1 DN2 - Porazdelitvena funkcija normalne slučajne spremenljivke, Ploščina Bézierove krivulje; Matija Ojo; 63200205

1.1 Porazdelitvena funkcija normalne slučajne spremenljivke

Porazdelitvena funkcija normalne slučajne spremenljivke je definirana kot:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

.

V praksi se uporablja za izračun verjetnosti, da bo vrednost slučajne spremenljivke padla v določen interval.

Za izračun porazdelitvene funkcije normalne slučajne spremenljivke se uporablja le numerične metode, saj integrala ne moremo izračunati analitično. V nalogi je uporabljena sestavljenova Simpsonova 1/3 metoda za izračun integrala. Sestavljena Simpsonova metoda je osnovana na Simpsonovem pravilu, ki numerično izračuna vrednost integrala tako da evalvira vrednost funckije na vmesnih točkah. Velja: $\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$. Sestavljeno Simpsonovo 1/3 pravilo pa interval $[a, b]$ razdeli na n podintervalov in izračuna integral na vsakem podintervalu. Velja namreč: $\int_a^b f(x) \approx \frac{1}{3}h(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+ \cdots + 2f(x_{n-2}))$.

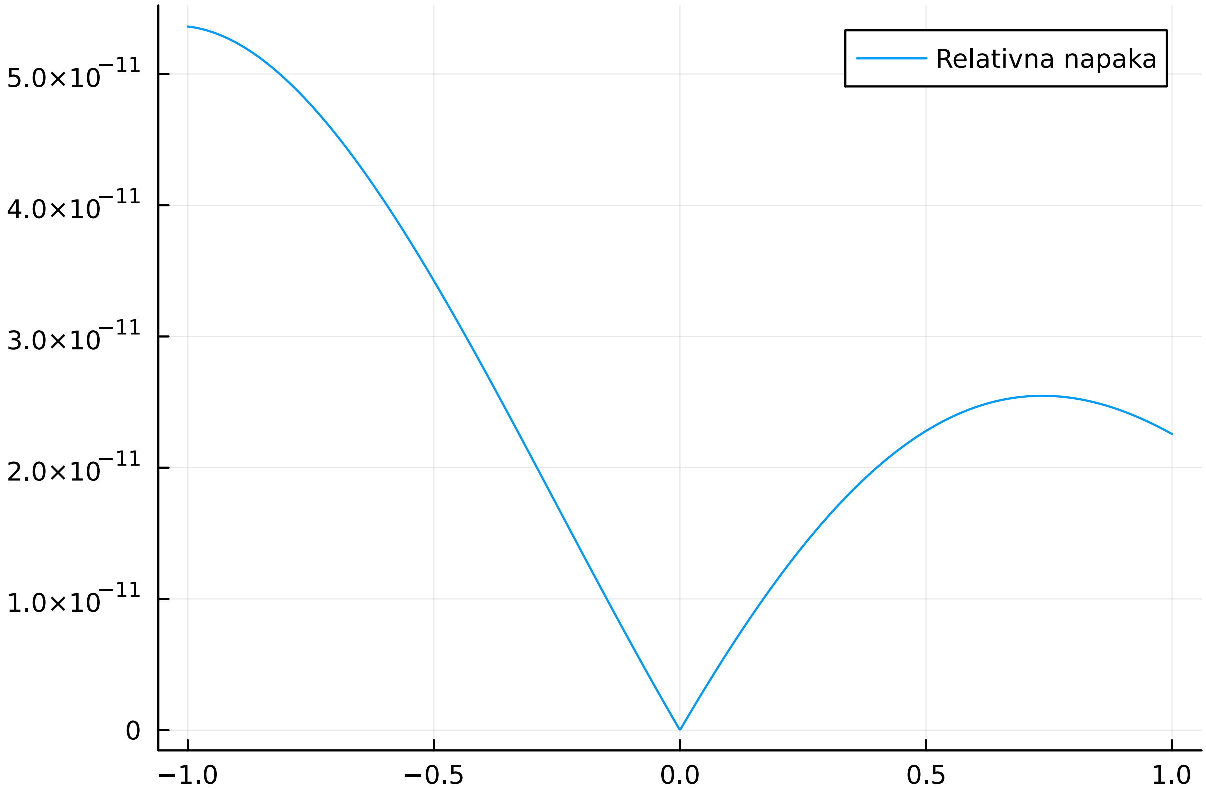
1.1.1 Rezultati

Poglejmo si graf relativne napake med porazdelitveno funkcijo normalne slučajne spremenljivke izračunano s sestavljeno Simpsonovo metodo ter z metodo izračuna integrala z uporabo Gaussove kvadrature iz paketa `FastGaussQuadrature` in jo smatramo za ”točno” vrednost.

```julia
using DN2
using Plots
using FastGaussQuadrature

function accurate_gauss_CDF(x)
  f(x) = exp(-x^2 / 2) / sqrt(2 * pi)
  a = -10
  b = x
  n = 60
  xs, ws = gausslegendre(n)
  xs = (b - a) / 2 * xs .+ (b + a) / 2
  ws = (b - a) / 2 * ws
  return sum(ws .* f.(xs))
end

xs = range(-1, stop=1, length=1000)
ys = [gaussian_CDF(x) for x in xs]
true_ys = [accurate_gauss_CDF(x) for x in xs]
diffs = [abs(ys[i] - true_ys[i]) / abs(true_ys[i]) for i in 1:length(xs)]
plot(xs, diffs, label="Relativna napaka")
```



1.2 Ploščina Bézierove krivulje

Bézierovo krivuljo omejujeo kontrolne točke P_i in je definirana kot:

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(t) P_i; \quad 0 \leq t \leq 1$$

kjer je:

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}; \quad i = 0 \ldots 1$$

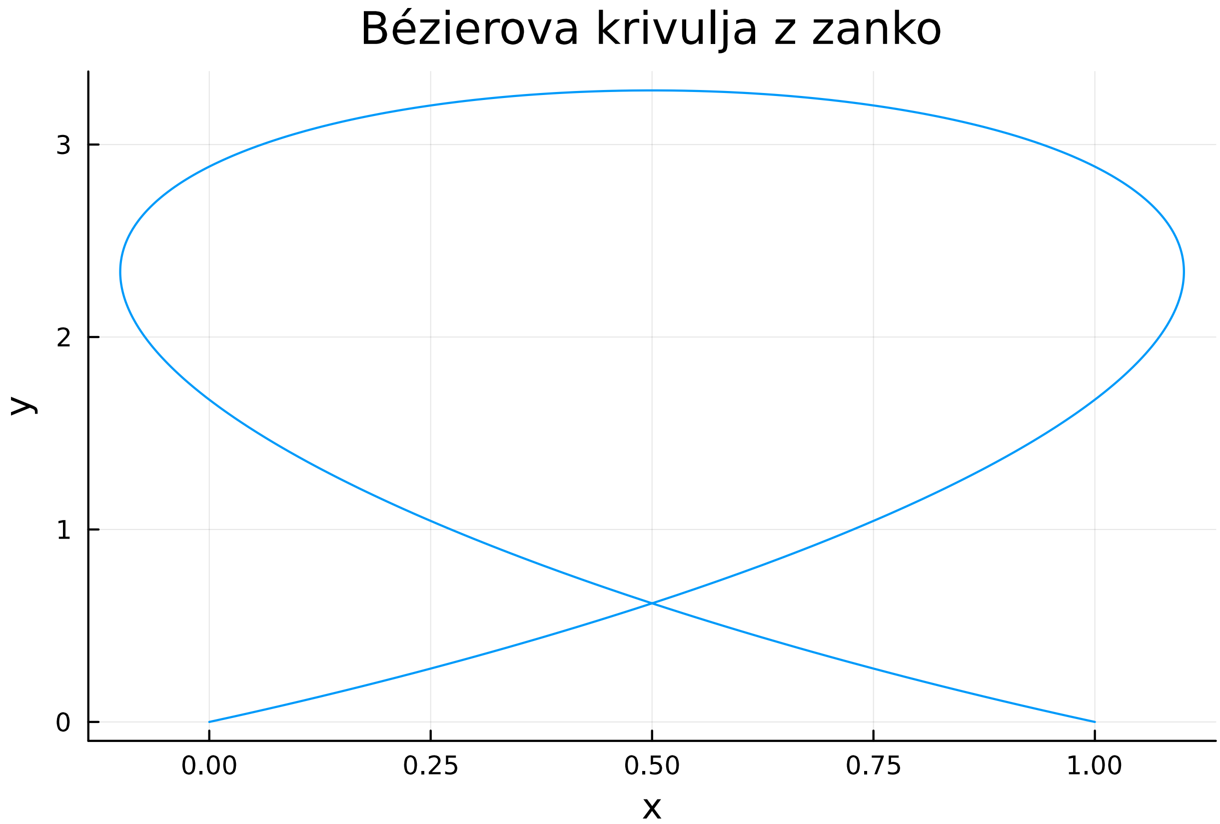
i-ti Bernsteinov bazni polinom stopnje n.

V nalogi je Bézierova krivulja podana z naslendjimi kontrolnimi točkami:

```
control_points = [(0, 0), (1, 1), (2, 3), (1, 4), (0, 4), (-1, 3), (0, 1), (1, 0)];
```

Poglejmo si njen graf

```
t = range(0, stop=1, length=1000)
x_values = [bezier(control_points, t_value)[1] for t_value in t]
y_values = [bezier(control_points, t_value)[2] for t_value in t]
plot(x_values, y_values, xlabel="x", ylabel="y", title="Bézierova krivulja z zanko",
legend=:none)
```



Ploščino zanke se izračuna tako da se najde samo-presek krivulje (začetek in konec zanke) in meji uporabimo pri sestavljeni Simpsonovi metodi za izračun ploščine.

Meji so izračunani s pomočjo Newtonove metode z relativno natančnostjo 10^{-10}.

1.3 Rezultati

Ploščina omenjene zanke je enaka:

```
bezier_curve_area()
```

```
2.2537095301766232
```