

# 武汉大学 2015-2016 第一学期《离散数学》考试题

1. (8 分) 设集合  $A, B, C$  满足  $A \cup B = A \cup C$ ,  $A \cap B = A \cap C$ , 求证:  $B = C$ 。

2. (8 分) 给出集合  $A = \{a, b, c, d\}$  上的关系  $R$  的例子, 使它分别具有以下性质:

- (1)  $R$  同时是自反的和反对称的;
- (2)  $R$  既不是对称的也不是反对称的;
- (3)  $R$  是传递的, 但  $R \cup \tilde{R}$  不是传递的。

3. (10 分)  $A = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3\}$ ,  $A$  上关系  $R$  定义为:

$$\langle x, y \rangle R \langle u, v \rangle, \text{ 当且仅当 } |x - y| = |u - v|,$$

证明  $R$  是等价关系, 并求由  $R$  确定的  $A$  的划分。

4. (10 分) 有理数集  $Q$  中的  $*$  定义如下:  $x * y = 6 - 2x - 2y + xy$ ,  $\forall x, y \in Q$ 。

- (1)  $(Q, *)$  是半群吗? 是可交换的吗?
- (2) 求单位元;
- (3)  $*$  中是否有可逆元? 若有, 指出哪些是可逆元? 并指出逆元是什么?

5. (8 分) 设  $R$  是全体实数集,  $M = \{\langle a, b \rangle \mid a, b \in R, a \neq 0\}$ 。定义  $\langle a, b \rangle \circ \langle c, d \rangle = \langle ac, ad + b \rangle$ 。

这时  $M$  对运算  $\circ$  构成群吗? 试验证之。

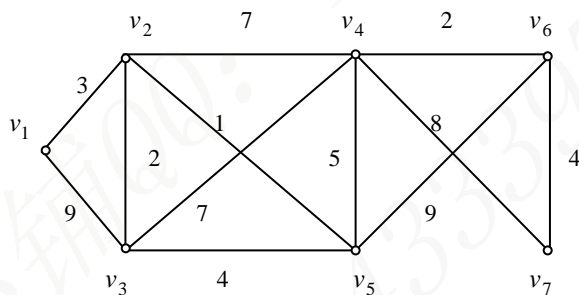
6. (8 分) 设  $S = \{1, 2, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ , 设  $D$  是  $S$  上的整除关系:  $\langle x, y \rangle \in D$  当且仅当  $y$  是  $x$  的倍数

- (1) 证明  $D$  是一个偏序关系;
- (2) 试画出关系  $D$  的哈斯图, 并由此说明  $(S, D)$  是一个格;
- (3)  $D$  是一个分配格吗? 为什么?
- (4) 写出  $(S, D)$  中至少八个 5 个元素的子格。

7. (8 分) 已知  $n$  阶简单图  $G$  有  $m$  条边, 各结点的度数均为 3。

- (1) 若  $m = 3n - 6$ , 证明: 在同构意义下  $G$  唯一, 并求  $m, n$ ;
- (2) 若  $n = 6$ , 证明在同构意义下  $G$  不唯一。

8. (8 分) 对如下给出的赋权图  $G$ , 求出结点  $v_1$  到其余各个结点的最短路径。



9. (8 分) 在通讯中要传输八进制数字  $0, 1, 2, \dots, 7$ 。这些数字出现的频率为

$0: 30\%; 1: 20\%; 2: 15\%; 3: 10\%; 4: 10\%; 5: 6\%; 6: 5\%; 7: 4\%$ 。

编一个最佳前缀码, 使通讯中出现的二进制数字尽可能地少。具体要求如下:

- (1) 画出相应的二元树;
- (2) 写出每个数字对应的前缀码;
- (3) 传输按上述比例出现的数字 10000 个时, 至少要用多少个二进制数字?

10. (8 分) 求公式  $p \wedge (p \rightarrow q) \vee r$  的主析取范式与主合取范式。

11. (8 分) 用谓词和量词将下列命题符号化:

- (1) 没有不犯错误的人;
- (2) 并不是外语学得好的学生都是三好生, 但外语学得不好的学生一定不是三好生。

12. (8 分) 将下列推理形式化, 并对正确的推理给出推理过程, 要求指明所设命题或谓词的含义。

每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车, 每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车, 并非每个人都喜欢骑自行车, 因而有人不喜欢步行。