

# Chapitre 30

## Déterminant

<b>30 Déterminant</b>	<b>1</b>
30.4 Exemple	2
30.11 Détermination d'une application $n$ -linéaire sur une base	2
30.18 Caractérisation par les transpositions	2
30.19 Une forme alternée change de signe par transposition	3
30.21 Image d'une famille liée par une forme alternée	3
30.22 Forme $n$ -linéaire d'un espace de dimension $n$	4
30.25 Exemple	4
30.26 Description du déterminant par les coordonnées	5
30.28 Effet d'un changement de base sur le déterminant	5
30.30 Caractérisation des bases par le déterminant	5
30.36 Déterminant d'un produit	6
30.40 Expression des déterminants classiques	6
30.41 Invariance du déterminant par transposée	7
30.42 Déterminant d'un endomorphisme	7
30.44 Déterminant et conjugaison	7
30.45 Déterminant d'une matrice triangulaire	7
30.47 Déterminant des matrices de codage des opérations	8
30.50 Exemple	8
30.51 Exemple	9
30.52 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs	10
30.57 Exemple	11
30.58 Développement suivant une colonne	11
30.59 Développement selon une ligne	12
30.61 Expression de l'inverse de la comatrice, Cayley	13
30.63 Cramer	13
30.64 Exemple	14
30.71 Déterminant de Vandermonde	15

## 30.4 Exemple

### Exemple 30.4

On considère l'application :

$$\delta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}; ((a, b), (c, d)) \mapsto ad - bc$$

Montrer que cette application est bien 2-linéaire.

$$\begin{aligned} \delta \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \right) &= \delta \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c + \lambda c' \\ d + \lambda d' \end{pmatrix} \right) \\ &= a(d + \lambda d') - b(c + \lambda c') \\ &= ad - bc + \lambda(ad' - bc') \\ &= \delta \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) + \lambda \delta \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

## 30.11 Détermination d'une application n-linéaire sur une base

### Proposition 30.11

Soit pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d_i}$  une base de  $E_i$  et pour tout  $(j_1, \dots, j_n) \in \llbracket 1, d_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, d_n \rrbracket$ ,  $f_{j_1, \dots, j_n} \in F$ .

Alors il existe une unique application  $n$ -linéaire  $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$  telle que :

$$\forall (j_1, \dots, j_n) \in \llbracket 1, d_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, d_n \rrbracket, \varphi(e_{1,j_1}, \dots, e_{n,j_n}) = f_{j_1, \dots, j_n}$$

Si  $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d_i}$  est une base de  $E_i$  alors  $((e_{1,2}, 0, \dots, 0, \dots, e_{1,d}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, e_{n,1}, \dots, (0, \dots, 0, e_{n,d})))$  est une base de  $E_1 \times \dots \times E_n$ . (22.16), théorème de rigidité.

## 30.18 Caractérisation par les transpositions

### Lemme 30.18

Pour qu'une forme  $f$  soit antisymétrique, il faut et il suffit que l'échange de deux variables quelconques provoque un changement de signe.

Par hypothèse, si  $\tau$  est une transposition alors  $\varphi(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n}) = -\varepsilon(\tau)\varphi(x_1, \dots, x_n)$ .  
Soit  $\sigma \in S_n$ . On écrit  $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$  avec  $\tau_i$  des transpositions. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}) &= \varphi(x_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(n)}) \\ &= \varepsilon(\tau_1) \varphi(x_{\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(n)}) \\ &= \varepsilon(\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k) \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \varepsilon(\sigma) \varphi(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

### 30.19 Une forme alternée change de signe par transposition

#### Lemme 30.19

Soit  $\varphi$  une forme alternée. Alors pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  et tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  avec  $i \neq j$  :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Cela revient à dire que pour toute transposition  $\tau \in S_n$ , on a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = -\varepsilon(\tau)\varphi(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n})$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite et si  $\mathbb{K}$  n'est pas de caractéristique 2, alors  $\varphi$  est alternée.

Soit  $\varphi$  alternée.

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_j + x_i, \dots, x_n) \\ &= \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &\quad + \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ &\quad + \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &\quad + \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &= \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) + \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

On suppose que  $\text{carac}(\mathbb{K}) \neq 2$ .

On a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \text{ (antisymétrie)}$$

Donc :

$$2\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

Donc :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

### 30.21 Image d'une famille liée par une forme alternée

#### Proposition 30.21

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille liée et  $\varphi$  une forme alternée. Alors :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée, alors on peut écrire par exemple :

$$x_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i x_i$$

Donc :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n) &= \varphi\left(\sum_{i=2}^n \lambda_i x_i, x_2, \dots, x_n\right) \\ &= \sum_{i=2}^n \lambda_i \varphi(x_i, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

### 30.22 Forme $n$ -linéaire d'un espace de dimension $n$

#### Théorème 30.22

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  non nulle et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

1. Il existe une unique forme  $n$ -linéaire  $\varphi$  sur  $E$  telle que  $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$ .
2. Cette forme  $n$ -linéaire est entièrement décrite sur les vecteurs de la base par :

$$\begin{cases} \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0 & \text{s'il existe } j \neq k \text{ tel que } i_j = i_k \\ \varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) & \text{où } \sigma \in \mathcal{S}_n \end{cases}$$

3. Toute autre forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  est de la forme  $\lambda\varphi$ , où  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

1, 2

On utilise le théorème de rigidité des applications  $n$ -linéaires (30.11) en fixant l'image de chaque  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$  avec  $(i_1, \dots, i_n) \in \llbracket 1, n \rrbracket^n$ .

- $\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$  s'il existe  $i_j = i_k$  avec  $j \neq k$ .
- $\varphi(\underbrace{e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}}_{(i_1, \dots, i_n) \text{ fournit alors une permutation } \sigma \in \mathcal{S}_n}) = \varepsilon(\sigma) \times \underbrace{1}_{\varphi(e_1, \dots, e_n)}$ .

Le théorème nous fournit l'existence de la forme alternée et l'unicité.

3

Soit  $\psi$  une forme  $n$ -linéaire alternée. On pose  $\lambda = \psi(e_1, \dots, e_n)$ .

- si  $\lambda = 0$ , par alternance (et antisymétrie) on a  $\psi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$  pour tout  $i_1, \dots, i_n$ .  
Par rigidité,  $\psi = 0 = 0 \times \varphi$ .
- si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\frac{1}{\lambda}\psi(e_1, \dots, e_n) = 1$ .  
Par unicité (1),  $\frac{1}{\lambda}\psi = \varphi$ .  
Donc  $\psi = \lambda\varphi$ .

### 30.25 Exemple

#### Exemple 30.25

On considère  $E = \mathbb{R}^2$ , muni de sa base canonique  $e = (e_1, e_2) = ((1, 0), (0, 1))$ . Soit  $((a, b), (c, d)) \in E^2$ .  
Montrer que :

$$\det_e((a, b), (c, d)) = ad - bc$$

$e = ((1, 0), (0, 1))$ .  
 $((a, b), (c, d)) \in (E)^2$ .

$$\begin{aligned} \det_e((a, b), (c, d)) &= \det_e(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\ &= ac \times \cancel{\det_e(e_1, e_1)} + ad \times \det_e(e_1, e_2) + bc \times \det_e(e_2, e_1) + bd \times \cancel{\det_e(e_2, e_2)} \\ &= ad \times \det_e(e_1, e_2) - bc \times \det_e(e_1, e_2) \\ &= (ad - bc) \end{aligned}$$

### 30.26 Description du déterminant par les coordonnées

#### Théorème 30.26

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  non nulle et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille d'éléments de  $E$ , dont les coordonnées sont :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i \quad \text{donc} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)}$$

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) &= \det_{\mathcal{B}} \left( \sum_{i=1}^n a_{i,1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n} e_{i_n} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \quad (\text{multilinéarité}) \\ &= \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} = \llbracket 1, n \rrbracket} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \quad (\text{alternance}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})}_{=\varepsilon(\sigma)} \quad (\text{reformulation}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)} \end{aligned}$$

### 30.28 Effet d'un changement de base sur le déterminant

#### Proposition 30.28

Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Alors :

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}}$$

D'après le corollaire (30.27), on écrit :

$$\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

En particulier :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda$$

### 30.30 Caractérisation des bases par le déterminant

#### Proposition 30.30

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  non nulle, muni d'une base  $\mathcal{B}$ . Une famille  $\mathcal{F}$  de cardinal  $n$  est une base si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$ .

D'après (30.29), si  $\mathcal{F}$  est une base alors  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$ .

Si  $\mathcal{F}$  n'est pas une base, alors elle est liée ( $|\mathcal{F}| = n$ )

Donc  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$  (30.21).

### 30.36 Déterminant d'un produit

#### Théorème 30.36

Soit  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(BA)$$

Soit  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $A_1, \dots, A_n$  les colonnes de  $A$  et  $B_1, \dots, B_n$  les colonnes de  $B$ .  
On considère l'application :

$$\varphi : (\mathbb{K}^n)^n \rightarrow \mathbb{K}; (X_1, \dots, X_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}_C}(AX_1, \dots, AX_n)$$

$\varphi$  est une forme  $n$ -linéaire alternée.

On choisit donc  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}_C}$ . On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{B}_C) &= \lambda \det_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_C) \\ &= \lambda \\ &= \det_{\mathcal{B}_C} \left( A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det_{\mathcal{B}_C}(A_1, \dots, A_n) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

Ainsi  $\varphi = \det(A) \det_{\mathcal{B}_C}$ .

Donc :

$$\begin{aligned} \det(A) \det(B) &= \det(A) \det_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n) \\ &= \varphi(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_C}(AB_1, \dots, AB_n) \\ &= \det(AB) \end{aligned}$$

### 30.40 Expression des déterminants classiques

#### Proposition 30.40

1. On a :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Soit : diagonales descendantes moins les diagonales ascendantes.

2.  $\mathcal{S}_3 = \{\text{id}, (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2), (1 \ 2), (1 \ 3), (2 \ 3)\}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

### 30.41 Invariance du déterminant par transposée

#### Théorème 30.41

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

$$\det({}^t A) = \det(A)$$

RAF avec (30.34)

### 30.42 Déterminant d'un endomorphisme

#### Théorème 30.42

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Le scalaire  $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$  ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$  choisie. On appelle ce scalaire **déterminant de  $f$**  et est noté  $\det(f)$ .

Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases de  $E$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$  sont semblables, donc elles ont le même déterminant (30.37).

### 30.44 Déterminant et conjugaison

#### Proposition 30.44

Soit  $\psi : E \rightarrow F$  un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension finie non nulles et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$$\det(\underbrace{\psi \circ u \circ \psi^{-1}}_{\in \mathcal{L}(F)}) = \det(u)$$

Soit  $e$  une base de  $E$  et  $f$  une base de  $F$ .

$$\begin{aligned} \det(\psi \circ u \circ \psi^{-1}) &= \det(\text{Mat}_f(\psi \circ u \circ \psi^{-1})) \quad (30.42) \\ &= \det(\text{Mat}_{e,f}(\psi) \times \text{Mat}_e(u) \times \text{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})) \quad (28.42) \\ &= \det(\text{Mat}_{e,f}(\psi)) \times \det(\text{Mat}_e(u)) \times \det(\text{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})) \quad (30.36) \\ &= \det(\underbrace{\text{Mat}_{\psi} \times \text{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})}_{I_n}) \times \det(\text{Mat}_e(u)) \quad (30.36) \\ &= \det(\text{Mat}_e(u)) \end{aligned}$$

### 30.45 Déterminant d'une matrice triangulaire

#### Proposition 30.45

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Soit  $T$  une matrice triangulaire supérieure (on passe à la transposée sinon).  
Ainsi :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i > j \Rightarrow t_{i,j} = 0$$

D'après la formule sur les coefficients (30.34) :

$$\begin{aligned}
 \det(T) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n t_{\sigma(i),i} \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(i) \leq i \equiv \text{id}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n t_{\sigma(i),i} \\
 &= \sigma(\text{id}) \prod_{i=1}^n t_{ii}
 \end{aligned}$$

### 30.47 Déterminant des matrices de codage des opérations

#### Lemme 30.47

On a :

$$\det(P_{ij}) = -1, \quad \det(Q_i(\lambda)) = \lambda \quad \text{et} \quad \det(R_{ij}(\lambda)) = 1$$

$Q_i(\lambda)$  et  $R_{ij}(\lambda)$  sont triangulaires.

D'après (30.45) :

$$\begin{aligned}
 \det(Q_i(\lambda)) &= \lambda \\
 \det(R_{ij}(\lambda)) &= 1 \\
 \det(P_{ij}) &= \det_{\mathcal{B}_C}(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n) \\
 &= \det_{\mathcal{B}_C}(C_{\tau_{ij}(1)}, \dots, C_{\tau_{ij}(n)}) \text{ où } \tau_{ij} = \begin{pmatrix} i & j \\ & \end{pmatrix} \\
 &= \varepsilon(\tau_{ij}) \det_{\mathcal{B}_C}(C_1, \dots, C_n) \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

### 30.50 Exemple

#### Exemple 30.50

Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

### 30.51 Exemple

Exemple 30.51

Calculer pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_n(a) &= \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1-a & 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix} \\
 &= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (a+n-1)(a-1)^{n-1}
 \end{aligned}$$

### 30.52 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

#### Proposition 30.52

Soit  $T$  une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} A_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

où les  $A_i$  sont des matrices carrées. Alors :

$$\det(T) = \prod_{i=1}^k \det(A_i)$$

On montre le résultat dans le cas où  $T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ .

On généralisera alors par récurrence et transposée.

Soit  $(A_1, \dots, A_n)$  les colonnes de  $A$  et  $(B_1, \dots, B_p)$  les lignes de  $B$ .

On définit :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{K}^n)^n &\rightarrow \mathbb{K} \\ (X_1, \dots, X_n) &\mapsto \begin{vmatrix} X_1 & \cdots & X_n & C \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$\varphi$  est une forme  $n$ -linéaire alternée.

Donc on choisit  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que :

$$\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}_n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{B}_n) &= \lambda \det_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{B}_n) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

On cherche donc :

$$\varphi(\mathcal{B}_n) = \begin{vmatrix} 1 & & C \\ & \ddots & \\ & & B \end{vmatrix}$$

On définit :

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{K}^p)^p &\rightarrow \mathbb{K} \\ (Y_1, \dots, Y_p) &\mapsto \begin{vmatrix} 1 & & C \\ & \ddots & \\ & & 1 & Y_1 \\ & & & \vdots \\ & & & Y_p \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$\psi$  est une forme  $p$ -linéaire alternée donc on choisit  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que :

$$\psi = \alpha \det_{\mathcal{B}_p}$$

On a :

$$\begin{aligned} \alpha &= \psi(\mathcal{B}_p) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & 1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\psi = \det_{\mathbb{B}_p}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lambda &= \varphi(\mathcal{B}_n) \\ &= \psi(B_1, \dots, B_p) \\ &= \det(B) \end{aligned}$$

Donc :

$$\varphi = \det(B) \times \det_{\mathcal{B}_n}$$

Donc :

$$\varphi(A_1, \dots, A_n) = \det(B) \det_{\mathcal{B}_n}(A_1, \dots, A_n)$$

Soit :

$$\det(T) = \det(B) \det(A)$$

### 30.57 Exemple

#### Exemple 30.57

Déterminer la comatrice de  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

$$\Delta_{11}(M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$\Delta_{12}(M) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_{13}(M) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_{21}(M) = \dots$$

$$\text{Com}(M) = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

### 30.58 Développement suivant une colonne

#### Théorème 30.58

Soit  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} m_{ij} \Delta_{ij}(M)$$

On note  $(E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

On note  $M_1, \dots, M_n$  les colonnes de  $M$ .

Par hypothèses :

$$M_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} E_i$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det_{\mathcal{B}_C}(M_1, \dots, M_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_C} \left( M_1, \dots, \sum_{i=1}^n m_{ij} E_i, \dots, M_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^n m_{ij} \det_{\mathcal{B}_C}(M_1, \dots, E_i, \dots, M_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} m_{ij} \det_{\mathcal{B}_C}(E_i, \dots, M_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} m_{ij} \begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & M_1 & \cdots & M_n \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} m_{ij} \begin{vmatrix} 1 & m_{i1} & \cdots & m_{in} \\ 0 & m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m_{i-1,1} & \cdots & m_{i-1,n} \\ 0 & m_{i+1,1} & \cdots & m_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j+1} m_{ij} \Delta_{ij} \end{aligned}$$

### 30.59 Développement selon une ligne

#### Théorème 30.59

Soit  $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors :

$$\det(M) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} m_{ij} \Delta_{ij}(M)$$

$\det(M) = \det({}^t M)$  et on utilise (30.58).

### 30.61 Expression de l'inverse de la comatrice, Cayley

#### Corollaire 30.61

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

$$M^t \text{Com}(M) = {}^t \text{Com}(M) M \det(M) I_n$$

En particulier,  $M$  est inversible si et seulement si  $\det(M) \neq 0$  et dans ce cas :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t \text{Com}(M)$$

On montre seulement  $M^t \text{Com}(M) = \det(M) I_n$ .

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

$$\begin{aligned} [M^t \text{Com}(M)]_{ij} &= \sum_{j=1}^n M_{ik} [{}^t \text{Com}(M)]_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^n M_{ij} \text{Com}(M)_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n M_{ij} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}(M) \\ &= \det(M) \text{ (formule du développement)} \end{aligned}$$

On suppose que  $i \neq j$ . En reprenant les étapes précédentes :

$$\begin{aligned} [M^t \text{Com}(M)]_{ij} &= \sum_{k=1}^n M_{ik} \text{Com}(M)_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} M_{ik} \Delta_{jk}(M) \end{aligned}$$

On considère le déterminant suivant (on a remplacé la ligne  $j$  par  $i$ ) :

$$\begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & \cdots & m_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & \cdots & m_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{\text{développement de la ligne } j}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} m_{ik} \Delta_{jk}(M)$$

### 30.63 Cramer

#### Corollaire 30.63

Le système  $AX = B$  d'inconnue  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$  admet une unique solution si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ .

Si  $A_1, \dots, A_n$  sont les colonnes de  $A$ , cette solution est donnée par :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = \frac{\det(A_1, \dots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \dots, A_n)}{\det(A)}$$

— Le système admet une unique solution si et seulement si  $A$  est inversible, c'est-à-dire  $\det(A) \neq 0$ .

- On suppose  $A$  inversible. Si  $AX = B$ , alors  $X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{Com}(A)B$ .  
Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

$$\begin{aligned}
 x_k &= X_{k,1} \\
 &= \frac{1}{\det(A)} [{}^t \text{Com}(A)B]_{k,1} \\
 &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^n [{}^t \text{Com}(A)]_{k,i} B_{i,1} \\
 &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^n \text{Com}(A)_{ik} b_i \\
 &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} b_i \Delta_{ik}(A) \\
 &= \frac{\det(A_1, \dots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \dots, A_n)}{\det(A)} \quad (\text{développement de la } k\text{-ième colonne})
 \end{aligned}$$

### 30.64 Exemple

#### Exemple 30.64

Calculer le déterminant de la matrice suivante, avec  $a \neq b$  dans  $\mathbb{K}$  :

$$\begin{pmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

Convention :  $\Delta_1 = a+b$ .

On a  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2$ .

Soit  $n \geq 3$  :

$$\begin{aligned}
 \Delta_n &= (a+b) \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}_{n-1} - b \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & a+b & a & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}_{n-1} \\
 &= (a+b)\Delta_{n-1} - ba\Delta_{n-2}
 \end{aligned}$$

$(\Delta_n)_{n \geq 0}$  vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 - (a+b)r + ab = 0$$

Cette équation admet  $a$  et  $b$  comme racines distinctes.

D'après le cours, on choisit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$  tel que :

$$\forall n \geq 0, \Delta_n = \alpha a^n + \beta b^n$$

Les conditions initiales imposent  $\alpha + \beta = 1$  et  $\alpha a + \beta b = a + b$ .

Donc  $\alpha = \frac{a}{a-b}$  et  $\beta = \frac{b}{b-a}$ .

### 30.71 Déterminant de Vandermonde

#### Proposition 30.71

Le déterminant de Vandermonde est donné par :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Ainsi on retrouve qu'une matrice de Vandermonde est inversible si et seulement si tous les scalaires  $x_1, \dots, x_n$  sont deux à deux distincts.

— S'il existe  $i \neq j$  tel que  $x_i = x_j$  :

$$V(x_1, \dots, x_n) = 0$$

— Supposons désormais que les  $x_i$  sont distincts deux à deux.

On considère :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto V(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

D'après le caractère polynomial du déterminant,  $\varphi$  est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n-1$  et dont le coefficient de degré  $n-1$  est  $V(x_1, \dots, x_{n-1}) \neq 0$  (28.23) (par développement par la dernière colonne).

Or :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \varphi(x_i) = 0$$

D'après le cours sur les polynômes,  $\varphi$  est scindé et :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \varphi(x) = V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i)$$

Donc :

$$V(x_1, \dots, x_n) = V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$$

On termine par récurrence.

La formule reste vraie si les  $x_i$  ne sont pas tous distincts.