武汉大学计算机学院2007-2008学年第一学期
2006级《离散数学》考试标准答案

一、 试求下述命题公式G的主析取和主合取范式： (10分)

$$P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

主析取范式: $(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$;
主合取范式: $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$.

二、 试证明下列结论的有效性(**要求写证明序列**)： (12分，6+6)

(1) 前提：$P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q$, $P \rightarrow R$, $R \rightarrow \neg S$, 结论：$S \rightarrow Q$;
用***CP***规则证明：

①	S	附加前提	⑥	$\neg P \vee Q$	⑤+加法式
②	$R \rightarrow \neg S$	引入前提	⑦	$\neg(P \wedge \neg Q)$	⑥+$\mathbb{T}$
③	$\neg R$	②+②+MT	⑧	$P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q$	引入前提
④	$P \rightarrow R$	引入前提	⑨	$\neg P \wedge Q$	⑦+⑧+析取三段论
⑤	$\neg P$	③+④+MT	⑩	Q	⑨+化简规则

(2) 前提：$\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$, $\exists x P(x)$, 结论：$\exists x(P(x) \wedge R(x))$
Proof

①	$\exists x P(x)$	引入前提	④	$P(a) \rightarrow (Q(a) \wedge R(a))$	③+US
②	$P(a)$	②+ES	⑤	$Q(a) \wedge R(a)$	②+④+MP
③	$\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))$	引入前提	⑥	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	⑤+EG

三、 设集合$A = \{0, 1, 2, 3\}$，设A上的二元关系$\mathcal{R} = \{\langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$：(12分，4+4+4)

(1) 试问$\mathcal{R}$是否为自反关系，反自反关系，对称关系，反对称关系和传递关系；
解：$\mathcal{R}$为反自反关系，反对称关系和传递关系。

(2) 试求集合$\mathcal{B} = \{S \mid S是A上的偏序关系, 且\mathcal{R} \subseteq S\}$的基数；
解：包含关系$\mathcal{R}$的偏序关系的$Hasse$图只可能形如“$|$”，“$|\cdot$”，“$\diamond$”，“$\leftthreetimes$”，“Y”，“$\vee$”或“$\wedge$”，并且$3, 1, 2$自底向上排列，这样将“0”放置在上述三个$Hasse$图的可能性分别是4，1，1，1，1，1和1，故包含$\mathcal{R}$的偏序关系共有10个，即$|\mathcal{B}| = 10$ 。

(3) 试分别求出集合A上的对称关系和反对称关系的总数。
解：

① 对称关系：考虑关系矩阵元素对m_{ij}和m_{ji}（$i \neq j$）取值的可能性为：$\langle 0,0\rangle$，$\langle 1,1\rangle$，而m_{ii}的取值可能也是0，1，故可以定义的对称关系数为$2^{4+3+2+1}=1024$；

② 反对称关系：考虑关系矩阵元素对m_{ij}和m_{ji}（$i \neq j$）取值的可能性为：$\langle 0,0\rangle$，$\langle 1,0\rangle$和$\langle 0,1\rangle$，而m_{ii}的取值可能是0，1，故可以定义的对称关系数为$3^{3+2+1}\times 2^4=11664$。

四、设$\langle G,*\rangle$是一个群，$\mathcal{R}$是G上的二元关系，$\mathcal{R}=\{\langle x,y\rangle \mid \exists a\in G,\ 使得\ y=a*x*a^{-1}\}$，试证明：$R$是$G$上的等价关系。（6分）

Proof:

① 自反性：$x\mathcal{R}x$，$\because x=e*x*e^{-1}$；

② 对称性：设$x\mathcal{R}y$，则$\exists a\in G$，$y=a*x*a^{-1}$，$\therefore x=a^{-1}*y*a=a^{-1}*y*(a^{-1})^{-1}$，故$y\mathcal{R}x$；

③ 传递性：设$x\mathcal{R}y\wedge y\mathcal{R}z$，则$\exists a,b\in G\wedge y=\wedge y=a*x*a^{-1}\wedge z=b*y*b^{-1}$，$\therefore z=b*y*b^{-1}=b*a*x*a^{-1}*b^{-1}=(b*a)*x*(b*a)^{-1}$. 故$x\mathcal{R}z$.

五、设集合$N_9=\{0,1,2,\cdots,7,8\}$，$+_9$是模9加法，则$\langle N_9,+_9\rangle$是一个阶数为9的循环群：（14分，5+5+4）

(1) 试求群N_9所有的子群；
解：N_9，$\{0,3,6\}$ 和$\{0\}$；

(2) 试求群N_9每个元素的阶数
解：$|0|=1$，$|1|=9$，$|2|=9$，$|3|=3$，$|4|=9$，$|5|=9$，$|6|=3$，$|7|=9$，$|8|=9$；

(3) 试求群N_9所有的生成元。
解：6个生成元，分别是$1,2,4,5,7,8$.

六、设$G=\{f \mid f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,其中:a,b\in\mathbb{R},\ 且a\neq 0\}$：（24分，每小题4分）

(1) 试证明：$\langle G,\circ\rangle$是一个群，其中$\circ$是函数的合成运算；

Proof:

① 运算是可结合的：函数的合成运算是可结合的；

② 运算的封闭性：设$\forall f,g\in G$，$f(x)=ax+b$，$g(x)=cx+d$ $(a\neq 0,\ c\neq 0)$，则$(f\circ g)(x)=acx+ad+b$，即线性函数的合成还是线性函数，故$f\circ g\in G$；

③ 幺元：$\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)=x=1\times x+0$，故合成运算的幺元$\mathbb{1}_{\mathbb{R}}\in G$；

④ 逆元：$\forall f\in G$，$f(x)=ax+b(a\neq 0)$，设函数$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$，$g(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$，则$g\in G$，且$g\circ f=f\circ g=\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$，故$G$中的每个元素都有逆元，并且逆元在$G$中；

(2) 设$N=\{f \mid f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x+b,其中:b\in\mathbb{R}\}$，试证明$\langle N,\circ\rangle$ 是G的子群；

Proof:

① 集合N非空：$\mathbb{1}_{\mathbb{R}}\in N$；

② “差”运算的封闭性：设$f(x) = x + b,\ g(x) = x + d$，则$g^{-1}(x) = x - d$，$\therefore f \circ g^{-1}(x) = x + b - d$，故$f \circ g^{-1} \in N$；

③ 根据子群的等价定义有$N \leqslant G$。

(3) 试证明: N是G的正规子群; (**提示**：证明$\forall f \in G, fNf^{-1} \subseteq N$)

Proof:

① $\forall f \in G, fNf^{-1} \subseteq N$：$\forall f \in G,\ f(x) = ax + b,\ \forall g \in N,\ g(x) = x + d$；则$(f \circ g \circ f^{-1})(x) = (f \circ g)(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}) = f(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a} + d) = x - b + ad + d$，即$f \circ g \circ f^{-1} \in N$，故$fNf^{-1} \subseteq N$；

② 根据正规子群的等价定义有$N \lhd G$.

(4) 试用性质法表示商群G/N；

解：$G/N = \{\, \{\, f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ b \in \mathbb{R} \,\} \mid a \in \mathbb{R}_+ \,\}$

(5) 设$\mathbb{R}_+$是非零实数集合, 则$\langle \mathbb{R}_+, \times \rangle$构成一群, 设函数$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ \varphi(f) = a$, 其中$f(x) = ax + b$, 试证明函数$\varphi$是群$\langle G, \circ \rangle$到群$\langle \mathbb{R}_+, \times \rangle$上的满同态(满射+同态);

Proof:

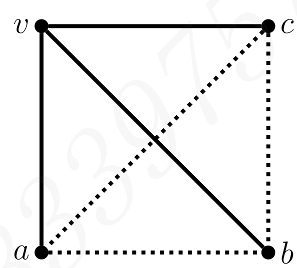
① 满射：$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \exists f \in G,\ f(x) = tx,\ \varphi(f) = t$；

② 同态：设$f, g \in G$，$f(x) = ax + b,\ g(x) = cx + d$，则$(f \circ g)(x) = acx + ad + b$，$\therefore \varphi(f \circ g) = ac = \varphi(f) \times \varphi(g)$.

(6) 试证明G/N与$\mathbb{R}_+$同构。

Proof: $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{\,1\,\}) = \{\, f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x + b,\ b \in \mathbb{R} \,\} = N$（注：也可用此来证$N$是正规子群），根据同态标准分解定理：$G/\ker(\varphi) \cong \varphi(G)$，而$\varphi$是满射，即$\varphi(G) = \mathbb{R}_+$，$\ker(\varphi) = N$，故$G/N \cong \mathbb{R}_+$。

七、 设G是6个结点的简单无向图，证明：G含有一个K_3子图，或者G的补图含有一个K_3子图。 (6分)



Proof:

① 设v是K_6中的任一结点；则$\deg(v) = 5$，所以从v引出的5条边一定有三条边是属于G或三条边属于$\overline{G}$，不妨设三条边属于G，如上图实线所示，记为(v, a), (v, b)和(v, c)；

② if (a, b), (b, c)和(c, a)其中之一属于G，如(a, b)，则(v, a, b, v)是一条属于G的基本回路，即G有K_3子图；否则：

③ (a, b), (b, c)和(c, a)三边均不属于G，如上图用虚线表示，则三角形$\triangle abc$是$\overline{G}$的子图，即$\overline{G}$有一个K_3的子图。

八、 完全二元树是每个结点的出度恰好等于2或者0的有向树。试证明：若完全二元树的树叶数为l，边数为m，则$m = 2(l - 1)$。 (10分)

Proof1：对树叶数l用归纳法：

① $l=1$；完全二元树只可能是孤立点，即$m=0$，故$m=2(l-1)$；

② 归纳假设：设树叶数小于l的完全二元树满足公式；

③ 设T是完全二元树，T树叶数为l，边数为m，且$l>1$，则T的树根一定有左右儿子，设T_1和T_2 分别是树根左右儿子对应的子树，则T_1和T_2也是完全二元树；设l_1和l_2分别是T_1和T_2对应树叶数，则$l_1<l\wedge l_2<l$，且$l_1+l_2=l$；设设m_1和m_2分别是T_1和T_2对应边数，则$m_1+m_2+2=m$；根据归纳假设有：$m_1=2(l_1-1)$，$m_2=2(l_2-1)$，两式左右分别相加有：$m_1+m_2=2(l_1+l_2-2)$，即$m_1+m_2+2=2(l_1+l_2-1)$，故$m=2(l-1)$。

Proof2：用公式$m=n-1$：

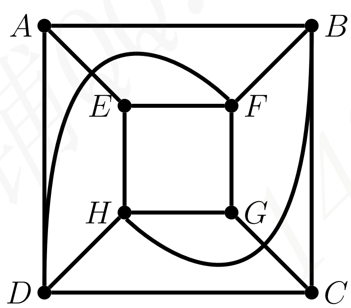
① $l=1$；完全二元树只可能是孤立点，即$m=0$，故$m=2(l-1)$；

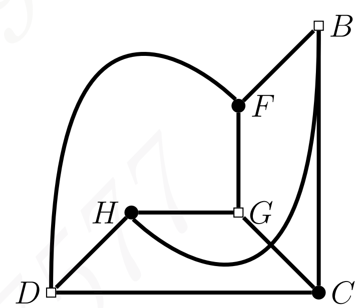
② 设$l>1$，设完全二元树的内部结点数为i，则根结点的度数为2，内部结点的度数为3，叶结点的度数为1，故有：

$$2\times 1+3i+l=2m$$

而$i+l+1=n=m+1$，即$i=m-l$，代入上式即有：$m=2(l-1)$。

九、 试证明下图不是平面图： (6分)





Proof1：利用平面图的必要条件$m<\frac{p}{p-2}(n-2)$（其中p是最小基本回路的长度），有原图中$m=14$，$n=8$，$p=4$，代入不等式有$14<2(8-2)=12$，不等式不成立，故原图不是平面图。

Proof2：用$Kuratowski$定理，删除结点A和E后，该图两度同构$K_{3,3}$（如上右图所示），故原图不是平面图。