

# Chapitre 35

## Familles sommables

<b>35 Familles sommables</b>	<b>1</b>
35.2 Reformulation	2
35.5 Croissance de la somme	2
35.8 Lien avec les séries à termes positifs	3
35.10 Invariance de la somme d'une série à termes positifs par permutation des termes	3
35.12 Restriction	3
35.13 Preque linéarité	4
35.14 Sommation par paquets	4
35.16 Théorème de Fubini positif	5
35.17 Exemple	5
35.18 Exemple	5
35.19 Exemple	6
35.25 Caractérisation de la sommabilité par les parties réelles et imaginaires, parties positives et négatives	7
35.27 Caractérisation de la somme par les $\epsilon$	7
35.28 Linéarité	8
35.29 Intégralité triangulaire	9
35.31 Associativité pour les familles sommables	10
35.33 Produit de familles sommables	10
35.34 Exemple	11
35.35 Exemple	11
35.36 Exemple	12
35.37 Exemple	13
35.38 Produit de Cauchy	14
35.39 Exemple	14
35.41 Convergence de la série exponentielle	14
35.43 Propriété fondamentale de la série exponentielle	15
35.46 Corollaire	15

## 35.2 Reformulation

### Proposition 35.2

Soit  $\sum a_n$  une série à termes positifs. Alors  $\sum_{n \geq 0} a_n$  est bien définie dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  et

$$\sum_{n \geq 0} a_n = \sup \left\{ \sum_{k \in J} a_k, J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\}$$

En notant, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ , on a :

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} a_k$$

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n \in \left\{ \sum_{k \in J} a_k \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\}$ .

Donc  $\sum_{k \geq 0} a_k \leq \sup \left\{ \sum_{k \in J} a_k \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\} = S$ .

Par ailleurs, pour  $J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ , on pose  $N = \max J$  et  $J \subset \llbracket 0, N \rrbracket$  et :

$$\sum_{k \in J} a_k \leq \sum_{k=0}^N a_k \leq \sum_{k \geq 0} a_k$$

Par définition de la borne supérieure :

$$S \leq \sum_{k \geq 0} a_k$$

Donc :

$$\sum_{k \geq 0} a_k = S$$

## 35.5 Croissance de la somme

### Proposition 35.5

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  deux familles à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Si pour tout  $i \in I$ ,  $a_i \leq b_i$ , alors

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

Soit  $J \in \mathcal{P}_f(I)$ . Comme :

$$\forall i \in J, a_i \leq b_i$$

Alors :

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in J} b_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

$\sum_{i \in I} b_i$  est un majorant de  $\left\{ \sum_{i \in J} a_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$ .

Par définition :

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

### 35.8 Lien avec les séries à termes positifs

#### Proposition 35.8

Soit  $\sum a_n$  une série à termes positifs.

1. On a  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  (le terme de gauche correspond à la somme de la série tandis que le terme de droite à la somme de la famille sommable).
2. En particulier,  $\sum a_n$  converge si et seulement si la famille  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable.

1. (35.2)
2. Théorème de la Limite Monotone

### 35.10 Invariance de la somme d'une série à termes positifs par permutation des termes

#### Corollaire 35.10

Soit  $\sum a_n$  une série à termes positifs et  $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ . Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

Cette égalité reste vraie dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ .

Soit  $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ .

$\sigma$  induit une bijection  $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}_f(\mathbb{N}); J \mapsto \sigma(J)$  de  $\{\sum_{i \in J} a_i \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}$  sur  $\{\sum_{i \in I} a_{\sigma(i)} \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}$ . Ces deux ensembles ont donc la même borne supérieure. Donc :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_{\sigma(i)}$$

Soit :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{\sigma(i)} \quad (35.8)$$

### 35.12 Restriction

#### Proposition 35.12

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Soit  $J \subset I$ , alors :

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

Comme  $\mathcal{P}_f(J) \subset \mathcal{P}_f(I)$  :

$$\left\{ \sum_{j \in K} a_j \mid K \in \mathcal{P}_f(J) \right\} \subset \left\{ \sum_{j \in K} a_j \mid K \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$$

Donc (Chapitre 9) :

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

### 35.13 Preque linéarité

#### Proposition 35.13

Soit  $(a_i)$  et  $(b_i)$  deux familles d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}_+$  et  $(\lambda, \mu) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$ . On a

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i$$

On rappelle (Chapitre 9) que :

$$\sup(aA + bB) = a \sup A + b \sup B$$

( $a \geq 0, b \geq 0$  et  $\sup A, \sup B$  existent).

### 35.14 Sommation par paquets

#### Théorème 35.14

Soit  $I$  un ensemble quelconque et  $I = \bigsqcup_{k \in K} I_k$  un recouvrement disjoint de  $I$ . Soit  $a = (a_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Alors

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} \left( \sum_{i \in I_k} a_i \right)$$

— Montrons que  $\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{k \in K} \left( \sum_{i \in I_k} a_i \right)$  :

Soit  $J \in \mathcal{P}_f(I)$ .

Pour tout  $k \in K$ , on note  $J_k = J \cap I_k$ .

Ainsi,  $J_k \in \mathcal{P}_f(I_k)$  et :

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{k \in K} J_k &= \bigsqcup_{k \in K} (J \cap I_k) \\ &= J \cap \bigsqcup_{k \in K} I_k \\ &= J \cap I \\ &= J \end{aligned}$$

On pose également  $L = \{k \in K, J_k \neq \emptyset\}$ .

Alors  $L \in \mathcal{P}_f(K)$  et :

$$\bigsqcup_{k \in L} J_k = \bigsqcup_{k \in K} J_k = J$$

Les ensembles étant finis :

$$\sum_{i \in J} a_i = \sum_{k \in L} \sum_{i \in J_k} a_i \leq \sum_{k \in L} \sum_{i \in I_k} a_i \leq \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i$$

Par définition de la borne supérieure :

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i$$

— On prouve  $\sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$ .

Soit  $L \in \mathcal{P}_f(K)$ .

Soit, pour  $k \in L$ ,  $J_k \in \mathcal{P}_f(I_k)$ .  $\bigsqcup_{k \in L} J_k$  est donc une partie finie de  $I$ .

$$\underbrace{\sum_{k \in L} \sum_{i \in J_k} a_i}_{\text{car } \bigsqcup_{k \in L} J_k \text{ est fini}} \leq \sum_{i \in I} a_i$$

En utilisant un nombre fini de fois la définition de la borne supérieure :

$$\sum_{k \in L} \sum_{i \in I_k} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

Toujours par définition de la borne supérieure :

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

### 35.16 Théorème de Fubini positif

#### Corollaire 35.16

Soit  $I$  et  $J$  deux ensembles quelconques et  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille de réels positifs. Alors

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j}$$

$$\bigsqcup_{j \in J} I \times \{j\} = I \times J = \bigsqcup_{i \in I} \{i\} \times J$$

On conclut avec le théorème de sommation par paquets.

### 35.17 Exemple

#### Exemple 35.17

Montrer que  $\sum_{n \geq 2} (\zeta(n) - 1) = 1$ .

$(\frac{1}{k^n})_{n \geq 2, k \geq 2}$  est une famille de  $\mathbb{R}_+$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 2} \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^n} - 1 \right) &= \sum_{n \geq 2} \left( \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^n} \right) \\ &= \sum_{k \geq 2} \left( \sum_{n \geq 2} \frac{1}{k^n} \right) \quad (\text{Fubini positif}) \\ &= \sum_{k \geq 2} \left( \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) \quad (\text{progresion géométrique}) \\ &= \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 - k} \\ &= \sum_{k \geq 2} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \quad (\text{DES}) \\ &= 1 \quad (\text{télescopage}) \end{aligned}$$

### 35.18 Exemple

#### Exemple 35.18

Montrer que :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} = 2$$

$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{1 \leq k \leq n}$  est une famille de  $\mathbb{R}_+$ .

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{2^n} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{n \geq k} \frac{1}{2^n} \right) \text{ (Fubini positif)} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \text{ (progresion géométrique)} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{k-1}} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

### 35.19 Exemple

#### Exemple 35.19

Pour quelles valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  la somme  $\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{pq}{(p+q)^\alpha}$  est-elle réelle ?

$\left(\frac{pq}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q \geq 1}$  est une famille de réels positifs.

$$\begin{aligned}
 \sum_{p \geq 1, q \geq 1} \frac{pq}{(p+q)^\alpha} &= \sum_{d \geq 1} \sum_{p=0}^d \frac{p(d-p)}{d^\alpha} \text{ (sommatation par paquets)} \\
 &= \sum_{d \geq 2} \sum_{p=0}^d \frac{p(d-p)}{d^\alpha} \\
 &= \sum_{d \geq 2} \sum_{p=0}^d \left( \frac{p}{d^{\alpha-1}} - \frac{p^2}{d^\alpha} \right) \\
 &= \sum_{d \geq 2} \left( \frac{d(d+1)}{2d^{\alpha-1}} - \frac{d(d+1)(2d+1)}{6d^{\alpha-1}} \right) \text{ (sommes usuelles)} \\
 &= \sum_{d \geq 2} \frac{d+1}{d^{\alpha-1}} (3d - 2d - 1) \\
 &= \sum_{d \geq 2} \frac{d^2 - 1}{6d^{\alpha-1}}
 \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{d^2 - 1}{6d^{\alpha-1}} \sim \frac{1}{6d^{\alpha-3}}$$

D'après le TCSATTPE, la somme est finie si et seulement si  $\alpha > 4$ .

### 35.25 Caractérisation de la sommabilité par les parties réelles et imaginaires, parties positives et négatives

#### Théorème 35.5

1. Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels. Alors  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si  $(a_i^+)_{i \in I}$  et  $(a_i^-)_{i \in I}$  le sont.
2. Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de complexes. Alors  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si  $(\operatorname{Re}(a_i))_{i \in I}$  et  $(\operatorname{Im}(a_i))_{i \in I}$  le sont.

1. On rappelle que :

$$\forall i \in I, a_i = a_i^+ - a_i^-$$

et :

$$\begin{aligned} \forall i \in I, 0 \leq a_i^+ \leq |a_i| \\ 0 \leq a_i^- \leq |a_i| \end{aligned}$$

Si  $(a_i)$  est sommable, alors  $(a_i^+)_{i \in I}$  et  $(a_i^-)_{i \in I}$  le sont aussi (35.24).  
Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\forall i \in I, |a_i| \leq a_i^+ + a_i^-$$

Donc si  $(a_i^+)_{i \in I}$  et  $(a_i^-)_{i \in I}$  sont sommables, alors  $(a_i)$  est sommable (35.24) et (35.13).

2. Démonstration similaire.

### 35.27 Caractérisation de la somme par les $\epsilon$

#### Proposition 35.27

Soit  $(a_i)_{i \in I} \in \ell(I)$  et  $S \in \mathbb{C}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $S = \sum_{i \in I} a_i$
2. pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $J_\epsilon \in \mathcal{P}_f(I)$  tel que pour tout  $K \in \mathcal{P}_f(I)$  avec  $J_\epsilon \subset K$  :

$$\left| S - \sum_{i \in K} a_i \right| \leq \epsilon$$

$\Rightarrow$

On suppose que  $S = \sum_{i \in I} a_i$  (avec  $(a_i)$  une famille de réels).

On décompose :

$$\forall i \in I, a_i = a_i^+ - a_i^-$$

Et :

$$S = \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^- = S^+ - S^-$$

On note également :

$$\begin{aligned} A_+ &= \left\{ \sum_{i \in J} a_i^+ \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\} \\ A_- &= \left\{ \sum_{i \in J} a_i^- \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\} \end{aligned}$$

Soit  $\epsilon > 0$ .

$S^+ - \frac{\epsilon}{2}$  ne majore pas  $A_+$ , on choisit  $J_\epsilon^+ \in \mathcal{P}_f(I)$  tel que :

$$S^+ - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{i \in J_\epsilon^+} a_i^+$$

Pour les mêmes raisons, on choisit  $J_\epsilon^- \in \mathcal{P}_f(I)$  tel que :

$$S^- - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{i \in J_\epsilon^-} a_i^-$$

Pour tout  $K \in \mathcal{P}_f(I)$  avec  $K \supset J_\epsilon = J_\epsilon^+ \cup J_\epsilon^-$ .

$$\begin{aligned} S^+ - \frac{\epsilon}{2} &< \sum_{i \in J_\epsilon^+} a_i^+ \leq \sum_{i \in K} a_i^+ \\ S^- - \frac{\epsilon}{2} &< \sum_{i \in J_\epsilon^-} a_i^- \leq \sum_{i \in K} a_i^- \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \left| S - \sum_{i \in K} a_i \right| &= \left| S^+ - \sum_{i \in K} a_i^+ - S^- + \sum_{i \in K} a_i^- \right| \\ &\leq \left| S^+ - \sum_{i \in K} a_i^+ \right| + \left| S^- - \sum_{i \in K} a_i^- \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

⇐

Supposons qu'il existe  $S$  et  $S'$  vérifiant la condition 2. Alors pour tout  $\epsilon > 0$ , n notant  $J_\epsilon$  l'ensemble de l'assertion :

$$\begin{aligned} |S - S'| &= \left| S - \sum_{i \in J_\epsilon} a_i + \sum_{i \in J_\epsilon} a_i - S' \right| \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

Donc  $S = S'$ .

## 35.28 Linéarité

### Théorème 35.28

L'ensemble  $\ell^1(I)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et  $(a_i)_{i \in I} \rightarrow \sum_{i \in I} a_i$  est une forme linéaire sur  $\ell^1(I)$ .

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

- $\ell^1(I) \subset \mathbb{K}^I$ .
- Soit  $(a_i), (b_i)$  dans  $\ell^1(I)$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} |\lambda a_i + \mu b_i| &\leq \sum_{i \in I} |\lambda| |a_i| + |\mu| |b_i| \\ &\leq |\lambda| \sum_{i \in I} |a_i| + |\mu| \sum_{i \in I} |b_i| \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Donc  $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$ .

- Soit  $\epsilon > 0$ . Soit  $J_\epsilon^a \in \mathcal{P}_f(I)$  tel que :

$$\forall K \in \mathcal{P}_f(I), K \supset J_\epsilon^a, \left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in K} a_i \right| < \epsilon$$



On pose  $J_\epsilon = J_\epsilon^a \cup J_\epsilon^b$ .

On a alors, pour  $K \in \mathcal{P}_f(I)$ ,  $K \supset J_\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \left| \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i - \sum_{i \in K} (\lambda a_i + \mu b_i) \right| &= \left| \lambda \sum_{i \in I} a_i - \lambda \sum_{i \in K} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i - \mu \sum_{i \in K} b_i \right| \\ &\leq |\lambda| \left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in K} a_i \right| + |\mu| \left| \sum_{i \in I} b_i - \sum_{i \in K} b_i \right| \\ &\leq (|\lambda| + |\mu|)\epsilon \end{aligned}$$

D'après (35.27), on a donc :

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i$$

## 35.29 Intégralité triangulaire

### Proposition 25.29

Si  $(a_i)_{i \in I}$  est une famille sommable de complexes, alors

$$\left| \sum_{i \in I} a_i \right| \leq \sum_{i \in I} |a_i|$$

On suppose que  $(a_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)(I, \mathbb{R})$ .

On écrit donc :

$$\begin{aligned} \forall i \in I, a_i &= a_i^+ - a_i^- \\ |a_i| &= a_i^+ + a_i^- \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i \in I} a_i \right| &= \left| \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^- \right| \\ &\leq \sum_{i \in I} a_i^+ + \sum_{i \in I} a_i^- \quad (\text{Inégalité triangulaire sur } \mathbb{R}) \\ &= \sum_{i \in I} (a_i^+ + a_i^-) \quad (\text{presque linéarité}) \\ &= \sum_{i \in I} |a_i| \end{aligned}$$

On suppose que  $(a_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)(I, \mathbb{C})$ .

Soit  $J \in \mathcal{P}_f(I)$  :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i \in J} a_i \right| &\leq \sum_{i \in J} |a_i| \\ &\leq \sum_{i \in I} |a_i| \end{aligned}$$

On note  $M = \sup \left\{ \left| \sum_{i \in J} a_i \right| \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$  de telle sorte que  $M \leq \sum_{i \in I} |a_i|$ .

Montrons que  $M = \left| \sum_{i \in I} a_i \right| = |S|$ .

Pour  $\epsilon > 0$ , on choisit  $J_\epsilon \in \mathcal{P}_f(I)$  tel que pour tout  $K \in \mathcal{P}_f(I)$ ,  $K \supset J_\epsilon$  :

$$\left| |S| - \left| \sum_{i \in K} a_i \right| \right| \leq \left| S - \sum_{i \in K} a_i \right| < \epsilon$$

Ce qui permet de conclure :

$$M = |S|$$

### 35.31 Associativité pour les familles sommables

#### Théorème 35.31

Soit  $(I_k)_{k \in K}$  un recouvrement disjoint de  $I$ . Soit  $a = (a_i)_{i \in I}$  une famille de réels ou de complexes. Alors  $a$  est sommable si et seulement si chaque  $(a_i)_{i \in I_k}$  est sommable de somme  $s_k$  et de somme absolue  $t_k$  et si la famille  $(t_k)_{k \in K}$  est sommable. Dans ce cas,  $(s_k)$  est également sommable et

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} s_k = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i$$

— On traite la sommabilité.

D'après le théorème de sommation par paquets dans le cas positif (35.14) :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} |a_i| = \sum_{k \in K} t_k \text{ (notations (35.31))}$$

i

— Si  $\sum_{i \in I} |a_i| < +\infty$  alors :

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} |a_i| < +\infty$$

Donc  $(t_k)$  est sommable.

Et  $(a_i)_{i \in I_k}$  est sommable.

— Si  $(a_i)_{i \in I_k}$  est sommable pour tout  $k \in K$  et  $(t_k)_{k \in K}$  est sommable, alors :

$$\sum_{k \in K} t_k < +\infty$$

Donc :

$$\sum_{i \in I} |a_i| < +\infty$$

#### Théorème 35.33

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  deux familles sommables. Alors  $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{j \in J} b_j \right)$$

### 35.33 Produit de familles sommables

— Sommabilité : On note  $c_{ij} = a_i b_j$  pour tout  $(i, j) \in I \times J$ .

On écrit  $I \times J = \bigsqcup_{i \in I} \{i\} \times J$ .

On pose, pour  $i \in I$  :

$$\begin{aligned} t_i &= \sum_{j \in J} |c_{ij}| \\ &= \sum_{j \in J} |a_i| |b_j| \\ &= |a_i| \times \sum_{j \in J} |b_j| \text{ (presque linéarité)} \\ &< +\infty \text{ ((} b_j \text{) est sommable)} \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} t_i &= \sum_{i \in I} |a_i| \times \underbrace{\left( \sum_{j \in J} \right)}_{\in \mathbb{R}_+} \\ &= \left( \sum_{j \in J} |b_j| \right) \times \sum_{i \in I} |a_i| \\ &< +\infty \end{aligned}$$

D'après le théorème de sommation par paquets (35.31), la famille  $(c_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable.

— Somme :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in I \times J} c_{ij} &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j \quad (35.28) \\ &= \sum_{i \in I} a_i \left( \sum_{j \in J} b_j \right) \\ &= \left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{j \in J} b_j \right) \quad (35.28) \end{aligned}$$

### 35.34 Exemple

#### Exemple 35.34

Montrer que la famille  $\left( \frac{\sin(p+q)}{p^2 q^2} \right)_{p,q \in \mathbb{N}^*}$  est sommable.

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq 1, q \geq 1} \left| \frac{\sin(p+q)}{p^2 q^2} \right| &\leq \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2 q^2} \\ &= \left( \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} \right) \left( \sum_{q \geq 1} \frac{1}{q^2} \right) \quad (\text{Fubini positif}) \\ &= \zeta(2)^2 \\ &< +\infty \end{aligned}$$

### 35.35 Exemple

#### Exemple 35.35

Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , la famille  $(z^{ij})_{i,j \in \mathbb{N}^*}$  est sommable si et seulement si  $|z| < 1$ .

— Si  $|z| < 1$  :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \geq 1, j \geq 1} |z|^{ij} &= \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} |z|^i |z|^j \text{ (Fubini positif)} \\
 &= \sum_{i \geq 1} |z|^i \frac{1}{1 - |z|^i} \quad (|z|^i \neq 1) \\
 &= \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} \frac{|z|^i}{1 - |z|^i} \\
 &\leq \sum_{i \geq 1} \frac{|z|^i}{1 - |z|} \quad (|z| < 1) \\
 &= \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}
 \end{aligned}$$

— Si  $|z| \geq 1$  :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \geq 1, j \geq 1} |z|^{ij} &= \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} |z|^i |z|^j \\
 &= \sum_{i \geq 1} +\infty \quad (|z|^i \geq 1) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

### 35.36 Exemple

Exemple 35.36

Montrer que  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k \geq n} \frac{1}{k(k+1)} = -\frac{\pi^2}{12}$ .

On note  $(a_{n,k}) = \left( \frac{(-1)^n}{nk(k+1)} \right)_{1 \leq n \leq k}$ .

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq n \leq k} |a_{n,k}| &= \sum_{1 \leq n \leq k} \frac{1}{nk(k+1)} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k \geq n} \frac{1}{k(k+1)} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k \geq n} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \\
 &= \zeta(2) \\
 &< +\infty
 \end{aligned}$$

La famille est donc sommable.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq n \leq k} a_{n,k} &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k \geq n} \frac{1}{k(k+1)} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2} - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \\
 &= \frac{1}{4} \zeta(2) - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \zeta(2) \\
 &= -\frac{\pi^2}{12}
 \end{aligned}$$

### 35.37 Exemple

Exemple 35.37

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $\sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq k+1} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} = -\frac{1}{2}$ .

On note  $(a_{n,k}) = \left( \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} \right)_{1 \leq k \leq n}$ .

On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq k \leq n} |a_{n,k}| &= \sum_{n \geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^n} \text{ (Fubini positif)} \\
 &= \sum_{n \geq 2} \frac{n-1}{2^n} \\
 &< +\infty \text{ (car } \frac{n-1}{2^n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)) \\
 \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq n+1} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} &= \sum_{n \geq 2} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ (Fubini positif)} \\
 &= \sum_{n \geq 2} \frac{1}{2^n} \times (-1) \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

### 35.38 Produit de Cauchy

#### Théorème 35.38

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n$  deux séries absolument convergentes. Soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Alors  $\sum_{n \geq 0} c_n$  est absolument convergente et :

$$\sum_{n \geq 0} c_n = \left( \sum_{n \geq 0} a_n \right) \left( \sum_{n \geq 0} b_n \right)$$

La famille des  $(a_i b_j)_{i \geq 0, j \geq 0}$  est sommable (35.38).

D'après le théorème de sommation par paquets :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n \geq 0} a_n \right) \left( \sum_{n \geq 0} b_n \right) &= \sum_{i \geq 0, j \geq 0} a_i b_j \quad (35.33) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i+j=n} a_i b_j \\ &= \sum_{n \geq 0} c_n \end{aligned}$$

### 35.39 Exemple

#### Exemple 35.39

Montrer que pour tout  $x \in ]-1; 1[$ ,  $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ .

Soit  $|x| < 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x} \\ &= \left( \sum_{k \geq 0} x^k \right) \left( \sum_{k \geq 0} x^k \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n x^k x^{n-k} \quad (\text{produit de Cauchy}) \\ &= \sum_{n \geq 0} (n+1) x^n \end{aligned}$$

### 35.41 Convergence de la série exponentielle

#### Théorème 35.41

La série exponentielle est absolument convergente pour tout paramètre  $z \in \mathbb{C}$ . La somme définit une fonction notée :

$$e(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

Comme pour tout  $n \geq 0, z \neq 0$  :

$$\frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'après la règle d'Alembert, la série est absolument convergente pour tout  $z \neq 0$ .  
Pour  $z = 0, e(0) = 1$ .

### 35.43 Propriété fondamentale de la série exponentielle

#### Théorème 35.43

Soit  $z$  et  $z'$  deux complexes. On a :

$$e(z + z') = e(z)e(z')$$

Produit de Cauchy.

### 35.46 Corollaire

#### Corollaire 35.46

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on a  $e(z) = e^z$ , soit :

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} e(z) &= e(x + iy) \\ &= e(x)e(iy) \quad (35.43) \\ &= e(x) \sum_{n \geq 0} \frac{(iy)^n}{n!} \quad (35.45) \\ &= e^x \left( \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \\ &= e^x (\cos(y) + i \sin(y)) \quad (35.45) \\ &= e^x e^{iy} \\ &= e^z \end{aligned}$$