Chapitre 33

Variables aléatoires réelles finies

33.3 Exemple

Exemple 33.3

Un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 a été truqué de telle sorte que les faces 1,2 et 3 tombent avec une probabilité $\frac{1}{6}$, les faces 4 et 5 avec une probabilité $\frac{1}{12}$ et 6 avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. Quelle numéro obtient-on en moyenne ?

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{45}{12} \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

33.4 Espérance des lois usuelles

Théorème 33.4

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.

1. Variable aléatoire constante : si X est constante de valeur m, alors $\mathrm{E}(X) = m$.
2. Loi uniforme : si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$, alors $\mathrm{E}(X)$ est la moyenne naturelle des valeurs $x_1, \dots, x_n$ de X :
$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$
3. Loi de Bernoulli : soit $p \in [0; 1]$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $\mathrm{E}(X) = p$.
4. Exemple fondamental : pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{E}(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
5. Loi binomiale : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathrm{E}(X) = np$.

1. Si $X(\Omega) = \{m\}, P(X = m) = 1$ et $E(X) = 1 \times m = m$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\}$ alors :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$
Donc :
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) x_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \end{aligned}$$
3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors :
$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times p + 0 \times (1 - p) \\ &= p \end{aligned}$$
4. Si $A \subset \Omega$, alors :
$$\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A)) \text{ (32.21)}$$
Donc (3) $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
5. Par définition :
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} P(X = k) k \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \end{aligned}$$

Première méthode :
Soit $Q = (1-p+Y)^n \in \mathbb{R}[Y]$.

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}Y^k \text{donc } Q' = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}Y^{k-1}$$
$$\text{donc } YQ' = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}Y^k$$

Par ailleurs $YQ' = n(1-p+Y)^{n-1}$.
En évaluant les deux expressions en p, on obtient l'expression voulue :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np$$

Deuxième méthode :
On poursuit le calcul de $E(X)$ en utilisant la formule du capitaine.
Troisième méthode :
En utilisant la linéarité de l'espérance.

33.5 Propriétés de l'espérance

Propostion 33.5

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.

1. Reformulation : $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$.
2. Linéarité : pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\mathrm{E}(X) + \mu\mathrm{E}(Y)$.
3. Positivité : si $X \geq 0$, alors $\mathrm{E}(X) \geq 0$.
4. Croissance : si $X \leq Y$, alors $\mathrm{E}(X) \leq \mathrm{E}(Y)$.
5. Inégalité triangulaire : $|\mathrm{E}(X)| \leq \mathrm{E}(|X|)$.

1. On rappelle qe $\{(X=x)\}_{x\in X(\Omega)}$ est un SCE.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)x \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} \left[\sum_{\omega\in(X=x)} P(X=\omega)\right] x \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} E(\lambda X + \mu Y) &= \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})(\lambda X(\omega) + \mu Y(\omega)) \\ &= \lambda \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega) + \mu \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})Y(\omega) \\ &= \lambda E(X) + \mu E(Y) \end{aligned}$$

3. Si $X \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\omega\in\Omega} \underbrace{P(\{\omega\})}_{\geq 0}\underbrace{X(\omega)}_{\geq 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

4. RAS (2 + 3)

5.

$$\begin{aligned}|E(X)| &= \left|\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega)\right| \\ &\leq \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})|X(\omega)| \\ &= E(|X|)\end{aligned}$$

33.6 Exemple

Exemple 33.7

Qu'obtient-on en moyenne quand on lance deux fois un dé à 6 faces et qu'on additionne les résultats obtenus ?

$X_1, X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(P([\![1,6]\!]))$.

$$\begin{aligned}E(X_1+X_2) &= E(X_1)+E(X_2) \\ &= 2\times\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k \\ &= 7\end{aligned}$$

33.7 Formule de transfert

Théorème 33.8

Soit X une variable aléatoire sur Ω et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction. L'espérance de $f(X)$ est entièrement déterminée par f et la loi de X :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)f(x)$$

$\{(X=x)\}_{x\in X(\Omega)}$ est un SCE.

$$\begin{aligned}E(f(X)) &= \sum_{x\in X(\Omega)} P(\{\omega\})f(X(\omega)) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega\in(X=x)} P(\{w\})f(X(\omega))\right) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega\in(X=x)} P(\{w\})\right) f(x) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)f(x)\end{aligned}$$

33.10 Exemple

Exemple 33.10

Soit X une variable aléatoire suivant une loi unifore sur $[\![1,n]\!]$. Donner un équivalent simple de $E(X)$ et de $E(X^2)$.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

—

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n+1}{2} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2} \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} k^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{3} \end{aligned}$$

33.11 Espérance du produit de deux variables aléatoires réelles indépendantes

Théorème 33.11

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Ce résultat s'étend naturellement à un nombre fini quelconque de variables aléatoires réelles indépendantes.

$$\begin{aligned} E(x)E(Y) &= \left(\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)x\right)\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y=y)y\right) \\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P(X=x)P(Y=y)xy \\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P(X=x \text{ et } Y=y)xy \text{ (indépendance)} \\ &= E(XY) \end{aligned}$$

33.13 Propriétés de la variance

Propostion 33.13

Soit X une variable aléatoire réelle.

1. $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$.
2. $\mathrm{V}(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = \mathrm{E}(X)) = 1$. On dit dans ce cas que X est presque sûrement constante.
3. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\mathrm{V}(ax+b) = a^2\ \mathrm{V}(X)$$

En particulier, si $\sigma(X) > 0$, la variable $\frac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

1.

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X-E(X))^2) \\ &= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} V(X)=0 &\Leftrightarrow E((X-E(X))^2)=0 \\ \text{(fonction de transfert)} \quad &\Leftrightarrow \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)(x-E(X))^2=0 \\ &\Leftrightarrow \forall x\in X(\Omega)\setminus\{E(X)\}, P(X=x)=0 \\ &= P(X=E(X))=1 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= E((aX+b-E(aX+b))^2) \\ &= E(a^2(X-E(X))) \text{ (linéarité)} \\ &= a^2V(X) \text{ (linéarité)} \end{aligned}$$

33.15 Propriétés de la covariance

Propostion 33.15

On a :

1. $\mathrm{V}(X)=\mathrm{cov}(X,X)$ et $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$.
2. $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$
3. $\mathrm{V}(X+Y)=\mathrm{V}(X)+2\cdot\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{V}(Y)$.
4. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ et $\mathrm{V}(X+Y)=\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)$.

Les assertions 3 et 4 se généralisent au cas de variables aléatoires réelles $X_1,\dots,X_n$ sur Ω. Dans ce cas :

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n \mathrm{V}\left(X_i\right)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{cov}\left(X_i,X_j\right)$$

Si $X_1,\dots,X_n$ sont (seulement) deux à deux indépendantes, alors

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n \mathrm{V}\left(X_i\right)$$

1. RAF
2.

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X,Y) &= E((X-E(X))(Y-E(Y))) \\ &= E(XY-E(X)Y-E(Y)X+E(X)E(Y)) \\ &= E(XY)-E(X)E(Y) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E((X+Y-E(X+Y))^2) \\ &= E((X-E(X))+(Y-E(Y)))^2 \\ &= V(X)+2\,\mathrm{cov}(X,Y)+V(Y) \end{aligned}$$

4. On suppose que X et Y sont indépendantes, donc :

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

Puis, par (2) :

$$\mathrm{cov}(X,Y)=0$$

33.16 Variance des lois usuelles

Théorème 33.16

Soit X une variable aléatoire réelle et $p \in [0;1]$.

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors $\mathrm{V}(X) = p(1-p)$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$.

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $X^2 \hookrightarrow B(p)$.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

2. Si $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $X_1, \dots, X_n$ indépendantes, alors :

$$\begin{aligned} V(X_1 + \cdots + X_n) &= \sum_{k=1}^{n} V(X_k) \text{ (indépendance)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} p(1-p) \text{ (1)} \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

33.17 Inégalité de Markov

Théorème 33.17

Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $a > 0$, on a

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(|X|)}{a}$$

On remarque que :

$$\mathbb{1}_{(|X| \geq a)} a \leq \mathbb{1}_{(|X| \geq a)} |X| \leq |X|$$

Par croissance de l'espérance :

$$aP(|X| \geq a) = aE(\mathbb{1}_{(|X| \geq a)}) \leq E(|X|)$$

33.19 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 33.19

Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $a > 0$, on a

$$P(|X - \mathrm{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{a^2}$$

$$\begin{aligned} P(|X - E(X)|) = P((X - E(X))^2 \geq a^2) &\leq \frac{E((X - E(X))^2)}{a^2} \text{ (Markov)} \\ &= \frac{V(X)}{a^2} \end{aligned}$$

33.20 Exemple

Exemple 33.20

On dispose d'une pièce éventuellement truquée dont la probabilité d'obtention de pile est notée p. Pour connaître p, on lance cette pièce n fois et on note F la fréquence d'apparition de pile ainsi obtenue. À partir que quelle valeur de n la probabilité pour que F soit une approximation de p à 10^{-2} est-elle supérieure à 0.9 ?

On note X la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de piles obtenus.
Ainsi $F = \frac{X}{n}$.

$$\begin{aligned} P(|F-p| \geq 10^{-2}) \leq 0.9 &\Leftrightarrow 1 - P(|F-p| > 10^{-2}) \geq 0.9 \\ &\Leftrightarrow P(|F-p| > 10^{-2}) \leq 0.1 \\ &\Leftrightarrow P(|X-np| \geq 10^{-2}n) \leq 0.1 \end{aligned}$$

Or $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{aligned} P(|X-E(X)| > n \times 10^{-2}) &< \frac{V(X)}{n^2 \times 10^{-4}} \\ &= \frac{n(1-p)p}{n^2 \times 10^{-4}} \\ &\leq \frac{1}{4n \times 10^{-4}} \end{aligned}$$

Pour $n \geq \frac{10^5}{4}$, on a bien $P(|F-p| \leq 10^{-2}) \geq 0.9$.