命 题 逻 辑

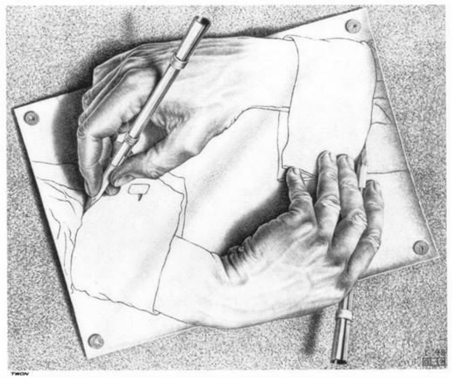
School of Computer
Wuhan University

2021 Spring

内容

内容

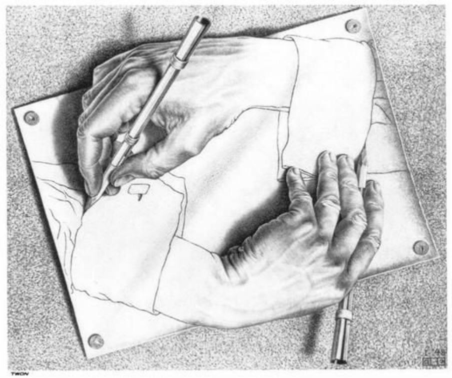
Drawing hands



True or False

- 左手画右手，右手画左手；
- paradox

Drawing hands



True or False

- 左手画右手，右手画左手；
- **paradox**

逻辑

logic

- 自然语言是对客观世界的描述，因此有“真”有“假”；
- 逻辑学是研究“真假”的普遍规律的学科；
- 形式逻辑是用符号化的方法研究逻辑，也称符号逻辑，是数理逻辑的基础；
- 数理逻辑的主要研究内容：公理集合论、证明论、模型论、递归论。

逻辑

logic

- 自然语言是对客观世界的描述，因此有“真”有“假”；
- 逻辑学是研究“真假”的普遍规律的学科；
- 形式逻辑是用符号化的方法研究逻辑，也称符号逻辑，是数理逻辑的基础；
- 数理逻辑的主要研究内容：公理集合论、证明论、模型论、递归论。

逻辑

logic

- 自然语言是对客观世界的描述，因此有“真”有“假”；
- 逻辑学是研究“真假”的普遍规律的学科；
- 形式逻辑是用符号化的方法研究逻辑，也称符号逻辑，是数理逻辑的基础；
- 数理逻辑的主要研究内容：公理集合论、证明论、模型论、递归论。

逻辑

logic

- 自然语言是对客观世界的描述，因此有“真”有“假”；
- 逻辑学是研究“真假”的普遍规律的学科；
- 形式逻辑是用符号化的方法研究逻辑，也称符号逻辑，是数理逻辑的基础；
- 数理逻辑的主要研究内容：公理集合论、证明论、模型论、递归论。

命题（Proposition）

推理和证明

- 数学中的重要问题是“推理”，即构造正确的论证(证明).
- 数理逻辑用符号化的方法，来研究推理.
- 推理的基本要素即为命题.

Definition命题

- 有惟一真假值的陈述句（Declarative Sentence）.

命题（Proposition）

推理和证明

- 数学中的重要问题是“推理”，即构造正确的论证(证明).
- 数理逻辑用符号化的方法，来研究推理.
- 推理的基本要素即为命题.

Definition命题

- 有惟一真假值的陈述句（Declarative Sentence）.

命题（Proposition）

推理和证明

- 数学中的重要问题是“推理”，即构造正确的论证(证明).
- 数理逻辑用符号化的方法，来研究推理.
- 推理的基本要素即为命题.

Definition命题

- 有惟一真假值的陈述句（Declarative Sentence）.

命题（Proposition）

推理和证明

- 数学中的重要问题是“推理”，即构造正确的论证(证明).
- 数理逻辑用符号化的方法，来研究推理.
- 推理的基本要素即为命题.

Definition命题

- 有惟一真假值的陈述句（Declarative Sentence）.

Examples

Example

- 糖是碳水化合物；-（简单命题）
- 武汉大学是最美丽的大学；-（简单命题）
- 如果不下雨，就开运动会；-（复合命题）

Example—非命题

- 现在几点？-（疑问句）
- 请不要讲话！-（祈使句）
- $x+y\leqslant 4$

Example—Paradox

- 我正在说谎。

Examples

Example

- 糖是碳水化合物；-（简单命题）
- 武汉大学是最美丽的大学；-（简单命题）
- 如果不下雨，就开运动会；-（复合命题）

Example—非命题

- 现在几点？-（疑问句）
- 请不要讲话！-（祈使句）
- $x+y \leqslant 4$

Example—Paradox

- 我正在说谎。

Examples

Example

- 糖是碳水化合物；-（简单命题）
- 武汉大学是最美丽的大学；-（简单命题）
- 如果不下雨，就开运动会；-（复合命题）

Example—非命题

- 现在几点？-（疑问句）
- 请不要讲话！-（祈使句）
- $x+y\leqslant 4$

Example—Paradox

- 我正在说谎。

Examples

Example

- 糖是碳水化合物；-（简单命题）
- 武汉大学是最美丽的大学；-（简单命题）
- 如果不下雨，就开运动会；-（复合命题）

Example—非命题

- 现在几点？-（疑问句）
- 请不要讲话！-（祈使句）
- $x + y \leqslant 4$

Example—Paradox

- 我正在说谎。

Examples

Example

- 糖是碳水化合物；-（简单命题）
- 武汉大学是最美丽的大学；-（简单命题）
- 如果不下雨，就开运动会；-（复合命题）

Example—非命题

- 现在几点？-（疑问句）
- 请不要讲话！-（祈使句）
- $x+y\leqslant 4$

Example—Paradox

- 我正在说谎。

Examples

Example

- 糖是碳水化合物; -（简单命题）
- 武汉大学是最美丽的大学; -（简单命题）
- 如果不下雨，就开运动会; -（复合命题）

Example—非命题

- 现在几点? -（疑问句）
- 请不要讲话! -（祈使句）
- $x + y \leqslant 4$

Example—Paradox

- 我正在说谎。

Examples

Example

- 糖是碳水化合物；-（简单命题）
- 武汉大学是最美丽的大学；-（简单命题）
- 如果不下雨，就开运动会；-（复合命题）

Example—非命题

- 现在几点？-（疑问句）
- 请不要讲话！-（祈使句）
- $x + y \leqslant 4$

Example—Paradox

- 我正在说谎。

符号化

命题符号化

- 每个具体命题有惟一真假值，称为命题的真值.
- 对于真命题，称命题真值为“真”；假命题，称其真值为“假”.
- 但符号化只关心命题的真假，不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子（atom），用英文字母表示：
  - 命题常元-真命题：$\mathbb{T}$，假命题：$\mathbb{F}$；
  - 命题变元-可以代表真命题或假命题，常用大写字母表示：$P, Q, R, \ldots$
- 原子通过联结词（connectives）按照一定的规则组成复合命题.

符号化

命题符号化

- 每个具体命题有惟一真假值，称为命题的真值.
- 对于真命题，称命题真值为“真”；假命题，称其真值为“假”.
- 但符号化只关心命题的真假，不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子（atom），用英文字母表示：
  - 命题常元–真命题：$\mathbb{T}$，假命题：$\mathbb{F}$；
  - 命题变元–可以代表真命题或假命题，常用大写字母表示：$P, Q, R, \ldots$
- 原子通过联结词（connectives）按照一定的规则组成复合命题.

符号化

命题符号化

- 每个具体命题有惟一真假值，称为命题的真值.
- 对于真命题，称命题真值为“真”；假命题，称其真值为“假”.
- 但符号化只关心命题的真假，不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子（atom），用英文字母表示：
  - 命题常元–真命题：$\mathbb{T}$，假命题：$\mathbb{F}$；
  - 命题变元–可以代表真命题或假命题，常用大写字母表示：$P, Q, R, \ldots$
- 原子通过联结词（connectives）按照一定的规则组成复合命题.

符号化

命题符号化

- 每个具体命题有惟一真假值，称为命题的**真值**.
- 对于真命题，称命题真值为“真”；假命题，称其真值为“假”.
- 但符号化只关心命题的真假，不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子（atom），用英文字母表示：
  - 命题常元-真命题：$\mathbb{T}$，假命题：$\mathbb{F}$；
  - 命题变元-可以代表真命题或假命题，常用大写字母表示：$P, Q, R, \ldots$
- 原子通过**联结词**（connectives）按照一定的规则组成**复合命题**.

符号化

命题符号化

- 每个具体命题有惟一真假值，称为命题的**真值**.
- 对于真命题，称命题真值为“真”；假命题，称其真值为“假”.
- 但符号化只关心命题的真假，不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为*原子*（atom），用英文字母表示：
    - 命题常元-真命题：$\mathbb{T}$，假命题：$\mathbb{F}$；
    - 命题变元-可以代表真命题或假命题，常用大写字母表示：$P, Q, R, \ldots$
- 原子通过联结词（connectives）按照一定的规则组成复合命题.

符号化

命题符号化

- 每个具体命题有惟一真假值，称为命题的**真值**.
- 对于真命题，称命题真值为“真”；假命题，称其真值为“假”.
- 但符号化只关心命题的真假，不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为*原子*（atom），用英文字母表示：
  - 命题常元-真命题：$\mathbb{T}$，假命题：$\mathbb{F}$；
  - 命题变元-可以代表真命题或假命题，常用大写字母表示：$P, Q, R, \ldots$
- 原子通过联结词（connectives）按照一定的规则组成复合命题.

符号化

命题符号化

- 每个具体命题有惟一真假值，称为命题的真值.
- 对于真命题，称命题真值为“真”；假命题，称其真值为“假”.
- 但符号化只关心命题的真假，不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子（atom），用英文字母表示：
  - 命题常元-真命题：$\mathbb{T}$，假命题：$\mathbb{F}$；
  - 命题变元-可以代表真命题或假命题，常用大写字母表示：$P, Q, R, \ldots$
- 原子通过联结词（connectives）按照一定的规则组成复合命题.

逻辑联结词

Table: 常用的逻辑联结词

名称	英文	符号	解释
否定词	negation	$\neg P$	非P, 否定P
析取词	disjunction	$P \vee Q$	P或者Q（兼或）
合取词	conjunction	$P \wedge Q$	P并且Q
蕴涵词	implication	$P \rightarrow Q$	如果P，则Q P是Q的充分条件 Q是P的必要条件 P是前提，Q是结论 当P，则Q（仅当Q，有P）
等价联结词	bicondition	$P \leftrightarrow Q$	P等价于Q P是Q的充分必要条件 P当且仅当Q

逻辑联结词

联结词含义

- 原子命题的真值有“真”和“假”，由原子和联结词组成的复合命题也有“真”和“假”.
- 复合命题的真值由其中的原子和联结词的含义决定.

Table：逻辑联结词的含义

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

逻辑联结词

联结词含义

- 原子命题的真值有“真”和“假”，由原子和联结词组成的复合命题也有“真”和“假”.
- 复合命题的真值由其中的原子和联结词的含义决定.

Table: 逻辑联结词的含义

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

Example

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

Example

- If today is Wednesday, then $2+3=5$. (True)
- If today is Wednesday, then $2+3=6$. (True, except for Wednesday)

蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

Example

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

Example

- If today is Wednesday, then $2+3=5$. (True)
- If today is Wednesday, then $2+3=6$. (True, except for Wednesday)

蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

Example

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

Example

- If today is Wednesday, then $2+3=5$. (True)
- If today is Wednesday, then $2+3=6$. (True, except for Wednesday)

蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

Example

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

Example

- If today is Wednesday, then $2+3=5$. (True)
- If today is Wednesday, then $2+3=6$. (True, except for Wednesday)

蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

Example

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

Example

- If today is Wednesday, then $2+3=5$. (True)
- If today is Wednesday, then $2+3=6$. (True, except for Wednesday)

蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

Example

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

Example

- If today is Wednesday, then $2+3=5$. (True)
- If today is Wednesday, then $2+3=6$. (True, except for Wednesday)

蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

Example

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

Example

- **If today is Wednesday**, then $2+3=5$. (True)
- **If today is Wednesday**, then $2+3=6$. (True, except for Wednesday)

Example—符号化

命题

你可以上网，仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生。

符号化命题中的原子

- A: 你可以上网;
- C: 你是计算机专业的学生;
- F: 你是一年级的学生.

用联结词合成原命题

- 你不是一年级的学生: $\neg F$
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生: $C \vee \neg F$
- 原命题: $A \to (C \vee \neg F)$

Example—符号化

命题

你可以上网，仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生。

符号化命题中的原子

- A：你可以上网；
- C：你是计算机专业的学生；
- F：你是一年级的学生.

用联结词合成原命题

- 你不是一年级的学生：$\neg F$
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生：$C \vee \neg F$
- 原命题：$A \rightarrow (C \vee \neg F)$

Example—符号化

命题

你可以上网，仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生。

符号化命题中的原子

- A：你可以上网；
- C：你是计算机专业的学生；
- F：你是一年级的学生.

用联结词合成原命题

- 你不是一年级的学生：$\neg F$
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生：$C \vee \neg F$
- 原命题：$A \rightarrow (C \vee \neg F)$

Example—符号化

命题

你可以上网，仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生。

符号化命题中的原子

- A：你可以上网；
- C：你是计算机专业的学生；
- F：你是一年级的学生.

用联结词合成原命题

- 你不是一年级的学生：$\neg F$
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生：$C \vee \neg F$
- 原命题：$A \rightarrow (C \vee \neg F)$

Example—符号化

命题

你可以上网，仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生。

符号化命题中的原子

- A：你可以上网；
- C：你是计算机专业的学生；
- F：你是一年级的学生.

用联结词合成原命题

- 你不是一年级的学生：$\neg F$
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生：$C \vee \neg F$
- 原命题：$A \rightarrow (C \vee \neg F)$

Example—符号化

命题

你可以上网，仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生。

符号化命题中的原子

- A：你可以上网；
- C：你是计算机专业的学生；
- F：你是一年级的学生.

用联结词合成原命题

- 你不是一年级的学生：$\neg F$
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生：$C \vee \neg F$
- 原命题：$A \rightarrow (C \vee \neg F)$

合式公式（Well-Formed Formulas, WFFs）

Remark

命题符号化的结果是合式公式，是命题“语言”中的“句子”.

字母表

- 常元：$\mathbb{T}$，$\mathbb{F}$
- 变元：$P, Q, R, \ldots$
- 联结词：$\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$
- 辅助符号：$(,)$

Definition合式公式WFFs

1. 递归基础：常元和变元是WFFs;
2. 递归规则：若A, B是WFFs，则 $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$是WFFs;
3. 极小性条款：由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

合式公式（Well-Formed Formulas, WFFs）

Remark

命题符号化的结果是合式公式，是命题“语言”中的“句子”.

字母表

- 常元：$\mathbb{T}$，$\mathbb{F}$
- 变元：$P, Q, R, \ldots$
- 联结词：$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号：$(,)$

Definition合式公式WFFs

1. 递归基础：常元和变元是WFFs;
2. 递归规则：若A, B是WFFs，则 $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是WFFs;
3. 极小性条款：由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

合式公式（Well-Formed Formulas, WFFs）

Remark

命题符号化的结果是合式公式，是命题“语言”中的“句子”.

字母表

- 常元：$\mathbb{T}$，$\mathbb{F}$
- 变元：$P, Q, R, \ldots$
- 联结词：$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号：$(,)$

Definition合式公式WFFs

1. 递归基础：常元和变元是WFFs;
2. 递归规则：若A, B是WFFs，则 $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是WFFs;
3. 极小性条款：由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

合式公式（Well-Formed Formulas, WFFs）

Remark

命题符号化的结果是合式公式，是命题“语言”中的“句子”.

字母表

- 常元：$\mathbb{T}$，$\mathbb{F}$
- 变元：$P, Q, R, \ldots$
- 联结词：$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号：$(,)$

Definition合式公式WFFs

1. 递归基础：常元和变元是WFFs;
2. 递归规则：若A, B是WFFs，则 $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是WFFs;
3. 极小性条款：由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

合式公式（Well-Formed Formulas, WFFs）

Remark

命题符号化的结果是合式公式，是命题“语言”中的“句子”.

字母表

- 常元：$\mathbb{T}$，$\mathbb{F}$
- 变元：$P, Q, R, \ldots$
- 联结词：$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号：$($, $)$

Definition合式公式WFFs

1. 递归基础：常元和变元是WFFs;
2. 递归规则：若A, B是WFFs，则 $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是WFFs;
3. 极小性条款：由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

合式公式（Well-Formed Formulas, WFFs）

Remark

命题符号化的结果是合式公式，是命题“语言”中的“句子”.

字母表

- 常元：$\mathbb{T}$，$\mathbb{F}$
- 变元：$P, Q, R, \ldots$
- 联结词：$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号：$(,)$

Definition合式公式WFFs

1. 递归基础：常元和变元是WFFs;
2. 递归规则：若A, B是WFFs，则 $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是WFFs;
3. 极小性条款：由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

合式公式（Well-Formed Formulas, WFFs）

Remark

命题符号化的结果是合式公式，是命题“语言”中的“句子”.

字母表

- 常元：$\mathbb{T}$，$\mathbb{F}$
- 变元：$P, Q, R, \ldots$
- 联结词：$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号：$(,)$

Definition合式公式WFFs

1. 递归基础：常元和变元是WFFs;
2. 递归规则：若A, B是WFFs，则 $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是WFFs;
3. 极小性条款：由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

Example

Example

- $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式.

Proof.

1. $A, C, F,$是公式，根据规则①;
2. $(\neg F)$是公式，根据❶和规则②;
3. $(C \vee (\neg F))$，根据❶和规则②;
4. $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式，根据❶❸和规则②. □

Example

- $(\to (C \vee \neg F))$不是公式，因为没有生成$(\to A)$的规则;
- $(A \Rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为$\Rightarrow$不是联结词.

Example

Example

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$是公式.

Proof.

1. A, C, F,是公式，根据规则①;
2. $(\neg F)$是公式，根据❶和规则②;
3. $(C \vee (\neg F))$，根据❶和规则②;
4. $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$是公式，根据❶❸和规则②. □

Example

- $(\rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为没有生成$(\rightarrow A)$的规则;
- $(A \Rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为$\Rightarrow$不是联结词.

Example

Example

- $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式.

Proof.

1. $A, C, F,$是公式，根据规则①；
2. $(\neg F)$是公式，根据❶和规则②；
3. $(C \vee (\neg F))$，根据❶和规则②；
4. $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式，根据❶❸和规则②. □

Example

- $(\to (C \vee \neg F))$不是公式，因为没有生成$(\to A)$的规则；
- $(A \Rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为$\Rightarrow$不是联结词.

Example

Example

- $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式.

Proof.

1. $A, C, F,$是公式，根据规则①；
2. $(\neg F)$是公式，根据❶和规则②；
3. $(C \vee (\neg F))$，根据❶和规则②；
4. $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式，根据❶❸和规则②. □

Example

- $(\to (C \vee \neg F))$不是公式，因为没有生成$(\to A)$的规则；
- $(A \Rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为$\Rightarrow$不是联结词.

Example

Example

- $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式.

Proof.

1. $A, C, F,$是公式，根据规则①；
2. $(\neg F)$是公式，根据❶和规则②；
3. $(C \vee (\neg F))$，根据❶和规则②；
4. $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式，根据❶❸和规则②. □

Example

- $(\to (C \vee \neg F))$不是公式，因为没有生成$(\to A)$的规则；
- $(A \Rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为$\Rightarrow$不是联结词.

Example

Example

- $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式.

Proof.

1. $A, C, F,$是公式，根据规则①；
2. $(\neg F)$是公式，根据❶和规则②；
3. $(C \vee (\neg F))$，根据❶和规则②；
4. $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式，根据❶❸和规则②. □

Example

- $(\to (C \vee \neg F))$不是公式，因为没有生成$(\to A)$的规则；
- $(A \Rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为$\Rightarrow$不是联结词.

Example

Example

- $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式.

Proof.

1. $A, C, F,$是公式，根据规则①;
2. $(\neg F)$是公式，根据❶和规则②;
3. $(C \vee (\neg F))$，根据❶和规则②;
4. $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式，根据❶❸和规则②. □

Example

- $(\to (C \vee \neg F))$不是公式，因为没有生成$(\to A)$的规则;
- $(A \Rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为$\Rightarrow$不是联结词.

公式简化规则

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低：括号，$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$可以简化为：$A \rightarrow C \vee \neg F$
- $((P \vee Q) \vee R)$可以简化为：$P \vee Q \vee R$

注意

- $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge R$
- $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

公式简化规则

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低：括号，$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$可以简化为：$A \rightarrow C \vee \neg F$
- $((P \vee Q) \vee R)$可以简化为：$P \vee Q \vee R$

注意

- $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge R$
- $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

公式简化规则

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低：括号，$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$可以简化为：$A \rightarrow C \vee \neg F$
- $((P \vee Q) \vee R)$可以简化为：$P \vee Q \vee R$

注意

- $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge R$
- $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

公式简化规则

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低：括号，$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$可以简化为：$A \rightarrow C \vee \neg F$
- $((P \vee Q) \vee R)$可以简化为：$P \vee Q \vee R$

注意

- $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge R$
- $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

公式简化规则

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低: 括号, $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$可以简化为: $A \rightarrow C \vee \neg F$
- $((P \vee Q) \vee R)$可以简化为: $P \vee Q \vee R$

注意

- $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge R$
- $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

公式简化规则

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低：括号，$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$可以简化为：$A \rightarrow C \vee \neg F$
- $((P \vee Q) \vee R)$可以简化为：$P \vee Q \vee R$

注意

- $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge R$
- $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

公式简化规则

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低：括号，$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$可以简化为：$A \rightarrow C \vee \neg F$
- $((P \vee Q) \vee R)$可以简化为：$P \vee Q \vee R$

注意

- $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge R$
- $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

逻辑运算的基本法则

- 每个命题都可以符号化为一个公式;
- 每个命题中的原子的真假一旦确定，则该命题的真假也惟一确定，即对应公式的真假值也惟一确定.

Definition 真值表

表示公式中原子的真假和公式真假值之间关系.为方便书写，用0表示假值，1表示真值.

Table: 逻辑联结词的含义

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

逻辑运算的基本法则

- 每个命题都可以符号化为一个公式;
- 每个命题中的原子的真假一旦确定，则该命题的真假也惟一确定，即对应公式的真假值也惟一确定.

Definition真值表

表示公式中原子的真假和公式真假值之间关系.为方便书写，用0表示假值，1表示真值.

Table: 逻辑联结词的含义

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

逻辑运算的基本法则

- 每个命题都可以符号化为一个公式;
- 每个命题中的原子的真假一旦确定，则该命题的真假也惟一确定，即对应公式的真假值也惟一确定.

Definition 真值表

表示公式中原子的真假和公式真假值之间关系.为方便书写，用0表示假值，1表示真值.

Table：逻辑联结词的含义

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

逻辑运算的基本法则

- 每个命题都可以符号化为一个公式;
- 每个命题中的原子的真假一旦确定，则该命题的真假也惟一确定，即对应公式的真假值也惟一确定.

Definition真值表

表示公式中原子的真假和公式真假值之间关系.为方便书写，用0表示假值，1表示真值.

Table: 逻辑联结词的含义

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

一般公式的语义

记号

- 记含n个原子$P_1, P_2, \ldots, P_n$的公式G为：$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$.

定义

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一公式：对$P_1, P_2, \ldots, P_n$的一次取值$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle, x_i \in \{0, 1\}$，称为一个指派(**assignment**)．记$P_1, P_2, \ldots, P_n$的指派$I = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$为：$I = x_1 x_2 \ldots x_n$

Property

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$一共有2^n种不同的指派.

Example

- $G(P, Q) = \neg((P \vee Q) \wedge P)$的4个指派是：$I_0 = 00, I_1 = 01, I_2 = 10, I_3 = 11$.

- 指派的下标与对应指派间的关系。

一般公式的语义

记号

- 记含n个原子$P_1, P_2, \ldots, P_n$的公式G为：$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$.

定义

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一公式：对$P_1, P_2, \ldots, P_n$的一次取值$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle, x_i \in \{0, 1\}$, 称为一个指派(assignment). 记$P_1, P_2, \ldots, P_n$的指派$I = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$为：$I = x_1 x_2 \ldots x_n$

Property

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$一共有2^n种不同的指派.

Example

- $G(P, Q) = \neg((P \vee Q) \wedge P)$的4个指派是：
  $I_0 = 00, I_1 = 01, I_2 = 10, I_3 = 11$.

- 指派的下标与对应指派间的关系。

一般公式的语义

记号

- 记含n个原子$P_1, P_2, \ldots, P_n$的公式G为：$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$.

定义

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一公式：对$P_1, P_2, \ldots, P_n$的一次取值$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle, x_i \in \{0, 1\}$，称为一个指派(**assignment**)．记$P_1, P_2, \ldots, P_n$的指派$I = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$为：$I = x_1x_2 \ldots x_n$

Property

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$一共有2^n种不同的指派.

Example

- $G(P, Q) = \neg((P \vee Q) \wedge P)$的4个指派是：
  $I_0 = 00, I_1 = 01, I_2 = 10, I_3 = 11$.

- 指派的下标与对应指派间的关系。

一般公式的语义

记号

- 记含n个原子$P_1, P_2, \ldots, P_n$的公式G为：$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$.

定义

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一公式：对$P_1, P_2, \ldots, P_n$的一次取值$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle, x_i \in \{0, 1\}$，称为一个指派(assignment)．记$P_1, P_2, \ldots, P_n$的指派$I = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$为：$I = x_1 x_2 \ldots x_n$

Property

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$一共有2^n种不同的指派.

Example

- $G(P, Q) = \neg((P \vee Q) \wedge P)$的4个指派是：
  $I_0 = 00, I_1 = 01, I_2 = 10, I_3 = 11$.

- 指派的下标与对应指派间的关系。

解释(Interpretation)

定义

设$I = x_1x_2\dots x_n$为公式$G(P_1, P_2, \dots, P_n)$的一个指派，则公式G在指派I下的值记为：$I(G)$，其递归定义如下：

- $I(\mathbb{T}) = 1, \quad I(\mathbb{F}) = 0;$
- $I(G) = x_i, \quad \textbf{if} \quad G \equiv P_i;$
- $$I(G) = \begin{cases} \neg I(A), & \textbf{if} \quad G = \neg A \\ I(A) \wedge I(B), & \textbf{if} \quad G = A \wedge B \\ I(A) \vee I(B), & \textbf{if} \quad G = A \vee B \\ I(A) \to I(B), & \textbf{if} \quad G = A \to B \\ I(A) \leftrightarrow I(B), & \textbf{if} \quad G = A \leftrightarrow B \end{cases}$$

解释(Interpretation)

定义

设$I = x_1x_2\ldots x_n$为公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的一个指派，则公式G在指派I下的值记为：$I(G)$，其递归定义如下：

- $I(\mathbb{T}) = 1, \quad I(\mathbb{F}) = 0;$
- $I(G) = x_i, \quad \textbf{if} \quad G \equiv P_i;$
- $$I(G) = \begin{cases} \neg I(A), & \textbf{if} \quad G = \neg A \\ I(A) \wedge I(B), & \textbf{if} \quad G = A \wedge B \\ I(A) \vee I(B), & \textbf{if} \quad G = A \vee B \\ I(A) \to I(B), & \textbf{if} \quad G = A \to B \\ I(A) \leftrightarrow I(B), & \textbf{if} \quad G = A \leftrightarrow B \end{cases}$$

解释(Interpretation)

定义

设$I = x_1 x_2 \ldots x_n$为公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的一个指派，则公式G在指派I下的值记为：$I(G)$，其递归定义如下：

- $I(\mathbb{T}) = 1, \quad I(\mathbb{F}) = 0;$
- $I(G) = x_i, \quad \textbf{if} \quad G \equiv P_i;$
- $$I(G) = \begin{cases} \neg I(A), & \textbf{if} \quad G = \neg A \\ I(A) \wedge I(B), & \textbf{if} \quad G = A \wedge B \\ I(A) \vee I(B), & \textbf{if} \quad G = A \vee B \\ I(A) \to I(B), & \textbf{if} \quad G = A \to B \\ I(A) \leftrightarrow I(B), & \textbf{if} \quad G = A \leftrightarrow B \end{cases}$$

Example

Definition

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$在2^n的指派下的值所构成的表称为公式G的真值表。

公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P)$的真值表

指派	P	Q	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge P$	G
$I_0 = 00$	0	0	0	0	1
$I_1 = 01$	0	1	1	0	1
$I_2 = 10$	1	0	1	1	0
$I_3 = 11$	1	1	1	1	0

Remarks (1/2)

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的语义解释实际上是一个函数：

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n\text{次}} \to \{0,1\}$$

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mapsto G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function)；
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序；
- 形式系统的构成："形式结构+语义"
- 逻辑问题转化为"计算问题"。

Remarks (1/2)

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的语义解释实际上是一个函数：

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n\text{次}} \to \{0,1\}$$

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mapsto G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function)；
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序；
- 形式系统的构成："形式结构+语义"
- 逻辑问题转化为"计算问题"。

Remarks (1/2)

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的语义解释实际上是一个函数：

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n\text{次}} \to \{0,1\}$$

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mapsto G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function)；
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序；
- 形式系统的构成："形式结构+语义"
- 逻辑问题转化为"计算问题"。

Remarks (1/2)

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的语义解释实际上是一个函数：

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n\text{次}} \to \{0,1\}$$

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mapsto G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function)；
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序；
- 形式系统的构成：“形式结构+语义”
- 逻辑问题转化为“计算问题”。

Remarks (1/2)

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的语义解释实际上是一个函数：

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n\text{次}} \to \{0,1\}$$

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mapsto G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function)；
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序；
- 形式系统的构成："形式结构+语义"
- 逻辑问题转化为"计算问题"。

Remarks (2/2)

计算问题

- 计算一个n个原子的真值表需要2^n次计算；
- 计算能力为$1T(2^{40})$Flops，计算100个原子的公式的真值表所用的时间是：

$$2^{100}(\text{次}) = 2^{100} \div 2^{40} = 2^{60}(\text{秒})$$
$$= 2^{60} \div (365 * 24 * 3600) = 3.6558901 \times 10^{10}(\text{年})$$

- Boolean Satisfiability problem（SAT）: NP-complete problem.

Remarks (2/2)

计算问题

- 计算一个n个原子的真值表需要2^n次计算；
- 计算能力为$1T(2^{40})$**Flops**，计算100个原子的公式的真值表所用的时间是：

$$\begin{aligned} 2^{100}(\text{次}) &= 2^{100} \div 2^{40} = 2^{60}(\text{秒}) \\ &= 2^{60} \div (365 * 24 * 3600) = 3.6558901 \times 10^{10}(\text{年}) \end{aligned}$$

- Boolean Satisfiability problem (SAT): NP-complete problem.

Remarks (2/2)

计算问题

- 计算一个n个原子的真值表需要2^n次计算;
- 计算能力为$1T(2^{40})$**Flops**，计算100个原子的公式的真值表所用的时间是:

$$\begin{aligned}2^{100}(\text{次}) &= 2^{100} \div 2^{40} = 2^{60}(\text{秒})\\ &= 2^{60} \div (365 * 24 * 3600) = 3.6558901 \times 10^{10}(\text{年})\end{aligned}$$

- **Boolean Satisfiability problem (SAT): NP-complete problem.**

内容

重言式(Tautology，永真式)

定义

设G是公式：

- 如果对G的任意一个解释I，都有$I(G)=1$，称G为重言式。
- 如果存在G的一个解释I，有$I(G)=1$，称G为可满足式。
- 如果对G的任意一个解释I，都有$I(G)=0$，称G为矛盾式。

Example

公式$G=\neg((P\vee Q)\wedge P)\leftrightarrow\neg P$为重言式

指派	P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg(P\vee Q)\wedge P$	$\neg P$	G
$I_0=00$	0	0	0	0	1	1	1
$I_1=01$	0	1	1	0	1	1	1
$I_2=10$	1	0	1	1	0	0	1
$I_3=11$	1	1	1	1	0	0	1

重言式(Tautology，永真式)

定义

设G是公式：

- 如果对G的任意一个解释I，都有$I(G)=1$，称G为重言式。
- 如果存在G的一个解释I，有$I(G)=1$，称G为可满足式。
- 如果对G的任意一个解释I，都有$I(G)=0$，称G为矛盾式。

Example

公式$G=\neg((P\vee Q)\wedge P)\leftrightarrow\neg P$为重言式

指派	P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg(P\vee Q)\wedge P$	$\neg P$	G
$I_0=00$	0	0	0	0	1	1	1
$I_1=01$	0	1	1	0	1	1	1
$I_2=10$	1	0	1	1	0	0	1
$I_3=11$	1	1	1	1	0	0	1

重言式(Tautology，永真式)

定义

设G是公式：

- 如果对G的任意一个解释I，都有$I(G)=1$，称G为重言式。
- 如果存在G的一个解释I，有$I(G)=1$，称G为可满足式。
- 如果对G的任意一个解释I，都有$I(G)=0$，称G为矛盾式。

Example

公式$G=\neg((P\vee Q)\wedge P)\leftrightarrow\neg P$为重言式

指派	P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg(P\vee Q)\wedge P$	$\neg P$	G
$I_0=00$	0	0	0	0	1	1	1
$I_1=01$	0	1	1	0	1	1	1
$I_2=10$	1	0	1	1	0	0	1
$I_3=11$	1	1	1	1	0	0	1

重言式(Tautology，永真式)

定义

设G是公式：

- 如果对G的任意一个解释I，都有$I(G)=1$，称G为重言式。
- 如果存在G的一个解释I，有$I(G)=1$，称G为可满足式。
- 如果对G的任意一个解释I，都有$I(G)=0$，称G为矛盾式。

Example

公式$G=\neg((P\vee Q)\wedge P)\leftrightarrow\neg P$为重言式

指派	P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg(P\vee Q)\wedge P$	$\neg P$	G
$I_0=00$	0	0	0	0	1	1	1
$I_1=01$	0	1	1	0	1	1	1
$I_2=10$	1	0	1	1	0	0	1
$I_3=11$	1	1	1	1	0	0	1

重言式(Tautology，永真式)

定义

设G是公式：

- 如果对G的任意一个解释I，都有$I(G)=1$，称G为重言式。
- 如果存在G的一个解释I，有$I(G)=1$，称G为可满足式。
- 如果对G的任意一个解释I，都有$I(G)=0$，称G为矛盾式。

Example

公式$G=\neg((P\vee Q)\wedge P)\leftrightarrow\neg P$为重言式

指派	P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg(P\vee Q)\wedge P$	$\neg P$	G
$I_0=00$	0	0	0	0	1	1	1
$I_1=01$	0	1	1	0	1	1	1
$I_2=10$	1	0	1	1	0	0	1
$I_3=11$	1	1	1	1	0	0	1

逻辑等值

定义

称公式F和G逻辑等值，**iff**，公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式，记为：$F \Leftrightarrow G$.

Example

- 公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow \neg P$为重言式；
- 则，$\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

性质

- $A \Leftrightarrow A$
- **if** $A \Leftrightarrow B$, **then** $B \Leftrightarrow A$
- **if** $A \Leftrightarrow B$ **and** $B \Leftrightarrow C$, **then** $A \Leftrightarrow C$

逻辑等值

定义

称公式F和G逻辑等值，iff，公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式，记为：$F \Leftrightarrow G$.

Example

- 公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow \neg P$为重言式;
- 则，$\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

性质

- $A \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$, then $B \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$ and $B \Leftrightarrow C$, then $A \Leftrightarrow C$

逻辑等值

定义

称公式F和G逻辑等值，iff，公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式，记为：$F \Leftrightarrow G$.

Example

- 公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow \neg P$为重言式；
- 则，$\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

性质

- $A \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$, then $B \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$ and $B \Leftrightarrow C$, then $A \Leftrightarrow C$

逻辑等值

定义

称公式F和G逻辑等值，iff，公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式，记为：$F \Leftrightarrow G$.

Example

- 公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow \neg P$为重言式；
- 则，$\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

性质

- $A \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$, then $B \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$ and $B \Leftrightarrow C$, then $A \Leftrightarrow C$

逻辑等值

定义

称公式F和G逻辑等值，**iff**，公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式，记为：$F \Leftrightarrow G$.

Example

- 公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow \neg P$为重言式；
- 则，$\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

性质

- $A \Leftrightarrow A$
- **if** $A \Leftrightarrow B$, **then** $B \Leftrightarrow A$
- **if** $A \Leftrightarrow B$ **and** $B \Leftrightarrow C$, **then** $A \Leftrightarrow C$

逻辑等值

定义

称公式F和G逻辑等值，iff，公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式，记为：$F \Leftrightarrow G$.

Example

- 公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow \neg P$为重言式；
- 则，$\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

性质

- $A \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$, then $B \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$ and $B \Leftrightarrow C$, then $A \Leftrightarrow C$

常用的逻辑恒等式（等值式）

$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	双重否定律
$P \wedge P \Leftrightarrow P$ $P \vee P \Leftrightarrow P$	幂等律
$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	交换律
$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	结合律
$(P \wedge Q) \vee P \Leftrightarrow P$ $(P \vee Q) \wedge P \Leftrightarrow P$	吸收律
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	蕴涵等值式
$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	De Morgan律
$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$	归谬律
$(P \vee \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{T}$	排中律

永真蕴涵关系(Logical Implication)

定义

- 称公式F永真蕴涵公式G，iff，公式$(F) \to (G)$是重言式，记为：$F \Rightarrow G$.
- 例如，$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

Remarks

- 对F和G中原子的所有指派I，都有$I(F) \leqslant I(G)$，即F为真时G一定为真，相当于代数中的不等式。

性质

- $A \Rightarrow A$
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow A$, then $A \Leftrightarrow B$
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow C$, then $A \Rightarrow C$
- if $A \Rightarrow B$, then $\neg B \Rightarrow \neg A$

永真蕴涵关系(Logical Implication)

定义

- 称公式F永真蕴涵公式G，iff，公式$(F) \to (G)$是重言式，记为：$F \Rightarrow G$.
- 例如，$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

Remarks

- 对F和G中原子的所有指派I，都有$I(F) \leqslant I(G)$，即F为真时G一定为真，相当于代数中的不等式。

性质

- $A \Rightarrow A$
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow A$, then $A \Leftrightarrow B$
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow C$, then $A \Rightarrow C$
- if $A \Rightarrow B$, then $\neg B \Rightarrow \neg A$

永真蕴涵关系(Logical Implication)

定义

- 称公式F永真蕴涵公式G, iff, 公式$(F) \to (G)$是重言式, 记为: $F \Rightarrow G$.
- 例如, $P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

Remarks

- 对F和G中原子的所有指派I, 都有$I(F) \leqslant I(G)$, 即F为真时G一定为真, 相当于代数中的不等式。

性质

- $A \Rightarrow A$
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow A$, then $A \Leftrightarrow B$
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow C$, then $A \Rightarrow C$
- if $A \Rightarrow B$, then $\neg B \Rightarrow \neg A$

永真蕴涵关系(Logical Implication)

定义

- 称公式F永真蕴涵公式G，iff，公式$(F) \to (G)$是重言式，记为：$F \Rightarrow G$.
- 例如，$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

Remarks

- 对F和G中原子的所有指派I，都有$I(F) \leqslant I(G)$，即F为真时G一定为真，相当于代数中的不等式。

性质

- $A \Rightarrow A$
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow A$, then $A \Leftrightarrow B$
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow C$, then $A \Rightarrow C$
- if $A \Rightarrow B$, then $\neg B \Rightarrow \neg A$

永真蕴涵关系(Logical Implication)

定义

- 称公式F永真蕴涵公式G，iff，公式$(F) \to (G)$是重言式，记为：$F \Rightarrow G$.
- 例如，$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

Remarks

- 对F和G中原子的所有指派I，都有$I(F) \leqslant I(G)$，即F为真时G一定为真，相当于代数中的不等式。

性质

- $A \Rightarrow A$
- **if** $A \Rightarrow B$ **and** $B \Rightarrow A$, **then** $A \Leftrightarrow B$
- **if** $A \Rightarrow B$ **and** $B \Rightarrow C$, **then** $A \Rightarrow C$
- **if** $A \Rightarrow B$, **then** $\neg B \Rightarrow \neg A$

永真蕴涵关系(Logical Implication)

定义

- 称公式F永真蕴涵公式G, **iff**, 公式$(F) \to (G)$是重言式，记为：$F \Rightarrow G$.
- 例如，$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

Remarks

- 对F和G中原子的所有指派I，都有$I(F) \leqslant I(G)$，即F为真时G一定为真，相当于代数中的不等式。

性质

- $A \Rightarrow A$
- **if** $A \Rightarrow B$ **and** $B \Rightarrow A$, **then** $A \Leftrightarrow B$
- **if** $A \Rightarrow B$ **and** $B \Rightarrow C$, **then** $A \Rightarrow C$
- **if** $A \Rightarrow B$, **then** $\neg B \Rightarrow \neg A$

永真蕴涵关系(Logical Implication)

定义

- 称公式F永真蕴涵公式G，iff，公式$(F) \to (G)$是重言式，记为：$F \Rightarrow G$.
- 例如，$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

Remarks

- 对F和G中原子的所有指派I，都有$I(F) \leqslant I(G)$，即F为真时G一定为真，相当于代数中的不等式。

性质

- $A \Rightarrow A$
- **if** $A \Rightarrow B$ **and** $B \Rightarrow A$, **then** $A \Leftrightarrow B$
- **if** $A \Rightarrow B$ **and** $B \Rightarrow C$, **then** $A \Rightarrow C$
- **if** $A \Rightarrow B$, **then** $\neg B \Rightarrow \neg A$

常用的永真蕴涵式

$P \Rightarrow P \vee Q$	加法式
$P \wedge Q \Rightarrow P$	简化式
$(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$	假言推理
$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg p$	拒取式
$(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$	析取三段论
$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$	前提三段论
$(P \rightarrow Q) \Rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$	
$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S)$	

内容

逻辑恒等的公式

逻辑恒等（等值）

- $A \Leftrightarrow B$，即，公式A等值于B，A和B逻辑恒等（等值）。
- e. g.：$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow \ldots$
- e. g.：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \ldots$
- 为了便于讨论，有必要将公式的形式规范化，即将公式转换为与其等价的标准形式。

逻辑恒等的公式

逻辑恒等（等值）

- $A \Leftrightarrow B$, 即，公式A等值于B，A和B逻辑恒等（等值）。
- e. g.： $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow \ldots$
- e. g.： $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \ldots$
- 为了便于讨论，有必要将公式的形式规范化，即将公式转换为与其等价的标准形式。

逻辑恒等的公式

逻辑恒等（等值）

- $A \Leftrightarrow B$，即，公式A等值于B，A和B逻辑恒等（等值）。
- **e. g.**：$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow \ldots$
- **e. g.**：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \ldots$
- 为了便于讨论，有必要将公式的形式规范化，即将公式转换为与其等价的标准形式。

逻辑恒等的公式

逻辑恒等（等值）

- $A \Leftrightarrow B$，即，公式A等值于B，A和B逻辑恒等（等值）。
- **e. g.**：$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow \ldots$
- **e. g.**：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \ldots$
- 为了便于讨论，有必要将公式的形式规范化，即将公式转换为与其等价的标准形式。

析取范式和合取范式

Definition 基本积、基本和

- **基本积** 是合式公式中的变元或变元的否定的合取;
- **基本和** 是合式公式中的变元或变元的否定的析取;

Example

- 基本积: P, $\neg P \wedge Q$, $Q \wedge \neg P$, $P \wedge \neg P$, $Q \wedge P \wedge \neg P$
- 基本和: P, $\neg P \vee Q$, $Q \vee \neg P$, $P \vee \neg P$, $Q \vee P \vee \neg P$

析取范式和合取范式

Definition 基本积、基本和

- **基本积** 是合式公式中的变元或变元的否定的合取;
- **基本和** 是合式公式中的变元或变元的否定的析取;

Example

- 基本积: P, $\neg P \wedge Q$, $Q \wedge \neg P$, $P \wedge \neg P$, $Q \wedge P \wedge \neg P$
- 基本和: P, $\neg P \vee Q$, $Q \vee \neg P$, $P \vee \neg P$, $Q \vee P \vee \neg P$

析取范式和合取范式

Definition基本积、基本和

- 基本积 是合式公式中的变元或变元的否定的合取;
- 基本和 是合式公式中的变元或变元的否定的析取;

Example

- 基本积: P, $\neg P \wedge Q$, $Q \wedge \neg P$, $P \wedge \neg P$, $Q \wedge P \wedge \neg P$
- 基本和: P, $\neg P \vee Q$, $Q \vee \neg P$, $P \vee \neg P$, $Q \vee P \vee \neg P$

析取范式和合取范式

Definition 基本积、基本和

- **基本积** 是合式公式中的变元或变元的否定的合取;
- **基本和** 是合式公式中的变元或变元的否定的析取;

Example

- 基本积: P, $\neg P \wedge Q$, $Q \wedge \neg P$, $P \wedge \neg P$, $Q \wedge P \wedge \neg P$
- 基本和: P, $\neg P \vee Q$, $Q \vee \neg P$, $P \vee \neg P$, $Q \vee P \vee \neg P$

析取范式

Definition析取范式

- 一个形为基本积的析取的公式，若与命题公式A等价，则称其为公式A的析取范式，记为：
  $A \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, ($n \geq 1$, A_i是基本积)

Example析取范式

- $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

注意

- 析取范式中只含有联结词$\neg$, $\wedge$, $\vee$.

析取范式

Definition析取范式

- 一个形为基本积的析取的公式，若与命题公式A等价，则称其为公式A的析取范式，记为：
$A \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, ($n \geq 1$, A_i是基本积)

Example析取范式

- $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

注意

- 析取范式中只含有联结词$\neg$, $\wedge$, $\vee$.

析取范式

Definition析取范式

- 一个形为基本积的析取的公式，若与命题公式A等价，则称其为公式A的析取范式，记为：
  $A \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$，($n \geq 1$，$A_i$是基本积)

Example析取范式

- $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

注意

- 析取范式中只含有联结词$\neg$，$\wedge$，$\vee$.

析取范式

Definition析取范式

- 一个形为基本积的析取的公式，若与命题公式A等价，则称其为公式A的析取范式，记为：
  $A \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, $(n \geq 1$, A_i是基本积$)$

Example析取范式

- $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

注意

- 析取范式中只含有联结词$\neg$，$\wedge$，$\vee$.

析取范式的求解

求解方法：公式恒等变换

1. 消去联结词$\rightarrow$，$\leftrightarrow$；
2. 利用DeMorgen律将联结词$\neg$移至变元前，并消去双重否定；
3. 利用分配律、结合律等将公式化为析取范式。

Example求解析取范式

- 求公式$P \wedge (P \rightarrow Q)$的析取范式：

$$
\begin{aligned}
P \wedge (P \rightarrow Q) &\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q)
\end{aligned}
$$

注意：公式的析取范式不唯一。

析取范式的求解

求解方法：公式恒等变换

1. 消去联结词$\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
2. 利用DeMorgen律将联结词$\neg$移至变元前，并消去双重否定；
3. 利用分配律、结合律等将公式化为析取范式。

Example求解析取范式

- 求公式$P \wedge (P \rightarrow Q)$的析取范式：

$$\begin{aligned} P \wedge (P \rightarrow Q) &\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \end{aligned}$$

注意：公式的析取范式不唯一。

析取范式的求解

求解方法：公式恒等变换

1. 消去联结词$\rightarrow$，$\leftrightarrow$；
2. 利用DeMorgen律将联结词$\neg$移至变元前，并消去双重否定；
3. 利用分配律、结合律等将公式化为析取范式。

Example求解析取范式

- 求公式$P \wedge (P \rightarrow Q)$的析取范式：

$$
\begin{aligned}
P \wedge (P \rightarrow Q) &\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q)
\end{aligned}
$$

注意：公式的析取范式不唯一。

析取范式的求解

求解方法：公式恒等变换

1. 消去联结词$\rightarrow$，$\leftrightarrow$；
2. 利用DeMorgen律将联结词$\neg$移至变元前，并消去双重否定；
3. 利用分配律、结合律等将公式化为析取范式。

Example求解析取范式

- 求公式$P \wedge (P \rightarrow Q)$的析取范式：

$$
\begin{aligned}
P \wedge (P \rightarrow Q) &\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q)
\end{aligned}
$$

注意：公式的析取范式不唯一。

主析取范式-极小项

Definition极小项

- 对于共有n个命题变元P_1，$P_2, \ldots, P_n$的基本积，称之为**极小项**当且仅当，每个变元与其否定不同时出现，且二者之一出现且仅出现一次。

Example

- 变元P, Q：则$P \wedge \neg Q$，$P \wedge Q$是极小项；
- 变元P_1, P_2, P_3：则$P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3$，$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$是极小项
- 问题：对于给定的n个变元，一共有多少个不同的极小项？

主析取范式-极小项

Definition极小项

- 对于共有n个命题变元P_1，$P_2, \dots, P_n$的基本积，称之为极小项当且仅当，每个变元与其否定不同时出现，且二者之一出现且仅出现一次。

Example

- 变元P, Q：则$P \wedge \neg Q$，$P \wedge Q$是极小项；
- 变元P_1, P_2, P_3：则$P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3$，$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$是极小项
- 问题：对于给定的n个变元，一共有多少个不同的极小项？

主析取范式-极小项

Definition极小项

- 对于共有n个命题变元P_1，$P_2, \ldots, P_n$的基本积，称之为**极小项**当且仅当，每个变元与其否定不同时出现，且二者之一出现且仅出现一次。

Example

- 变元P, Q：则$P \wedge \neg Q$，$P \wedge Q$是极小项；
- 变元P_1, P_2, P_3：则$P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3$，$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$是极小项
- 问题：对于给定的n个变元，一共有多少个不同的极小项？

主析取范式-极小项

Definition极小项

- 对于共有n个命题变元P_1，$P_2, \ldots, P_n$的基本积，称之为**极小项**当且仅当，每个变元与其否定不同时出现，且二者之一出现且仅出现一次。

Example

- 变元P, Q：则$P \wedge \neg Q$，$P \wedge Q$是极小项；
- 变元P_1, P_2, P_3：则$P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3$，$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$是极小项
- 问题：对于给定的n个变元，一共有多少个不同的极小项？

极小项的性质

3个变元极小项

- 对于3个命题变元P, Q, R，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**000**	m_0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**001**	m_1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**010**	m_2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**011**	m_3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**100**	m_4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**101**	m_5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**110**	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**110**	m_7

极小项的性质

3个变元极小项

- 对于3个命题变元P, Q, R，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	000	m_0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	001	m_1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	010	m_2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	011	m_3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	100	m_4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	101	m_5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	110	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	110	m_7

极小项的性质

3个变元极小项

- 对于3个命题变元P, Q, R，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	000	m_0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	001	m_1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	010	m_2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	011	m_3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	100	m_4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	101	m_5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	110	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	110	m_7

极小项的性质

3个变元极小项

- 对于3个命题变元P, Q, R，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**000**	m_0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**001**	m_1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**010**	m_2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**011**	m_3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**100**	m_4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**101**	m_5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**110**	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**110**	m_7

极小项的性质

3个变元极小项

- 对于3个命题变元P, Q, R，共有$2^3=8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**000**	m_0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**001**	m_1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**010**	m_2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**011**	m_3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**100**	m_4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**101**	m_5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**110**	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**110**	m_7

极小项的性质

3个变元极小项

- 对于3个命题变元P, Q, R，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**000**	m_0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**001**	m_1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**010**	m_2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**011**	m_3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**100**	m_4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**101**	m_5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**110**	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**110**	m_7

极小项的性质

3个变元极小项

- 对于3个命题变元P, Q, R，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**000**	m_0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**001**	m_1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**010**	m_2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**011**	m_3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**100**	m_4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**101**	m_5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**110**	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**110**	m_7

极小项的性质

3个变元极小项

- 对于3个命题变元P, Q, R，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**000**	m_0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**001**	m_1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**010**	m_2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**011**	m_3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**100**	m_4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**101**	m_5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**110**	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**110**	m_7

极小项的性质

3个变元极小项

- 对于3个命题变元P, Q, R，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**000**	m_0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**001**	m_1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**010**	m_2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**011**	m_3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**100**	m_4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**101**	m_5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**110**	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**110**	m_7

极小项的性质

3个变元极小项

- 对于3个命题变元P, Q, R，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**000**	m_0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**001**	m_1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**010**	m_2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**011**	m_3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**100**	m_4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**101**	m_5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**110**	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**110**	m_7

极小项的性质

3个变元极小项

- 对于3个命题变元P, Q, R，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**000**	m_0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**001**	m_1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**010**	m_2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**011**	m_3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**100**	m_4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**101**	m_5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	**110**	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	**110**	m_7

n个变元的极小项

n个变元的极小项

- n个变元$P_1, P_2, ..., P_n$的极小项共2^n项：

$$m_0: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$$

$$m_1: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

$$......$$

$$m_{2^n-1}: P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

极小项性质

- 极小项的下标对应的指派，唯一使得该极小项真值为1。

n个变元的极小项

n个变元的极小项

- n个变元$P_1, P_2, ..., P_n$的极小项共2^n项：

  m_0 ： $\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$

  m_1 ： $\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$

  ......

  m_{2^n-1} ： $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$

极小项性质

- 极小项的下标对应的指派，唯一使得该极小项真值为1。

n个变元的极小项

n个变元的极小项

- n个变元$P_1, P_2, ..., P_n$的极小项共2^n项：

$$m_0 : \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$$

$$m_1 : \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$m_{2^n-1} : P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

极小项性质

- 极小项的下标对应的指派，唯一使得该极小项真值为1。

n个变元的极小项

n个变元的极小项

- n个变元$P_1, P_2, ..., P_n$的极小项共2^n项：

$$m_0: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$$

$$m_1: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$m_{2^n-1}: P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

极小项性质

- 极小项的下标对应的指派，唯一使得该极小项真值为1。

n个变元的极小项

n个变元的极小项

- n个变元$P_1, P_2, ..., P_n$的极小项共2^n项：

$$m_0: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$$

$$m_1: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$m_{2^n-1}: P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

极小项性质

- 极小项的下标对应的指派，唯一使得该极小项真值为1。

n个变元的极小项

n个变元的极小项

- n个变元$P_1, P_2, ..., P_n$的极小项共2^n项：

$$m_0: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$$

$$m_1: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$m_{2^n-1}: P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

极小项性质

- 极小项的下标对应的指派，唯一使得该极小项真值为1。

主析取范式

Definition 主析取范式

- 一个公式称之为公式A的**主析取范式**，当且仅当，其与公式A逻辑恒等（等值），且由极小项之和组成。

Example

- 公式$P \leftrightarrow Q$的主析取范式：

$$
\begin{aligned}
P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \\
&\Leftrightarrow m_3 \vee m_0 \\
&\Leftrightarrow \Sigma(0,\ 3)
\end{aligned}
$$

主析取范式

Definition主析取范式

- 一个公式称之为公式A的主析取范式，当且仅当，其与公式A逻辑恒等（等值），且由极小项之和组成。

Example

- 公式$P \leftrightarrow Q$的主析取范式：

$$
\begin{aligned}
P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \\
&\Leftrightarrow m_3 \vee m_0 \\
&\Leftrightarrow \Sigma(0,\ 3)
\end{aligned}
$$

主析取范式

Definition 主析取范式

- 一个公式称之为公式A的主析取范式，当且仅当，其与公式A逻辑恒等（等值），且由极小项之和组成。

Example

- 公式$P \leftrightarrow Q$的主析取范式：

$$
\begin{aligned}
P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \\
&\Leftrightarrow m_3 \vee m_0 \\
&\Leftrightarrow \Sigma(0,\ 3)
\end{aligned}
$$

主析取范式的求解

公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法：$A \Leftrightarrow$析取范式$\Leftrightarrow$主析取范式
  1. 去掉析取范式中的永假的基本积；
  2. 合并相同的变元（变元的否定）和基本积；
  3. 对每个基本积补入未出现的命题变元，再展开化简至主析取范式。
- 真值表法

主析取范式的求解

公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法：$A \Leftrightarrow$析取范式$\Leftrightarrow$主析取范式
  1. 去掉析取范式中的永假的基本积；
  2. 合并相同的变元（变元的否定）和基本积；
  3. 对每个基本积补入未出现的命题变元，再展开化简至主析取范式。
- 真值表法

主析取范式的求解

公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法：A ⇔析取范式⇔主析取范式
  1. 去掉析取范式中的永假的基本积；
  2. 合并相同的变元（变元的否定）和基本积；
  3. 对每个基本积补入未出现的命题变元，再展开化简至主析取范式。
- 真值表法

主析取范式的求解

公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法：$A \Leftrightarrow$析取范式$\Leftrightarrow$主析取范式
  1. 去掉析取范式中的永假的基本积；
  2. 合并相同的变元（变元的否定）和基本积；
  3. 对每个基本积补入未出现的命题变元，再展开化简至主析取范式。
- 真值表法

主析取范式的求解

公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法：$A \Leftrightarrow$析取范式$\Leftrightarrow$主析取范式
  1. 去掉析取范式中的永假的基本积；
  2. 合并相同的变元（变元的否定）和基本积；
  3. 对每个基本积补入未出现的命题变元，再展开化简至主析取范式。
- 真值表法

主析取范式求解-例题

恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \quad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$$

001仅使m_1为真　011仅使m_3为真　101　110　111

思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

主析取范式求解-例题

恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \qquad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使m_1为真 011仅使m_3为真 101 110 111

思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

主析取范式求解-例题

恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \quad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使m_1为真　011仅使m_3为真　101　110　111

思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

主析取范式求解-例题

恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \qquad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使m_1为真 011仅使m_3为真 101 110 111

思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

主析取范式求解-例题

恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \qquad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使m_1为真 011仅使m_3为真 101 110 111

思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

主析取范式求解-例题

恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \quad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使m_1为真 011仅使m_3为真 101 110 111

思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

主析取范式求解-例题

恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \qquad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$$

001仅使m_1为真 | 011仅使m_3为真 | 101 | 110 | 111

思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

主析取范式求解-例题

恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \qquad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使m_1为真 011仅使m_3为真 101 110 111

思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

主析取范式求解-例题

恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \quad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$$

001仅使m_1为真 | 011仅使m_3为真 | 101 | 110 | 111

思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

主析取范式求解-例题

恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \qquad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使m_1为真 011仅使m_3为真 101 110 111

思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

主析取范式求解-例题

恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \quad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使m_1为真 011仅使m_3为真 101 110 111

思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

主析取范式求解-例题

恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \quad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使m_1为真　011仅使m_3为真　101　110　111

思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

主析取范式求解-例题

恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad (\text{补入})$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad (\text{展开})$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \quad (\text{极小项标记})$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad (\text{化简})$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使m_1为真 | 011仅使m_3为真 | 101 | 110 | 111

思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

主析取范式的惟一性

Remark

- 主析取范式是否是惟一的? (考虑极小项的性质)
- 极小项的性质：有且仅有一个指派使得某个极小项真值为1。
- 公式A的主析取范式中，出现的极小项的下标对应的二进制编码，就是使得公式真值为1的指派；未出现的极小项的下标对应于使公式真值为0的指派。
- 结论：公式的主析取范式是惟一的。

主析取范式的惟一性

Remark

- 主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)
- 极小项的性质：有且仅有一个指派使得某个极小项真值为1。
- 公式A的主析取范式中，出现的极小项的下标对应的二进制编码，就是使得公式真值为1的指派；未出现的极小项的下标对应于使公式真值为0的指派。
- 结论：公式的主析取范式是惟一的。

主析取范式的惟一性

Remark

- 主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)
- 极小项的性质：有且仅有一个指派使得某个极小项真值为1。
- 公式A的主析取范式中，出现的极小项的下标对应的二进制编码，就是使得公式真值为1的指派；未出现的极小项的下标对应于使公式真值为0的指派。
- 结论：公式的主析取范式是惟一的。

主析取范式的惟一性

Remark

- 主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)
- 极小项的性质：有且仅有一个指派使得某个极小项真值为1。
- 公式A的主析取范式中，出现的极小项的下标对应的二进制编码，就是使得公式真值为1的指派；未出现的极小项的下标对应于使公式真值为0的指派。
- 结论：公式的主析取范式是惟一的。

主析取范式求解-例题（二）

真值表法求公式的主析取范式

- 用真值表法求公式$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$的主析取范式。

	P	Q	R	$P \wedge Q \vee R$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

真值表法

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

  $\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$
- 使得公式真值为1的指派，对应于公式A的主析取范式中的某个极小项的下标。

主析取范式求解-例题（二）

真值表法求公式的主析取范式

- 用真值表法求公式$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$的主析取范式。

	P	Q	R	$P \wedge Q \vee R$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

真值表法

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

  $\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$

- 使得公式真值为1的指派，对应于公式A的主析取范式中的某个极小项的下标。

主析取范式求解-例题（二）

真值表法求公式的主析取范式

- 用真值表法求公式$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$的主析取范式。

	P	Q	R	$P \wedge Q \vee R$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

真值表法

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

  $\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$
- 使得公式真值为1的指派，对应于公式A的主析取范式中的某个极小项的下标。

主析取范式求解-例题（二）

真值表法求公式的主析取范式

- 用真值表法求公式$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$的主析取范式。

	P	Q	R	$P \wedge Q \vee R$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

真值表法

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

  $\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$
- 使得公式真值为1的指派，对应于公式A的主析取范式中的某个极小项的下标。

主析取范式个数

问题

- n个变元的命题公式可以有无限多个，但一共有多少个不同的主析取范式呢？

分析

- 已知对于n个变元，有2^n个极小项；
- 对任一个主析取范式，可能含有的某个极小项，或者不含有某个极小项；
- 所以，一共可构造2^{2^n}个主析取范式。

主析取范式个数

问题

- n个变元的命题公式可以有无限多个，但一共有多少个不同的主析取范式呢？

分析

- 已知对于n个变元，有2^n个极小项；
- 对任一个主析取范式，可能含有的某个极小项，或者不含有某个极小项；
- 所以，一共可构造2^{2^n}个主析取范式。

主析取范式个数

问题

- n个变元的命题公式可以有无限多个，但一共有多少个不同的主析取范式呢?

分析

- 已知对于n个变元，有2^n个极小项；
- 对任一个主析取范式，可能含有的某个极小项，或者不含有某个极小项；
- 所以，一共可构造2^{2^n}个主析取范式。

主析取范式个数

问题

- n个变元的命题公式可以有无限多个，但一共有多少个不同的主析取范式呢?

分析

- 已知对于n个变元，有2^n个极小项；
- 对任一个主析取范式，可能含有的某个极小项，或者不含有某个极小项；
- 所以，一共可构造$\boxed{2^{2^n}}$个主析取范式。

主析取范式个数

问题

- n个变元的命题公式可以有无限多个，但一共有多少个不同的主析取范式呢?

分析

- 已知对于n个变元，有2^n个极小项；
- 对任一个主析取范式，可能含有的某个极小项，或者不含有某个极小项；
- 所以，一共可构造$\boxed{2^{2^n}}$个主析取范式。

主析取范式个数-例

例

- $n=1$一个变元的主析取范式，共有$2^{2^1}=4$个:
  1. $\Sigma(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ (不含任何极小项)
  2. $\Sigma(0) \Leftrightarrow \neg P$
  3. $\Sigma(1) \Leftrightarrow P$
  4. $\Sigma(0,1) \Leftrightarrow \neg P \vee P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (含所有极小项)
- $n=2$含两个变元的主析取范式，共有$2^{2^2}=16$个;
- $n=3$含三个变元的主析取范式，共有$2^{2^3}=256$个;

主析取范式个数-例

例

- $n = 1$一个变元的主析取范式，共有$2^{2^1} = 4$个：
  1. $\Sigma(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ (不含任何极小项)
  2. $\Sigma(0) \Leftrightarrow \neg P$
  3. $\Sigma(1) \Leftrightarrow P$
  4. $\Sigma(0,1) \Leftrightarrow \neg P \vee P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (含所有极小项)
- $n = 2$含两个变元的主析取范式，共有$2^{2^2} = 16$个；
- $n = 3$含三个变元的主析取范式，共有$2^{2^3} = 256$个；

主析取范式个数-例

例

- $n = 1$一个变元的主析取范式，共有$2^{2^1} = 4$个：
  1. $\Sigma(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ (不含任何极小项)
  2. $\Sigma(0) \Leftrightarrow \neg P$
  3. $\Sigma(1) \Leftrightarrow P$
  4. $\Sigma(0,1) \Leftrightarrow \neg P \vee P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (含所有极小项)
- $n = 2$含两个变元的主析取范式，共有$2^{2^2} = 16$个；
- $n = 3$含三个变元的主析取范式，共有$2^{2^3} = 256$个；

主析取范式个数-例

例

- $n=1$一个变元的主析取范式，共有$2^{2^1}=4$个：
  1. $\Sigma(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ (不含任何极小项)
  2. $\Sigma(0) \Leftrightarrow \neg P$
  3. $\Sigma(1) \Leftrightarrow P$
  4. $\Sigma(0,1) \Leftrightarrow \neg P \vee P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (含所有极小项)
- $n=2$含两个变元的主析取范式，共有$2^{2^2}=16$个；
- $n=3$含三个变元的主析取范式，共有$2^{2^3}=256$个；

主析取范式个数-例

例

- $n = 1$一个变元的主析取范式，共有$2^{2^1} = 4$个：
  1. $\Sigma(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ (不含任何极小项)
  2. $\Sigma(0) \Leftrightarrow \neg P$
  3. $\Sigma(1) \Leftrightarrow P$
  4. $\Sigma(0,1) \Leftrightarrow \neg P \vee P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (含所有极小项)
- $n = 2$含两个变元的主析取范式，共有$2^{2^2} = 16$个；
- $n = 3$含三个变元的主析取范式，共有$2^{2^3} = 256$个；

主析取范式个数-例

例

- $n = 1$一个变元的主析取范式，共有$2^{2^1} = 4$个:
  1. $\Sigma(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ (不含任何极小项)
  2. $\Sigma(0) \Leftrightarrow \neg P$
  3. $\Sigma(1) \Leftrightarrow P$
  4. $\Sigma(0,1) \Leftrightarrow \neg P \vee P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (含所有极小项)
- $n = 2$含两个变元的主析取范式，共有$2^{2^2} = 16$个;
- $n = 3$含三个变元的主析取范式，共有$2^{2^3} = 256$个;

主析取范式个数-例

例

- $n=1$一个变元的主析取范式，共有$2^{2^1}=4$个:
  1. $\Sigma(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ (不含任何极小项)
  2. $\Sigma(0) \Leftrightarrow \neg P$
  3. $\Sigma(1) \Leftrightarrow P$
  4. $\Sigma(0,1) \Leftrightarrow \neg P \vee P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (含所有极小项)
- $n=2$含两个变元的主析取范式，共有$2^{2^2}=16$个;
- $n=3$含三个变元的主析取范式，共有$2^{2^3}=256$个;

主析取范式和主合取范式-对偶性

Canonical Forms

- 主析取范式-Canonical Disjunctive Normal Form (CDNF)
- 主合取范式-Canonical Conjunctive Normal Form (CCNF)

主析取范式	主合取范式
基本积	基本和
析取范式(基本积之和)	合取范式(基本和之积)
极小项 n个变元有2^n个极小项 其下标使该极小项为真	极大项 n个变元有2^n个极大项 其下标使该极大项为假
主析取范式是极小项的和	主合取范式是极大项的积
求主析取范式的方法	求主合取范式的方法
其中的所有的极小项的下标对应使该公式为真的解释	其中的所有的极大项的下标对应使该公式为假的解释

主析取范式和主合取范式-对偶性

Canonical Forms

- 主析取范式-Canonical Disjunctive Normal Form (CDNF)
- 主合取范式-Canonical Conjunctive Normal Form (CCNF)

主析取范式	主合取范式
基本积	基本和
析取范式(基本积之和)	合取范式(基本和之积)
极小项 n个变元有2^n个极小项 其下标使该极小项为真	极大项 n个变元有2^n个极大项 其下标使该极大项为假
主析取范式是极小项的和	主合取范式是极大项的积
求主析取范式的方法	求主合取范式的方法
其中的所有的极小项的下标对应使该公式为真的解释	其中的所有的极大项的下标对应使该公式为假的解释

极小项、极大项性质

极小项

- n个变元可以构成2^n个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为1；
- 任意两个极小项的合取式真值永为0；
- 全体极小项的析取式真值永为1。

极大项

- n个变元可以构成2^n个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为0；
- 任意两个极大项的析取式真值永为1；
- 全体极大项的合取式真值永为0。

极小项、极大项性质

极小项

- n个变元可以构成2^n个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为1；
- 任意两个极小项的合取式真值永为0；
- 全体极小项的析取式真值永为1。

极大项

- n个变元可以构成2^n个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为0；
- 任意两个极大项的析取式真值永为1；
- 全体极大项的合取式真值永为0。

极小项、极大项性质

极小项

- n个变元可以构成2^n个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为1；
- 任意两个极小项的合取式真值永为0；
- 全体极小项的析取式真值永为1。

极大项

- n个变元可以构成2^n个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为0；
- 任意两个极大项的析取式真值永为1；
- 全体极大项的合取式真值永为0。

极小项、极大项性质

极小项

- n个变元可以构成2^n个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为1；
- 任意两个极小项的合取式真值永为0；
- 全体极小项的析取式真值永为1。

极大项

- n个变元可以构成2^n个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为0；
- 任意两个极大项的析取式真值永为1；
- 全体极大项的合取式真值永为0。

极小项、极大项性质

极小项

- n个变元可以构成2^n个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为1；
- 任意两个极小项的合取式真值永为0；
- 全体极小项的析取式真值永为1。

极大项

- n个变元可以构成2^n个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为0；
- 任意两个极大项的析取式真值永为1；
- 全体极大项的合取式真值永为0。

极小项、极大项性质

极小项

- n个变元可以构成2^n个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为1；
- 任意两个极小项的合取式真值永为0；
- 全体极小项的析取式真值永为1。

极大项

- n个变元可以构成2^n个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为0；
- 任意两个极大项的析取式真值永为1；
- 全体极大项的合取式真值永为0。

极小项、极大项性质

极小项

- n个变元可以构成2^n个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为1；
- 任意两个极小项的合取式真值永为0；
- 全体极小项的析取式真值永为1。

极大项

- n个变元可以构成2^n个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为0；
- 任意两个极大项的析取式真值永为1；
- 全体极大项的合取式真值永为0。

极小项、极大项性质

极小项

- n个变元可以构成2^n个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为1；
- 任意两个极小项的合取式真值永为0；
- 全体极小项的析取式真值永为1。

极大项

- n个变元可以构成2^n个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为0；
- 任意两个极大项的析取式真值永为1；
- 全体极大项的合取式真值永为0。

主合取范式求解例题

恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R && \text{(补入)}\\
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R\\
&\quad \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R && \text{(展开)}\\
&\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 && \text{(化简)}\\
&\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)
\end{aligned}
$$

恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) && \text{(补入)}\\
&\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) && \text{(展开化简)}\\
&\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \Pi(0,2,4) && \text{(标记)}
\end{aligned}
$$

主合取范式求解例题

恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \qquad \text{(展开化简)}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \Pi(0,2,4) \qquad \text{(标记)}$$

主合取范式求解例题

恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$$

恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \qquad \text{(展开化简)}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \Pi(0, 2, 4) \qquad \text{(标记)}$$

主合取范式求解例题

恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$$

恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \qquad \text{(展开化简)}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \Pi(0, 2, 4) \qquad \text{(标记)}$$

主合取范式求解例题

恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \qquad \text{(展开化简)}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \Pi(0,2,4) \qquad \text{(标记)}$$

主合取范式求解例题

恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \quad \text{(展开化简)}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \Pi(0,2,4) \quad \text{(标记)}$$

主合取范式求解例题

恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \quad \text{(展开化简)}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \Pi(0,2,4) \quad \text{(标记)}$$

主合取范式求解例题

恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R && \text{(补入)}\\
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R\\
&\quad \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R && \text{(展开)}\\
&\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 && \text{(化简)}\\
&\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)
\end{aligned}
$$

恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) && \text{(补入)}\\
&\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) && \text{(展开化简)}\\
&\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \Pi(0,2,4) && \text{(标记)}
\end{aligned}
$$

主合取范式求解例题

恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R && \text{(补入)}\\
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R\\
&\qquad \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R && \text{(展开)}\\
&\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 && \text{(化简)}\\
&\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)
\end{aligned}
$$

恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) && \text{(补入)}\\
&\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) && \text{(展开化简)}\\
&\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \Pi(0, 2, 4) && \text{(标记)}
\end{aligned}
$$

主合取范式求解例题

恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \qquad \text{(展开化简)}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \Pi(0,2,4) \qquad \text{(标记)}$$

主合/析取范式

小结

- 主范式的定义
- 主范式的求法
- 主范式的含义

主合/析取范式

小结

- 主范式的定义
- 主范式的求法
- 主范式的含义

主合/析取范式

小结

- 主范式的定义
- 主范式的求法
- 主范式的含义