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \ (\text{代入}) \\
\text{iff} \ & G^* \rightarrow F^* \Leftrightarrow \mathbb{T} \quad (\text{双重否定}) \\
\text{iff} \ & G^* \Rightarrow F^* \quad (\text{定义})
\end{aligned}$$

□

相关推论2/2

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Rightarrow G \qquad \text{iff} \qquad G^* \Rightarrow F^*$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
& F \Rightarrow G \\
\text{iff} \quad & \neg G \Rightarrow \neg F \\
\text{iff} \quad & \neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T} \\
\text{iff} \quad & G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \rightarrow F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \ (\text{广义De Morgan}) \\
\text{iff} \quad & G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \rightarrow F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \ (\text{代入}) \\
\text{iff} \quad & G^* \rightarrow F^* \Leftrightarrow \mathbb{T} \qquad (\text{双重否定}) \\
\text{iff} \quad & G^* \Rightarrow F^* \qquad (\text{定义})
\end{aligned}
$$

□

1 命题逻辑
- 命题
- 符号化
- 合式公式的形式文法
- 合式公式的形式语义

2 公式之间的关系
- 公式的语义性质
- 逻辑等价
- 永真蕴涵关系
- 恒等变换与不等变换
- 对偶性

3 范式和基本定理
- 极大项
- 主合取范式
- 主析取范式
- 联结词的扩充与规约

4 推理和证明方法
- 有效结论
- 自然推理的形式证明
- 证明方法

联结词的扩充

Remark (n个原子的公式共有2^{2^n}个不同的运算)

1. 一元运算：$2^{2^1}=4$个：恒等，恒为1，恒为0，否定；
2. 二元运算：$2^{2^2}=16$个，恒为1，恒为0，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，...
3. 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算，称为对联结词的扩充.

Example (二元运算的扩充)

		与非(NAND)	或非(NOR)	异或(XOR)
P	Q	$P \uparrow Q$	$P \downarrow Q$	$P \oplus Q$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
等价式		$\neg(P \wedge Q)$	$\neg(P \vee Q)$	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

联结词的扩充

Remark (n个原子的公式共有2^{2^n}个不同的运算)

1. 一元运算：$2^{2^1}=4$个：恒等，恒为1，恒为0，否定；
2. 二元运算：$2^{2^2}=16$个，恒为1，恒为0，$\wedge$，$\vee$，$\to$，$\leftrightarrow$，…
3. 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算，称为对联结词的扩充.

Example (二元运算的扩充)

		与非(NAND)	或非(NOR)	异或(XOR)
P	Q	$P\uparrow Q$	$P\downarrow Q$	$P\oplus Q$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
等价式		$\neg(P\wedge Q)$	$\neg(P\vee Q)$	$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

联结词的扩充

Remark (n个原子的公式共有2^{2^n}个不同的运算)

1. 一元运算：$2^{2^1}=4$个：恒等，恒为1，恒为0，否定；
2. 二元运算：$2^{2^2}=16$个，恒为1，恒为0，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，...
3. 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算，称为对联结词的扩充.

Example (二元运算的扩充)

		与非(NAND)	或非(NOR)	异或(XOR)
P	Q	$P \uparrow Q$	$P \downarrow Q$	$P \oplus Q$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
等价式		$\neg(P \wedge Q)$	$\neg(P \vee Q)$	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

联结词的扩充

Remark (n个原子的公式共有2^{2^n}个不同的运算)

1. 一元运算：$2^{2^1}=4$个：恒等，恒为1，恒为0，否定；
2. 二元运算：$2^{2^2}=16$个，恒为1，恒为0，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，...
3. 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算，称为对联结词的扩充.

Example (二元运算的扩充)

		与非(NAND)	或非(NOR)	异或(XOR)
P	Q	$P \uparrow Q$	$P \downarrow Q$	$P \oplus Q$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
等价式		$\neg(P \wedge Q)$	$\neg(P \vee Q)$	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

联结词的扩充

Remark (n个原子的公式共有2^{2^n}个不同的运算)

1. 一元运算：$2^{2^1}=4$个：恒等，恒为1，恒为0，否定；
2. 二元运算：$2^{2^2}=16$个，恒为1，恒为0，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，$\ldots$
3. 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算，称为对联结词的扩充.

Example (二元运算的扩充)

		与非(NAND)	或非(NOR)	异或(XOR)
P	Q	$P\uparrow Q$	$P\downarrow Q$	$P\oplus Q$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
等价式		$\neg(P\wedge Q)$	$\neg(P\vee Q)$	$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

程序设计中的位运算

Example

C语言的位运算(bitwise operator):

~(取否), &(合取), |(析取) , ^(异或) , <<(左位移), >>(右位移)

Example

	0	1	0	1	x
&	1	0	1	1	-x
	0	0	0	1	x&-x
	0	1	0	1	x
	0	1	0	0	x^(x&-x)

程序设计中的位运算

Example

C语言的位运算(bitwise operator):
~(取否), &(合取), |(析取) , ^(异或) , <<(左位移), >>(右位移)

Example

	0	1	0	1	x
&	1	0	1	1	-x
	0	0	0	1	x&-x
^	0	1	0	1	x
	0	1	0	0	x^(x&-x)

程序设计中的位运算

Example

C语言的位运算(bitwise operator):
~(取否), &(合取), |(析取) , ^(异或) , <<(左位移), >>(右位移)

Example

	0	1	0	1	x
&	1	0	1	1	-x
	0	0	0	1	x&-x
^	0	1	0	1	x
	0	1	0	0	x^(x&-x)

程序设计中的位运算

Example

C语言的位运算(bitwise operator):
~(取否), &(合取), |(析取) , ^(异或) , <<(左位移), >>(右位移)

Example

	0	1	0	1	x
&	1	0	1	1	-x
	0	0	0	1	x&-x
^	0	1	0	1	x
	0	1	0	0	x^(x&-x)

程序设计中的位运算

Example

C语言的位运算(bitwise operator):
~(取否), &(合取), |(析取) , ^(异或) , <<(左位移), >>(右位移)

Example

	0	1	0	1	x
&	1	0	1	1	-x
	0	0	0	1	x&-x
^	0	1	0	1	x
	0	1	0	0	x^(x&-x)

Programming Example

计算正数二进制表示中1出现的次数

```
int cardinal(unsigned long x)
{
  int count = 0;
  while (x != (unsigned long) 0) {
    x ^= x & -x;
    count++;
    }
  return count;
}
```

联结词的归约

Definition

- 一个联结词的集合是**全功能的**, iff, 所有的运算均能用该集合中的联结词表示;
- **极小**全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再是全功能的.

Example

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是全功能的;
- $\{\neg, \wedge\}$ 和 $\{\neg, \vee\}$ 是极小全功能的;
- $\{\neg, \rightarrow\}$ 是极小全功能的;
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$ 不是全功能的，因为 [illegible]
- $\{\wedge, \vee\}$ 不是全功能的，因为 [illegible]

联结词的归约

Definition

- 一个联结词的集合是全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再是全功能的.

Example

联结词的归约

Definition

- 一个联结词的集合是全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再是全功能的.

Example

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$是全功能的;
- $\{\neg, \wedge\}$和$\{\neg, \vee\}$是极小全功能的;
- $\{\neg, \rightarrow\}$是极小全功能的;
- [illegible]
- [illegible]

联结词的归约

Definition

- 一个联结词的集合是全功能的，iff，所有的运算均能用该集合中的联结词表示；
- 极小全功能联结词集合，iff，该集合中删除任意的一个后不再是全功能的.

Example

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$是全功能的；
- $\{\neg, \wedge\}$和$\{\neg, \vee\}$是极小全功能的；
- $\{\neg, \rightarrow\}$是极小全功能的；
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$不是全功能的，因为：$\leftrightarrow + \neg$永远只能有偶数个成假指派；
- $\{\wedge, \vee\}$不是全功能的，因为：$\wedge + \vee$的组合中面对每个原子都取真值的指派只能取真.

联结词的归约

Definition

- 一个联结词的集合是全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再是全功能的.

Example

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$是全功能的;
- $\{\neg, \wedge\}$和$\{\neg, \vee\}$是极小全功能的;
- $\{\neg, \rightarrow\}$是极小全功能的;
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$不是全功能的, 因为: $\leftrightarrow + \neg$永远只能有偶数个成假指派;
- $\{\wedge, \vee\}$不是全功能的, 因为: $\wedge + \vee$的组合中面对每个原子都取真值的指派只能取真.

联结词的归约

Definition

- 一个联结词的集合是全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再是全功能的.

Example

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$是全功能的;
- $\{\neg, \wedge\}$和$\{\neg, \vee\}$是极小全功能的;
- $\{\neg, \rightarrow\}$是极小全功能的;
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$不是全功能的, 因为: $\leftrightarrow + \neg$永远只能有偶数个成假指派;
- $\{\wedge, \vee\}$不是全功能的, 因为: $\wedge + \vee$的组合中面对每个原子都取真值的指派只能取真.

联结词的归约

Definition

- 一个联结词的集合是全功能的，iff，所有的运算均能用该集合中的联结词表示；
- 极小全功能联结词集合，iff，该集合中删除任意的一个后不再是全功能的.

Example

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$是全功能的；
- $\{\neg, \wedge\}$和$\{\neg, \vee\}$是极小全功能的；
- $\{\neg, \rightarrow\}$是极小全功能的；
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$不是全功能的，因为：$\leftrightarrow + \neg$永远只能有偶数个成假指派；
- $\{\wedge, \vee\}$不是全功能的，因为：$\wedge + \vee$的组合中面对每个原子都取真值的指派只能取真.

联结词的归约

Definition

- 一个联结词的集合是全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再是全功能的.

Example

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$是全功能的;
- $\{\neg, \wedge\}$和$\{\neg, \vee\}$是极小全功能的;
- $\{\neg, \rightarrow\}$是极小全功能的;
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$不是全功能的, 因为: $\leftrightarrow + \neg$永远只能有偶数个成假指派;
- $\{\wedge, \vee\}$不是全功能的, 因为: $\wedge + \vee$的组合中面对每个原子都取真值的指派只能取真.

联结词的归约

Definition

- 一个联结词的集合是全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个后不再是全功能的.

Example

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$是全功能的;
- $\{\neg, \wedge\}$和$\{\neg, \vee\}$是极小全功能的;
- $\{\neg, \rightarrow\}$是极小全功能的;
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$不是全功能的, 因为: $\leftrightarrow + \neg$永远只能有偶数个成假指派;
- $\{\wedge, \vee\}$不是全功能的, 因为: $\wedge + \vee$的组合中面对每个原子都取真值的指派只能取真.

example

Example ($\{\downarrow\}$是全功能的)

1. $P \downarrow Q \ \Leftrightarrow\ \neg(P \vee Q)$;
2. $\neg P \ \Leftrightarrow\ P \downarrow P$;
3. 考虑 $P \to Q$:

$$
\begin{aligned}
& P \to Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg\neg((P \downarrow P) \vee Q) \\
\Leftrightarrow\ & \neg((P \downarrow P) \downarrow Q) \\
\Leftrightarrow\ & ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)
\end{aligned}
$$

example

Example ($\{\downarrow\}$是全功能的)

1. $P \downarrow Q \;\Leftrightarrow\; \neg(P \vee Q)$;
2. $\neg P \;\Leftrightarrow\; P \downarrow P$;
3. 考虑 $P \rightarrow Q$:

$$
\begin{aligned}
& P \rightarrow Q \\
\Leftrightarrow\; & \neg P \vee Q \\
\Leftrightarrow\; & \neg\neg((P \downarrow P) \vee Q) \\
\Leftrightarrow\; & \neg((P \downarrow P) \downarrow Q) \\
\Leftrightarrow\; & ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)
\end{aligned}
$$

example

Example ($\{\downarrow\}$是全功能的)

1. $P \downarrow Q \iff \neg(P \vee Q)$;
2. $\neg P \iff P \downarrow P$;
3. 考虑 $P \to Q$:

$$
\begin{aligned}
& P \to Q \\
\iff & \neg P \vee Q \\
\iff & \neg\neg((P \downarrow P) \vee Q) \\
\iff & \neg((P \downarrow P) \downarrow Q) \\
\iff & ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)
\end{aligned}
$$

example

Example ($\{\downarrow\}$是全功能的)

1. $P \downarrow Q \;\Leftrightarrow\; \neg(P \vee Q)$;
2. $\neg P \;\Leftrightarrow\; P \downarrow P$;
3. 考虑 $P \to Q$:

$$
\begin{aligned}
& P \to Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg\underline{\neg((P \downarrow P) \vee Q)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg((P \downarrow P) \downarrow Q) \\
\Leftrightarrow\ & ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)
\end{aligned}
$$

$\square$

example

Example ($\{\downarrow\}$是全功能的)

1. $P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$;
2. $\neg P \Leftrightarrow P \downarrow P$;
3. 考虑$P \rightarrow Q$:

$$
\begin{aligned}
& P \rightarrow Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg\underline{\neg((P \downarrow P) \vee Q)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg((P \downarrow P) \downarrow Q) \\
\Leftrightarrow\ & ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)
\end{aligned}
$$

□

example

Example ($\{\downarrow\}$是全功能的)

1. $P \downarrow Q \;\Leftrightarrow\; \neg(P \vee Q)$;
2. $\neg P \;\Leftrightarrow\; P \downarrow P$;
3. 考虑$P \to Q$:

$$
\begin{aligned}
& P \to Q \\
\Leftrightarrow\; & \neg P \vee Q \\
\Leftrightarrow\; & \neg\underline{\neg((P \downarrow P) \vee Q)} \\
\Leftrightarrow\; & \neg((P \downarrow P) \downarrow Q) \\
\Leftrightarrow\; & ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)
\end{aligned}
$$

$\square$

example

Example ($\{\downarrow\}$是全功能的)

1. $P \downarrow Q \;\Leftrightarrow\; \neg(P \vee Q)$;
2. $\neg P \;\Leftrightarrow\; P \downarrow P$;
3. 考虑 $P \to Q$:

$$\begin{aligned} & P \to Q \\ \Leftrightarrow\; & \neg P \vee Q \\ \Leftrightarrow\; & \neg\underline{\neg((P \downarrow P) \vee Q)} \\ \Leftrightarrow\; & \neg((P \downarrow P) \downarrow Q) \\ \Leftrightarrow\; & ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q) \end{aligned}$$

$\square$

example

Example ($\{\downarrow\}$是全功能的)

1. $P \downarrow Q \iff \neg(P \vee Q)$;
2. $\neg P \iff P \downarrow P$;
3. 考虑$P \to Q$:

$$
\begin{aligned}
& P \to Q \\
\iff & \neg P \vee Q \\
\iff & \neg\underline{\neg((P \downarrow P) \vee Q)} \\
\iff & \neg((P \downarrow P) \downarrow Q) \\
\iff & ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)
\end{aligned}
$$

$\square$

1. 命题逻辑
   - 命题
   - 符号化
   - 合式公式的形式文法
   - 合式公式的形式语义
2. 公式之间的关系
   - 公式的语义性质
   - 逻辑等价
   - 永真蕴涵关系
   - 恒等变换与不等变换
   - 对偶性
3. 范式和基本定理
   - 极大项
   - 主合取范式
   - 主析取范式
   - 联结词的扩充与规约
4. 推理和证明方法
   - 有效结论
   - 自然推理的形式证明
   - 证明方法

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n$, C是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I，如果，$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) = 1$，则：$I(C) = 1$. 记为：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价:

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n$, C是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I，如果，$I(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) = 1$，则：$I(C) = 1$. 记为：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价:

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \to C$是重言式;
3. $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \Rightarrow C$
4. $\neg((H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n) \to C)$是矛盾式;
5. $H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n \land \neg C$是矛盾式;
6. $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n \land \neg C) \to \mathbb{F}$是永真;
7. $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n \land \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n$, C是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I，如果，$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) = 1$，则：$I(C) = 1$. 记为：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价：

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \to C$是重言式;
3. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$
4. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \to C)$是矛盾式;
5. $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$是矛盾式;
6. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C) \to \mathbb{F}$是永真;
7. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n$，C是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valide consequence)，iff，对任意的指派I，如果，$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) = 1$，则：$I(C) = 1$. 记为：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价：

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$；
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \to C$是重言式；
3. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$
4. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \to C)$是矛盾式；
5. $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$是矛盾式；
6. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C) \to \mathbb{F}$是永真；
7. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n$, C是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I，如果，$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) = 1$，则：$I(C) = 1$. 记为：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价：

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \to C$是重言式;
3. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$
4. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \to C)$是矛盾式;
5. $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$是矛盾式;
6. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C) \to \mathbb{F}$是永真;
7. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n$, C是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I，如果，$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) = 1$，则：$I(C) = 1$. 记为：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价:

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \rightarrow C$是重言式;
3. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$
4. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \rightarrow C)$是矛盾式;
5. $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$是矛盾式;
6. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C) \rightarrow \mathbb{F}$是永真;
7. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n$, C是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I，如果，$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) = 1$，则：$I(C) = 1$. 记为：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价:

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \to C$是重言式;
3. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$
4. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \to C)$是矛盾式;
5. $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$是矛盾式;
6. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C) \to \mathbb{F}$是永真;
7. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n$, C是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I，如果，$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) = 1$，则：$I(C) = 1$. 记为：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价：

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \rightarrow C$是重言式;
3. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$
4. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \rightarrow C)$是矛盾式;
5. $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$是矛盾式;
6. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C) \rightarrow \mathbb{F}$是永真;
7. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n$, C是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I，如果，$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) = 1$，则：$I(C) = 1$．记为：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价：

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \to C$是重言式；
3. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$
4. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \to C)$是矛盾式；
5. $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$是矛盾式；
6. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C) \to \mathbb{F}$是永真；
7. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

Example

Example

A, B, C和D参加球赛：条件如下：

A参加，则B或C也参加	$H_1 = A \to B \lor C$
B参加，则A不参加	$H_2 = B \to \neg A$
D参加，则C不参加	$H_3 = D \to \neg C$

证明：“如果A参加，则D不参加”$(A \to \neg D)$是上述条件的有效结论.

方法1.

Equivalent to: $(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$

$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C)$

1 $\Leftrightarrow (A \to B \lor C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$

2 $\Leftrightarrow (A \to (B \lor C) \land \neg B) \land (D \to \neg C)$

3 $\Leftrightarrow (A \to (C \land \neg B)) \land (D \to \neg C)$

4 $\Rightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$

5 $\Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (C \to \neg D)$

6 $\Rightarrow (A \to C) \land (C \to \neg D)$

7 $\Rightarrow A \to \neg D$ [illegible]

Example

Example

A, B, C和D参加球赛：条件如下：

A参加，则B或C也参加	$H_1 = A \rightarrow B \vee C$
B参加，则A不参加	$H_2 = B \rightarrow \neg A$
D参加，则C不参加	$H_3 = D \rightarrow \neg C$

证明："如果A参加，则D不参加"$(A \rightarrow \neg D)$是上述条件的有效结论.

方法1.

Equivalent to: $(A \rightarrow B \vee C) \wedge (B \rightarrow \neg A) \wedge (D \rightarrow \neg C) \Rightarrow (A \rightarrow \neg D)$

$$
\begin{array}{lll}
 & & (A \rightarrow B \vee C) \wedge (B \rightarrow \neg A) \wedge (D \rightarrow \neg C) \\
1 & \Leftrightarrow & (A \rightarrow B \vee C) \wedge (A \rightarrow \neg B) \wedge (D \rightarrow \neg C) \\
2 & \Leftrightarrow & (A \rightarrow (B \vee C) \wedge \neg B) \wedge (D \rightarrow \neg C) \\
3 & \Leftrightarrow & (A \rightarrow (C \wedge \neg B)) \wedge (D \rightarrow \neg C) \\
4 & \Leftrightarrow & (A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow \neg B) \wedge (D \rightarrow \neg C) \\
5 & \Leftrightarrow & (A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow \neg B) \wedge (C \rightarrow \neg D) \\
6 & \Rightarrow & (A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \neg D) \\
7 & \Rightarrow & A \rightarrow \neg D
\end{array}
$$

（注意：不等变换不能用替换规则）

□

Example

Example

A, B, C和D参加球赛：条件如下：

A参加，则B或C也参加	$H_1 = A \rightarrow B \vee C$
B参加，则A不参加	$H_2 = B \rightarrow \neg A$
D参加，则C不参加	$H_3 = D \rightarrow \neg C$

证明："如果A参加，则D不参加"$(A \rightarrow \neg D)$是上述条件的有效结论.

方法1.

Equivalent to: $(A \rightarrow B \vee C) \wedge (B \rightarrow \neg A) \wedge (D \rightarrow \neg C) \Rightarrow (A \rightarrow \neg D)$

$$(A \rightarrow B \vee C) \wedge (\underline{B \rightarrow \neg A}) \wedge (D \rightarrow \neg C)$$

1 $\Leftrightarrow \underline{(A \rightarrow B \vee C) \wedge (A \rightarrow \neg B)} \wedge (D \rightarrow \neg C)$

2 $\Leftrightarrow (A \rightarrow \underline{(B \vee C) \wedge \neg B}) \wedge (D \rightarrow \neg C)$

3 $\Leftrightarrow \underline{(A \rightarrow (C \wedge \neg B))} \wedge (D \rightarrow \neg C)$

4 $\Leftrightarrow (A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow \neg B) \wedge (\underline{D \rightarrow \neg C})$

5 $\Leftrightarrow \underline{(A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow \neg B) \wedge (C \rightarrow \neg D)}$

6 $\Rightarrow (A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \neg D)$

7 $\Rightarrow A \rightarrow \neg D$ （注意：不等变换不能用替换规则）

□

Example

Example

A, B, C和D参加球赛：条件如下：

A参加，则B或C也参加	$H_1 = A \to B \vee C$
B参加，则A不参加	$H_2 = B \to \neg A$
D参加，则C不参加	$H_3 = D \to \neg C$

证明："如果A参加，则D不参加"$(A \to \neg D)$是上述条件的有效结论.

方法1.

Equivalent to: $(A \to B \vee C) \wedge (B \to \neg A) \wedge (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$

$$
\begin{array}{rll}
 & & (A \to B \vee C) \wedge (\underline{B \to \neg A}) \wedge (D \to \neg C) \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to B \vee C) \wedge (A \to \neg B)} \wedge (D \to \neg C) \\
2 & \Leftrightarrow & (A \to \underline{(B \vee C) \wedge \neg B}) \wedge (D \to \neg C) \\
3 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to (C \wedge \neg B))} \wedge (D \to \neg C) \\
4 & \Leftrightarrow & (A \to C) \wedge (A \to \neg B) \wedge (\underline{D \to \neg C}) \\
5 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to C) \wedge (A \to \neg B) \wedge (C \to \neg D)} \\
6 & \Rightarrow & (A \to C) \wedge (C \to \neg D) \\
7 & \Rightarrow & A \to \neg D
\end{array}
$$

（注意：不等变换不能用替换规则）

□

Example

Example

A, B, C和D参加球赛：条件如下：

A参加，则B或C也参加	$H_1 = A \to B \vee C$
B参加，则A不参加	$H_2 = B \to \neg A$
D参加，则C不参加	$H_3 = D \to \neg C$

证明："如果A参加，则D不参加"$(A \to \neg D)$是上述条件的有效结论.

方法1.

Equivalent to: $(A \to B \vee C) \wedge (B \to \neg A) \wedge (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$

$$
\begin{array}{rll}
 & & (A \to B \vee C) \wedge (\underline{B \to \neg A}) \wedge (D \to \neg C) \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to B \vee C) \wedge (A \to \neg B)} \wedge (D \to \neg C) \\
2 & \Leftrightarrow & (A \to \underline{(B \vee C) \wedge \neg B}) \wedge (D \to \neg C) \\
3 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to (C \wedge \neg B))} \wedge (D \to \neg C) \\
4 & \Leftrightarrow & (A \to C) \wedge (A \to \neg B) \wedge (\underline{D \to \neg C}) \\
5 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to C) \wedge (A \to \neg B) \wedge (C \to \neg D)} \\
6 & \Rightarrow & (A \to C) \wedge (C \to \neg D) \\
7 & \Rightarrow & A \to \neg D
\end{array}
$$

（注意：不等变换不能用替换规则）

□

Example

Example

A, B, C和D参加球赛：条件如下：

A参加，则B或C也参加	$H_1 = A \rightarrow B \vee C$
B参加，则A不参加	$H_2 = B \rightarrow \neg A$
D参加，则C不参加	$H_3 = D \rightarrow \neg C$

证明："如果A参加，则D不参加"$(A \rightarrow \neg D)$是上述条件的有效结论.

方法1.

Equivalent to: $(A \rightarrow B \vee C) \wedge (B \rightarrow \neg A) \wedge (D \rightarrow \neg C) \Rightarrow (A \rightarrow \neg D)$

$$
\begin{array}{lll}
 & & (A \rightarrow B \vee C) \wedge (\underline{B \rightarrow \neg A}) \wedge (D \rightarrow \neg C) \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(A \rightarrow B \vee C) \wedge (A \rightarrow \neg B)} \wedge (D \rightarrow \neg C) \\
2 & \Leftrightarrow & (A \rightarrow \underline{(B \vee C) \wedge \neg B}) \wedge (D \rightarrow \neg C) \\
3 & \Leftrightarrow & \underline{(A \rightarrow (C \wedge \neg B))} \wedge (D \rightarrow \neg C) \\
4 & \Leftrightarrow & (A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow \neg B) \wedge (\underline{D \rightarrow \neg C}) \\
5 & \Leftrightarrow & \underline{(A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow \neg B) \wedge (C \rightarrow \neg D)} \\
6 & \Rightarrow & (A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \neg D) \\
7 & \Rightarrow & A \rightarrow \neg D
\end{array}
$$

(注意：不等变换不能用替换规则)

□

Example

Example

A, B, C和D参加球赛：条件如下：

A参加，则B或C也参加	$H_1 = A \to B \vee C$
B参加，则A不参加	$H_2 = B \to \neg A$
D参加，则C不参加	$H_3 = D \to \neg C$

证明："如果A参加，则D不参加"$(A \to \neg D)$是上述条件的有效结论.

方法1.

Equivalent to: $(A \to B \vee C) \wedge (B \to \neg A) \wedge (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$

$$
\begin{array}{lll}
 & & (A \to B \vee C) \wedge (\underline{B \to \neg A}) \wedge (D \to \neg C) \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to B \vee C) \wedge (A \to \neg B)} \wedge (D \to \neg C) \\
2 & \Leftrightarrow & (A \to \underline{(B \vee C) \wedge \neg B}) \wedge (D \to \neg C) \\
3 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to (C \wedge \neg B))} \wedge (D \to \neg C) \\
4 & \Leftrightarrow & (A \to C) \wedge (A \to \neg B) \wedge (\underline{D \to \neg C}) \\
5 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to C) \wedge (A \to \neg B) \wedge (C \to \neg D)} \\
6 & \Rightarrow & (A \to C) \wedge (C \to \neg D) \\
7 & \Rightarrow & A \to \neg D \qquad \text{（注意：不等变换不能用替换规则）}
\end{array}
$$

□

Example

Example

A, B, C和D参加球赛：条件如下：

A参加，则B或C也参加	$H_1 = A \to B \vee C$
B参加，则A不参加	$H_2 = B \to \neg A$
D参加，则C不参加	$H_3 = D \to \neg C$

证明："如果A参加，则D不参加"$(A \to \neg D)$是上述条件的有效结论.

方法1.

Equivalent to: $(A \to B \vee C) \wedge (B \to \neg A) \wedge (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$

$$
\begin{array}{rll}
 & & (A \to B \vee C) \wedge (\underline{B \to \neg A}) \wedge (D \to \neg C) \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to B \vee C) \wedge (A \to \neg B)} \wedge (D \to \neg C) \\
2 & \Leftrightarrow & (A \to \underline{(B \vee C) \wedge \neg B}) \wedge (D \to \neg C) \\
3 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to (C \wedge \neg B))} \wedge (D \to \neg C) \\
4 & \Leftrightarrow & (A \to C) \wedge (A \to \neg B) \wedge (\underline{D \to \neg C}) \\
5 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to C) \wedge (A \to \neg B) \wedge (C \to \neg D)} \\
6 & \Rightarrow & (A \to C) \wedge (C \to \neg D) \\
7 & \Rightarrow & A \to \neg D
\end{array}
$$

（注意：不等变换不能用替换规则）

□

Example

Example

A, B, C和D参加球赛：条件如下：

A参加，则B或C也参加	$H_1 = A \to B \vee C$
B参加，则A不参加	$H_2 = B \to \neg A$
D参加，则C不参加	$H_3 = D \to \neg C$

证明："如果A参加，则D不参加"$(A \to \neg D)$是上述条件的有效结论.

方法1.

Equivalent to: $(A \to B \vee C) \wedge (B \to \neg A) \wedge (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$

$$
\begin{array}{lll}
 & & (A \to B \vee C) \wedge (\underline{B \to \neg A}) \wedge (D \to \neg C) \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to B \vee C) \wedge (A \to \neg B)} \wedge (D \to \neg C) \\
2 & \Leftrightarrow & (A \to \underline{(B \vee C) \wedge \neg B}) \wedge (D \to \neg C) \\
3 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to (C \wedge \neg B))} \wedge (D \to \neg C) \\
4 & \Leftrightarrow & (A \to C) \wedge (A \to \neg B) \wedge (\underline{D \to \neg C}) \\
5 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to C) \wedge (A \to \neg B) \wedge (C \to \neg D)} \\
6 & \Rightarrow & (A \to C) \wedge (C \to \neg D) \\
7 & \Rightarrow & A \to \neg D
\end{array}
$$

（注意：不等变换不能用替换规则）

□

Example

Example

A, B, C和D参加球赛：条件如下：

A参加，则B或C也参加	$H_1 = A \to B \vee C$
B参加，则A不参加	$H_2 = B \to \neg A$
D参加，则C不参加	$H_3 = D \to \neg C$

证明：“如果A参加，则D不参加”$(A \to \neg D)$是上述条件的有效结论.

方法1.

Equivalent to: $(A \to B \vee C) \wedge (B \to \neg A) \wedge (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$

$$
\begin{array}{rll}
 & & (A \to B \vee C) \wedge (\underline{B \to \neg A}) \wedge (D \to \neg C) \\
1 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to B \vee C) \wedge (A \to \neg B)} \wedge (D \to \neg C) \\
2 & \Leftrightarrow & (A \to \underline{(B \vee C) \wedge \neg B}) \wedge (D \to \neg C) \\
3 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to (C \wedge \neg B))} \wedge (D \to \neg C) \\
4 & \Leftrightarrow & (A \to C) \wedge (A \to \neg B) \wedge (\underline{D \to \neg C}) \\
5 & \Leftrightarrow & \underline{(A \to C) \wedge (A \to \neg B) \wedge (C \to \neg D)} \\
6 & \Rightarrow & (A \to C) \wedge (C \to \neg D) \\
7 & \Rightarrow & A \to \neg D
\end{array}
$$

(注意：不等变换不能用替换规则)

□

Example

方法2.

真值表【略】 □

方法3.

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$$

1. 设结论为假，即：$A \rightarrow \neg D$为假；
2. $\therefore A$为真，D为真；
3. 设B为真：
4. 设B为假：
5. 由③④得：前提为假.

□

Example

方法2.

真值表【略】 □

方法3.

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$$

1. 设结论为假，即：$A \to \neg D$为假；
2. $\therefore$ A为真，D为真；
3. 设B为真：
   - $B \to \neg A$为假，所以前提为假；
4. 设B为假：
   - 当C为真时：$D \to \neg C$为假；
   - 当C为假时：$A \to B \vee C$为假；
5. 由③④得：前提为假.

□

Example

方法2.

真值表【略】 □

方法3.

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$$

1. 设结论为假，即：$A \to \neg D$为假；
2. $\therefore A$为真，D为真；
3. 设B为真：
   - $B \to \neg A$为假，所以前提为假；
4. 设B为假：
   - 当C为真时：$D \to \neg C$为假；
   - 当C为假时：$A \to B \vee C$为假；
5. 由③④得：前提为假.

□

Example

方法2.

真值表【略】 □

方法3.

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$$

1. 设结论为假，即：$A \to \neg D$为假；
2. $\therefore$ A为真，D为真；
3. 设B为真:
   - $B \to \neg A$为假，所以前提为假；
4. 设B为假:
   - 当C为真时：$D \to \neg C$为假；
   - 当C为假时：$A \to B \vee C$为假；
5. 由③④得：前提为假.

□

Example

方法2.

真值表【略】

方法3.

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$$

1. 设结论为假，即：$A \rightarrow \neg D$为假；
2. $\therefore$ A为真，D为真；
3. 设B为真:
   - $B \rightarrow \neg A$为假，所以前提为假；
4. 设B为假:
   - 当C为真时：$D \rightarrow \neg C$为假；
   - 当C为假时：$A \rightarrow B \vee C$为假；
5. 由③④得：前提为假.

Example

方法2.

真值表【略】 □

方法3.

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$$

1. 设结论为假，即：$A \rightarrow \neg D$为假；
2. $\therefore$ A为真，D为真；
3. 设B为真：
   - $B \rightarrow \neg A$为假，所以前提为假；
4. 设B为假：
   - 当C为真时：$D \rightarrow \neg C$为假；
   - 当C为假时：$A \rightarrow B \vee C$为假；
5. 由③④得：前提为假.

□

Example

方法2.

真值表【略】 □

方法3.

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$$

1. 设结论为假，即：$A \rightarrow \neg D$为假；
2. $\therefore$ A为真，D为真；
3. 设B为真：
   - $B \rightarrow \neg A$为假，所以前提为假；
4. 设B为假：
   - 当C为真时：$D \rightarrow \neg C$为假；
   - 当C为假时：$A \rightarrow B \vee C$为假；
5. 由③④得：前提为假.

□

Example

方法2.

真值表【略】 □

方法3.

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$$

1. 设结论为假，即：$A \to \neg D$为假；
2. $\therefore A$为真，D为真；
3. 设B为真：
   - $B \to \neg A$为假，所以前提为假；
4. 设B为假：
   - 当C为真时：$D \to \neg C$为假；
   - 当C为假时：$A \to B \vee C$为假；
5. 由③④得：前提为假.

□

Example

方法2.

真值表【略】 □

方法3.

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$$

1. 设结论为假，即：$A \to \neg D$为假；
2. $\therefore A$为真，D为真；
3. 设B为真:
   - $B \to \neg A$为假，所以前提为假；
4. 设B为假:
   - 当C为真时：$D \to \neg C$为假；
   - 当C为假时：$A \to B \vee C$为假；
5. 由③④得：前提为假.

□

Example

方法2.

真值表【略】 □

方法3.

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$$

1. 设结论为假，即：$A \rightarrow \neg D$为假；
2. $\therefore$ A为真，D为真；
3. 设B为真:
   - $B \rightarrow \neg A$为假，所以前提为假；
4. 设B为假:
   - 当C为真时：$D \rightarrow \neg C$为假；
   - 当C为假时：$A \rightarrow B \vee C$为假；
5. 由③④得：前提为假.

□

Example

方法4.

1. 设前提为真，即：$A \to B \vee C$, $B \to \neg A$ 和$D \to \neg C$ 均为真；
2. $\therefore A \to \neg B$为真；
3. $\therefore (A \to \neg B) \wedge (A \to B \vee C)$ 为真；
4. $\therefore A \to (\neg B \wedge (B \vee C))$ 为真；
5. $\therefore A \to (\neg B \wedge C)$ 为真；
6. $\therefore A \to C$ 为真；
7. 由①得：$C \to \neg D$ 为真；
8. 由⑥⑦得：$A \to \neg D$ 为真.

$\square$

Example

方法4.

1. 设前提为真，即：$A \to B \vee C$, $B \to \neg A$ 和$D \to \neg C$ 均为真；
2. $\therefore A \to \neg B$为真；
3. $\therefore (A \to \neg B) \wedge (A \to B \vee C)$ 为真；
4. $\therefore A \to (\neg B \wedge (B \vee C))$ 为真；
5. $\therefore A \to (\neg B \wedge C)$ 为真；
6. $\therefore A \to C$ 为真；
7. 由①得：$C \to \neg D$ 为真；
8. 由⑥⑦得：$A \to \neg D$ 为真.

$\square$

Example

方法4.

1. 设前提为真，即: $A \to B \vee C$, $B \to \neg A$ 和$D \to \neg C$ 均为真;
2. $\therefore A \to \neg B$为真;
3. $\therefore (A \to \neg B) \wedge (A \to B \vee C)$ 为真;
4. $\therefore A \to (\neg B \wedge (B \vee C))$ 为真;
5. $\therefore A \to (\neg B \wedge C)$ 为真;
6. $\therefore A \to C$ 为真;
7. 由①得: $C \to \neg D$ 为真;
8. 由⑥⑦得: $A \to \neg D$ 为真.

$\square$

Example

方法4.

1. 设前提为真，即：$A \to B \vee C$, $B \to \neg A$ 和 $D \to \neg C$ 均为真；
2. $\therefore A \to \neg B$ 为真；
3. $\therefore (A \to \neg B) \wedge (A \to B \vee C)$ 为真；
4. $\therefore A \to (\neg B \wedge (B \vee C))$ 为真；
5. $\therefore A \to (\neg B \wedge C)$ 为真；
6. $\therefore A \to C$ 为真；
7. 由①得：$C \to \neg D$ 为真；
8. 由⑥⑦得：$A \to \neg D$ 为真.

$\square$

Example

方法4.

1. 设前提为真，即：$A \to B \vee C$, $B \to \neg A$ 和$D \to \neg C$ 均为真；
2. $\therefore A \to \neg B$为真；
3. $\therefore (A \to \neg B) \wedge (A \to B \vee C)$ 为真；
4. $\therefore A \to (\neg B \wedge (B \vee C))$ 为真；
5. $\therefore A \to (\neg B \wedge C)$ 为真；
6. $\therefore A \to C$ 为真；
7. 由①得：$C \to \neg D$ 为真；
8. 由⑥⑦得：$A \to \neg D$ 为真.

$\square$

Example

方法4.

1. 设前提为真，即: $A \to B \vee C$, $B \to \neg A$ 和$D \to \neg C$ 均为真;
2. $\therefore A \to \neg B$为真;
3. $\therefore (A \to \neg B) \wedge (A \to B \vee C)$ 为真;
4. $\therefore A \to (\neg B \wedge (B \vee C))$ 为真;
5. $\therefore A \to (\neg B \wedge C)$ 为真;
6. $\therefore A \to C$ 为真;
7. 由①得: $C \to \neg D$ 为真;
8. 由⑥⑦得: $A \to \neg D$ 为真.

□

Example

方法4.

1. 设前提为真，即：$A \to B \vee C$，$B \to \neg A$ 和$D \to \neg C$ 均为真；
2. $\therefore A \to \neg B$为真；
3. $\therefore (A \to \neg B) \wedge (A \to B \vee C)$ 为真；
4. $\therefore A \to (\neg B \wedge (B \vee C))$ 为真；
5. $\therefore A \to (\neg B \wedge C)$ 为真；
6. $\therefore A \to C$ 为真；
7. 由①得：$C \to \neg D$ 为真；
8. 由⑥⑦得：$A \to \neg D$ 为真.

$\square$

Example

方法4.

1. 设前提为真，即：$A \to B \vee C$, $B \to \neg A$ 和$D \to \neg C$ 均为真；
2. $\therefore A \to \neg B$为真；
3. $\therefore (A \to \neg B) \wedge (A \to B \vee C)$ 为真；
4. $\therefore A \to (\neg B \wedge (B \vee C))$ 为真；
5. $\therefore A \to (\neg B \wedge C)$ 为真；
6. $\therefore A \to C$ 为真；
7. 由①得：$C \to \neg D$ 为真；
8. 由⑥⑦得：$A \to \neg D$ 为真.

□

Example

方法4.

1. 设前提为真，即: $A \to B \vee C$, $B \to \neg A$ 和$D \to \neg C$ 均为真;
2. $\therefore A \to \neg B$为真;
3. $\therefore (A \to \neg B) \wedge (A \to B \vee C)$ 为真;
4. $\therefore A \to (\neg B \wedge (B \vee C))$ 为真;
5. $\therefore A \to (\neg B \wedge C)$ 为真;
6. $\therefore A \to C$ 为真;
7. 由①得: $C \to \neg D$ 为真;
8. 由⑥⑦得: $A \to \neg D$ 为真.

$\square$

证明有效结论的方法

Remark

1. 恒等和不等变换;
2. 真值表;
3. 设结论为假，证明条件亦假;
4. 设条件为真，证明结论亦真;
5. 证明序列.

证明有效结论的方法

Remark

1. 恒等和不等变换;
2. 真值表;
3. 设结论为假，证明条件亦假;
4. 设条件为真，证明结论亦真;
5. 证明序列.

证明有效结论的方法

Remark

1. 恒等和不等变换;
2. 真值表;
3. 设结论为假，证明条件亦假;
4. 设条件为真，证明结论亦真;
5. 证明序列.

证明有效结论的方法

Remark

1. 恒等和不等变换;
2. 真值表;
3. 设结论为假，证明条件亦假;
4. 设条件为真，证明结论亦真;
5. 证明序列.

证明有效结论的方法

Remark

1. 恒等和不等变换;
2. 真值表;
3. 设结论为假，证明条件亦假;
4. 设条件为真，证明结论亦真;
5. 证明序列.

证明有效结论的方法

Remark

1. 恒等和不等变换;
2. 真值表;
3. 设结论为假，证明条件亦假;
4. 设条件为真，证明结论亦真;
5. 证明序列.

Example

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

证明序列.

1. $A \rightarrow B \vee C$ (P)
2. $B \rightarrow \neg A$ (P)
3. $A \rightarrow \neg B$ (②+T)
4. $A \rightarrow (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \rightarrow C \wedge \neg B$ (④+T)
6. $(A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow \neg B)$ (⑤+T)
7. $A \rightarrow C$ (⑥+简化式)
8. $D \rightarrow \neg C$ (P)
9. $C \rightarrow \neg D$ (⑧+T)
10. $A \rightarrow \neg D$ (⑦⑨+前提三段论)

$\square$

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

证明序列

Definition

设，$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一组条件，一个**证明序列**是一组形如：$C_1, C_2, \ldots, C_m$ 的公式序列，其中每个C_i 满足下述条件中的一个：

1. 存在H_j，使得：$C_i = H_j$；(引入条件)
2. $C_i = \mathbb{T}$；(引入永真)
3. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$，其中：$i_j \leq i$，并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$；(恒等变换)
4. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$，其中：$i_j \leq i$，并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_1} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$；(不等变换)

证明序列

Definition

设，$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一组条件，一个证明序列是一组形如：$C_1, C_2, \ldots, C_m$ 的公式序列，其中每个C_i 满足下述条件中的一个：

1. 存在H_i，使得：$C_i = H_j$; (引入条件)
2. $C_i = \mathbb{T}$; (引入永真)
3. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$，其中：$i_j \leq i$，并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$; (恒等变换)
4. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$，其中：$i_j \leq i$，并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_1} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$; (不等变换)

证明序列

Definition

设，$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一组条件，一个证明序列是一组形如：$C_1, C_2, \ldots, C_m$ 的公式序列，其中每个C_i 满足下述条件中的一个：

1. 存在H_i，使得：$C_i = H_j$；(引入条件)
2. $C_i = \mathbb{T}$；(引入永真)
3. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$，其中：$i_j \le i$，并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$；(恒等变换)
4. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$，其中：$i_j \le i$，并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_1} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$；(不等变换)

证明序列

Definition

设，$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一组条件，一个**证明序列**是一组形如：$C_1, C_2, \ldots, C_m$ 的公式序列，其中每个C_i 满足下述条件中的一个：

1. 存在H_i，使得：$C_i = H_j$；(引入条件)
2. $C_i = \mathbb{T}$；(引入永真)
3. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$，其中：$i_j \leq i$，并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$；(恒等变换)
4. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$，其中：$i_j \leq i$，并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_1} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$；(不等变换)

证明序列

Definition

设，$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一组条件，一个证明序列是一组形如：$C_1, C_2, \ldots, C_m$ 的公式序列，其中每个C_i 满足下述条件中的一个：

1. 存在H_j，使得：$C_i = H_j$；(引入条件)
2. $C_i = \mathbb{T}$；(引入永真)
3. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$，其中：$i_j \le i$，并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$；(恒等变换)
4. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$，其中：$i_j \le i$，并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_1} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$；(不等变换)

自然推理的正确性与完备性

Theorem (Soundness & Completeness)

设$C_1, C_2, \ldots, C_m$是关于条件$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一证明序列，则对每个C_i 都有：

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$$

即：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$. 反之亦然.

Proof.

对证明序列的下标用归纳法(正确性)：

自然推理的正确性与完备性

Theorem (Soundness & Completeness)

设$C_1, C_2, \ldots, C_m$是关于条件$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一证明序列，则对每个C_i 都有：

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$$

即：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$. 反之亦然.

Proof.

对证明序列的下标用归纳法(正确性)：

1. 由于C_1满足定义中的条件，所以结论成立；
2. 设对任意的$j < i$，C_j都是前提的有效结论；则：
3. 故结论成立.

自然推理的正确性与完备性

Theorem (Soundness & Completeness)

设$C_1, C_2, \ldots, C_m$是关于条件$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一证明序列，则对每个C_i 都有：

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$$

即：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$. 反之亦然.

Proof.

对证明序列的下标用归纳法(正确性)：

1. 由于C_1满足定义中的条件，所以结论成立；
2. 设对任意的$j < i$，C_j都是前提的有效结论；则：
   - if $C_i = H_k$：(引入条件) $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow H_k$
   - if $C_i = T$：(引入永真) $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow T$
   - if $C_{j_1} \wedge C_{j_2} \wedge \cdots \wedge C_{j_k} \Rightarrow C_i$，而由归纳假设：
     $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_{j_l}$
     $\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow (C_{j_1} \wedge C_{j_2} \wedge \cdots \wedge C_{j_k}) \Rightarrow C_i$
   - 同理可证明，当$C_{j_1} \wedge C_{j_2} \wedge \cdots \wedge C_{j_k} = C_i$时结论成立；
3. 故结论成立.

自然推理的正确性与完备性

Theorem (Soundness & Completeness)

设$C_1, C_2, \ldots, C_m$是关于条件$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一证明序列，则对每个C_i 都有：

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$$

即：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$. 反之亦然.

Proof.

对证明序列的下标用归纳法(正确性)：

1. 由于C_1满足定义中的条件，所以结论成立；
2. 设对任意的$j < i$，C_j都是前提的有效结论；则：
    1. if $C_i = H_k$: (引入条件) $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow H_k$
    2. if $C_i = \mathbb{T}$: (引入永真) $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow \mathbb{T}$
    3. if $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$, 而由归纳假设：
       $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_{i_j}$
       $\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow (C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k}) \Rightarrow C_i$
    4. 同理可证明，当$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$时结论成立；
3. 故结论成立.

自然推理的正确性与完备性

Theorem (Soundness & Completeness)

设$C_1, C_2, \ldots, C_m$是关于条件$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一证明序列，则对每个C_i 都有：

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$$

即：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$. 反之亦然.

Proof.

对证明序列的下标用归纳法(正确性)：

1. 由于C_1满足定义中的条件，所以结论成立；
2. 设对任意的$j < i$，C_j都是前提的有效结论；则：
    1. if $C_i = H_k$: (引入条件) $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow H_k$
    2. if $C_i = \mathbb{T}$: (引入永真) $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow \mathbb{T}$
    3. if $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$，而由归纳假设：
       $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_{i_j}$
       $\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow (C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k}) \Rightarrow C_i$
    4. 同理可证明，当$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$时结论成立；
3. 故结论成立.

自然推理的正确性与完备性

Theorem (Soundness & Completeness)

设$C_1, C_2, \ldots, C_m$是关于条件$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一证明序列，则对每个C_i 都有：

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$$

即：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$. 反之亦然.

Proof.

对证明序列的下标用归纳法(正确性)：

1. 由于C_1满足定义中的条件，所以结论成立；
2. 设对任意的$j < i$，C_j都是前提的有效结论；则：
   1. if $C_i = H_k$: (引入条件) $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow H_k$
   2. if $C_i = \mathbb{T}$: (引入永真) $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow \mathbb{T}$
   3. if $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$，而由归纳假设：
      $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_{i_j}$
      $\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow (C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k}) \Rightarrow C_i$
   4. 同理可证明，当$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$时结论成立；
3. 故结论成立.

自然推理的正确性与完备性

Theorem (Soundness & Completeness)

设$C_1, C_2, \ldots, C_m$是关于条件$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一证明序列，则对每个C_i 都有：

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$$

即：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$. 反之亦然.

Proof.

对证明序列的下标用归纳法(正确性)：

1. 由于C_1满足定义中的条件，所以结论成立；
2. 设对任意的$j < i$，C_j都是前提的有效结论；则：
   1. if $C_i = H_k$: (引入条件) $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow H_k$
   2. if $C_i = \mathbb{T}$: (引入永真) $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow \mathbb{T}$
   3. if $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$，而由归纳假设：
      $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_{i_j}$
      $\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow (C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k}) \Rightarrow C_i$
   4. 同理可证明，当$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$时结论成立；
3. 故结论成立.

自然推理的正确性与完备性

Theorem (Soundness & Completeness)

设$C_1, C_2, \ldots, C_m$是关于条件$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一证明序列，则对每个C_i 都有：

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$$

即：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$. 反之亦然.

Proof.

对证明序列的下标用归纳法(正确性)：

1. 由于C_1满足定义中的条件，所以结论成立；
2. 设对任意的$j < i$，C_j都是前提的有效结论；则：
   1. if $C_i = H_k$: (引入条件) $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow H_k$
   2. if $C_i = \mathbb{T}$: (引入永真) $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow \mathbb{T}$
   3. if $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$, 而由归纳假设：
      $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_{i_j}$
      $\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow (C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k}) \Rightarrow C_i$
   4. 同理可证明，当$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$时结论成立；
3. 故结论成立.

自然推理的正确性与完备性

Theorem (Soundness & Completeness)

设$C_1, C_2, \ldots, C_m$是关于条件$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一证明序列，则对每个C_i 都有：

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_i$$

即：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$. 反之亦然.

Proof.

对证明序列的下标用归纳法(正确性)：

1. 由于C_1满足定义中的条件，所以结论成立；
2. 设对任意的$j < i$，C_j都是前提的有效结论；则：
    1. if $C_i = H_k$: (引入条件) $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow H_k$
    2. if $C_i = \mathbb{T}$: (引入永真) $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow \mathbb{T}$
    3. if $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$，而由归纳假设：
       $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C_{i_j}$
       $\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow (C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k}) \Rightarrow C_i$
    4. 同理可证明，当$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$时结论成立；
3. 故结论成立.

推理规则

Definition

常用的永真蕴涵关系的竖式表示称为推理规则(Inference Rule)

Example (三段论)

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

其对应的推理规则表示为:

$$\frac{P \qquad (P \rightarrow Q)}{Q} \quad (\text{三段论})$$

Remark

在推理过程中的不等变换仅能使用代入规则!

常用的推理规则1/2

推理规则.

名称	推理规则	对应的永真蕴涵关系
加法式	$\dfrac{P}{P \vee Q}$	$P \Rightarrow P \vee Q$
简化式	$\dfrac{P \wedge Q}{P}$	$P \wedge Q \Rightarrow P$
三段论,分离规则 Modus Ponens(MP)	$\dfrac{P \quad P \to Q}{Q}$	$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$
拒取式 Modus Tollens(MT)	$\dfrac{\neg Q \quad P \to Q}{\neg P}$	$\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$
前提三段论 Hypothetical syllogism	$\dfrac{P \to Q \quad Q \to R}{P \to R}$	$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$
复合式 Composition	$\dfrac{P \to Q \quad P \to R}{P \to Q \wedge R}$	$(P \to Q) \wedge (P \to R) \Rightarrow P \to Q \wedge R$

□

常用的推理规则2/2

推理规则.

名称	推理规则	对应的永真蕴涵关系
析取三段论 Disjunctive syllogism	$\dfrac{P \vee Q \quad \neg Q}{P}$	$(P \vee Q) \wedge \neg Q \Rightarrow P$
合取式	$\dfrac{P \quad Q}{P \wedge Q}$	$P \wedge Q \Rightarrow P \wedge Q$
构造性二难推理 Constructive dilemma	$\dfrac{\begin{array}{c}P \rightarrow Q\\ R \rightarrow S\\ P \vee R\end{array}}{Q \vee S}$	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow Q \vee S$
破坏性二难推理 Destructive dilemma	$\dfrac{\begin{array}{c}P \rightarrow Q\\ R \rightarrow S\\ \neg Q \vee \neg S\end{array}}{\neg P \vee \neg R}$	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \Rightarrow \neg P \vee \neg R$

□

Example

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

方法1.

□

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

Example

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

方法1.

$\square$

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

Example

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

方法1.

$\square$

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

Example

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

方法1.

1. $A \rightarrow B \vee C$ (P)
2. $B \rightarrow \neg A$ (P)
3. $A \rightarrow \neg B$ (②+T)
4. $A \rightarrow (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \rightarrow C \wedge \neg B$ (④+T)
6. $(A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow \neg B)$ (⑤+T)
7. $A \rightarrow C$ (⑥+[illegible])
8. $D \rightarrow \neg C$ (P)
9. $C \rightarrow \neg D$ (⑧+T)
10. $A \rightarrow \neg D$ (⑦⑨+[illegible])

□

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法1.

1. $A \to B \vee C$ (P)
2. $B \to \neg A$ (P)
3. $A \to \neg B$ (②+T)
4. $A \to (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \to C \wedge \neg B$ (④+T)

$\square$

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法1.

1. $A \to B \vee C$ (P)
2. $B \to \neg A$ (P)
3. $A \to \neg B$ (②+T)
4. $A \to (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \to C \wedge \neg B$ (④+T)

□

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法1.

1. $A \to B \vee C$ (P)
2. $B \to \neg A$ (P)
3. $A \to \neg B$ (②+T)
4. $A \to (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \to C \wedge \neg B$ (④+T)

$\square$

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法1.

1. $A \to B \vee C$ (P)
2. $B \to \neg A$ (P)
3. $A \to \neg B$ (②+T)
4. $A \to (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \to C \wedge \neg B$ (④+T)
6. $(A \to C) \wedge (A \to \neg B)$ (⑤+T)
7. $A \to C$ (⑥+简化式)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $A \to \neg D$ (⑦⑨+前提三段论)

$\square$

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法1.

1. $A \to B \vee C$ (P)
2. $B \to \neg A$ (P)
3. $A \to \neg B$ (②+T)
4. $A \to (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \to C \wedge \neg B$ (④+T)
6. $(A \to C) \wedge (A \to \neg B)$ (⑤+T)
7. $A \to C$ (⑥+简化式)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $A \to \neg D$ (⑦⑨+前提三段论)

$\square$

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法1.

1. $A \to B \vee C$ (P)
2. $B \to \neg A$ (P)
3. $A \to \neg B$ (②+T)
4. $A \to (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \to C \wedge \neg B$ (④+T)
6. $(A \to C) \wedge (A \to \neg B)$ (⑤+T)
7. $A \to C$ (⑥+简化式)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $A \to \neg D$ (⑦⑨+前提三段论)

□

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法1.

1. $A \to B \vee C$ (P)
2. $B \to \neg A$ (P)
3. $A \to \neg B$ (②+T)
4. $A \to (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \to C \wedge \neg B$ (④+T)
6. $(A \to C) \wedge (A \to \neg B)$ (⑤+T)
7. $A \to C$ (⑥+简化式)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $A \to \neg D$ (⑦⑨+前提三段论)

□

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

Example

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

方法1.

1. $A \rightarrow B \vee C$ (P)
2. $B \rightarrow \neg A$ (P)
3. $A \rightarrow \neg B$ (②+T)
4. $A \rightarrow (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \rightarrow C \wedge \neg B$ (④+T)
6. $(A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow \neg B)$ (⑤+T)
7. $A \rightarrow C$ (⑥+简化式)
8. $D \rightarrow \neg C$ (P)
9. $C \rightarrow \neg D$ (⑧+T)
10. $A \rightarrow \neg D$ (⑦⑨+前提三段论)

$\square$

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法1.

1. $A \to B \vee C$ (P)
2. $B \to \neg A$ (P)
3. $A \to \neg B$ (②+T)
4. $A \to (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \to C \wedge \neg B$ (④+T)
6. $(A \to C) \wedge (A \to \neg B)$ (⑤+T)
7. $A \to C$ (⑥+简化式)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $A \to \neg D$ (⑦⑨+前提三段论)

$\square$

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

Example

Example

$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$

方法1.

1. $A \to B \vee C$ (P)
2. $B \to \neg A$ (P)
3. $A \to \neg B$ (②+T)
4. $A \to (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \to C \wedge \neg B$ (④+T)
6. $(A \to C) \wedge (A \to \neg B)$ (⑤+T)
7. $A \to C$ (⑥+简化式)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $A \to \neg D$ (⑦⑨+前提三段论)

□

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法1.

1. $A \to B \vee C$ (P)
2. $B \to \neg A$ (P)
3. $A \to \neg B$ (②+T)
4. $A \to (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \to C \wedge \neg B$ (④+T)
6. $(A \to C) \wedge (A \to \neg B)$ (⑤+T)
7. $A \to C$ (⑥+简化式)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $A \to \neg D$ (⑦⑨+前提三段论)

□

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法1.

1. $A \to B \vee C$ (P)
2. $B \to \neg A$ (P)
3. $A \to \neg B$ (②+T)
4. $A \to (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \to C \wedge \neg B$ (④+T)
6. $(A \to C) \wedge (A \to \neg B)$ (⑤+T)
7. $A \to C$ (⑥+简化式)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $A \to \neg D$ (⑦⑨+前提三段论)

□

Notation

在证明说明中用P(Premise)表示引入前提，用T(Tautology)表示恒等变换.

证明方法

Remark

1. *直接对结论些证明序列;*
2. *间接证明：条件和结论的等价变换，如，CP规则(Conditional Proof)，反证法等.*

Theorem

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash P \rightarrow Q \text{ iff } H_1, H_2, \ldots, H_n, P \vdash Q$$

Proof.

设，$\mathbf{H} = H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$，则：

$$\begin{aligned} & \mathbf{H} \rightarrow (P \rightarrow Q) \\ \Leftrightarrow\ & \neg\mathbf{H} \vee \neg P \vee Q \\ \Leftrightarrow\ & \neg(\mathbf{H} \wedge P) \vee Q \\ \Leftrightarrow\ & \neg(\mathbf{H} \wedge P) \vee Q \\ \Leftrightarrow\ & (\mathbf{H} \wedge P) \rightarrow Q \end{aligned}$$

So, if $\mathbf{H} \rightarrow (P \rightarrow Q)$ 永真，iff, $(\mathbf{H} \wedge P) \rightarrow Q$永真. □

证明方法

Remark

1. 直接对结论些证明序列;
2. 间接证明：条件和结论的等价变换，如，CP规则(Conditional Proof)，反证法等.

Theorem

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash P \to Q \text{ iff } H_1, H_2, \ldots, H_n, P \vdash Q$$

Proof.

设，$\mathbf{H} = H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$，则：

$$\begin{aligned} & \mathbf{H} \to (P \to Q) \\ \Leftrightarrow\ & \neg\mathbf{H} \vee \neg P \vee Q \\ \Leftrightarrow\ & \neg(\mathbf{H} \wedge P) \vee Q \\ \Leftrightarrow\ & \neg(\mathbf{H} \wedge P) \vee Q \\ \Leftrightarrow\ & (\mathbf{H} \wedge P) \to Q \end{aligned}$$

So, if $\mathbf{H} \to (P \to Q)$ 永真，iff, $(\mathbf{H} \wedge P) \to Q$永真. □

证明方法

Remark

1. *直接对结论些证明序列;*
2. *间接证明: 条件和结论的等价变换, 如, CP规则(Conditional Proof), 反证法等.*

Theorem

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash P \to Q \text{ iff } H_1, H_2, \ldots, H_n, P \vdash Q$$

Proof.

设, $\mathbf{H} = H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$, 则:

$$\begin{aligned} & \mathbf{H} \to (P \to Q) \\ \Leftrightarrow\ & \neg\mathbf{H} \vee \neg P \vee Q \\ \Leftrightarrow\ & \neg(\mathbf{H} \wedge P) \vee Q \\ \Leftrightarrow\ & \neg(\mathbf{H} \wedge P) \vee Q \\ \Leftrightarrow\ & (\mathbf{H} \wedge P) \to Q \end{aligned}$$

So, if $\mathbf{H} \to (P \to Q)$ 永真, iff, $(\mathbf{H} \wedge P) \to Q$永真. □

证明方法

Remark

1. *直接对结论些证明序列;*
2. *间接证明：条件和结论的等价变换，如，CP规则(Conditional Proof)，反证法等.*

Theorem

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash P \to Q \text{ iff } H_1, H_2, \ldots, H_n, P \vdash Q$$

Proof.

设，$\mathbf{H} = H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$，则：

$$\begin{aligned} & \mathbf{H} \to (P \to Q) \\ \Leftrightarrow\ & \neg \mathbf{H} \vee \neg P \vee Q \\ \Leftrightarrow\ & \neg(\mathbf{H} \wedge P) \vee Q \\ \Leftrightarrow\ & \neg(\mathbf{H} \wedge P) \vee Q \\ \Leftrightarrow\ & (\mathbf{H} \wedge P) \to Q \end{aligned}$$

So, if $\mathbf{H} \to (P \to Q)$ 永真，iff, $(\mathbf{H} \wedge P) \to Q$永真. □

证明方法

Remark

1. 直接对结论些证明序列;
2. 间接证明：条件和结论的等价变换，如，CP规则(Conditional Proof)，反证法等.

Theorem

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash P \to Q \text{ iff } H_1, H_2, \ldots, H_n, P \vdash Q$$

Proof.

设，$\mathbf{H} = H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$，则：

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{H} \to (P \to Q) \\
\Leftrightarrow\ & \neg \mathbf{H} \vee \neg P \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\mathbf{H} \wedge P) \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\mathbf{H} \wedge P) \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & (\mathbf{H} \wedge P) \to Q
\end{aligned}
$$

So, if $\mathbf{H} \to (P \to Q)$ 永真，iff，$(\mathbf{H} \wedge P) \to Q$永真. □

Example

Example

$$A \to B \lor C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法2.

用CP规则等价于: $H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法2.

用CP规则等价于：$H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$

□

Example

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

方法2.

用CP规则等价于：$H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$

□

Example

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

方法2.

用CP规则等价于：$H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$

1. A (附加前提)
2. $A \rightarrow B \vee C$ (P)
3. $B \vee C$ (①②+MP)
4. $B \rightarrow \neg A$ (P)
5. $A \rightarrow \neg B$ (④+T)
6. $\neg B$ ([illegible]+MP)
7. C ([illegible])
8. $D \rightarrow \neg C$ (P)
9. $C \rightarrow \neg D$ ([illegible]+T)
10. $\neg D$ ([illegible]+MP)

□

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法2.

用CP规则等价于：$H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$

1. A (附加前提)
2. $A \to B \vee C$ (P)
3. $B \vee C$ (①②+MP)
4. $B \to \neg A$ (P)
5. $A \to \neg B$ (④+T)
6. $\neg B$ (①⑤+MP)
7. C (③⑥+析取三段论)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $\neg D$ (⑦⑨+MP)

□

Example

Example

$$A \to B \lor C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法2.

用CP规则等价于：$H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$

1. A (附加前提)
2. $A \to B \lor C$ (P)
3. $B \lor C$ (①②+MP)
4. $B \to \neg A$ (P)
5. $A \to \neg B$ (④+T)
6. $\neg B$ (①⑤+MP)
7. C (③⑥+析取三段论)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $\neg D$ (⑦⑨+MP)

□

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法2.

用CP规则等价于：$H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$

1. A (附加前提)
2. $A \to B \vee C$ (P)
3. $B \vee C$ (①②+MP)
4. $B \to \neg A$ (P)
5. $A \to \neg B$ (④+T)

□

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法2.

用CP规则等价于：$H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$

1. A (附加前提)
2. $A \to B \vee C$ (P)
3. $B \vee C$ (①②+MP)
4. $B \to \neg A$ (P)
5. $A \to \neg B$ (④+T)

□

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法2.

用CP规则等价于：$H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$

1. A (附加前提)
2. $A \to B \vee C$ (P)
3. $B \vee C$ (①②+MP)
4. $B \to \neg A$ (P)
5. $A \to \neg B$ (④+T)
6. $\neg B$ (①⑤+MP)
7. C (①⑤+析取三段论)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $\neg D$ (⑦⑨+MP)

□

Example

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

方法2.

用CP规则等价于：$H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$

1. A (附加前提)
2. $A \rightarrow B \vee C$ (P)
3. $B \vee C$ (①②+MP)
4. $B \rightarrow \neg A$ (P)
5. $A \rightarrow \neg B$ (④+T)
6. $\neg B$ (①⑤+MP)
7. C (①⑤+析取三段论)
8. $D \rightarrow \neg C$ (P)
9. $C \rightarrow \neg D$ (⑧+T)
10. $\neg D$ (⑦⑨+MP)

□

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法2.

用CP规则等价于：$H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$

1. A (附加前提)
2. $A \to B \vee C$ (P)
3. $B \vee C$ (①②+MP)
4. $B \to \neg A$ (P)
5. $A \to \neg B$ (④+T)
6. $\neg B$ (①⑤+MP)
7. C (①⑤+析取三段论)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $\neg D$ (⑦⑨+MP)

□

Example

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

方法2.

用CP规则等价于：$H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$

1. A (附加前提)
2. $A \rightarrow B \vee C$ (P)
3. $B \vee C$ (①②+MP)
4. $B \rightarrow \neg A$ (P)
5. $A \rightarrow \neg B$ (④+T)
6. $\neg B$ (①⑤+MP)
7. C (①⑤+析取三段论)
8. $D \rightarrow \neg C$ (P)
9. $C \rightarrow \neg D$ (⑧+T)
10. $\neg D$ (⑦⑨+MP)

□

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法2.

用CP规则等价于：$H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$

1. A (附加前提)
2. $A \to B \vee C$ (P)
3. $B \vee C$ (①②+MP)
4. $B \to \neg A$ (P)
5. $A \to \neg B$ (④+T)
6. $\neg B$ (①⑤+MP)
7. C (①⑤+析取三段论)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $\neg D$ (⑦⑨+MP)

□

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法2.

用CP规则等价于：$H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$

1. A (附加前提)
2. $A \to B \vee C$ (P)
3. $B \vee C$ (①②+MP)
4. $B \to \neg A$ (P)
5. $A \to \neg B$ (④+T)
6. $\neg B$ (①⑤+MP)
7. C (①⑤+析取三段论)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $\neg D$ (⑦⑨+MP)

□

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法2.

用CP规则等价于：$H_1, H_2, H_3, A \vdash \neg D$

1. A (附加前提)
2. $A \to B \vee C$ (P)
3. $B \vee C$ (①②+MP)
4. $B \to \neg A$ (P)
5. $A \to \neg B$ (④+T)
6. $\neg B$ (①⑤+MP)
7. C (①⑤+析取三段论)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $\neg D$ (⑦⑨+MP)

$\square$

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

方法3.

用反正法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法3.

用反正法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \to \neg D) \vdash \mathbb{F}$

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

方法3.

用反正法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$

□

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法3.

用反正法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \to \neg D) \vdash \mathbb{F}$

$\square$

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法3.

用反正法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \to \neg D) \vdash \mathbb{F}$

1. $\neg(A \to \neg D)$ (附加前提)
2. $A \wedge D$ (①+T)
3. A (①+简化式)
4. D (①+简化式)
5. $D \to \neg C$ (P)
6. $\neg C$ (④⑤+MP)
7. $A \to B \vee C$ (P)
8. $B \vee C$ (③⑦+MP)
9. B (⑥⑧+析取三段论)
10. $B \to \neg A$ (P)
11. $\neg A$ (⑨⑩+MP)
12. $\mathbb{F}$ (③⑪+合取式)

□

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

方法3.

用反正法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$

1. $\neg(A \rightarrow \neg D)$ (附加前提)
2. $A \wedge D$ (①+T)
3. A (①+简化式)
4. D (①+简化式)
5. $D \rightarrow \neg C$ (P)
6. $\neg C$ (④⑤+MP)
7. $A \rightarrow B \vee C$ (P)
8. $B \vee C$ (③⑦+MP)
9. B (⑥⑧+析取三段论)
10. $B \rightarrow \neg A$ (P)
11. $\neg A$ (⑨⑩+MP)
12. $\mathbb{F}$ (③⑪+合取式)

□

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法3.

用反证法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \to \neg D) \vdash \mathbb{F}$

1. $\neg(A \to \neg D)$ （附加前提）
2. $A \wedge D$ （①+T）
3. A （①+简化式）
4. D （①+简化式）
5. $D \to \neg C$ （P）
6. $\neg C$ （④⑤+MP）

□

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法3.

用反正法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \to \neg D) \vdash \mathbb{F}$

1. $\neg(A \to \neg D)$ (附加前提)
2. $A \wedge D$ (①+T)
3. A (①+简化式)
4. D (①+简化式)
5. $D \to \neg C$ (P)
6. $\neg C$ (④⑤+MP)

□

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法3.

用反正法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \to \neg D) \vdash \mathbb{F}$

1. $\neg(A \to \neg D)$ (附加前提)
2. $A \wedge D$ (①+T)
3. A (①+简化式)
4. D (①+简化式)
5. $D \to \neg C$ (P)
6. $\neg C$ (④⑤+MP)

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法3.

用反正法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \to \neg D) \vdash \mathbb{F}$

1	$\neg(A \to \neg D)$	(附加前提)
2	$A \wedge D$	(①+T)
3	A	(①+简化式)
4	D	(①+简化式)
5	$D \to \neg C$	(P)
6	$\neg C$	(④⑤+MP)
7	$A \to B \vee C$	(P)
8	$B \vee C$	(③⑦+MP)
9	B	(⑥⑧+析取三段论)
10	$B \to \neg A$	(P)
11	$\neg A$	(⑨⑩+MP)
12	$\mathbb{F}$	(③⑪+合取式)

□

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法3.

用反正法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \to \neg D) \vdash \mathbb{F}$

1. $\neg(A \to \neg D)$ (附加前提)
2. $A \wedge D$ (①+T)
3. A (①+简化式)
4. D (①+简化式)
5. $D \to \neg C$ (P)
6. $\neg C$ (④⑤+MP)

□

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

方法3.

用反正法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$

1	$\neg(A \rightarrow \neg D)$	(附加前提)
2	$A \wedge D$	(①+T)
3	A	(①+简化式)
4	D	(①+简化式)
5	$D \rightarrow \neg C$	(P)
6	$\neg C$	(④⑤+MP)
7	$A \rightarrow B \vee C$	(P)
8	$B \vee C$	(③⑦+MP)
9	B	(⑥⑧+析取三段论)
10	$B \rightarrow \neg A$	(P)
11	$\neg A$	(⑨⑩+MP)
12	$\mathbb{F}$	(③⑪+合取式)

□

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

方法3.

用反正法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$

1. $\neg(A \rightarrow \neg D)$ (附加前提)
2. $A \wedge D$ (①+T)
3. A (①+简化式)
4. D (①+简化式)
5. $D \rightarrow \neg C$ (P)
6. $\neg C$ (④⑤+MP)
7. $A \rightarrow B \vee C$ (P)
8. $B \vee C$ (③⑦+MP)
9. B (⑥⑧+析取三段论)
10. $B \rightarrow \neg A$ (P)
11. $\neg A$ (⑨⑩+MP)
12. $\mathbb{F}$ (③⑪+合取式)

□

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法3.

用反证法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \to \neg D) \vdash \mathbb{F}$

1. $\neg(A \to \neg D)$ (附加前提)
2. $A \wedge D$ (①+T)
3. A (①+简化式)
4. D (①+简化式)
5. $D \to \neg C$ (P)
6. $\neg C$ (④⑤+MP)
7. $A \to B \vee C$ (P)
8. $B \vee C$ (③⑦+MP)
9. B (⑥⑧+析取三段论)
10. $B \to \neg A$ (P)
11. $\neg A$ (⑨⑩+MP)
12. $\mathbb{F}$ (③⑪+合取式)

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ *iff* $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$
称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法3.

用反正法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \to \neg D) \vdash \mathbb{F}$

1. $\neg(A \to \neg D)$ (附加前提)
2. $A \wedge D$ (①+T)
3. A (①+简化式)
4. D (①+简化式)
5. $D \to \neg C$ (P)
6. $\neg C$ (④⑤+MP)
7. $A \to B \vee C$ (P)
8. $B \vee C$ (③⑦+MP)
9. B (⑥⑧+析取三段论)
10. $B \to \neg A$ (P)
11. $\neg A$ (⑨⑩+MP)
12. $\mathbb{F}$ (③⑪+合取式)

□

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法3.

用反证法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \to \neg D) \vdash \mathbb{F}$

1. $\neg(A \to \neg D)$ (附加前提)
2. $A \wedge D$ (①+T)
3. A (①+简化式)
4. D (①+简化式)
5. $D \to \neg C$ (P)
6. $\neg C$ (④⑤+MP)
7. $A \to B \vee C$ (P)
8. $B \vee C$ (③⑦+MP)
9. B (⑥⑧+析取三段论)
10. $B \to \neg A$ (P)
11. $\neg A$ (⑨⑩+MP)
12. $\mathbb{F}$ (③⑪+合取式)

$\square$

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为反证法.

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法3.

用反正法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \to \neg D) \vdash \mathbb{F}$

1. $\neg(A \to \neg D)$ (附加前提)
2. $A \wedge D$ (①+T)
3. A (①+简化式)
4. D (①+简化式)
5. $D \to \neg C$ (P)
6. $\neg C$ (④⑤+MP)
7. $A \to B \vee C$ (P)
8. $B \vee C$ (③⑦+MP)
9. B (⑥⑧+析取三段论)
10. $B \to \neg A$ (P)
11. $\neg A$ (⑨⑩+MP)
12. $\mathbb{F}$ (③⑪+合取式)

□

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$ iff $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$

称这样的条件和结论的变换为**反证法**.

Example

$$A \rightarrow B \vee C,\ B \rightarrow \neg A,\ D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

方法3.

用反正法等价于：$H_1, H_2, H_3, \neg(A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$

1. $\neg(A \rightarrow \neg D)$ (附加前提)
2. $A \wedge D$ (①+T)
3. A (①+简化式)
4. D (①+简化式)
5. $D \rightarrow \neg C$ (P)
6. $\neg C$ (④⑤+MP)
7. $A \rightarrow B \vee C$ (P)
8. $B \vee C$ (③⑦+MP)
9. B (⑥⑧+析取三段论)
10. $B \rightarrow \neg A$ (P)
11. $\neg A$ (⑨⑩+MP)
12. $\mathbb{F}$ (③⑪+合取式)

□

命题逻辑

1. 命题逻辑
   - 命题
   - 符号化
   - 合式公式的形式文法
   - 合式公式的形式语义
2. 公式之间的关系
   - 公式的语义性质
   - 逻辑等价
   - 永真蕴涵关系
   - 恒等变换与不等变换
   - 对偶性
3. 范式和基本定理
   - 极大项
   - 主合取范式
   - 主析取范式
   - 联结词的扩充与规约
4. 推理和证明方法
   - 有效结论
   - 自然推理的形式证明
   - 证明方法