武汉大学数学与统计学院

2015－2016 学年第一学期《离散数学》考试试卷 B 卷

学号： **姓名：** **成绩：**

注意：所有答案均写在答题纸上。

一、填空题（共 20 分，每小题 4 分）

1．某班有学生 80 人，其中 30 人参加日语考试，42 人参加法语考试，25 人两门考试均没参加，则有 ______人参加了两门考试。

2．设$|A|=n$，则A上不同的二元关系有 ______个，其中有 ______个不同的自反关系。

3．n个结点的有向完全图有 ______条边，无向完全二分图$K_{n,m}$有 ______条边。

4．若设$T(x):x$是火车，$C(y):y$是汽车，$F(x,y):x$比y快，则“所有火车都比某些汽车快”可符号化为：____。

5．实数集$\mathbf{R}$上的运算$*$定义为

$$x*y=6-2x-2y+xy，\ \forall x,y\in\mathbf{R}。$$

则运算$*$的单位元是 ______，$*$的零元是 ______。

二、简答题（共 36 分，每小题 6 分）

1．下图 1 是集合$A=\{1,2,3,4\}$上关系R的关系图，它是一个偏序关系，试画出它所对应的 Hasse 图，(A,R)是否为格，说明理由。

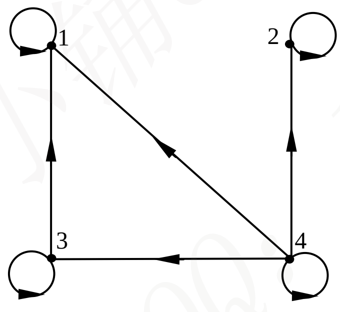


图 1

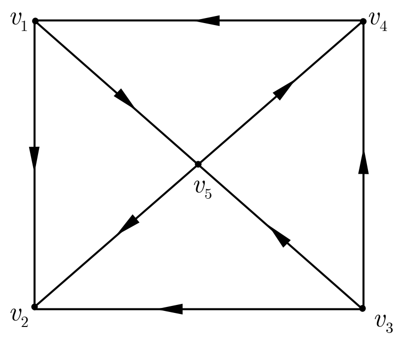


图 2

2．设有向图$G=\langle V,E\rangle$如上图 2 所示，求G的邻接矩阵A和可达性矩阵P。

3．设集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 上的关系 $R=\left\{<a,a>,<a,c>,<c,b>,<c,d>,<d,b>\right\}$，说明 R 所具有的性质（自反、反自反、对称、反对称、传递），写出 R 的关系矩阵，并给出 R 的自反闭包 $r(R)$，对称闭包 $s(R)$，传递闭包 $t(R)$。

4．写出无向树的至少三种不同定义。

5．用等值演算法证明下式为重言式：

$$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\to(P\to R)$$

6．利用 CP 规则证明：

$$\forall x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\Rightarrow\exists x\neg P(x)\to\exists xQ(x)$$

三、（共 8 分）设 R 是非空集合 A 上的关系，证明：

R 传递的充分必要条件是：$R^2\subseteq R$。

四、（共 8 分）设 $f:X\to Y$，$X'\subseteq X$，$Y'\subseteq Y$，下列各式是否成立，若成立，则给出证明，若不成立，请举反例：

（1）$f(f^{-1}(Y'))=Y'$；　　（2）$f^{-1}(Y-Y')=X-f^{-1}(Y')$。

五、（共 8 分）设简单平面图 G 中顶点数 $n=7$，边数 $m=15$，证明：

（1）G 是连通的；

（2）G 的每个面均由 3 条边围成。

六、（共 10 分）设整数集 $\mathbf{Z}$ 上的二元运算 $*$ 定义为：

$$a*b=a+b-2,\ \forall a,b\in\mathbf{Z}$$

试证明：$\left\langle\mathbf{Z},*\right\rangle$ 是群。

七、（共 10 分）求 $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$ 的主合取范式和主析取范式。

2015－2016 学年第一学期《离散数学》考试试卷 B 卷

答　案

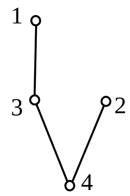
一、填空题

1. $\underline{\quad 17 \quad}$　　2. $\underline{2^{n^2}}$　$\underline{2^{n^2-n}}$　　3. $\underline{n(n-1)}$　$\underline{nm}$

4. $\underline{\forall x\big(T(x)\to\exists y\big(C(y)\wedge H(x,y)\big)\big)}$　　5. $\underline{\quad 3 \quad}$　$\underline{\quad 2 \quad}$

二、简答题：

1．其 Hasse 图如右所示，(A,R) 不是格，因为 1,2 两元素没有最大下界。



2．$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&1&0&1&1\\0&1&0&0&0\\1&1&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&0&1&1\end{pmatrix}$

3．R 不自反，不反自反，不对称、反对称、不传递

$$M(R)=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$r(R)=\left\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<a,c>,<c,b>,<c,d>,<d,b>\right\}$$

$$s(R)=\left\{<a,a>,<a,c>,<c,b>,<c,d>,<d,b>,<c,a>,<b,c>,<d,c>,<b,d>\right\}$$

$$t(R)=\left\{<a,a>,<a,c>,<c,b>,<c,d>,<d,b>,<a,b>,<a,d>\right\}$$

4.（1）连通没有回路的简单图为树

（2）连通且 $m=n-1$ 的简单图为树

（3）$m=n-1$ 且没有回路的简单图为树

（4）若图是连通的，且任意两结点间存在惟一的基本通路，则为树

（5）若在图中任意两结点间加上一条边，则图存在惟一一条基本回路，称为树。

5．$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\to(P\to R)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \neg\big((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee R)\big)\vee(\neg P\vee R)\\
&\Leftrightarrow \big((P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg R)\big)\vee\neg P\vee R\\
&\Leftrightarrow ((P\wedge\neg Q)\vee\neg P)\vee\big((Q\wedge\neg R)\vee R\big)\\
&\Leftrightarrow (\neg Q\vee\neg P)\vee(Q\vee R)\\
&\Leftrightarrow T
\end{aligned}$$

故原式为重言式。

6．①$\exists x \neg P(x)$ 附加前提

②$\neg P(c)$ ①ES

③$\forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big)$ 前提

④$P(c) \vee Q(c)$ ③US

⑤$Q(c)$ ②④析取三断论

⑥$\exists x Q(x)$ ⑤EG

⑦$\exists x \neg P(x) \to \exists x Q(x)$ CP 规则

三、证：若R传递，则$<x,y>\in R, <y,z>\in R$，因R传递，有，即$R^2 \subseteq R$。

若$R^2 \subseteq R$，对任意$<x,y>\in R, <y,z>\in R$，则。

四、(1）错误。如：$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{a,b,c\}$，$Y'=\{a,b\}$，$f(x)=a$，$\forall x \in X$，则$f(f^{-1}(Y'))=f(X)=\{a\}\neq Y'$

（2）正确。 证明如下：

$$x \in f^{-1}(Y-Y') \Leftrightarrow f(x) \in Y-Y' \Leftrightarrow f(x)\in Y, f(x)\notin Y'$$
$$\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(Y') \Leftrightarrow x \in X - f^{-1}(Y')$$

五、(1）若G不连通，设有k个连通分支，则在k个连通分支之间添加$k-1$条边，从而新的图为一个连通的简单平面图，则平面通的性质有：$m+k-1\leq 3n-6$，代入得$k\leq 1$，从而原图G是连通的。

（2）由于G是简单图，每个面至少由 3 条边构成，若存在一个面的次数超过 3，则有$m<3n-6$，与$m=15$，$n=7$矛盾。故所有面均由 3 条边构成。

六、显然运算是封闭的。

可以证明运算 $*$ 满足结合律，即：$\forall a,b,c \in Z$，有$a*(b*c)=(a*b)*c$

2 为运算 $*$ 的单位元，事实上，有$a*2=a+2-2=a=2*a$

对任意元素a，$4-a$为其逆元，事实上，

$$a*(4-a)=a+(4-a)-2=2\text{，且}(4-a)*a=2$$

故$\langle \mathbf{Z}, * \rangle$是群。

七、主析取范式：

$$(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$$

主合取范式：

$$(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)$$