Chapitre 32

Espaces probabilisés finis

32.19 Exemple

Exemple 32.19

Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On en tire simultanément 4 boules. Avec quelle probabilité n'a-t-on tiré que des boules noires ?

Sans perte de généralité, on peut numéroter les boules de 1 à 8, les 3 premières boules sont blanches et les 5 suivantes noires.
On note X la variable alétoire donnant la 4-combinaison des boules obtenues.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(P_4[\![1,8]\!])$$

En notant A "on ne tire que des boules noires", on a :

$$\begin{aligned} A &= (X \in P_4[\![4,8]\!]) \\ P(A) &= P(X \in P_4[\![4,8]\!]) \\ &= \frac{|P_4[\![4,8]\!]|}{|P_4[\![1,8]\!]|} \\ &= \frac{\binom{5}{4}}{\binom{8}{4}} \end{aligned}$$

32.25 Exemple

Exemple 32.25

On choisit un entier X au hasard entre -3 et 3. Quelle est la loi de la variable X^2+1 ?

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![-3,3]\!])$$

$$(X^2+1)(\omega) = \{1,2,5,10\}$$

Et :

$$\begin{aligned} P(X^2+1=1) &= P(X=0) \\ &= \frac{1}{7} \\ P(X^2+1=2) &= P(X=-1)+P(X=1) \\ &= \frac{2}{7} \\ P(X^2+1=5) &= P(X=-2)+P(X=2) \\ &= \frac{2}{7} \\ P(X^2+1=10) &= P(X=-3)+P(X=3) \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

32.26 Exemple

Exemple 32.26

On choisit un entier X au hasard entre 1 et $2n$. Quelle est la loi de $(-1)^X$?

$$\begin{aligned} X &\hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2n \rrbracket) \\ (-1)^X &\hookrightarrow \{-1, 1\} \\ P((-1)^X = 1) &= P(X \text{ pair}) \\ &= \frac{n}{2n} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= P((-1)^X = -1) \end{aligned}$$

32.28 Définition implicite d'un espace probabilisé par la donnée d'une loi de variable aléatoire

Théorème 32.28

Soit $E = \{x_1, \dots, x_r\}$ un ensemble et $p_1, \dots, p_r \in [0, 1]$ des réels pour lesquels $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$. Il existe alors un espace probabilisé (Ω, P) et une variable aléatoire X sur Ω, d'image E, pour lesquels pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$:

$$P(X = x_i) = p_i$$

$$\omega = E \text{ et } X = \text{id}$$

On applique (32.12) pour avoir l'existence de P.

32.30 Probabilité conditionnelle

Théorème 32.30

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ pour lequel $P(B) > 0$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, le réel

$$P(A \mid B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

est appelé la probabilité conditionnelle de A sachant B. L'application P_B est alors une probabilité sur Ω, appelée sa probabilité conditionnelle sachant B.

—

$$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

—

$$\begin{aligned} P_B(A \sqcup C) &= \frac{P(B \cap (A \sqcup C))}{P(B)} \\ &= \frac{P(B \cap A) \sqcup (B \cap C))}{P(B)} \\ &= \frac{P(B \cap A)}{P(B)} + \frac{P(B \cap C)}{P(B)} \\ &= P_B(A) + P_B(C) \end{aligned}$$

32.31 Formule des probabilités totales

Théorème 32.31

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $\{A_1, \ldots, A_n\}$ un système complet d'événements de Ω de probabilités strictement positives. Alors, pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) P\left(A_i\right)$$

Soit $B \in P(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) \\ &= P(B \cap \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i) \\ &= P(\bigsqcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i) \end{aligned}$$

Avec $P(A_i) > 0$ pour définir les probabilités conditionnelles.

32.32 Exemple

Exemple 32.32

Dans une classe de 40 étudiants (25 filles et 15 garçons), le professeur principal se propose de désigner brutalement deux délégués provisoires. Il prend une liste de la classe, ferme les yeux et pointe au hasard un premier nom avec la pointe du stylo puis de même avec un deuxième. Avec quelle probabilité le deuxième nom tiré est celui d'un garçon ?

On note G_i : "le i-ème nom tiré est celui d'un garçon".
$\{G_1, \overline{G_1}\}$ forme un système complet d'évènements de probabilités strictement positives.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_2 \mid G_1) \times P(G_1) + P(G_2 \mid \overline{G_1}) \times P(\overline{G_1}) \\ &= \frac{14}{39} \times \frac{3}{8} + \frac{15}{39} \times \frac{5}{8} \end{aligned}$$

32.33 Formule de Bayes

Théorème 32.33

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ pour lequel $P(B) > 0$.

1. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, si $P(A) > 0$, alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) P(A)}{P(B)}$$

2. Soit $\{A_1, \ldots, A_n\}$ un système complet d'événements de Ω de probabilités strictement positives. Alors

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_B\left(A_j\right) = \frac{P_{A_j}(B) P\left(A_j\right)}{\sum\limits_{i=1} P_{A_i}(B) P\left(A_i\right)}$$

1.
$$P(A)P(B) = P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$$

2.
$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum\limits_{i=1} P(A_i)P(B \mid A_i)} \text{ (probas totales)}$$

32.35 Exemple

Exemple 32.35

Juge au tribunal, je dois juger de la culpabilité d'une compagnie de taxis bleus. Un soir de brouillard, un taxi a percuté un piéton qui traversait la rue dans son bon droit, puis a pris la fuite. Un témoin affirme que le taxi était bien bleu et c'est sur la base de ce témoignage que le procès a été instruit. Or dans la ville, deux compagnies de taxis se partagent le marché. La compagnie des taxis bleus et la compagnie des taxis verts. Toutefois, les taxis vert dominent le marché au sens où 90% des taxis dans la ville sont verts. On demande au témoin d'effectuer des tests de reconnaissance des couleurs pour mesurer la fiabilité de son témoignage. Il s'avère qu'il est fiable dans 90% des cas pour la couleur bleue et 80% des cas pour la couleur verte. Dois-je condamner ou non la compagnie des taxis bleus ?

— On note B : "le taxi coupable est bleu"
— On note T_B : "le témoin pense que le taxi coupable est bleu"

On souhaite calculer $P(B \mid T_B)$.

— $P(B) = 0.1$
— $P(T_B \mid B) = 0.9$
— $P(\overline{T_B} \mid \overline{B}) = 0.8$

On a :

$$\begin{aligned}
P(B \mid T_B) &= \frac{P(T_B \mid B) \times P(B)}{P(T_B \mid B)P(B) + P(T_B \mid \overline{B})P(\overline{B})} \\
&= \frac{0.9 \times 0.1}{0.9 \times 0.1 + (1 - 0.8) \times 0.9} \\
&= \frac{9}{9 + 2 \times 9} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

32.37 Formule des probabilités composées

Théorème 32.37

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ pour lesquels $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, alors :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \dots \times P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} P(A_k \mid A_1 \dots A_{k-1}) &= \prod_{k=1}^{n} \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap A_k)}{p(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})} \\
&= P(A_1 \cap \dots \cap A_n)
\end{aligned}$$

32.43 Indépendance et complémentarité

Théorème 32.43

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$. Si $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, les évènements $A_1^0, \dots, A_n^0$ le sont aussi, pour tout $A_1^0 \in \{A_1, \overline{A_1}\}, \dots, A_n^0 \in \{A_n, \overline{A_n}\}$.

- On s'occupe du cas $n = 2$.
  On généralise ensuite par récurrence.
- Soit A, B deux évènements indépendants.

$$\begin{aligned}
P(A \cap \overline{B}) &= P(A \setminus B) \\
&= P(A) - P(A \cap B) \\
&= P(A) - P(A)P(B) \\
&= P(A)(1 - P(B)) \\
&= P(A)P(\overline{B})
\end{aligned}$$

Donc A et $\overline{B}$ sont indépendants.

32.44 Exemple

Exemple 32.44

Le concept d'indépendance va maintenant nous permettre de définir une loi usuelle très importante en pratique : la loi binomiale. Intéressons-nous pour cela à la répétition n fois indépendamment d'une expérience aléatoire à deux issues, disons « favorable » et « défavorable » de probabilité p pour la première. Quelle est la loi du nombre X d'issues favorables ?

$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
Pour tout $i \in [\![1, n]\!], F_i$: "la i-ème issue est favorable".
Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
(X = k) &= \bigsqcup_{I \in P_k([\![1,n]\!])} \left(\bigcap_{i \in I} F_i \bigcap_{i \notin I} \overline{F_i} \right) \\
P(X = k) &= \sum_{I \in P_k([\![1,n]\!])} P\left(\bigcap_{i \in I} F_i \cap \bigcap_{i \notin I} \overline{F_i} \right) \\
&= \sum_{I \in P_k([\![1,n]\!])} \prod_{i \in I} P(F_i) \prod_{i \notin I} P(\overline{F_i}) \text{ (indépendance)} \\
&= \sum_{I \in P_k([\![1,n]\!])} p^{|I|}(1-p)^{n-|I|} \\
&= p^k (1-p)^{n-k} |P_k([\![1,n]\!])| \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

32.48 Exemple

Exemple 32.48

On lance 5 fois un dé équilibré à 6 faces dont 2 blanches et 4 noires. Avec quelle probabilité obtient-on exactement 3 fois une face noire ?

Soit X le nombre de faces noires obtenues.
$X \hookrightarrow \mathcal{B}(5, \frac{4}{6})$.

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

32.50 Une propriété des couples de variables aléatoires indépendantes

Théorème 32.50

Soit $(\ \Omega, P\ )$ un espace probailisé fini et X et Y deux variables aléatoires sur Ω. Si X et Y sont indépendantes, alors pour toute parties A de $X(\Omega)$ et B de $Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendantes, i.e. :

$$P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

$A = \{a_1, \dots, a_n\}, B = \{b_1, \dots, b_m\}$.

$$\begin{aligned} P(X \in A \text{ et } Y \in B) &= P\left(\bigsqcup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} (X = a_i) \text{ et } (Y = b_j)\right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} P(X = a_i \text{ et } Y = b_j) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} P(X = a_i) P(Y = b_j) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} P(X = a_i) \sum_{1 \leq j \leq p} P(Y = b_j) \\ &= P(X \in A) P(Y \in B) \end{aligned}$$

32.51 Exemple

Exemple 32.51

On lance un dé à 6 faces 2 fois et on note X_1 (resp. X_2) la face obtenue au premier (resp. au second) lancer. Avec quelle probabilité obtient-on els deux fois une face impaire ?

X_1 et X_2 sont indépendants.

$$\begin{aligned} P(X_1 \text{ et } X_2 \text{ impairs}) &= P(X_1 \text{ impair}) \times P(X_2 \text{ impair}) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

32.53 Exemple

Exemple

Soit $(p_1, \dots, p_n) \in [0; 1]^n$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(p_1), \dots, \mathcal{B}(p_n)$, alors $X_1 \times \dots \times X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p_1 \times \dots \times p_n)$.

$X_i \hookrightarrow \mathbb{B}(p_i) : P(X_i = 1) = p_i$ $(P(X_i = 0) = 1 - p_i)$.
$(X_1 \times \dots \times X_n)(\Omega) = P(X_1 = 1 \text{ et } \cdots \text{ et } X_n = 1)$.

$$\begin{aligned} P(X_1 \cdots X_n = 1) &= P(X_1 = 1 \text{ et } \cdots \text{ et } X_n = 1) \\ &= \prod_{k=1}^{n} (X_k = 1) \\ &= \prod_{k=1}^{n} p_k \end{aligned}$$

32.54 Exemple

Exemple 32.54

Un jeu de 32 cartes a été malicieusement truqué. On y a remplacé une autre carte que l'as de pique par un deuxième as de pique. On répète n fois avec remise l'expérience consistant à tirer 4 cartes. À partir de quelle valeur de n la probabilité de déceler la supercherie est-elle supérieure ou égale à 0.9 ?

Soit X la variable aléatoire donnant la 4-combinaison de cartes. On peut numéroter les cartes de 1 à 32, où 1 et 2 sont les as de pique.
$X \hookrightarrow \mathcal{U}(P_4[\![1, 32]\!])$.
On a :

$$\begin{aligned} P(\{1,2\} \subset X) &= \frac{\binom{32}{2}}{\binom{32}{4}} \\ &= \frac{29 \times 30}{2} \times \frac{4!28!}{32!} \\ &= \frac{3}{248} \end{aligned}$$

Sur n tirages successifs. La probabilité p de déceler la supercherie est :

$$p = 1 - \left(\frac{245}{248}\right)^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned} p \geq 0.9 &\Leftrightarrow \left(\frac{245}{248}\right)^n \leq 0.1 \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0.1}{\ln 245 - \ln 248} \end{aligned}$$

32.55 Indépendance des images de variables aléatoires indépendantes par des fonctions

Théorème 32.55

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, E et F deux ensembles, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur Ω et $f : (X_1, \dots, X_m)(\Omega) \to E$ et $g : (X_{m+1}, \dots, X_n)(\Omega) \to F$ deux fonctions. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

On prouve le théorème dans le cas X, Y indépendantes.
Soit $f : X(\Omega) \to E$ et $g : Y(\Omega) \to F$.
Soit $a \in f \circ X(\Omega)$ et $b \in g \circ Y(\Omega)$.

$$\begin{aligned} P(f \circ X = a \text{ et } g \circ Y = b) &= P(X \in f^{-1}(\{a\})) \text{ et } Y \in g^{-1}(\{b\})) \\ &= P(X \in f^{-1}(\{a\})) \times P(Y \in g^{-1}(\{b\})) \\ &= P(f \circ X = a) \times P(g \circ Y = b) \end{aligned}$$

32.61 Calcul des lois marginales à partir de la loi conjointe

Théorème 32.61

Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω. La loi conjointe $P_{(X,Y)}$ du couple (X, Y) détermine entièrement ses lois marginales P_X et P_Y. Plus précisément, pour tout $x \in X(\Omega)$

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y)$$

et pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y)$$

Soit $x \in X(\Omega)$. On a :

$$(X = x) = \bigsqcup_{y \in Y(\Omega)} (X = x \text{ et } Y = y)$$

Donc :

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y)$$

32.63 Loi uniforme et produit cartésien

Théorème 32.63

Soit E et F deux ensembles finis et X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{U}(E \times F)$;
2. X et Y sont indépendantes et $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(F)$.

Cet énoncé se généralise sans difficulté au cas d'un nombre fini de variables aléatoires.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

On suppose que $(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{U}(E \times F)$.
Soit $x \in X(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
P(X = x) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y) \text{ (32.61)} \\
&= \sum_{y \in Y(\Omega)} \frac{1}{|E \times F|} \\
&= |F| \times \frac{1}{|E \times F|} \\
&= \frac{1}{|E|}
\end{aligned}$$

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$.
De la même manière, $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(F)$.
Comme :

$$\begin{aligned}
\forall (x, y) \in E \times F, P(X = x \text{ et } Y = y) &= \frac{1}{|E \times F|} \\
&= \frac{1}{|E|} \times \frac{1}{|F|} \\
&= P(X = x) \times P(Y = y)
\end{aligned}$$

Donc X et Y sont indépendantes.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$
Soit $(x, y) \in E \times F$.

$$\begin{aligned} P(X = x \text{ et } Y = y) &= P(X = x) \times P(Y = y) \text{ (indépendance)} \\ &= \frac{1}{|E|} \times \frac{1}{|F|} \\ &= \frac{1}{|E \times F|} \end{aligned}$$

Donc $(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{U}(E \times F)$.

32.66 Exemple

Exemple 32.66

On lance deux fois un dé équilibré à 6 faces. La valeur obtenue au premier (resp. deuxième) lancer est notée X_1 (resp X_2). Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$, mais on pourrait dire de façon équivalente, comme nous l'avons vu plus haut, que le couple (X_1, X_2) suit la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]^2$. Déterminer la loi de la somme $S = X_1 + X_2$, la loi conditionnelle de X_1 sachant $(S = 4)$ et la loi de l'écart $E = |X_1 - X_2|$.

$S(\Omega) = [\![2, 12]\!]$.
Soit $i \in [\![2, 12]\!]$.

$$\begin{aligned} P(S = i) &= P(X_1 + X_2 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{i} P(X_1 = k \text{ et } X_2 = i - k) \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} P(X_1 = k)P(X_2 = i - k) \\ &= \sum_{k=\max(1,i-6)}^{\min(i-1,6)} P(X_1 = k)P(X_2 = i - k) \\ &= \min(i - 1, 6) - \max(1, i - 6) \end{aligned}$$

Soit $j \in [\![1, 6]\!]$.

$$\begin{aligned} P(X_1 = 4 \mid S = 4) &= P(X_1 = 5 \mid S = 4) = P(X_1 = 6 \mid S = 4) = 0 \\ P(X_1 = j \mid S = 4) &= \frac{P(X_1 = j \text{ et } S = 4)}{P(S = 4)} \\ &= \frac{P(X_1 = j \text{ et } X_2 = 4 - j)}{P(S = 4)} \\ &= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3-1+1}{36}} \\ &= \frac{1}{3} \\ E(\Omega) &= [\![0, 5]\!] \\ P(E = 0) &= \sum_{k=1}^{n} P(X_1 = X_2 = k) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

etc.

32.67 Exemple

Exemple 32.67

Dans un centre d'appel, un employé effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts dont chacun décroche avec une probabilité p.

- On note N_1 le nombre de correspondants qui ont décroché. Quelle est donc la loi de N_1 ? Réponse sans calcul : $N_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ car les appels sont indépendants et la probabilité d'obtenir un correspondant ne dépend pas du correspondant choisi.
- L'employé rappelle un peu plus tard les $n - N_1$ correspondants qui n'ont pas décroché lors de sa première série d'appels. On note N_2 le nombre de ces correspondants qui décrochent cette fois et N le nombre total des correspondants qui ont décroché. Quelle est la loi de N ?

$N_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
$(N_2 \mid N_1 = k) \hookrightarrow \mathcal{B}(n-k,p)$.
$N(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
Soit $i \in [\![0,n]\!]$.

$$\begin{aligned}
P(N=i) &= \sum_{k=0}^{n} P(N_2 = i \mid N_1 = k)P(N_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{i} P(N_2 = i-k \text{ et } N_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{i} P(N_2 = i-k \mid N_1 = k)P(N_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{i} \binom{n-k}{i-k} p^{i-k}(1-p)^{n-i} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{i} \binom{n-k}{i-k}\binom{n}{k} p^i (1-p)^{2n-i-k} \\
&= \sum_{k=0}^{i} \frac{(n-k)!}{(n-i)!(i-k)!}\,\frac{n!i!}{k!(n-k)!i!} p^i (1-p)^{2n-i-k} \\
&= \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}\binom{n}{i} p^i (1-p)^{2n-i-k} \\
&= \binom{n}{i} p^i (1-p)^{2i} \sum_{k=0}^{n} \binom{i}{k} \left(\frac{1}{1-p}\right)^k \\
&= \binom{n}{i} p^i (1-p)^{2n-i} \left(1 + \frac{p}{1-p}\right)^i \\
&= \binom{n}{i} \frac{p^i (i-p)^{2n-1}(2-p)^i}{(1-p)^i} \\
&= \binom{n}{i} (p^2 + 2p)^i (1 - 2p + p^2)^{n-i}
\end{aligned}$$

$N \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 2p - p^2)$.

32.68 Somme de variables aléatoires indépendantes de lois binomiales

Théorème 32.68

Soit $p \in [0;1]$ et n et m deux entiers naturels non nuls et $X, Y, X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini.

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et si X et Y sont indépendantes alors
$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p)$$
2. Si pour tout $i \in [\![1,n]\!], X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$$

1. $(X+Y)(\Omega) = [\![0, n+m]\!]$.
   Soit $k \in [\![0, n+m]\!]$.
$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X=i \text{ et } Y=k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) \text{ (indépendance)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} \binom{n}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-k+i} \end{aligned}$$
   $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= p^k(1-p)^{m+n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} \\ &= p^k(1-p)^{m+n-k} \binom{m+n}{k} \text{ (Vandermonde)} \end{aligned}$$
   Donc $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p)$.
2. Si $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$ et on conclut avec $\boxed{1.}$.

32.69 Existence d'une famille finie de variables aléatoires de lois prescrites

Théorème 32.69

Soit $E = \{x_1, \dots, x_r\}$ et $F = \{y_1, \dots, y_s\}$ deux ensembles et $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s$ des réels de $[0;1]$ pour lesquels
$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{s} q_i = 1$$
Il existe alors un espace probabilisé (Ω, P) et des variables aléatoires indépendantes X et Y sur Ω pour lesquelles pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ et tout $j \in [\![1,s]\!], P(X=x_i) = p_i$ et $P(Y=y_j) = q_j$. Cet énoncé se généralise sans difficulté au cas d'un nombre fini de variables aléatoires.

On remarque que $(I = [\![1,r]\!], J = [\![1,s]\!])$.
$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)\in I\times J} p_i q_j &= \left(\sum_{i=1}^{r} p_i\right)\left(\sum_{j=1}^{s} q_j\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'après (32.28), il existe $z : \Omega \to E \times F$ tel que :

$$\forall (i,j) \in I \times J, P(z = x_i y_j) = p_i q_j$$

En notant $z = (X, Y)$, on vérifie :

$$\begin{aligned}
\forall i \in I, P(X = x_i) &= \sum_{j=1}^{s} P(X = X_i \text{ et } Y = y_j) \\
&= \sum_{j=1}^{s} P(z = (x_i, y_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{s} p_i q_j \\
&= p_i \sum_{j=1}^{s} q_j \\
&= p_i
\end{aligned}$$