

# Maths - MP2I

Axel Montlahuc

2024/2025

<b>1</b>	<b>Calculs Algébriques</b>	<b>12</b>
1.20	Somme des carrés et des cubes . . . . .	13
1.39	Formule de Pascal . . . . .	14
1.41	Formule du capitaine . . . . .	14
1.42	Formule du binôme de Newton . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Logique</b>	<b>16</b>
2.17	Equivalence logiques . . . . .	17
2.17.1	Double négation . . . . .	17
2.17.2	Commutativité . . . . .	17
2.17.3	Associativité . . . . .	17
2.17.4	Loi de Morgan . . . . .	17
2.17.5	Double implication . . . . .	18
2.17.6	Distributivité . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Ensembles et applications</b>	<b>19</b>
3.12	Propriétés du produit cartésien . . . . .	20
3.18	Associativité des relations . . . . .	20
3.20	Propriétés des relations réciproques . . . . .	20
3.23	Composition de fonctions . . . . .	21
3.30	Schémas de raisonnement : montrer l'injectivité/surjectivité/bijektivité . . . . .	21
3.35	Composée d'injections/surjections . . . . .	21
3.36	Condition nécessaire pour une composition injective/surjective . . . . .	22
3.37	Réciproque et bijection . . . . .	22
3.38	Inverse d'une composée de bijections . . . . .	22
3.39	Condition nécessaire et suffisante de bijectivité . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Généralités sur les fonctions</b>	<b>23</b>
4.21	Exemple . . . . .	24
4.23	Remarque . . . . .	24
4.27	Axe de symétrie . . . . .	24
4.28	Centre de symétrie . . . . .	24
4.51	Exemple . . . . .	24
4.52	Théorème de la bijection dérivable . . . . .	24
4.61	Primitives d'une fonction sur un intervalle . . . . .	25
4.62	Exemple . . . . .	25
4.65	Remarque . . . . .	25
4.66	Exemple . . . . .	26
4.69	Intégration par partie . . . . .	26
4.70	Changement de variable . . . . .	26
4.72	Exemple . . . . .	26
4.74	Méthode . . . . .	27
4.75	Exemple . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Fonctions usuelles</b>	<b>28</b>
5.2	Propriétés du logarithme . . . . .	29
5.3	Propriété fondamentale du logarithme . . . . .	29
5.4	Limites usuelles de la fonction logarithme . . . . .	30
5.8	Propriétés de la fonction exponentielle . . . . .	31
5.9	Propriété fondamentale de l'exponentielle . . . . .	31
5.15	Dérivée d'une fonction puissance . . . . .	31
5.21	Croissances comparées en $+\infty$ . . . . .	31
5.22	Croissances comparées en 0 . . . . .	32
5.43.2	Formule de trigonométrie hyperbolique . . . . .	32
<b>10</b>	<b>Structures algébriques</b>	<b>33</b>
10.3	Exemple . . . . .	34
10.6	Exemple . . . . .	34

<b>11 Matrices</b>	<b>35</b>
11.11Produit matriciel . . . . .	36
11.12Produit matriciel, lignes par colonnes . . . . .	36
11.16Produit de deux matrices élémentaires . . . . .	36
11.17Propriétés du produit matriciel, matrice identité . . . . .	37
11.24Exemple . . . . .	37
11.25Produit par bloc . . . . .	37
11.27Propriétés de la transposition . . . . .	38
11.31Forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . . . . .	38
11.33Exemple . . . . .	38
11.37Stabilité des matrices diagonales ou triangulaires . . . . .	39
11.41Nilpotence des matrices triangulaires . . . . .	39
11.44Opérations . . . . .	39
11.48Caractérisation de $GL_2(\mathbb{K})$ . . . . .	40
11.49Matrices diagonales inversibles . . . . .	40
11.50Exemple . . . . .	40
11.51Matrices triangulaires inversibles . . . . .	40
11.54Exemple . . . . .	42
11.61Exemple . . . . .	42
11.65Caractérisation des matrices inversibles par les systèmes linéaires . . . . .	43
11.74Système équivalents et opérations élémentaires . . . . .	43
<b>12 Arithmétique</b>	<b>44</b>
12.1 Propriété fondamentale de $\mathbb{Z}$ . . . . .	45
12.4 Division euclidienne . . . . .	45
12.9 Divisibilité et multiple . . . . .	46
12.10Divisibilité et normes . . . . .	46
12.11Entiers associés . . . . .	46
12.14Intégrité de la divisibilité . . . . .	47
12.20Cas d'une divisibilité . . . . .	47
12.21Préparation à l'algorithme d'Euclide . . . . .	47
12.23Algorithme d'Euclide étendu ou théorème de Bézout . . . . .	47
12.24Application basique . . . . .	48
12.26Théorème de Bézout . . . . .	48
12.28Proposition . . . . .	49
12.29Proposition . . . . .	49
12.30Théorème de Gauss . . . . .	50
12.31Equation de Bézout . . . . .	50
12.32Proposition . . . . .	50
12.37Lien avec les idéaux . . . . .	51
12.38Préparation au calcul pratique d'un <i>pgcd</i> . . . . .	51
12.39Caractérisation du <i>pgcd</i> . . . . .	51
12.40Propriétés du <i>pgcd</i> . . . . .	52
12.44Définition du PPCM . . . . .	53
12.45Caractérisation du <i>ppcm</i> . . . . .	53
12.46Propriétés du <i>ppcm</i> . . . . .	54
12.50Propriétés . . . . .	55
12.51Petit théorème de Fermat . . . . .	55
12.52Décomposition en produit de facteurs premiers . . . . .	56
12.54Caractérisation de la valuation . . . . .	57
12.55Valuation et décomposition en produit de facteurs premiers . . . . .	57
12.56Propriétés de la valuation . . . . .	57
<b>13 Polynômes</b>	<b>59</b>
13.6 Produit de deux polynômes . . . . .	60
13.7 Structure d'anneau de $\mathbb{A}[X]$ . . . . .	60
13.11Monômes . . . . .	61
13.12Expression d'un polynôme à l'aide de l'indéterminée formelle . . . . .	61
13.26Dérivée de produits . . . . .	62
13.28Dérivée d'une composition . . . . .	62
13.34Degré d'une somme, d'un produit, d'une dérivée . . . . .	63

13.36	Théorème de permanence de l'intégrité . . . . .	64
13.39	Propriété de stabilité . . . . .	64
13.42	Corollaire du degré d'une dérivée dans $\mathbb{K}[X]$ , avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ . . . . .	65
<b>14</b>	<b>Suites numériques</b>	<b>66</b>
14.18	Premier théorème de comparaison . . . . .	67
14.22	Unicité de la limite . . . . .	67
14.23	Limite et inégalité . . . . .	67
14.24	Convergence et bornitude . . . . .	68
14.29	Minoration d'une extraction . . . . .	68
14.30	Extraction d'une suite convergente . . . . .	68
14.32	Pair, impair et convergence . . . . .	68
14.34	Opérations usuelles sur les limites . . . . .	69
14.35	Conservation des inégalités larges par passage à la limite . . . . .	70
14.37	Théorème d'encadrement . . . . .	70
14.38	Produit d'une suite bornée par une limite nulle . . . . .	70
14.39	Exemple . . . . .	70
14.40	Comparaison puissance factorielle . . . . .	71
14.41	Caractérisation séquentielle de la borne supérieure . . . . .	71
14.42	Caractérisation séquentielle de la borne supérieure . . . . .	72
14.48	Théorème de comparaison . . . . .	72
14.49	Limites infinies et opérations . . . . .	73
14.50	Théorème de la limite monotone . . . . .	74
14.54	Exemple . . . . .	74
14.55	Convergence des suites adjacentes . . . . .	75
14.56	Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . . .	75
14.63	Exemple . . . . .	76
14.64	Exemple . . . . .	76
14.66	Monotonie d'une suite récurrente définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . . .	77
14.68	Exemple . . . . .	77
14.69	Exemple . . . . .	78
14.72	Convergence et parties réelles et imaginaires . . . . .	78
14.73	Théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes . . . . .	78
<b>15</b>	<b>Limites et continuité</b>	<b>80</b>
15.6	Limite en un point du domaine . . . . .	81
15.15	Comparaison des limites de deux fonctions coïncidant au voisinage de $a$ . . . . .	81
15.17	Unicité de la limite, cas réel . . . . .	81
15.23	Proposition . . . . .	81
15.30	Composition de limites . . . . .	82
15.32	Limites et inégalités strictes . . . . .	82
15.33	Limite et inégalités larges . . . . .	83
15.34	Caractérisations séquentielle de la limite d'une fonction . . . . .	83
15.39	Théorème de la limite monotone . . . . .	84
15.59	Théorème des valeurs intermédiaires : version 1 . . . . .	84
15.60	Théorème des valeurs intermédiaires : version 2 . . . . .	85
15.61	Théorème des valeurs intermédiaires : version 3 . . . . .	85
15.65	Théorème de Heine . . . . .	85
15.67	Caractérisation des intervalles compacts . . . . .	86
15.68	Image d'un compact par une fonction continue . . . . .	86
15.69	Image d'un segment par une fonction continue . . . . .	86
15.72	Théorème 15.72 . . . . .	86
15.73	Théorème 15.73 . . . . .	87
15.76	Théorème de la bijection . . . . .	87

<b>16 Arithmétique des polynômes</b>	<b>88</b>
16.1 Division euclidienne	89
16.7 Proposition 16.7	89
16.15 Principauté de $\mathbb{K}[X]$	90
16.17 Existence de $\text{pgcd}$	91
16.18 Principauté de $\mathbb{K}[X]$	91
16.24 Lemme de préparation au calcul pratique du PGCD unitaire	91
16.26 Exemple	92
16.27 Propriétés du PGCD	92
16.29 Existence de PPCM	92
16.30 Caractérisation des PPCM par les idéaux	93
16.42 Cas d'unicité d'une relation de Bézout	93
16.43 Corollaire	94
16.44 Caractérisation des PGCD et PPCM	94
16.53 Caractérisation des racines par la divisibilité	95
16.56 Formule de Taylor pour les polynômes	96
16.57 Caractérisation de la multiplicité par les dérivées	96
16.59 Caractérisation de la multiplicité des racines par la divisibilité	97
16.63 Polynômes formels et fonctions polynomiales	97
16.66 Caractérisation des polynômes interpolateurs	97
16.69 Corollaire	98
16.74 Proposition	98
16.76 Relation de Viète	98
16.88 Lemme	99
16.98 Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ par les racines	99
16.99 Caractérisation des polynômes à coefficients réels	99
16.10 Racine complexe d'un polynôme réel	100
16.10 Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$	100
<b>17 Fractions rationnelles</b>	<b>102</b>
17.2 Addition, multiplication et produit par un scalaire	103
17.10 Degré d'une fraction	103
17.13 Propriété du degré	103
17.19 Théorème	104
17.20 Fraction dérivée	104
17.24 Dérivée logarithmique d'un produit	104
17.25 Partie entière	105
17.31 Existence d'une décomposition	105
17.32 Théorème	106
17.38 Cas d'un pôle simple	106
17.39 Exemple	107
17.40 Cas d'un pôle double	107
17.42 Exemple	107
17.44 Parties polaires conjuguées d'une fraction réelle	108
17.45 Exemple	109
17.46 Exemple	109
17.51 Exemple - Calcul de la dérivée $n$ -ième d'une fraction	110
<b>18 Dérivabilité</b>	<b>111</b>
18.13 Condition nécessaire du premier ordre pour l'existence d'un extremum	112
18.17 Théorème de Rolle	112
18.21 Théorème des accroissements finis	112
18.37 Caractérisation par la dérivée de la variation des fonctions	113
18.43 Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^n$ - HP	113
18.45 IAF pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$	114

<b>19 Convexité</b>	<b>115</b>
19.7 Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes . . . . .	116
19.8 Inégalités des pentes . . . . .	116
19.9 Continuité et dérivabilité des fonctions convexes . . . . .	117
19.11 Caractérisation des fonctions convexes par les variations de la dérivée . . . . .	118
19.13 Caractérisation des fonctions convexes par les tangentes . . . . .	118
19.17 Somme de fonctions convexes . . . . .	119
19.18 Composition de fonctions convexes . . . . .	119
19.19 Réciproque de fonctions convexes . . . . .	119
19.20 Extrema des fonctions convexes . . . . .	120
19.24 Inégalité de Jensen . . . . .	120
19.25 Exemple - Inégalité arithmético-géométrique . . . . .	121
19.26 Inégalités de Holder et Minkowski . . . . .	121
<b>20 Espace Vectoriels</b>	<b>123</b>
20.2 Propriétés du 0, régularité . . . . .	124
20.10 Espace vectoriel de référence . . . . .	124
20.11 Transfert de structure . . . . .	124
20.16 Caractérisation des sous-espaces vectoriels . . . . .	125
20.22 Proposition 20.22 . . . . .	125
20.27 Intersection de sous-espaces vectoriels . . . . .	126
20.34 Description de $Vect(X)$ . . . . .	126
20.36 Opérations sur les sous-espaces vectoriels engendrés . . . . .	126
20.41 Somme de sous-espaces vectoriels engendrés . . . . .	127
20.43 Description d'une somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels . . . . .	127
20.47 Unicité de l'écriture de la somme directe . . . . .	128
20.51 Famille libre . . . . .	129
20.52 Exemple . . . . .	130
20.58 Caractérisation de la liberté pour des familles infinies . . . . .	130
20.60 Caractérisation de la liberté pour les familles infinies indexées par $\mathbb{N}$ . . . . .	131
20.61 Ajout d'un élément à une famille libre . . . . .	131
20.63 Généricité d'une famille libre maximale . . . . .	132
20.64 Caractérisation des sommes directes par la liberté . . . . .	132
20.65 Sommes directes et caractérisation de familles libres . . . . .	132
20.66 Familles génératrices . . . . .	133
20.68 Stabilité des familles génératrices par ajout . . . . .	133
20.69 Restriction d'une famille génératrice . . . . .	134
20.71 Liberté d'une famille génératrice minimale . . . . .	134
20.78 Famille échelonnée en degrés . . . . .	134
<b>21 Applications linéaires</b>	<b>135</b>
21.4 Exemple . . . . .	136
21.8 Structure de $\mathcal{L}(E, F)$ . . . . .	136
21.10 Composition de deux AL . . . . .	136
21.13 Bilinéarité de la composition . . . . .	136
21.16 Structure des images directes et réciproques . . . . .	137
21.21 Famille génératrice de $Im(f)$ . . . . .	137
21.23 Réciproque d'un isomorphisme . . . . .	138
21.41 Structure de l'ensemble des polynômes annulateurs - Hors Programme . . . . .	138
21.52 Caractérisation de l'image d'un projecteur . . . . .	138
21.53 Diagonalisation d'un projecteur . . . . .	138
21.57 Caractérisation géométrique des projecteurs . . . . .	139
21.59 Diagonalisation d'une symétrie . . . . .	139
21.63 Détermination d'une AL par l'image d'une base, ou rigidité . . . . .	140
21.64 Exemple . . . . .	140
21.68 Caractérisation de l'injectivité par l'image d'une base . . . . .	141
21.69 Caractérisation de la surjectivité par l'image d'une base . . . . .	142

<b>22</b>	<b>Espaces de dimension finie</b>	<b>143</b>
22.3	Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants	144
22.5	Algorithme de la base incomplète	144
22.8	Théorème de la base incomplète	144
22.11	Caractérisation de la dimension finie par le cardinal des familles libres	145
22.12	Théorème de la dimension	145
22.18	Caractérisation des bases en dimension finie	145
22.20	Majoration du rang et cas d'égalité	146
22.22	Dimension d'un sous-espace vectoriel	146
22.23	Formule de Grassmann	146
22.27	Caractérisation des couples de sous-espaces vectoriels supplémentaires	147
22.28	Existence et dimension d'un supplémentaire en dimension finie	148
22.30	Base de $\mathcal{L}(E, F)$	148
22.32	Dimension d'espaces isomorphes	148
22.35	Rang d'une famille génératrice	149
22.36	Existence et majoration du rang en dimension finie	149
22.39	Effet d'une composition sur le rang	149
22.40	Noyau et image d'une restriction	150
22.41	Restriction de $u$ à un supplémentaire de $\ker u$	150
22.43	Théorème du rang	150
22.53	Caractérisation par les supplémentaires	150
22.54	Comparaison de deux équations de $H$	151
22.55	Intersection d'hyperplans	152
<b>23</b>	<b>Sous-espaces affines</b>	<b>153</b>
23.1	Sous-espace affine	154
23.8	Caractérisation des sous-espaces affines par leur direction et leur point	154
23.11	Fibre d'une application linéaire	154
23.13	Exemple	155
<b>24</b>	<b>Comparaison locale des suites</b>	<b>156</b>
24.18	Caractérisation de l'équivalence par la négligabilité	157
24.20	Equivalent d'un polynôme	157
24.31	Exemple	158
24.36	Exemple	159
24.43	Exemple	159
24.46	Exemple	160
<b>25</b>	<b>Comparaison locale des fonctions</b>	<b>162</b>
25.6	Caractérisation séquentielle	163
25.14	Existence, unicité et expression du développement de Taylor de $f$	163
25.20	Formule de Taylor avec reste intégral de l'ordre $n$ au point $a$	163
25.22	Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n$ au point $a$ évaluée en $b$ - Hors Programme	164
25.27	Formule de Taylor-Young à l'ordre $n$ au point $x_0$	164
25.28	Développement limité de l'exponentielle	165
25.29	Développement limité du logarithme	165
25.30	Développement limité de cosinus et sinus	166
25.40	Unicité du DL	166
25.41	DL de fonctions paires ou impaires	167
25.42	Remarque	167
25.43	Exemple	168
25.50	Forme normalisée d'un DL au voisinage de 0	168
25.56	Produit de DL	169
25.57	Exemple	169
25.58	Exemple	169
25.59	Composition de DL	170
25.60	Exemple	170
25.61	Exemple	171
25.63	Exemple	171
25.65	DL d'un inverse	172
25.67	Exemple	173

25.70	Primitiver un DL . . . . .	173
25.72	Exemple . . . . .	174
25.74	Dérivation d'un DL . . . . .	175
25.75	Exemple . . . . .	175
25.78	Exemple . . . . .	175
25.85	Exemple . . . . .	176
<b>26</b>	<b>Intégration sur un segment</b>	<b>178</b>
26.12	Image d'une fonction en escalier . . . . .	179
26.14	Subdivision commune . . . . .	179
26.15	Structure de l'ensemble des fonctions en escalier . . . . .	179
26.17	Théorème . . . . .	179
26.23	Intégrale de deux fonctions en escalier égales presque partout . . . . .	180
26.24	Positivité ou croissance de l'intégrale . . . . .	180
26.26	Inéglité triangulaire intégrale . . . . .	181
26.36	Théorème . . . . .	181
26.42	Intégrabilité des fonctions monotones . . . . .	182
26.43	Intégrabilité des fonctions continues . . . . .	182
26.46	Relation de Chasles . . . . .	183
26.49	Croissance et positivité de l'intégrale . . . . .	183
26.51	Inégalité triangulaire intégrale . . . . .	183
26.56	Bornitude des fonctions continues par morceaux . . . . .	184
26.58	Intégrabilité des fonctions continues par morceaux . . . . .	184
26.61	Norme . . . . .	184
26.63	Densité . . . . .	185
26.64	Théorème fondamental du calcul intégral . . . . .	185
26.66	Limite . . . . .	186
26.68	Exemple . . . . .	186
26.69	Intégrale nulle d'une fonction positive et continue . . . . .	187
26.70	Somme de Riemann . . . . .	187
26.72	Exemple . . . . .	188
26.75	Inégalité triangulaire intégrale dans $\mathbb{C}$ . . . . .	188
26.76	Lemme de Riemann-Lesbegue . . . . .	189
<b>27</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>190</b>
27.6	Série géométrique . . . . .	191
27.11	Deux séries de termes généraux égaux presque partout . . . . .	191
27.12	CN de convergence portant sur le terme général . . . . .	191
27.16	Théorème de comparaison des séries à termes positifs . . . . .	191
27.20	Convergence absolue entraîne convergence . . . . .	192
27.23	Comparaison des séries par domination ou négligabilité . . . . .	192
27.24	Comparaison des séries à termes positifs par équivalence . . . . .	192
27.25	Théorème de comparaison entre série et intégrale . . . . .	193
27.29	Nature des séries de Riemann . . . . .	194
27.30	Nature des séries exponentielles . . . . .	194
27.32	Nature des séries de Bertrand - Hors Programme . . . . .	195
27.35	Règle d'Alembert - Hors Programme . . . . .	195
27.39	Critère spécial des séries alternées . . . . .	196
27.42	Majoration du reste d'une série alternée . . . . .	196
27.44	Critère d'Abel - Hors Programme . . . . .	197
<b>28</b>	<b>Matrice d'une application linéaire</b>	<b>199</b>
28.5	Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs . . . . .	200
28.6	Exemple . . . . .	200
28.9	Caractérisation des matrices inversibles au moyen de leur lignes et colonnes . . . . .	201
28.13	Exemple . . . . .	201
28.15	Exemple . . . . .	201
28.18	Exemple . . . . .	201
28.19	Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire . . . . .	202
28.20	Exemple . . . . .	203
28.21	Lien entre produit matriciel et composition d'applications linéaires . . . . .	204



28.22Exemple . . . . .	205
28.23CNS d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde . . . . .	206
28.28Exemple . . . . .	206
28.29Exemple . . . . .	207
28.33Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice . . . . .	207
28.35Invariance du rang par une matrice inversible . . . . .	207
28.37Exemple . . . . .	208
28.38Matrice de changement d'une base à une autre . . . . .	208
28.41Exemple . . . . .	209
28.42Changement de bases pour une application linéaire . . . . .	209
28.47Exemple fondamental . . . . .	209
28.48Invariance du rang par transposition . . . . .	210
28.52Rang d'une matrice extraite . . . . .	210
28.57Invariance du rang et de la trace par similitude . . . . .	210
28.60Exemple . . . . .	211
28.63Opération sur la trace . . . . .	211
28.64Exemple . . . . .	211
<b>29 Groupe symétrique</b>	<b>212</b>
29.26Lemme 26 . . . . .	213
29.29Propriété fondamentale de la signature . . . . .	213
29.35Décomposition d'une transposition à l'aide des $\tau_i$ . . . . .	213
29.37Caractère générateur des transpositions . . . . .	214
29.40Effet de la conjugaison sur un cycle . . . . .	214
29.41Corollaire 29.41 . . . . .	214
29.42Unicité de la signature . . . . .	215
29.52Décomposition en cycle d'une permutation . . . . .	215
29.62Décomposition d'un cycle en transpositions . . . . .	215
29.63Signature d'un cycle . . . . .	216
29.64Détermination de $\epsilon$ par le type cyclique . . . . .	216
29.69Exemple . . . . .	217
<b>30 Déterminant</b>	<b>218</b>
30.4 Exemple . . . . .	219
30.11Détermination d'une application $n$ -linéaire sur une base . . . . .	219
30.18Caractérisation par les transpositions . . . . .	219
30.19Une forme alternée change de signe par transposition . . . . .	220
30.21Image d'une famille liée par une forme alternée . . . . .	220
30.22Forme $n$ -linéaire d'un espace de dimension $n$ . . . . .	221
30.25Exemple . . . . .	221
30.26Description du déterminant par les coordonnées . . . . .	222
30.28Effet d'un changement de base sur le déterminant . . . . .	222
30.30Caractérisation des bases par le déterminant . . . . .	222
30.36Déterminant d'un produit . . . . .	223
30.40Expression des déterminants classiques . . . . .	223
30.41Invariance du déterminant par transposée . . . . .	224
30.42Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	224
30.44Déterminant et conjugaison . . . . .	224
30.45Déterminant d'une matrice triangulaire . . . . .	224
30.47Déterminant des matrices de codage des opérations . . . . .	225
30.50Exemple . . . . .	225
30.51Exemple . . . . .	226
30.52Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs . . . . .	227
30.57Exemple . . . . .	228
30.58Développement suivant une colonne . . . . .	228
30.59Développement selon une ligne . . . . .	229
30.61Expression de l'inverse de la comatrice, Cayley . . . . .	230
30.63Cramer . . . . .	230
30.64Exemple . . . . .	231
30.71Déterminant de Vandermonde . . . . .	232

<b>31 Dénombrement</b>	<b>234</b>
31.12Exemple : parcours d'une fourmi . . . . .	235
31.19Exemple . . . . .	235
31.20Exemple . . . . .	235
31.27Exemple . . . . .	235
31.28Exemple . . . . .	235
31.32Exemple . . . . .	236
31.33Exemple . . . . .	236
31.38Nombre de combinaisons . . . . .	236
31.40Exemple . . . . .	236
31.41 $k$ -listes strictement croissantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ . . . . .	236
31.43Exemple . . . . .	237
31.45Exemple . . . . .	237
31.48Exemple . . . . .	237
31.49Nombre de parties d'un ensemble fini . . . . .	238
31.51Exemple : formule du capitaine . . . . .	238
31.53Exemple : formule de Pascal . . . . .	239
<b>32 Espaces probabilisés finis</b>	<b>241</b>
32.19Exemple . . . . .	242
32.25Exemple . . . . .	242
32.26Exemple . . . . .	242
32.28Définition implicite d'un espace probabilisé par la donnée d'une loi de variable aléatoire . . . . .	243
32.30Probabilité conditionnelle . . . . .	243
32.31Formule des probabilités totales . . . . .	244
32.32Exemple . . . . .	244
32.33Formule de Bayes . . . . .	244
32.35Exemple . . . . .	245
32.37Formule des probabilités composées . . . . .	245
32.43Indépendance et complémentarité . . . . .	245
32.44Exemple . . . . .	246
32.48Exemple . . . . .	246
32.50Une propriété des couples de variables aléatoires indépendantes . . . . .	247
32.51Exemple . . . . .	247
32.53Exemple . . . . .	247
32.54Exemple . . . . .	248
32.55Indépendance des images de variables aléatoires indépendantes par des fonctions . . . . .	248
32.61Calcul des lois marginales à partir de la loi conjointe . . . . .	249
32.63Loi uniforme et produit cartésien . . . . .	249
32.66Exemple . . . . .	250
32.67Exemple . . . . .	251
32.68Somme de variables aléatoires indépendantes de lois binomiales . . . . .	252
32.69Existence d'une famille finie de variables aléatoires de lois prescrites . . . . .	252
<b>33 Variables aléatoires réelles finies</b>	<b>254</b>
33.3 Exemple . . . . .	255
33.4 Espérance des lois usuelles . . . . .	255
33.5 Propriétés de l'espérance . . . . .	256
33.6 Exemple . . . . .	257
33.7 Formule de transfert . . . . .	257
33.10Exemple . . . . .	257
33.11Espérance du produit de deux variables aléatoires réelles indépendantes . . . . .	258
33.13Propriétés de la variance . . . . .	258
33.15Propriétés de la covariance . . . . .	259
33.16Variance des lois usuelles . . . . .	260
33.17Inégalité de Markov . . . . .	260
33.19Inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . . .	260
33.20Exemple . . . . .	260

<b>34 Espaces préhilbertiens réels</b>	<b>262</b>
34.4 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$	263
34.5 Exemple	263
34.14 Identités remarquables	263
34.15 Proposition 34.15 bis	264
34.16 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire	264
34.17 Exemple	265
34.18 Exemple	265
34.20 Vecteur orthogonal à tout vecteur	266
34.21 Exemple	266
34.23 Exemple	266
34.24 Exemple	267
34.25 Propriétés des familles orthogonales	267
34.26 Coordonnées dans une base orthonormale	267
34.27 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale	268
34.28 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	268
34.29 Exemple	269
34.34 Propriétés de l'orthogonal d'une partie	270
34.38 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie	271
34.49 Exemple	272
34.50 Exemple	273
34.53 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie	273
34.54 Distance à un hyperplan affine	274
<b>35 Familles sommables</b>	<b>276</b>
<b>36 Fonctions de deux variables</b>	<b>277</b>

## Chapitre 1

# Calculs Algébriques

## 1.20 Somme des carrés et des cubes

— Somme des carrés :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note la proposition :

$$P(n) : \ll \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \gg$$

Démontrons-la par récurrence.

Initialisation : Pour  $n = 0$ , on a :

$$\sum_{k=1}^0 k^2 = 0$$

et :

$$\frac{0 \times (0+1) \times (2 \times 0 + 1)}{6} = 0$$

Donc  $P(0)$  est vraie.

Hérédité : On suppose  $P(n)$  vraie pour un  $n$  fixé dans  $\mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6} (n(2n+1) + 6(n+1)) \\ &= \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

Donc  $P(n+1)$  est vraie aussi.

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

— Somme des cubes :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note la proposition :

$$P(n) : \ll \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \gg$$

Démontrons-la par récurrence.

Initialisation : Pour  $n = 0$ , on a :

$$\sum_{k=1}^0 k^3 = 0$$

et :

$$\frac{0 \times (0+1)^2}{4} = 0$$

Donc  $P(0)$  est vraie.

Hérédité : On suppose  $P(n)$  vraie pour un  $n$  fixé dans  $\mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4n + 4) \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Donc  $P(n+1)$  est vraie aussi.

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

### 1.39 Formule de Pascal

Démontrons pour tout  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$  la relation :

$$\ll \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \gg$$

La relation est vraie si  $p > n$  (on a  $0 = 0 + 0$ ) et si  $p = n$  (qui donne  $1 = 0 + 1$ ).

Soit  $1 \leq p \leq n$  :

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p)!} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{n-p} \right) \\ &= \frac{(n-1)! \times n}{(p-1)!(n-1-p)! \times p(n-p)} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{p} \end{aligned}$$

### 1.41 Formule du capitaine

Démontrons pour  $n$  et  $p$  deux entiers tels que  $1 \leq p \leq n$  la relation :

$$\ll n \binom{n-1}{p-1} = p \binom{n}{p} \gg$$

On a :

$$n \binom{n-1}{p-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = p \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = p \binom{n}{p}$$

### 1.42 Formule du binôme de Newton

Soit  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note la proposition :

$$P(n) : \ll (x+y)^n = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} \gg$$

Démontrons-la par récurrence.

Initialisation : Pour  $n = 0$ , on a :

$$(x + y)^0 = 1$$

et

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$$

Donc  $P(0)$  est vraie.

Hérédité : On suppose  $P(n)$  vraie pour un  $n$  fixé dans  $\mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)(x + y)^n \\ &= (x + y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^{k+1} y^{n-k} + x^k y^{n+1-k}) && \text{(linéarité)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} && \text{(translation)} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n x^k y^{n+1-k} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} && \text{(formule de Pascal)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} x^k y^{n+1-k} \end{aligned}$$

Donc  $P(n + 1)$  est vraie aussi.

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

## Chapitre 2

# Logique



## 2.17 Equivalence logiques

### 2.17.1 Double négation

$p$	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$F$

On remarque que la première et la deuxième colonne sont identiques, on a donc :

$$p \iff \neg(\neg p)$$

### 2.17.2 Commutativité

$p$	$q$	$p \wedge q$	$q \wedge p$
$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$

On remarque que la troisième et la quatrième colonne sont identiques, on a donc :

$$p \wedge q \iff q \wedge p$$

Raisonnement analogue pour la disjonction  $\vee$ .

### 2.17.3 Associativité

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$

On remarque que la cinquième et la septième colonne sont identiques, on a donc :

$$(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$$

Raisonnement analogue pour la disjonction  $\vee$ .

### 2.17.4 Loi de Morgan

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

On remarque que la quatrième et la septième colonne sont identiques, on a donc :

$$\neg(p \wedge q) \iff (\neg p) \vee (\neg q)$$

Raisonnement analogue pour  $\neg(p \vee q) \iff (\neg p) \wedge (\neg q)$

### 2.17.5 Double implication

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

On remarque que la troisième et la sixième colonne sont identiques, on a donc :

$$(p \Leftrightarrow q) \iff ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$$

### 2.17.6 Distributivité

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$r \vee (p \wedge q)$	$r \vee p$	$r \vee q$	$(r \vee p) \wedge (r \vee q)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$

On remarque que la cinquième et la huitième colonne sont identiques, on a donc :

$$r \vee (p \wedge q) \iff (r \vee p) \wedge (r \vee q)$$

## Chapitre 3

# Ensembles et applications

### 3.12 Propriétés du produit cartésien

Soit  $x$  et  $y$ . On a :

1.

$$(x, y) \in E \times F \Leftrightarrow x \in E \text{ et } y \in F$$

$$\text{Donc } (x, y) \notin E \times F \Leftrightarrow x \notin E \text{ ou } y \notin F$$

2.

$$E \times F \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists (x, y) \in E \times F$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in E \text{ et } \exists y \in F$$

$$\Leftrightarrow E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \text{non } (E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset)$$

3.

$$E \times F = F \times E \Leftrightarrow \begin{cases} E \times F = F \times E \text{ et } E = \emptyset \\ E \times F = F \times E \text{ et } F = \emptyset \\ E \times F = F \times E \text{ et } E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset \\ E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset \text{ et } \forall (x, y) \in E \times F, (x, y) \in F \times E \text{ et } \forall (a, b) \in F \times E, (a, b) \in E \times F \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset \\ E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset \text{ et } \forall x \in E, x \in F \text{ et } \forall y \in F, y \in E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset \\ E = F \end{cases}$$

4.

$$(x, y) \in (E \times F) \cup (F \times G) \Leftrightarrow (x, y) \in E \times F \text{ ou } (x, y) \in F \times G$$

$$\Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in F) \text{ ou } (x \in F \text{ et } y \in G)$$

$$\Leftrightarrow x \in E \text{ et } y \in F \cup G$$

5.

$$(x, y) \in (E \times F) \cap (G \times H) \Leftrightarrow (x, y) \in E \times F \text{ et } (x, y) \in G \times H$$

$$\Leftrightarrow x \in E \text{ et } y \in F \text{ et } x \in G \text{ et } y \in H$$

$$\Leftrightarrow x \in E \cap G \text{ et } y \in F \cap H$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (E \cap G) \times (F \cap H)$$

### 3.18 Associativité des relations

Les ensembles de départ et d'arrivée sont bien égaux (à  $E$  et  $H$  respectivement). Soit  $(x, y) \in E \times H$

$$x(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists z \in F, x(\mathcal{T} \circ \mathcal{S})z \text{ et } z\mathcal{R}y$$

$$\Leftrightarrow \exists z \in F, \exists v \in G, (x\mathcal{T}v \text{ et } v\mathcal{S}z) \text{ et } z\mathcal{R}y$$

$$\Leftrightarrow \exists z \in F, \exists v \in G, x\mathcal{T}v \text{ et } (v\mathcal{S}z \text{ et } z\mathcal{R}y)$$

$$\Leftrightarrow \exists v \in G, x\mathcal{T}v \text{ et } v(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})y$$

$$\Leftrightarrow x\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})y$$

### 3.20 Propriétés des relations réciproques

— RAF

— Les ensembles de départ sont égaux respectivement à  $E$  et à  $G$ .

Soit  $(x, y) \in G \times E$ . On a :

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}y &\Leftrightarrow \exists \alpha \in F, x\mathcal{S}^{-1}\alpha \text{ et } \alpha\mathcal{R}^{-1}y \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in F, \alpha\mathcal{S}x \text{ et } y\mathcal{R}\alpha \\ &\Leftrightarrow y\mathcal{S} \circ \mathcal{R}x \\ &\Leftrightarrow x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1}y \end{aligned}$$

### 3.23 Composition de fonctions

Soit  $f$  une fonction de  $E$  vers  $F$ .

Soit  $g$  une fonction de  $E$  vers  $G$ .

$g \circ f$  est une relation de  $E$  vers  $G$

Soit  $(x, y, y') \in E \times G \times G$ . On suppose

$$\begin{cases} x(g \circ f)y \\ x(g \circ f)y' \end{cases}$$

Donc on choisit  $\alpha$  dans  $F$  tel que :

$$xf\alpha \text{ et } \alpha gy$$

et  $\beta$  dans  $F$  tel que :

$$xf\beta \text{ et } \beta gy'$$

Or  $f$  est une fonction, donc  $\alpha = \beta$ .

Donc  $\alpha gy$  et  $\alpha gy'$ , or  $g$  est une fonction, donc  $y = y'$ . Par définition,  $g \circ f$  est une fonction.

### 3.30 Schémas de raisonnement : montrer l'injectivité/surjectivité/bijektivité

Injectivité :

Soit  $(x, x') \in E^2$ .

On suppose que  $f(x) = f(x')$ .

$\vdots$

Donc  $x = x'$ .

Surjectivité :

Soit  $y \in F$ .

$\vdots$

On choisit ... tel que :

$\vdots$

Donc  $f(x) = y$

Bijektivité :

Pour la bijectivité, on montre l'injectivité et la surjectivité séparément.

### 3.35 Composée d'injections/surjections

Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$ .

- On suppose que  $f$  et  $g$  sont injectives.  
Soit  $(x, x') \in E^2$ .

On suppose que  $g \circ f(x) = g \circ f(x')$

Donc  $g(f(x)) = g(f(x'))$

Donc  $f(x) = f(x')$

( $g$  est injective)

Donc  $x = x'$

( $f$  est injective)

- On suppose que  $f$  et  $g$  sont surjectives.  
Soit  $y \in G$ .  
Par surjectivité de  $g$ , on choisit  $\alpha \in F$  tel que  $g(\alpha) = y$ .  
Par surjectivité de  $f$ , on choisit  $x \in E$  tel que  $f(x) = \alpha$ .  
Donc  $g \circ f(x) = y$ .  
Donc  $g \circ f$  est surjective.

### 3.36 Condition nécessaire pour une composition injective/surjective

- Soit  $(x, x') \in E^2$  tels que :

$$f(x) = f(x')$$

$$\text{Donc } g(f(x)) = g(f(x'))$$

$$\text{Donc } x = x'$$

Donc  $f$  est injective.

- On suppose  $g \circ f$  surjective.  
Soit  $y \in G$ . Soit  $\alpha \in E$  tel que  $g \circ f(\alpha) = y$ .  
On pose  $x = f(\alpha) \in F$ .  
Donc  $g(x) = y$  Donc  $g$  est surjective.

### 3.37 Réciproque et bijection

- Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $f^{-1}$  la relation réciproque de  $f$
- $f^{-1}$  est une fonction si et seulement si  $f$  est injective.
  - Si  $f^{-1}$  est une fonction, c'est une application.  
ssi.  $\text{Def}(f^{-1}) = F$   
ssi.  $f$  est surjective.

### 3.38 Inverse d'une composée de bijections

Propositions (3.35), (3.27) et (3.20)

### 3.39 Condition nécessaire et suffisante de bijectivité

$\Rightarrow$

On suppose que  $f$  est bijective.  
On pose  $g = f^{-1}$  sa bijection réciproque.  
On a bien  $g \circ f = id_E$  et  $f \circ g = id_F$ .

$\Leftarrow$

Soit  $g : F \rightarrow E$  vérifiant  $g \circ f = id_E$  et  $f \circ g = id_F$ .  
En particulier,  $g \circ f$  est injective, donc  $f$  est injective.  
En particulier,  $f \circ g$  est surjective, donc  $f$  est surjective.  
Donc  $f$  est bijective.  
Or  $f \circ g = id_F$ .  
Donc  $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ id_F$ .  
Soit  $g = f^{-1}$ .

## Chapitre 4

# Généralités sur les fonctions

## 4.21 Exemple

On suppose que  $f \geq g$ . Ainsi :

$$|f - g| = f - g \Leftrightarrow \frac{f + g + |f - g|}{2} = f$$

## 4.23 Remarque

Soit  $a \in \mathbb{Q}^*$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

— Si  $x \in \mathbb{Q}$ , alors  $x + a \in \mathbb{Q}$ , donc  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x + a) = 1 = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ .

— Si  $x \notin \mathbb{Q}$ , alors  $x + a \notin \mathbb{Q}$ , donc  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x + a) = 0 = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ .

## 4.27 Axe de symétrie

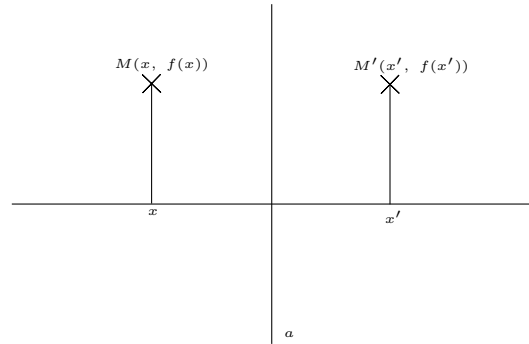
Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

Soit  $(x, x') \in I^2$ .

$M$  et  $M'$  sont symétriques par rapport  $x = a$

$$\text{ssi. } \begin{cases} a = \frac{x+x'}{2} \\ f(x) = f(x') \end{cases}$$

$$\text{ssi. } \begin{cases} x' = 2a - x \\ f(x) = f(x') \end{cases}$$



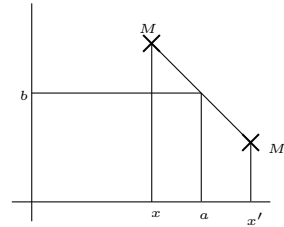
## 4.28 Centre de symétrie

On reprend les mêmes notations qu'à la (4.27).

$M$  et  $M'$  sont symétriques par rapport à  $A(a, b)$

$$\text{ssi. } \begin{cases} a = \frac{x+x'}{2} \\ b = \frac{f(x)+f(x')}{2} \end{cases}$$

$$\text{ssi. } \begin{cases} x' = 2a - x \\ f(x') = 2b - f(x) \end{cases}$$



## 4.51 Exemple

$$1. f'(x) = -\frac{2x+1}{(x+x^2)^2}$$

$$2. f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$3. f'(x) = -3\frac{e^x(x-1)}{x^2} \sin\left(\frac{e^x}{x}\right) \cos^2\left(\frac{e^x}{x}\right)$$

## 4.52 Théorème de la bijection dérivable

On suppose la dérivabilité de  $f^{-1}$ . Par définition :

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_I$$

D'après la proposition (4.48.4), on a :

$$\begin{aligned} (f^{-1})' \circ f' \times f^{-1} &= (f \circ f^{-1})' \\ &= \text{Id}'_I \\ &= 1 \end{aligned}$$



Comme  $f$  ne s'annule pas sur  $I$ , on a :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

## 4.61 Primitives d'une fonction sur un intervalle

— Si  $F$  et  $G$  sont deux primitives de  $f$  sur l'intervalle  $I$ , alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in I, (F - G)'(x) &= F'(x) - G'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme  $I$  est un intervalle,  $F - G$  est constante (4.53).

Réciproquement, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $F + a$  est aussi une primitive de  $f$  sur  $I$ .

— Soit  $G$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ . Or pour  $F = G + a - G(x_0)$ ,  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  et  $F(x) = a$ .

L'unicité est donnée par le point précédent.

## 4.62 Exemple

1. Sur  $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .  
Pour tout  $x \in I$ ,

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= -\frac{-\sin x}{\cos x} \end{aligned}$$

La primitive de  $\tan$  sur  $I$  est :  $x \mapsto -\ln |\cos x| = \ln \cos x$ .

2. Sur  $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .

$$\forall x \in I, \tan^2 x = \tan^2 x + 1 - 1$$

Une primitive de  $\tan^2$  sur  $I$  est :  $x \mapsto \tan x - x$ .

3. Sur  $I = \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, x\sqrt{1+x^2} &= x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \times 2x \times (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Une primitive de  $x \mapsto x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$  sur  $\mathbb{R}$  est :  $x \mapsto \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ .

4. Sur  $I = \mathbb{R}_+^*$ .

$$\forall x > 0, \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \ln x$$

Une primitive de  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est :  $x \mapsto \frac{1}{2} \ln^2 x$ .

## 4.65 Remarque

$G : y \mapsto yg(y) - F(g(y)) + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} G'(y) &= g(y) + yg'(y) - g'(y)f(g(y)) \\ &= g(y) + \cancel{yg'(y)} - \cancel{g'(y)y} \\ &= g(y) \end{aligned}$$

## 4.66 Exemple

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{-1}^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \right| &\leq \int_{-1}^1 \frac{|t|^n}{1+t^2} dt && \text{(Inégalité triangulaire)} \\
 &\leq \int_{-1}^1 |t|^n dt && (\forall t, \frac{|t|^n}{1+t^2} \leq |t|^n) \\
 &= (-1)^n \int_{-1}^0 t^n dt + \int_0^1 t^n dt && \text{(Relation de Chasles)} \\
 &= (-1)^n \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\
 &= -\frac{(-1)^n (-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{2}{n+1}
 \end{aligned}$$

## 4.69 Intégration par partie

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f'(t)g(t) dt + \int_a^b f(t)g'(t) dt &= \int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t)) dt \\
 &= \int_a^b (fg)'(t) dt \\
 &= [f(t)g(t)]_a^b
 \end{aligned}$$

## 4.70 Changement de variable

Comme  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ , on choisit une primitive  $F$  de  $f$  sur  $[a, b]$ . (Théorème fondamental du calcul intégral)  
Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt &= [F(t)]_{u(a)}^{u(b)} \\
 &= F \circ u(b) - F \circ u(a)
 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(u(t))u'(t) dt &= \int_a^b F'(u(t)) \times u'(t) du(t) \\
 &= [F \circ u(t)]_a^b
 \end{aligned}$$

## 4.72 Exemple

Si  $x = \sin t$ , alors  $dx = \cos t dt$ .

Pour  $t = 0$ ,  $x = \sin 0 = 0$ .

Pour  $t = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ .

Or  $t \mapsto \sin t \in \mathcal{C}^1([0; \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ .

D'après le théorème de changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\&= \left[ \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} \\&= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

## 4.74 Méthode

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{a; b\}$ , trouver  $c$  et  $d$  tel que  $\frac{\alpha x + \beta}{(x-a)(x-b)} = \frac{c}{x-a} + \frac{d}{x-b}$  :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha x + \beta}{(x-b)} &= c + \frac{d(x-a)}{(x-b)} && \text{(On multiplie par } (x-a)) \\c &= \frac{\alpha a + \beta}{a-b} && (x=a) \\d &= \frac{\alpha b + \beta}{b-a} && (x=b)\end{aligned}$$

## 4.75 Exemple

$$f : x \mapsto \frac{2x-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{4}{3(x+1)} + \frac{4}{5(x-3)}$$

Une primitive de  $f$  sur  $] -1; 3[$  est :  $x \mapsto \frac{3}{4} \ln |x+1| + \frac{5}{4} \ln |x-3| = \frac{3}{4} \ln(x+1) + \frac{5}{4} \ln(x-3)$

## Chapitre 5

# Fonctions usuelles

## 5.2 Propriétés du logarithme

Par définition,  $\ln$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

On montre par récurrence sur  $n \geq 1$  que

$$\text{"}\ln \text{ est dérivable } n \text{ fois et } \forall n > 0, \ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\text{"}$$

Initialisation :

La propriété est vraie pour  $n = 1$ .

Hérédité :

Si elle est vraie pour  $n \geq 1$ , par théorème d'opérations,  $\ln^{(n)}$  est encore dérivable et :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \ln^{(n+1)}(x) &= \left[ \ln^{(n)} \right] (x) \\ &= (-1)^n n! x^{-n-1} \end{aligned}$$

Comme  $\ln' > 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , alors  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

## 5.3 Propriété fondamentale du logarithme

On montre seulement la propriété pour  $a > 0$  et  $b > 0$ .

On fixe  $b > 0$  et on considère :

$$f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \ln(xb)$$

Par composition,  $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$  et :

$$\forall x > 0, f'(x) = b \times \frac{1}{xb} = \frac{1}{x}$$

Donc  $f$  est une primitive de  $\frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On choisit  $c \in \mathbb{R}$  tel que :

$$f = \ln + c$$

En particulier :

$$f(1) = \ln 1 + c$$

Soit :

$$\ln b = c$$

Ainsi :

$$\forall x > 0, \ln(xb) = \ln x + \ln b$$

On a par conséquent :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 &= \ln 1 \\ &= \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) \\ &= \ln x + \ln \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Donc pour  $a > 0$  et  $b > 0$ , on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) \\ &= \ln a + \ln \frac{1}{b} \\ &= \ln a - \ln b\end{aligned}$$

## 5.4 Limites usuelles de la fonction logarithme

On commence par montrer que :

$$\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

On sait que  $\ln$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc d'après le théorème de la limite monotone :

$$\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{ou} \quad \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda$$

Soit  $n \geq 1$ . On a :

$$\begin{aligned}\ln n &= \int_1^n \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right) - 1\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right) - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Par théorème de comparaison :

$$\ln n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc :

$$\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Enfin :

$$\forall x > 0, \ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc par composition :

$$\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$$

Par taux d'accroissement, en introduisant :

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \ln(1+x) \\ f &\in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ \frac{\ln(x+1)}{x} &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \rightarrow 0}{f'(0)} = 1\end{aligned}$$

## 5.8 Propriétés de la fonction exponentielle

D'après les résultats précédents (5.2), (5.4), on applique le théorème de la bijection dérivable. La fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \exp' x &= \frac{1}{\ln' \circ \exp x} \\ &= \exp x\end{aligned}$$

On obtient directement que  $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$  et que  $\exp^{(n)} = \exp n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## 5.9 Propriété fondamentale de l'exponentielle

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On choisit  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que :

$$x = \ln a \text{ et } y = \ln b$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\exp(x + y) &= \exp(\ln a + \ln b) \\ &= \exp(\ln(ab)) \\ &= ab \\ &= \exp x \times \exp y\end{aligned}$$

Ainsi,  $\exp 0 = \exp(0 + 0) = \exp^2 0$ .

Donc  $\exp 0 \in \{0; 1\}$

Or  $\exp$  est à valeur dans  $\mathbb{R}_+^*$ , donc  $\exp 0 = 1$ , donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp 0 = \exp(x - x) = \exp x \times \exp(-x) = 1$$

## 5.15 Dérivée d'une fonction puissance

Soit  $y > 0$ . On pose  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto y^x = \exp(x \ln y)$ .

$f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , donc par composition :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \ln y \times \exp(x \ln y) \\ &= \ln y \times y^x\end{aligned}$$

## 5.21 Croissances comparées en $+\infty$

1. On commence par montrer que  $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Soit  $x \geq 1$ . On a :

$$\begin{aligned}0 \leq \frac{\ln x}{x} &= \frac{1}{x} \int_1^x \frac{dt}{t} \\ &\leq \frac{1}{x} \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{x} \left[ 2\sqrt{t} \right]_1^x \\ &= \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x} \\ &= 2 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

D'après le théorème d'encadrement,  $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Soit  $a > 0$  et  $x > 0$  :

$$\frac{\ln x}{x^a} = \frac{1}{a} \times \frac{\ln x^a}{x^a} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{composition et théorème d'opérations})$$

2. On utilise le changement de variable :

$$x = (\ln y)^{\frac{1}{a}}, \text{ soit } y = e^{ax}$$

Ainsi :

$$\frac{x^a}{e^x} = \frac{\ln y}{y^{\frac{1}{a}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 \text{ par composition si } a > 0 \\ 0 \text{ par théorème d'opérations si } a \leq 0 \end{cases}$$

## 5.22 Croissances comparées en 0

On utilise la proposition (5.21.1) avec  $y = \frac{1}{x}$ .

### 5.43.2 Formule de trigonométrie hyperbolique

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b) &= \frac{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b})}{4} + \frac{(e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})}{4} \\ &= \frac{2e^{a+b} + 2e^{-(a+b)}}{4} \\ &= ch(a+b) \end{aligned}$$



## Chapitre 10

# Structures algébriques

### 10.3 Exemple

#### Exemple

Soit  $E = ]-1; 1[$ . Pour  $(x, y) \in E^2$ , on pose :  $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$ . Montrer que l'on définit ainsi une loi dans  $E$ .

On fixe  $y \in E$ . On note  $\varphi : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$ .  
 $\varphi \in \mathcal{D}^1([-1; 1], \mathbb{R})$  et :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \varphi'(x) &= \frac{1 + xy - y(x+y)}{(1+xy)^2} \\ &= \frac{1-y^2}{(1+xy)^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Comme  $E$  est un intervalle :  $\varphi$  est strictement croissante sur  $E$  et :

$$\forall x \in E, -1 = \varphi(-1) < \varphi(x) < \varphi(1) = 1$$

Donc :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \star y \in E$$

### 10.6 Exemple

#### Exemple

Soit  $E = ]-1; 1[$ . Pour  $(x, y) \in E^2$ , on pose  $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$ . Montrer que  $\star$  est associative et commutative.

- Commutativité : RAF
- Associativité :  
 Soit  $(x, y, z) \in E^3$ . On a :

$$\begin{aligned} x \star (y \star z) &= x \star \left( \frac{y+z}{1+yz} \right) \\ &= \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \frac{y+z}{1+yz}} \\ &= \frac{x(1+yz) + y + z}{1 + yz + xy + xz} \\ &= \frac{x + y + z + xyz}{1 + yz + xy + xz} \end{aligned}$$

C'est une expression symétrique en  $x, y$  et  $z$  donc :

$$x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$$

## Chapitre 11

# Matrices

### 11.11 Produit matriciel

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 6 & -10 & -6 \end{pmatrix}$$

### 11.12 Produit matriciel, lignes par colonnes

$$\text{— } A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ et } C_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

$$\begin{aligned} (AC_i)_{k,1} &= \sum_{l=1}^p a_{kl}(C_i)_{l,1} \\ &= \sum_{l=1}^p a_{kl}\delta_{il} \\ &= a_{ki} \end{aligned}$$

$$\text{— } L_j = (0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0) = (\delta_{ji})_{1 \leq i \leq n}$$

$$\begin{aligned} (L_j A)_{1k} &= \sum_{l=1}^n (L_j)_{1,e} \times a_{ek} \\ &= \sum_{l=1}^n \delta_{je} a_{lk} \\ &= a_{jk} \end{aligned}$$

$$\text{— On note } A = (C_1 \mid \dots \mid C_p) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^p x_k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = \sum_{k=1}^p x_k A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^p x_k C_k$$

### 11.16 Produit de deux matrices élémentaires

Soit  $1 \leq k \leq n; 1 \leq l \leq m$

$$\begin{aligned} (E_{ij} \times E_{rs})_{k,l} &= \sum_{p=1}^t (E_{ij})_{kp} \times (E_{rs})_{pl} \\ &= \sum_{p=1}^t \delta_{ik} \delta_{pj} \delta_{rp} \delta_{sl} \\ &= \delta_{rj} \delta_{ik} \delta_{sl} \\ &= \delta_{rj} (E_{is})_{kl} \end{aligned}$$

Donc  $E_{ij} \times E_{rs} = \delta_{jr} E_{is}$

## 11.17 Propriétés du produit matriciel, matrice identité

— Soit  $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{i,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned}
 (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj} \\
 [(AB)C]_{il} &= \sum_{t=1}^q (AB)_{it} C_{tl} \\
 &= \sum_{t=1}^q \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kt} C_{tl} \\
 &= \sum_{k=1}^p A_{ik} \sum_{t=1}^q B_{kt} C_{tl} \\
 &= \sum_{k=1}^p A_{ik} (BC)_{kl} \\
 &= (A(BC))_{il}
 \end{aligned}$$

— RAF

— RAF

## 11.24 Exemple

On écrit  $A = I_3 + N$  avec  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Comme  $I_3$  et  $N$  commutent,

$$\begin{aligned}
 A^k &= (I_3 + N)^k \\
 &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} N^i && \text{(Binôme de Newton)} \\
 &= I_3 + \binom{k}{1} N && (N^2 = 0) \\
 &= I_3 + kN \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## 11.25 Produit par bloc

On le fait pour un bloc. Soit  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq s$ .

$$\begin{aligned}
 \left[ \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix} \right]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p+q} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}_{ik} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}_{kj} \\
 &= \sum_{k=1}^p \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}_{ik} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}_{kj} + \sum_{k=p+1}^{p+q} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}_{ik} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}_{kj} \\
 &= \sum_{k=1}^p A_{ik} A'_{kj} + \sum_{k=1}^q C_{ik} B'_{kj} \\
 &= (AA' + CB')_{ij}
 \end{aligned}$$

## 11.27 Propriétés de la transposition

- RAF
- RAF
- Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{aligned}
 [{}^t(AB)]_{ij} &= (AB)_{ji} \\
 &= \sum_{k=1}^p A_{jk} B_{ki} \\
 &= \sum_{k=1}^p [{}^t B]_{ik} [{}^t A]_{kj} \\
 &= [{}^t B {}^t A]_{ij}
 \end{aligned}$$

## 11.31 Forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- Trace d'une somme de matrices :

$$\begin{aligned}
 tr(A + B) &= \sum_{i=1}^n (A + B)_{ii} \\
 &= \sum_{i=1}^n A_{ii} + B_{ii} \\
 &= \sum_{i=1}^n A_{ii} + \sum_{i=1}^n B_{ii} \\
 &= tr(A) + tr(B)
 \end{aligned}$$

- Trace d'un produit par un scalaire :

$$\begin{aligned}
 tr(\lambda A) &= \sum_{i=1}^n (\lambda A)_{ii} \\
 &= \lambda \sum_{i=1}^n A_{ii} \\
 &= \lambda tr(A)
 \end{aligned}$$

- Trace d'un produit de matrices :

$$\begin{aligned}
 tr(AB) &= \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{ki} \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n B_{ki} A_{ik} \\
 &= \sum_{k=1}^n (BA)_{kk} \\
 &= tr(BA)
 \end{aligned}$$

## 11.33 Exemple

On suppose  $A$  et  $B$  solutions.

Donc  $AB - BA = I_n$

Donc  $tr(AB - BA) = tr(I_n) = n$

Or  $tr(AB - BA) = 0$

Absurde.

### 11.37 Stabilité des matrices diagonales ou triangulaires

On montre le résultat pour les matrices triangulaires supérieures (ensemble noté  $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ ).  
 Soit  $(A, B) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2$ . On a bien  $A + B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$  et aussi  $\lambda A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ .  
 Soit  $i > j$ , on a :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$$

- Si  $i > j$ ,  $A_{ik} = 0$ .
- Si  $i = j$ ,  $B_{kj} = 0$ .

Donc  $(AB)_{ij} = 0$ .

Donc  $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ .

$$\text{Si } (AB) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2, \text{ alors } {}^t(AB) = \underbrace{{}^tB}_{\in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \times \underbrace{{}^tA}_{\in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$$

Donc  $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$

Le résultat est vrai pour les matrices diagonales, à la fois triangulaires supérieures et inférieures.

### 11.41 Nilpotence des matrices triangulaires

Soit  $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ .

On va montrer par récurrence sur  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  que :

$${}^" T^k = \begin{pmatrix} O & - & O & - & \Delta \\ & & & & | \\ & & & & O \\ & & & & | \\ & & & & O \end{pmatrix} {}"$$

C'est-à-dire que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $i + k - 1 \geq j \Rightarrow T_{ij}^k = 0$ .

On suppose le résultat vrai pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

Soit  $i + k \geq j$ .

$$\begin{aligned} (T^{k+1})_{ij} &= (T^k T)_{ij} \\ &= \sum_{p=1}^n T_{ip}^k T_{pj} \end{aligned}$$

- Si  $p \leq i + k - 1$ ,  $T_{ip}^k = 0$
- Si  $p \geq i + k$ ,  $T_{pj} = 0$

Donc  $(T^{k+1})_{ij} = 0$ .

Par récurrence,  $P(k)$  est vrai pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . En particulier, pour  $k = n$ , on obtient  $T^n = 0$ .

### 11.44 Opérations

- ${}^t A \times {}^t (A^{-1}) = {}^t (A^{-1} A) = {}^t I_n = I_n$
- ${}^t (A^{-1}) \times {}^t A = {}^t (A A^{-1}) = {}^t I_n = I_n$

Donc  $({}^t A)^{-1} = {}^t (A^{-1})$

### 11.48 Caractérisation de $GL_2(\mathbb{K})$

On note  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} M.N &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \det(M)I_2 \end{aligned}$$

- Si  $\det(M) \neq 0$ , alors  $M \times \left(\frac{1}{\det(M)}N\right) = I_2$ . Donc  $M$  est inversible et  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}N$ .
- Si  $\det(M) = 0$ , alors  $M.N = 0$  donc  $M$  n'est pas inversible.

### 11.49 Matrices diagonales inversibles

Soit  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .



On suppose que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \neq 0$$

$$\begin{aligned} D \times \text{Diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) &= \text{Diag}(\lambda_1 \times \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n \times \lambda_n^{-1}) \\ &= \text{Diag}(1, \dots, 1) \\ &= I_n \end{aligned}$$

Donc  $D$  est inversible et

$$D^{-1} = \text{Diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$$



Par contraposée, soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\lambda_i = 0$ .

$$D \times \text{Diag}(0, \dots, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}} \text{ place}}, \dots, 0) = 0$$

Donc  $D$  est un diviseur de 0, donc  $D$  n'est pas inversible.

### 11.50 Exemple

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & & & -a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

### 11.51 Matrices triangulaires inversibles

On raisonne par récurrence forte sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour  $n = 1$  RAF.



Pour  $n = 2$ , RAS (11.48).

On suppose le résultat vrai pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soi  $T \in \mathcal{T}_{n+1}^+(\mathbb{K})$ . Donc  $T$  est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \mathcal{U} & X \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mathcal{U} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}), X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ et } a \in \mathbb{K}$$

$\Rightarrow$

On suppose que la diagonale de  $T$  ne contient aucun 0.

Donc  $\mathcal{U}$  est inversible d'après l'hypothèse de récurrence.

On choisit  $V \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$  tel que (Hypothèse de récurrence).

$$\mathcal{U}V = I_n$$

On a :

$$\begin{aligned} T \times \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & \underbrace{a^{-1}}_{a \neq 0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{U} & X \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_n & a^{-1}X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc (11.50) :

$$T \times \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -a^{-1}X \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Donc  $T$  est inversible d'inverse dans  $\mathcal{T}_{n+1}^+(\mathbb{K})$ .

$\Leftarrow$

On suppose que la diagonale de  $T$  contient un 0.

— Si  $T_{11} = 0$ , alors  $T = \begin{pmatrix} 0 & L \\ & W \end{pmatrix}$

Et  $T \times \underbrace{E_{11}}_{\neq 0} = 0$

Donc  $T \notin GL_{n+1}(\mathbb{K})$

— On suppose que le premier 0 apparait à  $T_{kk}$  avec  $k \geq 2$ .

Donc

$$T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} F & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F \in \mathcal{T}_{k-1}^+(\mathbb{K})$$

La diagonale de  $F$  ne contient aucun 0 donc  $F \in GL_{k-1}(\mathbb{K})$  et :

$$\begin{aligned} A \times \begin{pmatrix} 0 & -F^{-1}G \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -F^{-1}G \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors :

$$T \times \underbrace{\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = 0$$

Donc  $T \notin GL_{n+1}(\mathbb{K})$ .

## 11.54 Exemple

Soit  $X \in \mathbb{K}^2$ .

$$\begin{aligned}
 X \in \ker A &\Leftrightarrow AX = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow X = 0
 \end{aligned}$$

Donc  $\ker A = \{0\}$ .

$$\begin{aligned}
 X \in \ker B &\Leftrightarrow BX = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x + y = 0 \\
 &\Leftrightarrow X \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{K} \right\} \\
 &\Leftrightarrow X \in \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Donc  $\ker B = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

## 11.61 Exemple

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 5y + z = 2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 7y = 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 1 - 2y \\ 3x = 3 - 7y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -3z = y \\ x = 1 - \frac{7}{3}y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{7}{3}y \\ z = -\frac{1}{3}y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 - \frac{7}{3}y \\ y \\ -\frac{1}{3}y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \mathcal{S} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K} \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 11.65 Caractérisation des matrices inversibles par les systèmes linéaires

$\Rightarrow$

RAF : (11.63)

$\Leftarrow$

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $Y_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  définie par :

$$Y_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par hypothèse, on choisit  $X_i \in \mathbb{K}^n$  tel que :

$$AX_i = Y_i$$

On pose  $B = (X_1 \ \dots \ X_n)$  et on remarque que :

$$(Y_1 \ \dots \ Y_n) = I_n$$

Par construction :

$$AB = I_n$$

## 11.74 Système équivalents et opérations élémentaires

Soit  $\Sigma$  un système et  $\Sigma'$  un système obtenu après avoir effectué une opération élémentaire.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  la matrice du système  $\Sigma$  et  $B \in \mathbb{K}^n$  son second membre.

Soit  $X \in \mathbb{K}^p$ . Effectuer une opération élémentaire revient à choisir une matrice  $P$  de la forme  $P_{ij}$ ,  $Q_i(\lambda)$ ,  $R_{ij}(\lambda)$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{S}(\Sigma) &\Leftrightarrow AX = B \\ &\stackrel{P \in GL_n(\mathbb{K})}{\Leftrightarrow} PAX = PB \\ &\Leftrightarrow X \in \mathcal{S}(\Sigma') \end{aligned}$$

Donc  $\boxed{\mathcal{S}(\Sigma) = \mathcal{S}(\Sigma')}$ .

## Chapitre 12

# Arithmétique

## 12.1 Propriété fondamentale de $\mathbb{Z}$

### Théorème 12.1

Toute partie non vide et minorée de  $\mathbb{Z}$  admet un plus petit élément.

Soit  $A$  une partie non vide et minorée de  $\mathbb{Z}$ .

On note  $\mathcal{M}$  l'ensemble des minorants de  $A$ .

Par hypothèse,  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ .

Supposons par l'absurde que :

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a \in \mathcal{M} \Rightarrow a + 1 \in \mathcal{M}$$

D'après le principe de récurrence, si  $a_0 \in \mathcal{M}$  est fixé :

$$\forall n \geq a_0, n \in \mathcal{M}$$

En particulier, pour  $n \in A$  ( $A \neq \emptyset$ ) on a :

$$n \geq a_0 \text{ (} a_0 \text{ est un minorant)}$$

Donc  $n \in \mathcal{M}$ .

Donc  $n + 1 \in \mathcal{M}$ .

Donc  $n + 1$  est un minorant de  $A$ .

Donc  $n + 1 \leq n$ .

Absurde.

Ainsi, on choisit  $a \in \mathbb{Z}$  avec  $a \in \mathcal{M}$  et  $a + 1 \notin \mathcal{M}$ .

On choisit donc  $n \in A$  tel que :

$$a \leq n < a + 1$$

Donc  $n = a \in A$ .

Donc  $a = \min(A)$ .

## 12.4 Division euclidienne

### Théorème 12.4

Soit  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ . Il existe un unique couple  $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  tel que :

$$a = bq + r$$

avec  $0 \leq r < |b|$ . Cette égalité est appelée **division euclidienne de  $a$  par  $b$** , l'entier  $q$  est alors appelé **quotient** et l'entier  $r$  le **reste**, tandis que  $a$  porte le nom de dividende et  $b$  celui de diviseur.

#### Existence :

On suppose dans un premier temps que  $b > 0$ .

Soit  $a \in \mathbb{Z}$ .

On note  $A = \{n \in \mathbb{Z}, bn \leq a\}$ .

$A$  est un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{Z}$  et majoré.

Il admet donc un plus grand élément, noté  $q$ . On a donc  $q \in A$  et  $q + 1 \notin A$ .

$$bq \leq a < b(q + 1)$$

$$\text{donc } 0 \leq a - bq < b$$

On pose alors  $r = a - bq$ . L'existence est alors prouvée pour  $b > 0$ .

Si  $b < 0$ , alors  $-b > 0$  et on choisit  $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$  tel que :

$$a = -b \times q + r \text{ avec } 0 \leq r < -b$$

Le couple  $(-q, r)$  convient.

#### Unicité :

On suppose  $a = bq + r = bq' + r'$  avec  $0 \leq r, r' < |b|$ .

Donc  $b(q - q') = r' - r$ .

Donc  $\underbrace{|b|}_{>0} \times |q - q'| = |r' - r| < \underbrace{|b|}_{>0}$ .

Donc  $|q - q'| < 1$ .

Donc  $q = q'$ .

Puis  $r = r'$ .

## 12.9 Divisibilité et multiple

### Proposition 12.9

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers. Alors  $a$  est divisible par  $b$  si et seulement si  $a$  est un multiple de  $b$ .

$\Rightarrow$

Si  $b|a$ , alors :

$$\begin{aligned} a &= bq + 0 \\ &= bq \\ &\in b\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

Si  $a \in b\mathbb{Z}$ ,  $a = b \times n = b \times n + 0$ .

Par unicité de la division euclidienne,  $b|a$ .

## 12.10 Divisibilité et normes

### Proposition 12.10

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers avec  $a \neq 0$  et  $b|a$ . Alors  $|b| \leq |a|$ .

Si  $b|a$ , alors  $a = b \times n$  avec  $n \neq 0$  var  $a \neq 0$ . Donc :

$$\begin{aligned} |a| &= |b| \times |n| \\ &\geq |b| \times 1 \end{aligned}$$

## 12.11 Entiers associés

### Proposition 12.11

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers. Alors

$$a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} \Leftrightarrow a = \pm b$$

On dit alors que  $a$  et  $b$  sont associés.

$\Leftarrow$

Si  $a = \pm b$ , alors  $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$ .

$\Rightarrow$

Si  $a = 0$  et  $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$ , alors  $b = 0$ .

Si  $a \neq 0$  et  $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$ , alors  $b \neq 0$  et d'après (12.0) :

$$|a| \leq |b| \text{ et } |b| \leq |a|$$

Donc  $|a| = |b|$

## 12.14 Intégrité de la divisibilité

### Proposition 12.14

Soit  $a, b$  et  $c$  trois entiers, avec  $c \neq 0$ . Si  $nb|na$ , alors  $n|a$ .

Si  $cb|ca$ , alors  $ca = ncb$ .

Or  $c$  est régulier dans  $\mathbb{Z}$  donc :

$$a = nb$$

Donc  $b|a$ .

## 12.20 Cas d'une divisibilité

### Lemme 12.20

Si  $a|b$ , alors

$$\mathcal{D}_{a,b} = \mathcal{D}_a$$

Si  $a|b$ , si  $c|a$ , alors  $c|b$ .

Donc  $\mathcal{D}_b \supset \mathcal{D}_a$ .

Ainsi,  $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b = \mathcal{D}_a$

## 12.21 Préparation à l'algorithme d'Euclide

### Lemme 12.21

Soit  $a, b$  et  $q$  trois entiers, alors

$$\mathcal{D}_{a,b} = \mathcal{D}_{a-bq,b}$$



Soit  $n \in \mathcal{D}_{a,b}$ , alors :

$$n|a \text{ et } n|b$$

$$\text{donc } n|a - bq$$

$$\text{donc } n \in \mathcal{D}_{a-bq,b}$$



Soit  $n \in \mathcal{D}_{a-bq,b}$

$$n|a - bq \text{ et } n|b$$

$$\text{donc } n|a - bq + bq$$

$$\text{soit } n|a$$

$$\text{donc } n \in \mathcal{D}_{a,b}$$

## 12.23 Algorithme d'Euclide étendu ou théorème de Bézout

### Lemme 12.23

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers. Soit  $r$  le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide appliqué à  $a$  et  $b$ . Il existe deux entiers  $u$  et  $v$  tels que

$$au + bv = r$$

On utilise les notations du lemme (12.22).

On démontre par récurrence double que :

$$\forall n, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{Z}^2, au_n + bv_n = r_n$$

Initialisation :

Pour  $n = 0$  il s'agit de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  ( $u_0 =$  et  $v_0 = -q$ ).

Pour  $n = 1$  :

$$\begin{aligned} a &= bq + r \\ b &= r \times q_1 + r_1 \\ \text{donc } r &= b - rq_1 \\ &= b - q_1(a - bq) \\ &= -q_1a + b(1 + q_1q) \end{aligned}$$

Hérédité :

On suppose le résultat vrai aux rangs  $n$  et  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} a_n &= b_n q_n + r_n \\ b_n &= r_n q_{n+1} + r_{n+1} \\ r_n &= r_{n+1} q_{n+2} + r_{n+2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} r_{n+2} &= r_n - r_{n+1} q_{n+2} \\ &= au_n + bv_n - (au_{n+1} + bv_{n+1})q_{n+2} \\ &= a \underbrace{(u_n - u_{n+1} q_{n+2})}_{\in \mathbb{Z}} + b \underbrace{(v_n - v_{n+1} q_{n+2})}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

On utilise le principe de récurrence avec la dernière étape de l'algorithme.

## 12.24 Application basique

## Exemple 12.24

Appliquer l'algorithme d'Euclide aux entiers 121 et 26.

$$\begin{aligned} 121 &= 26 \times 4 + 17 \\ 26 &= 17 \times 1 + 9 \\ 17 &= 9 \times 1 + 8 \\ 9 &= 8 \times 1 + 1 \\ 8 &= 1 \times 8 + 0 \end{aligned}$$

On remonte l'algorithme :

$$\begin{aligned} 1 &= 9 - 8 \\ &= 9 - (17 - 9) \\ &= 2 \times 9 - 17 \\ &= 2 \times (26 - 17) - 17 \\ &= 2 \times 26 - 3 \times 17 \\ &= 2 \times 26 - 3 \times (121 - 4 \times 26) \\ &= 14 \times 26 - 3 \times 121 \end{aligned}$$

## 12.26 Théorème de Bézout

## Théorème 12.26

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers. Alors  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si et seulement si il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que

$$au + bv = 1$$





On suppose  $a$  et  $b$  premiers entre eux.

Donc  $\mathcal{D}_{a,b} = \{\pm 1\}$ .

Soit  $r$  le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide,

$$\mathcal{D}_r = \mathcal{D}_{a,b} = \{\pm 1\}$$

Donc  $r = \pm 1$ .

D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers  $u$  et  $v$  tels que :

$$au + bv = 1$$



Réciproquement, si  $au + bv = 1$ , alors pour tout  $d \in \mathcal{D}_{a,b}$   $d|au + bv$  donc  $d|1$  donc  $d = \pm 1$ .

Donc  $\mathcal{D}_{a,b} = \{\pm 1\}$ .

## 12.28 Proposition

### Proposition 12.28

Si  $a$  est premier avec  $b$  et  $c$ , alors  $a$  est premier avec  $bc$ .

D'après le théorème de Bézout, on écrit :

$$au_1 + bv_1 = 1$$

$$au_2 + cv_2 = 1$$

avec  $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^4$ .

Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= (au_1 + bv_1)(au_2 + cv_2) \\ &= a \underbrace{(au_1u_2 + bv_1u_2 + cu_1v_2)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{v_1v_2}_{\in \mathbb{Z}} bc \end{aligned}$$

Donc  $a$  et  $bc$  sont premiers entre eux d'après le théorème de Bézout.

## 12.29 Proposition

### Proposition 12.29

Si  $a$  est premier avec  $b$ , que  $a|c$  et  $b|c$ , alors  $ab|c$ .

D'après le théorème de Bézout :

$$au + bv = 1, (u, v) \in \mathbb{Z}^2$$

Donc :

$$auc + bvc = c$$

Or  $a|c$  et  $b|c$ , donc :

$$c = ka \text{ et } c = pb$$

Donc :

$$ab \underbrace{[pu + vk]}_{\in \mathbb{Z}} = c$$

Donc  $ab|c$ .

## 12.30 Théorème de Gauss

### Théorème 12.30

Si  $a|bc$  et que  $a$  est premier avec  $b$ , alors  $a|c$ .

D'après le théorème de Bézout :

$$au + bv = 1 \text{ avec } (u, v) \in \mathbb{Z}^2$$

Donc  $auc + bvc = c$ .

Or  $a|bc$  donc  $a|auc + bvc$ .

Soit  $a|c$ .

## 12.31 Equation de Bézout

### Exemple 12.31

Résoudre l'équation d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $3x - 2y = 7$ .

On remarque que 3 et 2 sont premiers entre eux.

$$\begin{aligned} 3 - 2 &= 1 \\ \text{donc } 3 \times 7 - 2 \times 7 &= 7 \\ \text{donc } (7, 7) &\in \mathcal{S} \end{aligned}$$

On note  $(x_0, y_0)$  cette solution.

Soit  $(x, y) \in \mathcal{S}$ .

Donc :

$$\begin{aligned} 7 &= 3x - 2y \\ 7 &= 3x_0 - 2y_0 \\ \text{donc } 3(x - x_0) &= 2(y - y_0) \end{aligned}$$

Or  $3|3(x - x_0)$  et 3 premier avec 2.

Donc  $3|y - y_0$ .

Donc  $y - y_0 = 3k$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ . (Théorème de Gauss)

De la même manière,  $x - x_0 = 2l$ , avec  $l \in \mathbb{Z}$ . (Théorème de Gauss)

Réciproquement, soit  $x = x_0 + 2l$  et  $y = y_0 + 3k$ .

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow 7 = 3x - 2y = 3x_0 - 2y_0 + 6l - 6k \\ &\Leftrightarrow 6l - 6k = 0 \\ &\Leftrightarrow k = l \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{S} = \{(x_0 + 2k, y_0 + 3k), k \in \mathbb{Z}\}$

## 12.32 Proposition

### Proposition 12.32

Si  $ar \equiv br \pmod{n}$  et si  $r$  et  $n$  sont premiers entre eux, alors  $a \equiv b \pmod{n}$ .

Si  $ar \equiv br \pmod{n}$ , alors  $n|r(a - b)$ .

Donc  $n|a - b$  ( $n$  premier avec  $r$  et théorème de Gauss).

Donc  $a \equiv b \pmod{n}$ .

## 12.37 Lien avec les idéaux

### Proposition 12.37

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers, alors  $d$  est le  $\text{pgcd}$  de  $a$  et  $b$  si et seulement si  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ .

Soit  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ .  $a\mathbb{Z}$  et  $b\mathbb{Z}$  sont des idéaux de  $\mathbb{Z}$ .

Donc  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$  est un idéal de  $\mathbb{Z}$ , donc en particulier un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ .

On choisit donc  $d \geq 0$  tel que  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ .

Montrons que  $d = \text{pgcd}(a, b) = a \wedge b$ .

D'une part :

$$\begin{aligned} d &\in d\mathbb{Z} && \text{donc } d = au + bv \text{ (avec } (u, v) \in \mathbb{Z}^2) \\ &\in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \\ \text{or } a \wedge b &| a \text{ et } a \wedge b && \text{donc } a \wedge b | au + bv \\ &| d && \text{soit } a \wedge b | d \end{aligned}$$

D'autre part,  $a \wedge b$  est le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide, donc (12.23) :

$$\begin{aligned} a \wedge b &= au + bv \text{ (avec } (u, v) \in \mathbb{Z}^2) \\ &\in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \\ &\in d\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc  $d | a \wedge b$ .

Ainsi,  $d$  et  $a \wedge b$  sont positifs et associés, donc égaux.

## 12.38 Préparation au calcul pratique d'un $\text{pgcd}$

### Lemme 12.38

Si  $a$  et  $b$  sont tous les deux non nuls, alors pour tout  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a - bq, b)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{pgcd}(a,b)} &= \mathcal{D}_{a,b} \\ &\stackrel{(12.21)}{=} \mathcal{D}_{a-bq,b} \\ &= \mathcal{D}_{\text{pgcd}(a-bq,b)} \end{aligned}$$

Les deux  $\text{pgcd}$  sont associés, donc égaux car positifs.

## 12.39 Caractérisation du $\text{pgcd}$

### Proposition 12.39

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers et  $d \in \mathbb{N}$ . Alors  $d = \text{pgcd}(a, b)$  si et seulement si il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  avec  $u$  et  $v$  premiers entre eux, tels que  $a = du$  et  $b = dv$ .

$\Rightarrow$

On suppose que  $d = a \wedge b$ .

Donc  $d | a$  et  $d | b$ .

On écrit donc  $a = du$  et  $b = dv$  avec  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ .

Notons  $n = u \wedge v$ . On écrit  $u = n \times u'$  et  $v = n \times v'$  avec  $(u', v') \in \mathbb{Z}^2$ .

Donc  $a = d \times n \times u'$  et  $b = d \times n \times v'$ .

Donc  $dn \in \mathcal{D}_{a,b} = \mathcal{D}_d$ .

Donc  $dn | d$ .

Donc  $n = 1$ .



On suppose que  $a = du$  et  $b = dv$  avec  $u \wedge v = 1$ .

D'après le théorème de Bézout :

$$uu' + vv' = 1 \text{ (avec } (u', v') \in \mathbb{Z}^2)$$

Donc  $duu' + dvv' = d$ .

Soit  $au' + bv' = d$ .

Donc  $d \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$ .

Donc  $a \wedge b \mid d$ .

Par ailleurs,  $d \in \mathcal{D}_{a,b} = \mathcal{D}_{a \wedge b}$ .

Donc  $d \mid a \wedge b$ .

Ainsi,  $a \wedge b$  et  $d$  sont associés (et positifs) donc égaux.

## 12.40 Propriétés du $\text{pgcd}$

### Proposition 12.40

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers tous deux non nuls.

1. pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , si  $n \mid a$  et  $n \mid b$ , alors  $n \mid \text{pgcd}(a, b)$  ;
2. pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{pgcd}(ka, kb) = k \text{pgcd}(a, b)$  ;
3. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{pgcd}(a^n, b^n) = \text{pgcd}(a, b)^n$  ;
4. si  $a$  et  $c$  sont premiers entre eux, alors  $\text{pgcd}(a, bc) = \text{pgcd}(a, b)$ .

1. RAF (définition)

2. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On écrit (12.39) :

$$\begin{aligned} a &= (a \wedge b)u \\ b &= (a \wedge b)v \text{ (avec } u \wedge v = 1) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} ka &= [k(a \wedge b)]u \\ kb &= [k(a \wedge b)]v \end{aligned}$$

Donc (12.39) :

$$\text{pgcd}(ka, kb) = k(a \wedge b)$$

3. Avec une partie des notations de 2. :

$$\begin{aligned} a^n &= (a \wedge b)^n u^n \\ b^n &= (a \wedge b)^n v^n \end{aligned}$$

Avec  $(u^n) \wedge (v^n) = 1$ .

Donc (12.39) :

$$\text{pgcd}(a^n, b^n) = (a \wedge b)^n$$

4.

$$\begin{aligned} a &= (a \wedge b)u \\ b &= (a \wedge b)v \text{ (avec } u \wedge v = 1) \end{aligned}$$

Donc

$$bc = (a \wedge b) \times vc$$

Or, puisque  $a \wedge c = 1$  et que  $u \mid a$ , alors :

$$u \wedge c = 1$$

Donc (12.28) :

$$u \wedge (vc) = 1$$

Donc (12.39) :

$$\text{pgcd}(a, bc) = a \wedge b$$

## 12.44 Définition du PPCM

### Proposition 12.44

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers non nuls. On appelle **PPCM** (plus petit commun multiple) l'unique entier  $m \in \mathbb{N}$  tel que

$$(a\mathbb{Z}) \cap (b\mathbb{Z}) = m\mathbb{Z}.$$

Cet entier est noté  $\text{ppcm}(a, b)$  ou encore  $a \vee b$ .

$a\mathbb{Z}$  et  $b\mathbb{Z}$  ont des idéaux de  $\mathbb{Z}$ .

Donc  $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$  est un idéal de  $\mathbb{Z}$ , donc un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ .

Donc il existe un unique entier  $m \in \mathbb{N}$  tel que :

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$$

Comme  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ , alors  $m \neq 0$ .

## 12.45 Caractérisation du $\text{ppcm}$

### Proposition 12.45

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers, et  $m \in \mathbb{N}$ . Alors  $m = \text{ppcm}(a, b)$  si et seulement si il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ , premiers entre eux tels que  $m = au = bv$ .

$\Rightarrow$

On suppose que  $m = a \vee b$ .

Donc  $m \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ .

Donc  $m = au = bv$ .

On note  $d = \text{pgcd}(u, v)$ .

On écrit donc :

$$u = da'$$

$$v = db'$$

Donc :

$$ada' = bdb'$$

Donc :

$$aa' = bb' = m'$$

Donc :

$$\begin{aligned} m' &\in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \\ &\in m\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc :

$$dm' = m|m'$$

Donc :

$$d = 1$$

$\Leftarrow$

On suppose que  $m = au = bv$  avec  $\text{pgcd}(u, v) = 1$ .

D'une part :

$$m \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \text{ppcm}(a, b)\mathbb{Z}$$

Donc :

$$\text{ppcm}(a, b) | m$$

D'autre part, d'après le théorème de Bézout :

$$uu' + vv' = 1 \text{ avec } (u', v') \in \mathbb{Z}^2$$

Donc :

$$uu' \underbrace{ppcm(a, b)}_{ka} + vv' \underbrace{ppcm(a, b)}_{qb} = ppcm(a, b)$$

Donc :

$$m(u'k + vq') = ppcm(a, b)$$

Donc  $m \mid ppcm(a, b)$ .

## 12.46 Propriétés du $ppcm$

### Proposition 12.46

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers non nuls, alors :

1. pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , si  $a \mid n$  et  $b \mid n$ , alors  $ppcm(a, b) \mid n$  ;
2. si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors  $ppcm(a, b) = |ab|$  ;
3. pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $ppcm(ka, kb) = kppcm(a, b)$  ;
4.  $ppcm(a, b) \times pgcd(a, b) = |ab|$  ;
5. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $ppcm(a^n, b^n) = ppcm(a, b)^n$ .

1. RAF (12.44)
2. On suppose que  $a > 0$  et  $b > 0$ .

$$ab = ba$$

avec  $a \wedge b = 1$ .

D'après (12.45) :

$$ppcm(a, b) = ab$$

3. On écrit (12.45) :

$$ppcm(a, b) = au = bv \text{ (avec } u \wedge v = 1)$$

Alors :

$$\begin{aligned} b \wedge ppcm(a, b) &= (ak)u \\ &= (bk)v \end{aligned}$$

Donc (12.45) :

$$ppcm(ak, bk) = kppcm(a, b)$$

5. Avec les mêmes notations :

$$\begin{aligned} ppcm(a, b)^n &= a^n u^n \\ &= b^n v^n \text{ (avec } u^n \wedge v^n = 1) \end{aligned}$$

Donc (12.45) :

$$ppcm(a^n, b^n) = ppcm(a, b)^n$$

4. D'après (12.39) (avec  $a > 0$  et  $b > 0$ ) :

$$\begin{aligned} a &= pgcd(a, b)u \\ b &= pgcd(a, b)v \text{ (avec } u \wedge v = 1) \\ pgcd(a, b) \times ppcm(a, b) &= pgcd(a, b)ppcm(pgcd(a, b)u, pgcd(a, b)v) \\ &\stackrel{(3.)}{=} pgcd(a, b)^2 ppcm(u, v) \\ &\stackrel{(2.)}{=} pgcd(a, b)^2 uv \\ &= ab \end{aligned}$$

## 12.50 Propriétés

### Proposition 12.50

1. Si  $p \in \mathbb{P}$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , soit  $p|n$  soit  $\text{pgcd}(n, p) = 1$ .
2. Si  $n \geq 2$ , alors  $n$  possède au moins un diviseur premier.
3. L'ensemble  $\mathbb{P}$  est infini.
4. Si  $n > 1$  n'a pas de diviseur dans  $[2; \sqrt{n}]$ , alors  $n$  est premier.
5. Si  $p \in \mathbb{P}$ , alors pour tout  $a$  et  $b$  entiers, on a  $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ .

1. On suppose que  $p \nmid n$ .

Soit  $d \in \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_n$ .

$d > 0$  et  $d \neq p$ .

Donc  $d = 1$ .

Donc  $p \wedge n = 1$ .

2. On raisonne par récurrence forte  $\rightarrow$  cf. (2.41).
3. On suppose par l'absurde que :

$$\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

On pose :

$$m = \prod_{i=1}^n (p_i) + 1$$

Soit  $p_i \in \mathbb{P}$  tel que  $p_i | m$  (12.50.2).

Donc  $p_i | 1$ .

Absurde.

4. On suppose  $n \notin \mathbb{P}$ .  
Soit  $n = ab$  avec  $a \geq 2$  et  $b \geq 2$ .  
Si  $a > \sqrt{n}$  et  $b > \sqrt{n}$ , alors  $ab = n > \sqrt{n}^2 = n$ .  
Absurde.
5. D'après le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (a + b)^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \\ &= a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \end{aligned}$$

Or, pour  $k \in [1; p-1]$ ,  $p \binom{p-1}{k-1} = k \binom{p}{k}$  (formule du capitaine).

Or  $k \wedge p = 1$  et  $p \mid p \binom{p-1}{k-1}$  soit  $p \mid \binom{p}{k}$ .

Donc :

$$p \mid \binom{p}{k}$$

Donc :

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

## 12.51 Petit théorème de Fermat

### Théorème 12.51

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et  $p \in \mathbb{P}$ , on a  $n^p \equiv n \pmod{p}$ . En outre, si  $\text{pgcd}(n, p) = 1$ , alors  $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

Soit  $p \in \mathbb{P}$ . On montre le résultat pour  $n \geq 0$  par récurrence.

On a bien  $0^p = 0 \equiv 0 \pmod{p}$ . Si  $n^p \equiv n \pmod{p}$ , alors :

$$\begin{aligned} (n + 1)^p &\equiv n^p + 1^p \pmod{p} \quad (12.50.5). \\ &\equiv n + 1 \pmod{p} \quad (\text{Hypothèse de récurrence}) \end{aligned}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

— Si  $p \geq 3$  (donc  $p$  est impair), alors :

$$\begin{aligned} n^p &\equiv n \pmod{p} \\ (-n)^p &\equiv -n^p \pmod{p} \\ &\equiv -n \pmod{p} \end{aligned}$$

— Si  $p = 2$ ,  $-1 \equiv 1 \pmod{2}$ .

Donc :

$$\begin{aligned} (-n)^2 &\equiv n^2 \pmod{2} \\ &\equiv n \pmod{2} \\ &\equiv -n \pmod{2} \end{aligned}$$

## 12.52 Décomposition en produit de facteurs premiers

### Théorème 12.52

Soit  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ , alors il existe des nombres premiers  $p_1, \dots, p_r$  tous distincts, et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$  et  $\epsilon \in \{\pm 1\}$  tels que

$$n = \epsilon p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$$

Cette décomposition est unique à l'ordre près.

Existence :

On montre l'existence par récurrence forte sur  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

— RAF si  $n = 2$ .

— On suppose le résultat vrai pour tout  $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ .

— Si  $n + 1 \in \mathbb{P}$  : RAF

— Si  $n + 1 \notin \mathbb{P}$ , on écrit :

$$n + 1 = k \times q \text{ avec } (k, q) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$$

Donc  $k$  et  $q$  sont des produits de facteurs premiers.

Donc  $n + 1 = kq$  est aussi un produit de facteurs premiers.

Le résultat est donc vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et par extension pour  $-n$  ( $\epsilon = -1$ ).

Unicité :

On suppose que :

$$n = \epsilon p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_r^{\alpha_r} = \epsilon' q_1^{\beta_1} \times \dots \times q_s^{\beta_s}$$

Nécessairement,  $\epsilon = \epsilon'$ .

Soit  $p_i \in \{p_1, \dots, p_r\}$ .

On a  $p_i | n$  donc  $p_i \mid q_1^{\beta_1} \times \dots \times q_s^{\beta_s}$ .

Il existe  $p_i \in \mathbb{P}$  donc  $j \in \llbracket 1; s \rrbracket$  tel que  $p_i | q_j$ .

Donc  $p_i = \underbrace{q_j}_{\in \mathbb{P}}$ .

Ainsi :

$$\{p_1, \dots, p_r\} \subset \{q_1, \dots, q_s\}$$

Par symétrie :

$$\{p_1, \dots, p_r\} = \{q_1, \dots, q_s\}$$

Donc  $r = s$  et quitte à renommer  $q_j$ , on peut supposer que :

$$\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, p_i = q_i$$

$$\begin{aligned} p_i^{\alpha_i} | n &\text{ donc } p_i^{\alpha_i} \mid \prod_{j=1}^r p_j^{\beta_j} \\ &\text{ donc } \alpha_i \leq \beta_i \end{aligned}$$

Par symétrie,  $\alpha_i = \beta_i$ .

L'unicité est prouvée.



## 12.54 Caractérisation de la valuation

### Théorème 12.54

Soit  $n \in \mathbb{Z}^*$  et  $p \in \mathbb{P}$  et  $d \in \mathbb{N}$ . Alors  $d = v_p(n)$  si et seulement si  $n = p^d u$ , avec  $u \wedge p = 1$ .

On a :

$$\begin{aligned} d = v_p(n) &\Leftrightarrow (p^d | n \text{ et } p^{d+1} \nmid n) \\ &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z}, n = p^d u \text{ et } p^{d+1} \nmid u \\ &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z}, n = p^d u \text{ et } p \nmid u \\ &\stackrel{(p \in \mathbb{P})}{\Leftrightarrow} \exists u \in \mathbb{Z}, n = p^d u \text{ et } u \wedge p = 1 \end{aligned}$$

## 12.55 Valuation et décomposition en produit de facteurs premiers

### Théorème 12.55

Si  $p|n$ , alors  $v_p(n)$  est la puissance de  $p$  intervenant dans la décomposition en produit de facteurs premiers de  $n$ .

On écrit la décomposition :

$$n = \epsilon \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$$

Soit  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

$$n = \epsilon \times p_k^{\alpha_k} \times \underbrace{\prod_{i \neq k} p_i^{\alpha_i}}_{:=u \text{ (avec } u \wedge p_k = 1)}$$

Donc (12.54) :

$$\boxed{v_{p_k}(n) = \alpha_k}$$

## 12.56 Propriétés de la valuation

### Proposition 12.56

Pout tout  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$  et  $p \in \mathbb{P}$ , on a

1.  $p|n$  si et seulement si  $v_p(n) > 0$  ;
2.  $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$  ;
3.  $v_p(n + m) \geq \min(v_p(n), v_p(m))$  avec égalité si les valuations sont distinctes ;
4.  $n|m \Leftrightarrow (\forall q \in \mathbb{P}, v_q(n) \leq v_q(m))$  ;
5. si de plus  $n$  et  $m$  sont non nuls alors

$$v_p(n \wedge m) = \min(v_p(n), v_p(m)) \text{ et } v_p(n \vee m) = \max(v_p(n), v_p(m)).$$

1. RAF

2. On écrit  $m = p^{v_p(m)} \times u$  et  $n = p^{v_p(n)} \times v$  avec  $u \wedge p = 1 = v \wedge p$  (12.54).

Donc  $mn = p^{v_p(m)+v_p(n)} \times uv$ .

Or  $p \wedge (uv) = 1$ .

Donc (12.54) :

$$\boxed{v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)}$$

3. On suppose que  $v_p(m) \leq v_p(n)$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} n + m &= p^{v_p(n)} \times v + p^{v_p(m)} \times u \\ &= p^{v_p(m)} \left[ u + v_p^{v_p(n)-v_p(m)} \right] \end{aligned}$$

Ainsi,  $p^{v_p(m)} | n + m$ .

Par définition :

$$v_p(m + n) \geq v_p(m) = \min(v_p(m), v_p(n))$$

.

Si on suppose de plus que  $v_p(m) \neq v_p(n)$ , alors

$$p \wedge (u + v \times p^{v_p(n)-v_p(m)}) = p \wedge u = 1$$

Donc (12.54) :

$$v_p(n + m) = v_p(m) = \min(v_p(m), v_p(n))$$

4. On a :

$n|m$  ssi la décomposition en produit de facteurs premiers de  $n$  se retrouve dans celle de  $m$ .

(12.55) ssi pour tout  $p \in \mathbb{P}$  tel que  $p|n$ , alors  $v_p(n) \leq v_p(m)$ .

(si  $p \nmid n, v_p(n) = 0 \leq v_p(m)$ ) ssi pour tout  $p \in \mathbb{P}, v_p(n) \leq v_p(m)$ .

5. On a  $(n \wedge m) | n$  et  $(n \wedge m) | m$ .

Donc (12.56.4)  $v_p(n \wedge m) \leq \min(v_p(n), v_p(m))$ .

On suppose par exemple que  $v_p(n) \leq v_p(m)$ .

Donc  $p^{v_p(n)} | n$  et  $p^{v_p(n)} | m$ .

Donc  $p^{v_p(n)} | n \wedge m$ .

Par définition  $v_p(n \wedge m) \geq v_p(n)$ .

Donc :

$$v_p(n \wedge m) = \min(v_p(n), v_p(m))$$

On rappelle que  $(n \wedge m) \times (n \vee m) = |nm|$ .

Donc  $v_p((n \wedge m) \times (n \vee m)) = v_p(nm)$ .

Donc (12.56.2) :

$$\begin{aligned} v_p(n \vee m) &= v_p(n) + v_p(m) - v_p(n \wedge m) \\ &= v_p(n) + v_p(m) - \min(v_p(n), v_p(m)) \\ &= \max(v_p(n), v_p(m)) \end{aligned}$$

Les preuves ont été rédigées avec les hypothèses  $n \neq 0$  et  $m \neq 0$ . Si l'un des entiers est nul, on vérifie les assertions avec la convention  $v_p(0) = +\infty$ .

## Chapitre 13

# Polynômes

## 13.6 Produit de deux polynômes

### Définition 13.6

Soit  $P = (a_n)$  et  $Q = (b_n)$  deux polynômes de  $\mathbb{A}[X]$ . Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . Alors la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un polynôme. On définit alors  $PQ = (c_n)$ . La suite  $c = (c_n)$  est appelée **produit de convolution** (ou **produit de Cauchy**) des suites  $a = (a_n)$  et  $b = (b_n)$  et est parfois noté  $c = a \star b$ .

Montrons que  $(c_n)$  est un polynôme.

Soit  $N$  et  $M$  dans  $\mathbb{N}$  tels que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, a_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq M, b_n = 0 \end{cases}$$

Soit  $n \geq M + N$ , on a :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

- Si  $k \geq N$ ,  $a_k = 0$ .
- Si  $k \leq N$ ,  $n - k \geq M$ , donc  $b_{n-k} = 0$ .

Donc  $c_n = 0$ .

## 13.7 Structure d'anneau de $\mathbb{A}[X]$

### Théorème 13.7

La somme et le produit définis ci-dessus munissent  $\mathbb{A}[X]$  d'une structure d'anneau commutatif.

suites d'éléments de  $\mathbb{A}$

- $(\mathbb{A}[X], +)$  est un sous-groupe de  $(\widehat{\mathbb{A}^{\mathbb{N}}}, +)$  abélien donc est bien un sous-groupe abélien.
- Montrons que  $\times$  est associative. Soit  $(P, R, Q) \in \mathbb{A}[X]$ .  
On note  $P = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $R = (r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $Q = (q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .  
Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} (P \times (RQ))_n &= \sum_{k=0}^n p_k (RQ)_{n-k} \\ &= \sum_{i+j=n} p_i (RQ)_j \\ &= \sum_{i+j=n} \left( p_i \sum_{k+l=j} r_k q_l \right) \\ &= \sum_{i+k+l=n} p_i r_k q_l \\ &= ((PR) \times Q)_n \end{aligned}$$

- Notons  $E = (1, 0, \dots) = (\delta_{0n})_{n \in \mathbb{N}}$ .  
On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} (E \times P)_n &= \sum_{i+j=n} E_i \times P_j \\ &= \sum_{i+j=n} \delta_{0i} \times P_j \\ &= P_n \quad (i = 0, j = n) \\ &= (P \times E)_n \end{aligned}$$

Donc  $E$  est l'élément neutre de  $\mathbb{A}[X]$ .

—

$$\begin{aligned}
[P \times (R + Q)]_n &= \sum_{i+j=n} p_i(R + q)_j \\
&= \sum_{i+j=n} p_i(r_j + a_j) \\
&= \sum_{i+j=n} p_i r_j + \sum_{i+j=n} p_i q_j \\
&= (PR)_n + (PQ)_n \\
&= [PR + PQ]_n
\end{aligned}$$

Donc  $\times$  est distributive sur  $+$ .

— Comme  $\mathbb{A}$  est commutatif :

$$\sum_{i+j=n} p_i q_j = \sum_{i+j=n} q_j p_i$$

Donc  $\times$  est commutatif.

### 13.11 Monômes

#### Proposition 13.11

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $X^n = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, 1, 0, \dots)$ , le 1 est donc à l'indice  $n$  (soit  $X^n = (\delta_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ )

Pour  $n = 0$ , on a bien  $X^0 = (1, 0, \dots)$

Pour  $n = 1$ , RAF

On suppose le résultat vrai pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}
[X^{n+1}]_k &= [X^n \times X]_k \\
&= \sum_{i+j=k} [X^n]_i X_j \\
&= \sum_{i+j=k} \delta_{n,i} \times \delta_{j,1} \\
&= \delta_{k,n+1}
\end{aligned}$$

### 13.12 Expression d'un polynôme à l'aide de l'indéterminée formelle

#### Corollaire 13.12

Soit  $P = (a_n)$  un polynôme de  $\mathbb{A}[X]$ . Alors  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ , cette somme ayant un sens puisqu'elle est en fait finie, les  $a_k$  étant nuls à partir d'un certain rang.

$$\begin{aligned}
P &= (a_n)_{n \geq 0} \\
&= (a_0, a_1, a_2, \dots) \\
&= a_0(1, 0, 0, \dots) + a_1(0, 1, 0, \dots) + a_2(0, 0, 1, \dots) + \dots \\
&= a_0 X^0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + \dots
\end{aligned}$$

## 13.26 Dérivée de produits

### Proposition 13.26

— Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes à coefficients dans  $\mathbb{A}$ . Alors

$$(PQ)' = P'Q + Q'P.$$

— Soit  $P_1, \dots, P_n$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{A}$ , alors

$$(P_1 \dots P_n)' = \sum_{i=1}^n P_1 \dots P_{i-1} P_i' P_{i+1} \dots P_n.$$

— **Formule de Leibniz** : Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes à coefficients dans  $\mathbb{A}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

Soit  $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$ ,  $P' = \sum_{k \geq 1} k a_k X^{k-1}$  et  $Q = \sum_{k \geq 0} b_k X^k$ ,  $Q' = \sum_{k \geq 1} k b_k X^{k-1}$ .

On a :

$$PQ = \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) X^n$$

Donc :

$$\begin{aligned} (PQ)' &= \sum_{n \geq 1} \left[ n \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right] X^{n-1} \\ \text{et } P'Q &= \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} b_{n-k} \right] X^n \\ \text{et } PQ' &= \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{k=0}^n a_k (n-k+1) b_{n-k+1} \right] X^n \\ \text{donc } P'Q + Q'P &= \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} b_{n-k} \right] X^n + \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{k=0}^n (n-k+1) a_k b_{n-k+1} \right] X^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{k=1}^{n+1} k a_k b_{n-k+1} \right] X^n + \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{k=0}^n (n-k+1) a_k b_{n-k+1} \right] X^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[ (n+1) a_{n+1} b_0 + \sum_{k=1}^n (n+1) a_k b_{n-k+1} + (n+1) a_0 b_{n+1} \right] X^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[ (n+1) \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n-k+1} \right] X^n \end{aligned}$$

## 13.28 Dérivée d'une composition

### Proposition 13.28

Soit  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{A}[X]$ , alors

$$(Q \circ P)' = P' \times (Q' \circ P)$$

Soit  $Q = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$ .

Ainsi  $Q \circ P = \sum_{k \geq 0} a_k P^k$ .

Donc :

$$\begin{aligned}
 (Q \circ P)' &= \sum_{k \geq 0} a_k (p_k)' \quad (13.24) \\
 &= \sum_{k \geq 1} k a_k p' p^{k-1} \quad (13.27) \\
 &= P' \times \sum_{k \geq 1} k a_k p^{k-1} \\
 &= P' \times Q' \circ P
 \end{aligned}$$

### 13.34 Degré d'une somme, d'un produit, d'une dérivée

#### Proposition 13.34

Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{A}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{A}$ .

1. On a  $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$  avec égalité si  $\deg(P) \neq \deg(Q)$ .
2. Si  $\mathbb{A}$  est intègre et si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ .
3. Si  $\mathbb{A}$  est intègre alors  $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ .
4. On a  $\deg(P') \leq \deg(P) - 1$ .
5. Si  $\mathbb{A}$  est intègre alors  $\deg(Q \circ P) = \deg(Q) + \deg(P)$ , sauf si  $P = 0$  ou si  $Q = 0$  et  $P \in \mathbb{A}_0[X]$ .

1. On note  $p = \deg(P), q = \deg(Q)$ .

$$P = \sum_{k=0}^p a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$$

Supposons  $p \geq q$ .

On écrit alors :

$$\begin{aligned}
 Q &= \sum_{k=0}^p b_k X^k \\
 \text{et ainsi } P + Q &= \sum_{k=0}^p (a_k + b_k) X^k \\
 \text{et donc } \deg(P + Q) &\leq p
 \end{aligned}$$

Si de plus  $p > q$ , alors :

$$\begin{aligned}
 P + Q &= a_p X^p + \sum_{k=0}^{p-1} (a_k + b_k) X^k \quad (b_p = 0) \\
 \text{donc } (a_p \neq 0), \deg(P + Q) &= p
 \end{aligned}$$

- 2.

$$\lambda P = \sum_{k=0}^p \lambda a_k X^k$$

Or  $\lambda a_p \neq 0$  car  $a_p \neq 0$  et  $\mathbb{A}$  intègre.

- 3.

$$P \cdot Q = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) X^n$$

Si  $n > p + q$ , alors :

$$\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0 \quad (\text{preuve (13.6)})$$

Or :

$$\begin{aligned}(PQ)_{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} a_k b_{p+q-k} \\ &= \underbrace{a_p}_{\neq 0} \underbrace{b_q}_{\neq 0} \\ &\neq 0 \text{ car } \mathbb{A} \text{ int\`egre}\end{aligned}$$

4. Si  $P \in \mathbb{A}_0[X]$ , l'inégalité est vérifiée.  
Sinon :

$$p' = \sum_{k=0}^{p-1} (k+1)a_{k+1}X^k$$

et  $\deg(P') \leq d-1 = \deg(P) - 1$

5. On a :

$$Q \circ P = \sum_{k=0}^q b_k p_k$$

Or, pour  $k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$ ,  $\deg(b_k p^k) < \deg(\underbrace{b_q}_{\neq 0} p^q)$  ((13.34.2) et (13.34.3) avec  $\mathbb{A}$  int\`egre)

Donc :

$$\begin{aligned}\deg(Q \circ P) &= \deg(b_q p^q) \\ &= q \times \deg(P) \\ &= \deg(Q) \times \deg(P)\end{aligned}$$

### 13.36 Théorème de permanence de l'intégrité

#### Corollaire 13.36

Si  $\mathbb{A}$  est int\`egre, alors  $\mathbb{A}[X]$  est int\`egre.

Si  $P \neq 0$  et  $Q \neq 0$

$$\begin{aligned}\deg(P \times Q) &= \deg(P) + \deg(Q) \text{ (}\mathbb{A} \text{ est int\`egre)} \\ &\geq 0\end{aligned}$$

### 13.39 Propriété de stabilité

#### Corollaire 13.39

- $\mathbb{A}_n[X]$  est un sous-groupe additif de  $\mathbb{A}[X]$ .
- La dérivation  $D : \mathbb{A}[X] \rightarrow \mathbb{A}[X]$  induit un homomorphisme de groupe  $D_n : \mathbb{A}_n[X] \rightarrow \mathbb{A}_{n-1}[X]$ .
- Si  $\mathbb{K}$  est un corps de caractéristique nulle,  $D_n$  est une surjection. Autrement dit, tout polynôme de  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$  est primitivable formellement dans  $\mathbb{K}_n[X]$ .

- RAF
- RAF

- $\text{carac}(\mathbb{K}) = 0$ . Soit  $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ .

Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $k = k \times 1 \neq 0$  dans  $\mathbb{K}$  car  $\mathbb{K}$  est de caractéristique nulle.  
Donc  $k^{-1}$  est bien défini dans  $\mathbb{K}$ . On pose :

$$Q = \sum_{k=1}^n k^{-1} q_{k-1} X^k$$

Alors :

$$Q' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(k+1)^{-1} a_k X^k = P.$$



**13.42 Corollaire du degré d'une dérivée dans  $\mathbb{K}[X]$ , avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$** **Corollaire 13.42**

Soit  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique nulle et soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ . Alors  $P' = Q'$  si et seulement si  $P$  et  $Q$  diffèrent d'une constante.

Soit  $P \in \ker(D)$ , où  $D : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$ .

Donc  $P' = 0$ .

Si  $\deg(P) > 0$ , alors  $\deg(P') \geq 0$  (13.41).

Donc nécessairement,  $\mathbb{K}_0[X] \subset \ker(D)$ .

Donc  $\ker(D) = \mathbb{K}_0[X]$ .

## Chapitre 14

# Suites numériques

## 14.18 Premier théorème de comparaison

### Théorème 14.18

Si à partir d'un certain rang on a

$$|u_n - l| \leq v_n$$

avec  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ .

Soit  $u_n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N_1, |u_n - l| \leq v_n$$

Comme  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , on choisit  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N_2, |v_n - 0| = |v_n| < \epsilon$$

On pose  $N = \max(N_1, N_2)$ . Ainsi :

$$\forall n \geq N, |u_n - l| \leq v_n = |v_n| < \epsilon$$

Donc  $\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l}$

## 14.22 Unicité de la limite

### Proposition 14.22

Si  $u$  admet une limite  $l \in \mathbb{R}$ , alors celle-ci est unique.

On suppose que  $u$  admet comme limite  $l$  et  $l'$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . On choisit  $N$  et  $N'$  dans  $\mathbb{N}$  tels que :

$$\forall n \geq N, |u_n - l| < \epsilon$$

$$\forall n \geq N', |u_n - l'| < \epsilon$$

Pour tout  $n \geq \max(N, N')$  :

$$\begin{aligned} |l - l'| &= |l - u_n + u_n - l'| \\ &\leq |l - u_n| + |u_n - l'| \quad (\text{Inégalité triangulaire}) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Nécessairement :

$$|l - l'| = 0$$

## 14.23 Limite et inégalité

### Proposition 14.23

Si  $u$  converge vers  $l$  et si  $\alpha < l$ , alors à partir d'un certain rang,  $\alpha < u_n$ . De la même manière, si  $\beta > l$ , alors à partir d'un certain rang,  $u_n < \beta$ .

On suppose que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ . Soit  $\alpha < l$ . On pose  $\epsilon = \frac{l - \alpha}{2}$ .

D'après la définition, on choisit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, |u_n - l| < \epsilon$$

Soit :

$$\forall n \geq N, \underbrace{u_n}_{> \alpha} \in ]\underbrace{l - \epsilon}_{> \alpha}, l + \epsilon[$$

## 14.24 Convergence et bornitude

### Proposition 14.24

Une suite convergente est bornée.

Soit  $u$  une suite convergente. Notons  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

On pose  $\epsilon =$ .

Par définition, soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in ]l - 1, l + 1[$$

Donc  $\{u_n, n \geq N\}$  est borné. Donc  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \underbrace{\{u_n, n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket\}}_{\text{ensemble fini}} \cup \underbrace{\{u_n, n \geq N\}}_{\text{borné}}$  est borné.

## 14.29 Minoration d'une extraction

### Lemme 14.29

Soit  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq \sigma(n).$$

Par récurrence.

Comme  $\sigma(0) \in \mathbb{N}$ , on a bien  $\sigma(0) \geq 0$ .

Si  $\sigma(n) \geq n$ , alors  $\sigma(n+1) > \sigma(n) \geq n$ .

Donc  $\sigma(n+1) \geq n+1$ .

## 14.30 Extraction d'une suite convergente

### Proposition 14.30

Toute suite extraite d'une suite qui tend vers  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  est une suite convergente vers  $l$ .

On suppose que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \in \mathbb{R}$  (à adapter pour  $l = \pm\infty$ )

Soit  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante.

On note  $v = u \circ \sigma$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, |u_n - l| < \epsilon$$

Pour  $n \geq N$ , on a :

$$\sigma(n) \underset{(14.29)}{\geq} n \geq N$$

$$\text{donc } |u_{\sigma(n)} - l| < \epsilon$$

$$\text{soit } |v_n - l| < \epsilon$$

$$\text{donc } \boxed{v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l}$$

## 14.32 Pair, impair et convergence

### Proposition 14.32

Si  $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = l \in \mathbb{R}$ , alors  $\lim u_n = l$

Soit  $\epsilon > 0$ . Soit  $N_1$  et  $N_2$  dans  $\mathbb{N}$  telq que :

$$\forall n \geq N_1, |u_{2n} - l| \leq \epsilon$$

$$\forall n \geq N_2, |u_{2n+1} - l| \leq \epsilon$$

Or pour  $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ .

Soit  $n \geq N$ .

— Si  $n = 2p$ , alors  $p \geq N_1$

$$|u_n - l| = |u_{2p} - l| \leq \epsilon$$

— Si  $n = 2p + 1$ , alors  $p \geq N_2$

$$|u_n - l| = |u_{2p+1} - l| \leq \epsilon$$

Dans tous les cas,  $|u_n - l| \leq \epsilon$ .

## 14.34 Opérations usuelles sur les limites

### Théorème 14.34

Soit  $u$  et  $v$  deux suites qui convergent respectivement vers  $l$  et  $l'$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

—  $u + v$  converge vers  $l + l'$

—  $\lambda u$  converge vers  $\lambda l$

—  $uv$  converge vers  $ll'$

— Si  $l \neq 0$ , alors à partir d'un certain rang, la suite des termes  $u_n$  sont tous nuls et la suite  $\frac{1}{u}$  converge vers  $\frac{1}{l}$

— Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq \epsilon \text{ et } |v_n - l'| \leq \epsilon$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n + v_n - (l + l')| &\leq |u_n - l| + |v_n - l'| \text{ (Inégalité triangulaire)} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

— RAS ( $\lambda = 0$  et  $\lambda \neq 0$ )

— Comme  $u$  converge,  $u$  est bornée. Soit  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} |u_n v_n - ll'| &= |u_n v_n - u_n l' + u_n l' - ll'| \\ &\leq |M| |v_n - l'| + |l'| \times |u_n - l| \\ &\leq M \times \epsilon + |l'| \times \epsilon \\ &= (M + |l'|) \times \epsilon \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ll'}.$$

— On suppose  $l \neq 0$ . D'après (14.23), à partir d'un certain rang  $u_n > 0$  (ou  $u_n < 0$ ). Il existe en outre  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$0 < \frac{l}{2} < u_n \text{ et } |u_n - l| < \epsilon$$

Pour  $n \geq N$  :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| &= \frac{|l - u_n|}{|u_n l|} \\ &\leq 2 \frac{|l - u_n|}{l^2} \\ &< \frac{2\epsilon}{l^2} \end{aligned}$$

## 14.35 Conservation des inégalités larges par passage à la limite

### Théorème 14.35

Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles. Si  $u$  converge vers  $l$  et  $v$  converge vers  $l'$  et si à partir d'un certain rang  $u_n \leq v_n$  alors  $l \leq l'$ .

On raisonne par l'absurde :  $l > l'$ .

On pose  $\epsilon = \frac{|l'-l|}{2}$ .

On choisit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in ]l - \epsilon, l + \epsilon[ \text{ et } v_n \in ]l' - \epsilon, l' + \epsilon[$$

En particulier :

$$\forall n \geq N, u_n > v_n$$

Absurde.

## 14.37 Théorème d'encadrement

### Théorème 14.37

Soit  $u, v$  et  $w$  trois suites réelles. Si  $u$  et  $v$  convergent vers  $l$  et si à partir d'un certain rang,  $u_n \leq w_n \leq v_n$ , alors  $w$  converge vers  $l$ .

Soit  $\epsilon > 0$ , on choisit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in ]l - \epsilon, l + \epsilon[ \text{ et } v_n \in ]l - \epsilon, l + \epsilon[$$

A partir d'un certain rang  $M$ , par connexité de l'intervalle  $]l - \epsilon, l + \epsilon[$  :

$$\forall n \geq M, w_n \in ]l - \epsilon, l + \epsilon[$$

## 14.38 Produit d'une suite bornée par une limite nulle

### Théorème 14.38

Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles. Si  $u$  converge vers 0 et si  $v$  est bornée, alors  $w$  converge vers 0.

Soit  $M \in \mathbb{R}_+$  telq ue :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n| \leq M \times |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc :

$$|u_n v_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Soit :

$$u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

## 14.39 Exemple

### Exemple 14.39

Soit  $(u_n)$  une suite strictement positive et  $\eta \in ]0; 1[$ . On suppose qu'à partir d'un certain rang, on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \eta$ . Alors  $\lim u_n = 0$ .

On suppose que :

$$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 2$$

Donc ( $u_n > 0$ ) :

$$\forall n \geq n_0, 0 < u_n < \underbrace{\eta^{n-n_0}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} \times u_{n_0}$$

Par encadrement :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$$

## 14.40 Comparaison puissance factorielle

### Théorème 14.40

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, non nul.

On note pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n = \frac{|x|^n}{n!} > 0$$

Or :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

A partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$$

Donc (14.39) :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$$

## 14.41 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

### Théorème 14.41

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  et soit  $M \in \mathbb{R}$ . Alors  $M$  est la borne supérieure (resp. inférieure) de  $A$  si et seulement si  $M$  majore (resp. minore)  $A$  et s'il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $M$ .

$\Rightarrow$

On suppose que  $M = \sup A$ . Donc  $M$  majore  $A$ .

On rappelle que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in A, M - \epsilon < a$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a \in A, M - \frac{1}{n+1} < a \leq M \text{ (} M \text{ est un majorant)}$$

D'après la suite  $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  étant ainsi définie, d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} M}$$

⇐

On choisit  $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  telle que :

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M \text{ (majorant de } A)$$

Soit  $\epsilon > 0$ . On choisit  $a_n \in A$  tel que :

$$a_n \in ]M - \epsilon, M + \epsilon[$$

Donc  $M - \epsilon$  ne majore pas  $A$ .

Donc :

$$M = \sup A$$

## 14.42 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

### Théorème 14.42

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ , alors  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$ .

⇒

On suppose que  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in A, a \in ]x - \epsilon, x + \epsilon[$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A, x - \frac{1}{n+1} < a_n < x + \frac{1}{n+1}$$

La suite  $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  étant fixée ainsi :

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \text{ (théorème d'encadrement)}$$

⇐

Soit  $]x, y[$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ .

On pose  $z = \frac{x+y}{2}$ . On pose  $\epsilon = \frac{|y-x|}{2}$ .

On choisit  $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  telle que :

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z$$

On choisit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$a_n \in ]z - \epsilon, z + \epsilon[ = ]x, y[$$

Donc :

$$A \cap ]x, y[ \neq \emptyset$$

## 14.48 Théorème de comparaison

### Théorème 14.48

Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles.

1. Si  $\lim u = +\infty$  et si à partir d'un certain rang on a  $u_n \leq v_n$ , alors  $\lim v = +\infty$  ;
2. Si  $\lim v = -\infty$  et si à partir d'un certain rang on a  $u_n \leq v_n$ , alors  $\lim u = -\infty$  ;
3. Si  $\lim u = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ) et si  $v$  est minorée (resp. majorée), alors  $\lim u + v = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ).



1. Soit  $A \geq 0$ . On choisit  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, A \leq u_n \text{ et } u_n \leq v_n$$

Donc :

$$\boxed{v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$$

2. RAS

3. Si  $(v_n)$  est minorée, alors à partir d'un certain rang :

$$m + u_n \leq u_n + v_n$$

En adaptant le premier point ( $A' = A - m$ ), on a :

$$\boxed{u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$$

## 14.49 Limites infinies et opérations

### Théorème 14.49

Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles de limites respectives  $l$  et  $l'$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a

- $\lim u + v = l + l'$  (sauf si  $l = +\infty$  et  $l' = -\infty$  ou inversement)
- $\lim \lambda u = \lambda l$  sauf si  $\lambda = 0$  auquel cas la suite  $\lambda u$  est la suite nulle.
- $\lim u \times v = l \times l'$  sauf si  $\lambda = 0$  et  $l' = \pm\infty$  ou inversement
- Si à partir d'un certain rang, la suite  $u$  ne s'annule pas, alors la suite  $\frac{1}{u}$  :
  - si  $l \in \mathbb{R}^*$ , tend vers  $\frac{1}{l}$  ;
  - si  $l = \pm\infty$ , tend vers 0 ;
  - si  $l = 0$  et  $u_n > 0$ , tend vers  $+\infty$  ;
  - si  $l = 0$  et  $u_n < 0$ , tend vers  $-\infty$  ;
  - n'a pas de limite dans les autres cas.

- On suppose  $l' \in \mathbb{R}$  et  $l = +\infty$ . Donc  $v$  est bornée.  
Donc (14.48) :

$$u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

- $\lambda \neq 0, \lambda > 0$  et  $l = +\infty$ . Pour  $A \in \mathbb{R}$ , on choisit un rang à partir duquel  $u_n > \frac{A}{\lambda}$ .
- On suppose  $l > 0$  et  $l' = +\infty$ .

Comme  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ , alors à partir d'un certain rang,  $u_n > m$  avec  $m = \begin{cases} 1 & \text{si } l = +\infty \\ \frac{l}{2} & \text{sinon} \end{cases}$

$$u_n v_n > m v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc :

$$u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (14.48)$$

- $l = +\infty$ .  
Soit  $\epsilon > 0$ , à partir d'un certain rang :

$$u_n > \frac{1}{\epsilon} > 0$$

Donc :

$$0 < \frac{1}{u_n} < \epsilon$$

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Si  $l = 0$  et  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang.

Pour  $A \in \mathbb{R}_+^*$ , à partir d'un certain rang :

$$\begin{aligned} u_n &> 0 \text{ et } u_n < \frac{1}{A} \\ \text{donc } \frac{1}{u_n} &> A \\ \frac{1}{u_n} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

## 14.50 Théorème de la limite monotone

### Théorème 14.50

Si  $u$  est une suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée), alors  $u$  converge vers  $\sup_{n \in \mathbb{N}}(u_n)$  (resp. vers  $\inf_{n \in \mathbb{N}}(u_n)$ ).

Si  $u$  est une suite croissante et non majorée (resp. décroissante et non minorée) alors  $u$  tend vers  $+\infty$  (resp. vers  $-\infty$ ).

— On suppose  $u$  croissante et majorée.

L'ensemble  $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$  est non vide et majoré. Cet ensemble possède une borne supérieure notée  $l$  (propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$ ).

Soit  $\epsilon > 0$ . Comme  $l - \epsilon < u_n$  ne majore pas  $A$ , on choisit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $l - \epsilon < u_N$ .

Or  $(u_n)$  est croissante donc :

$$\forall n \geq N, l - \epsilon < u_N \leq u_n \leq l$$

Donc :

$$\forall n \geq N, u_n \in ]l - \epsilon, l + \epsilon[$$

Soit :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l}$$

— On suppose  $u$  croissante et non majorée.

Soit  $A \in \mathbb{R}_+$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$u_N \geq A \text{ (} u \text{ non majorée)}$$

Donc :

$$\forall n \geq N, A \leq u_N \leq u_n \text{ (} u \text{ croissante)}$$

Soit :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$$

## 14.54 Exemple

### Exemple 14.54

Soit  $u$  et  $v$  les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

Ces deux suites sont adjacentes.

—

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

Donc  $(u_n)$  est croissante.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\
&= \frac{1}{n!} \left[ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \right] \\
&= \frac{1}{n!(n+1)^2 n} [(n+1)n + n - (n+1)^2] \\
&= -\frac{1}{n!(n+1)^2 n} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!}$$

Donc :

$$v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc  $u$  et  $v$  sont adjacentes et convergent alors vers une limite commune. (TCSA)

## 14.55 Convergence des suites adjacentes

### Théorème 14.55

Deux suites adjacentes convergent vers une limite commune.

Soit  $u$  et  $v$  deux suites adjacentes avec  $u$  croissante et  $v$  décroissante.  
Soit  $w = v - u$ . Par opération,  $w$  est décroissante.  
Par hypothèse :

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc  $w \leq 0$ , soit  $u \leq v$ .

La suite  $u$  est donc majorée par  $v_0$ , et croissante donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.  
Pour les mêmes raisons,  $v$  converge.  
Or, par théorème d'opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

## 14.56 Théorème de Bolzano-Weierstrass

### Théorème 14.56

On peut extraire de toute suite réelle bornée une suite convergente.

Soit  $u$  une suite bornée. On note  $a$  et  $b$  un minorant et majorant de  $u$ . On construit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  par récurrence de la manière suivante :

- On initialise  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ .
- Si l'intervalle  $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$  contient une infinité de valeurs de la suite  $(u_n)$ , alors  $a_1 = a_0$  et  $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ .  
Sinon, l'intervalle  $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$  contient une infinité de valeurs, alors  $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$  et  $b_1 = b_0$ .  
On note  $\sigma(0) = 0$  et comme  $[a_1, b_1]$  contient une infinité de valeurs, on dit  $u_{n_1} \in [a_1, b_1]$  avec  $n_1 > 0$ .  
On pose alors  $\sigma(1) = n_1$ .
- Supposons construits  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $\sigma$  avec le principe précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ \text{ou} \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

Selon que  $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$  contient une infinité de valeurs ou  $\left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$  et  $v(n+1) > v(n)$  et  $u_{\sigma(n+1)} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$ .

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, a_n &\leq u_{\sigma(n)} \leq b_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, |b_{n+1} - a_{n+1}| &= \frac{|b_n - a_n|}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, |b_n - a_n| &= \frac{|b_0 - a_0|}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Donc  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes donc convergent vers la même limite (TCSA) donc  $(u_{\sigma(n)})$  converge (TE).

## 14.63 Exemple

### Exemple 14.63

La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$  diverge vers  $+\infty$ .

$\mathbb{R}_+$  est stable par  $f : x \mapsto x + e^x$ .

Comme  $0 \in \mathbb{R}_+$ , la suite  $(u_n)$  est bien définie.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{u_n} \geq u_n$$

Donc  $(u_n)$  est croissant.

Supposons que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}_+$ .

Par théorème d'opération,  $l = l + e^l$ .

Absurde.

Donc d'après le TLM :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

## 14.64 Exemple

### Exemple 14.64

La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$  converge vers 0.

$[0, 1]$  est stable par  $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$  et  $1 \in [0, 1]$ .

Donc  $(u_n)$  est bien définie et est minorée.

Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2 + 1} \leq u_n$$

Donc  $(u_n)$  est décroissante donc converge vers  $l \in [0, 1]$  d'après le TLM.

Par théorème d'opération :

$$\begin{aligned} l &= \frac{l}{l^2 + 1} \\ \text{donc } l^2 &= 0 \\ \text{donc } l &= 0 \end{aligned}$$

## 14.66 Monotonie d'une suite récurrente définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

### Théorème 14.66

Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $u_0 \in D$  et  $f : D \rightarrow D$  une fonction (autrement dit,  $D$  est stable par  $f$ ). On note  $(u_n)$  l'unique suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Si pour tout  $x \in D$ ,  $f(x) \geq x$ , alors  $(u_n)$  est croissante. Si pour tout  $x \in D$ ,  $f(x) \leq x$ , alors  $(u_n)$  est décroissante. Le signe de la fonction  $x \mapsto f(x) - x$  renseigne donc sur la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
2. Si  $f$  est croissante, alors  $(u_n)$  est monotone. Son sens de variation dépend alors du signe de  $u_1 - u_0$ .
3. Si  $f$  est décroissante, alors  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones et de sens contraires. Leur sens de variation est entièrement déterminé par le signe de  $u_2 - u_0$ .

1. Si :

$$\forall n \in D, f(x) \geq x$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = u_{n+1} > u_n$$

Donc  $(u_n)$  est croissante.

2. On suppose  $f$  croissante et  $u_0 \leq u_1$ . Alors :

$$u_1 = f(u_0) \leq f(u_1) = u_2$$

On termine par récurrence.

3. Si  $f$  est décroissante, alors  $f^2 = f \circ f$  est croissante. Or :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} &= f^2(u_{2n}) \\ u_{2n+1} &= f^2(u_{2n-1}) \end{aligned}$$

Donc (14.66.2)  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones.

Or, si  $u_2 \leq u_0$ , alors  $u_3 = f(u_2) \leq f(u_0) = u_1$

## 14.68 Exemple

### Exemple 14.68

On note  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$  et notons  $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ .  
Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .

$\mathbb{R}_+$  est stable par  $f : x \mapsto x^2 + x$  et  $1 \in \mathbb{R}_+$ .

Donc  $(u_n)$  est bien définie.

Comme :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) - x \geq 0$$

$(u_n)$  est croissante.

On suppose que :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \geq 1 = u_0$$

Comme  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ .

On a  $f(l) = l$  donc  $l^2 = 0$ .

Absurde.

Donc, d'après le TLM :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

## 14.69 Exemple

### Exemple 14.69

On note  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ , et notons  $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ .  
Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .

$[1, 2]$  est stable par  $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$  et  $1 \in [1, 2]$ .

Donc  $(u_n)$  est bien définie et est bornée.

Comme  $f$  est décroissante sur  $[1, 2]$ ,  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones de monotonies contraires.

Comme  $u_0 = 1 = \min([1, 2])$ ,  $(u_{2n})$  est croissante et  $(u_{2n+1})$  décroissante, puis convergentes (TLM) vers des points fixes de  $f^2$  (car  $f^2$  est continue sur  $[1, 2]$ )

Soit  $x \in [1, 2]$ .

$$\begin{aligned} f^2(x) = x &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = x \\ &\Leftrightarrow x + 1 + x = x(x + 1) \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left( x - \underbrace{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}_{\in [1, 2]} \right) \left( x - \underbrace{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}_{\notin [1, 2]} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Donc  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent nécessairement vers  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Donc :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

## 14.72 Convergence et parties réelles et imaginaires

### Théorème 14.72

Soit  $u$  une suite complexe et  $l \in \mathbb{C}$ . Alors la suite  $u$  converge vers  $l$  si et seulement si la suite  $(\operatorname{Re}(u_n))$  converge vers  $\operatorname{Re}(l)$  et  $(\operatorname{Im}(u_n))$  converge vers  $\operatorname{Im}(l)$ .

$\Rightarrow$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(l)| &\leq |u_n - l| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ |\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(l)| &\leq |u_n - l| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(l)$  et  $\operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(l)$ .

$\Leftarrow$

On a :

$$\begin{aligned} |u_n - l| &= \sqrt{(\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(l))^2 + (\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(l))^2} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ (théorème d'opérations)} \end{aligned}$$

## 14.73 Théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes

### Remarque 14.73

Si  $u$  est bornée, on peut en extraire une suite convergente (Bolzano-Weierstrass).

$u_n = a_n + b_n$  bornée.  
 $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont bornés.  
 $(a_n)$  borné donc  $(a_{\sigma(n)})$  converge.  
 $(b_{\sigma(n)})$  bornée donc  $(b_{\sigma \circ \varphi(n)})$  converge.  
 $(a_{\sigma \circ \varphi(n)})$  extraite de  $(a_{\sigma(n)})$  donc converge.  
 $(u_{\sigma \circ \varphi(n)})$  converge.

## Chapitre 15

# Limites et continuité



## 15.6 Limite en un point du domaine

### Proposition 15.6

Si  $a \in X$  et si  $f(x)$  admet une limite finie en  $a$ , alors cette limite est nécessairement égale à  $f(a)$ .

Comme  $f(x)$  admet une limite finie  $b$  quand  $x \rightarrow a$  :

$$\forall \epsilon, \exists \nu > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \nu \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon$$

Or pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$|a - a| \leq \nu \text{ (quelque soit } \nu)$$

Donc :

$$\forall \epsilon, |f(a) - b| \leq \epsilon$$

Donc  $\boxed{f(a) = b}$ .

## 15.15 Comparaison des limites de deux fonctions coïncidant au voisinage de $a$

### Proposition 15.15

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions coïncidant au voisinage d'un point  $a$ . Alors, si  $f$  admet une limite (finie ou infinie) en  $a$ , alors  $g$  aussi et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

On choisit  $W \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $W \cap X = W \cap Y$  et  $f|_{W \cap X} = g|_{W \cap Y}$ .

Soit  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x)$  tend vers  $b$  quand  $x \rightarrow a$ .

Soit  $V \in \mathcal{V}(b)$ . On choisit  $U \in \mathcal{V}(a)$  tel que :

$$f(U \cap X) \subset V$$

Or

$$W \cap U \in \mathcal{V}(a) \text{ et } \subset f(W \cap U \cap X)_{g(W \cap U \cap Y)} \subset V$$

Donc  $g$  admet une limite en  $a$  égale à  $b$

## 15.17 Unicité de la limite, cas réel

### Théorème 15.17

Soit  $a \in \overline{X}$  et  $f$  une fonction réelle. Sous réserve d'existence, la limite de  $f(x)$ , lorsque  $x$  tend vers  $a$  est unique.

Par l'absurde. On suppose que  $f$  possède deux limites  $l \neq l'$  en  $a$ .

On choisit  $u \in \mathcal{V}(l)$  et  $u' \in \mathcal{V}(l')$  tels que  $u \cap u' = \emptyset$ .

Par définition, on choisit  $(W, W') \in \mathcal{V}(a)^2$  tels que  $f(W \cap X) \subset U$  et  $f(W' \cap X) \subset U'$ .

Or  $\underbrace{W \cap W'}_{\neq \emptyset} \notin \mathcal{V}(a)$  et  $f(\underbrace{W \cap W' \cap X}_{\neq \emptyset}) \subset U \cap U' = \emptyset$ .

Absurde.

## 15.23 Proposition

### Proposition 15.23

Soit  $a \in \overline{X}$ . Soit  $(Z_i)_{i \in I}$  une famille **finie** de sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  tels que  $X \in \bigcup_{i \in I} Z_i$  (on dit que  $(Z_i)$  est un **recouvrement** de  $X$ ). La fonction  $f$  admet au point  $a$  une limite  $\ell$  (finie ou infinie) si et seulement si pour tout  $i$  tel que la limite de  $f$  en  $a$  sur  $Z_i$  est envisageable, cette limite existe et vaut  $\ell$ .

$\Rightarrow$ 

On suppose que  $\lim_a f = \ell$ .

Soit  $i \in I$  tel que  $a \in \overline{X \cap Z_i}$ .

Soit  $V \in \mathcal{V}(\ell)$ . On choisit  $U \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $f(U \cap X) \subset V$ .

EN particulier  $f(\underbrace{U \cap X \cap Z_i}_{\subset U \cap X}) \subset V = f|_{X \cap Z_i}(U \cap X \cap Z_i)$ .

 $\Leftarrow$ 

Notons  $J \subset I$  l'ensemble des indices pour lesquels la limite est envisageable en  $Z_i$ .

Soit  $V \in \mathcal{V}(\ell)$ . Pour tout  $i \in J$ , comme  $\lim_{x \rightarrow a, x \in Z_i} = \ell$  on choisit  $U_i \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $f|_{Z_i \cap X}(U_i \cap Z_i \cap X) \subset V$ .

On pose  $U = \bigcap_{i \in J} U_i \in \mathcal{V}(a)$  car  $J$  est fini.

On choisit  $U' \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $U' \cap \left( \bigcup_{i \in I \setminus J} Z_i \right) = \emptyset$ .

$f(U \cap U' \cap X) \subset V$

Donc  $\boxed{\lim_a f = \ell}$ .

## 15.30 Composition de limites

### Proposition 15.30

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions avec  $f(X) \subset Y$ . Soit  $a \in \overline{X}$ ,  $b \in \overline{Y}$  et  $c \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si  $\lim_a f = b$  et si  $\lim_b g = c$ , alors  $\lim_a g \circ f = c$ .

Soit  $W \in \mathcal{V}(c)$ . On choisit  $V \in \mathcal{V}(b)$  tel que :

$$g(V \cap Y) \subset W$$

On choisit  $U \in \mathcal{V}(a)$  tel que :

$$f(U \cap X) \subset V \cap Y \quad (\lim_a f = b)$$

On a alors :

$$\boxed{g \circ f(U \cap X) \subset W}$$

## 15.32 Limites et inégalités strictes

### Proposition 15.32

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \overline{X}$ ,  $m \in \mathbb{R}$  et  $M \in \mathbb{R}$ .

1. Si  $\lim_a f < M$  alors  $f(x) < M$  au voisinage de  $a$
2. Si  $\lim_a f > m$  alors  $f(x) > m$  au voisinage de  $a$ .

1. Notons  $b = \lim_a f \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si  $b < M$ , on choisit  $U \in \mathcal{V}(b)$  et  $U' \in \mathcal{V}(M)$  avec  $U < U'$ .

Comme  $\lim_a f = b$ , on choisit  $W \in \mathcal{V}(a)$  tel que :

$$f(W \cap X) \subset U$$

### 15.33 Limite et inégalités larges

#### Proposition 15.33

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions et  $a \in \overline{X}$ . On suppose que  $f$  et  $g$  possèdent des limites finies en  $a$ .

Si  $f(x) \leq g(x)$  au voisinage de  $a$ , alors  $\lim_a f \leq \lim_a g$ .

Ce résultat est le plus souvent utilisé lorsqu'une des deux fonctions est constante.

RAF : absurde + (15.32)

### 15.34 Caractérisations séquentielle de la limite d'une fonction

#### Théorème 15.34

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in \overline{X}$  et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . Sont équivalentes :

1.  $\lim_a f = \ell \Leftrightarrow \forall u_n \rightarrow a, \lim f(u_n) = \ell (= f(\lim u_n))$
2. Pour toute suite  $(u_n)$  de limite  $a$  à valeurs dans  $X$ , la suite  $(f(u_n))$  a pour limite  $\ell$ .

$1 \Rightarrow 2$

On suppose que  $\lim_a f = \ell$ .

Soit  $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$  avec  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ .

Soit  $V \in \mathcal{V}(\ell)$ . On choisit  $U \in \mathcal{V}(a)$  tel que :

$$f(U \cap X) \subset V \quad (\lim_a f = \ell)$$

Comme  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ , on choisit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in U \cap X$$

Donc :

$$\forall n \geq N, f(u_n) \in V$$

Donc :

$$f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

$1 \Leftarrow 2$

Par contraposée. On suppose que  $f$  n'admet pas  $\ell$  comme limite en  $a$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note :

$$V_n = \begin{cases} ]a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}[ & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ [n, +\infty[ & \text{si } a = +\infty \\ ]-\infty, -n] & \text{si } a = -\infty \end{cases}$$

Par définition, il existe  $W \in \mathcal{V}(\ell)$  tel que pour tout  $V \in \mathcal{V}(a)$ , il existe  $x \in V \cap X$  et  $f(x) \notin W$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on choisit  $x_n \in V_n \cap X$  tel que  $f(x_n) \notin W$ .

Par construction :

$$(x_n) \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \text{ et } f(x_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

## 15.39 Théorème de la limite monotone

### Théorème 15.39

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  avec  $a < b$  et  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante.

1. La limite  $\lim_{a^+} f$  existe et est finie. Plus précisément, on a  $f(a) \leq \lim_{a^+} f$ .
2. Pour tout  $c \in ]a, b[$ ,  $\lim_{c^-} f$  et  $\lim_{c^+} f$  existent et sont finies. Plus précisément :  $\lim_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim_{c^+} f$ .
3. La limite  $\lim_b f$  existe et est soit finie, soit égale à  $+\infty$ .

1. On note  $F = f(]a, b[)$ . Comme  $f$  est définie au voisinage de  $a$ ,  $]a, b[ \neq \emptyset$  et  $F \neq \emptyset$ .  
Par ailleurs, comme  $f$  est croissante sur  $]a, b[$ ,  $F$  est minorée par  $f(a)$ .  
D'après la propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$ ,  $F$  possède une borne inférieure notée  $\alpha$ , avec  $f(a) \leq \alpha$ .  
Montrons par définition que  $\lim_{a^+} f = \alpha$ .

Soit  $\epsilon > 0$ ,  $\alpha + \epsilon$  n'est pas un minorant de  $F$  par définition de  $\alpha$ . On choisit :

$$\alpha \leq f(x_0) < \alpha + \epsilon$$

Par croissance de  $f$  sur  $]a, b[$  :

$$\forall x \in ]a, x_0[, \alpha \leq f(x) \leq f(x_0) < \alpha + \epsilon$$

On pose  $\eta = x_0 - a > 0$ , on a montré que :

$$\boxed{\forall x \in ]a - \eta[, a, b[, |f(x) - \alpha| < \epsilon}$$

2. Pour  $c \in ]a, b[$ , en appliquant (15.39.1) à  $f|_{[a, b[}$ , on montre que  $\lim_{c^+} f$  existe et  $f(c) \leq \lim_{c^+} f$ .  
On adapte ensuite la preuve de (15.39.1) :

$$F = f(]a, c]), \alpha = \sup(F)$$

pour montrer que  $\lim_{c^+} f$  existe et

3. Par disjonction de cas.

- Si  $f$  est majorée : on adapte la 2ème partie de (15.39.2).
- Si  $f$  n'est pas majorée. Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Comme  $f$  n'est pas majorée, on choisit  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $f(x_0) > A$ .  
Comme  $f$  est croissante :

$$\forall x \geq x_0, f(x) > A$$

Donc  $\lim_b f = +\infty$ .

## 15.59 Théorème des valeurs intermédiaires : version 1

### Théorème 15.59

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  d'extrémité  $a$  et  $b$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  (avec existence des limites dans le cas des bornes infinies). Alors si  $f(a) > 0$  et  $f(b) < 0$  (ou l'inverse), il existe  $c \in ]a, b[$ , tel que  $f(c) = 0$ .

On note  $A = \{x \in I, f(x) > 0\}$ .

- $A \neq \emptyset$  car  $f$  est définie et strictement positive au voisinage de  $a$  (15.32).
- $A$  est majoré car  $f$  est strictement négative au voisinage de  $b$  (et tout élément dans ce voisinage est un majorant).

D'après la propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$ ,  $A$  possède une borne supérieure notée  $c \in ]a, b[$ .

- On a  $c \notin A$ . En effet, si  $f(x) > 0$ , alors  $f$  est strictement positive sur un voisinage de  $c$ , et comme  $f$  est définie à droite de  $c$ , cela contredirait que  $c$  est un majorant de  $A$ .  
Donc  $f(c) \leq 0$ .

- Si  $f(c) < 0$ , alors  $f$  est strictement négative au voisinage à gauche de  $c$ .  
Absurde car  $c$  est le plus petit des majorants.

Conclusion,  $\boxed{f(c) = 0}$ .

## 15.60 Théorème des valeurs intermédiaires : version 2

### Théorème 15.60

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et soit  $M = \sup_I f(x)$  et  $m = \inf_I f(x)$  (éventuellement infinies).

Alors  $f$  prend toutes les valeurs de l'intervalle  $]m; M[$  :

$$\forall x_0 \in ]m; M[, \exists c \in I, f(c) = x_0.$$

RAF : (15.59) à  $f - x_0$ .

## 15.61 Théorème des valeurs intermédiaires : version 3

### Théorème 15.61

L'image d'un intervalle quelconque par une fonction continue est un intervalle.

Définition d'un intervalle par connexité.

## 15.65 Théorème de Heine

### Théorème 15.65

Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Rappel :

$$C^0(I) : \forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$$Cu(I) : \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On raisonne par l'absurde. Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  mais non uniformément continue sur  $[a, b]$ .

On choisit  $\epsilon$  tel que :

$$\forall \eta > 0, \exists (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon$$

Ainsi, pour tout  $b \in \mathbb{N}^*$ , on choisit un couple  $(x_n, y_n) \in [a, b]^2$  tel que :

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } \underbrace{|f(x_n) - f(y_n)|}_{(*)} \geq \epsilon$$

En particulier  $(x_n)$  est bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on en extrait  $(x_{\varphi(n)})$  suite convergente vers  $\ell$ .

D'après le TCILPPL,  $\ell \in [a, b]$ .

Comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Alors :

$$y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Par continuité :

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell) \text{ et } f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$$

Donc par opération :

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Absurde d'après (\*).

## 15.67 Caractérisation des intervalles compacts

### Lemme 15.67

Les intervalles compacts de  $\mathbb{R}$  sont exactement les segments, c'est-à-dire les intervalles fermés bornés  $[a, b]$ .

Les segments sont bien compacts (BW et TCILPPL).

— Si  $I = ]-\infty, a[$ ,

$$u_n = a - n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \notin I$$

$$u_n = a - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \notin I$$

## 15.68 Image d'un compact par une fonction continue

### Lemme 15.68

L'image continue d'un compact est compact.

Soit  $I$  un segment, donc un intervalle.

Comme  $f$  est continue sur  $I$ ,  $f(I)$  est un intervalle (TVI v3).

Montrons que  $f(I)$  est compact.

Soit  $(y_n) \in f(I)^{\mathbb{N}}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $x_n \in I$  tel que :

$$y_n = f(x_n)$$

Or  $I$  est compact (15.67), on choisit :

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in I$$

$$y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell) \text{ car } f \text{ est continue sur } I.$$

## 15.69 Image d'un segment par une fonction continue

### Corollaire 15.69

Soit  $f$  continue sur un segment  $I$ , alors  $f(I)$  est un segment.

(15.68) + TVI v3 + (15.67)

## 15.72 Théorème 15.72

### Théorème 15.72

Soit  $I$  un intervalle et  $f$  une fonction continue sur  $I$ . Alors  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est strictement monotone.



RAS



Supposons  $f$  non strictement monotone.

On peut supposer qu'il existe alors :

$$x < y < z$$

tels que  $f(x) < f(y)$  et  $f(z) < f(y)$ .

Soit :

$$\lambda = \frac{f(y) + \max(f(y), f(z))}{2} \in ]f(x), f(y)[$$

$$\in ]f(z), f(y)[$$

Par continuité de  $f$  sur les intervalles  $]x, y[$  et  $]y, z[$ , il existe  $\alpha \in ]x, y[$  et  $\beta \in ]y, z[$  tels que :

$$f(\alpha) = \lambda = f(\beta)$$

Donc  $f$  n'est pas injective.

### 15.73 Théorème 15.73

#### Théorème 15.73

Soit  $I$  un intervalle et  $f$  monotone sur  $I$ . Si  $f(I)$  est un intervalle, alors  $f$  est continue sur  $I$ .

On suppose  $f$  croissante sur  $I$ .

On suppose que  $f$  n'est pas continue sur  $I$ .

On applique le TLM :

$$\forall a \in I, \lim_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim_{a^+} f \text{ (quand tout existe)}$$

Comme  $f$  n'est pas continue sur  $I$ , on choisit  $a \in I$  tel que :

$$\lim_{a^-} f < f(a) \text{ ou } f(a) < \lim_{a^+} f$$

On pose :

$$\lambda = \frac{f(a) + \lim_{a^-} f}{2} \text{ ou } \lambda = \frac{f(a) + \lim_{a^+} f}{2}$$

$f(a) \neq \lambda$  et par croissance :

$$\forall x < a, f(x) < \lambda$$

$$\forall x > a, f(x) > \lambda$$

Donc  $\lambda \notin f(I)$ .

Donc  $f(I)$  n'est pas connexe, donc  $f(I)$  n'est pas un intervalle.

### 15.76 Théorème de la bijection

#### Théorème 15.76

Soit  $I$  un intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$ . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  strictement monotone et continue. Soit

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ et } \beta = \lim_{x \rightarrow b} f(x).$$

(ces limites existent car  $f$  est monotone). Alors  $f(I)$  est un intervalle d'extrémité  $\alpha$  et  $\beta$ , et  $f$  est un homéomorphisme de  $I$  sur  $f(I)$ .

Plus précisément, la borne  $\alpha$  de  $f(I)$  est ouverte si et seulement si la borne  $a$  de  $I$  est ouverte (et de même pour  $\beta$ ).

—  $f(I)$  est un intervalle : (15.61).

—  $f$  induit une bijection de  $I$  sur  $f(I)$  (15.72  $\Leftarrow$ ).

—  $f^{-1}$  est strictement monotone et définie sur  $f(I)$  intervalle, d'image  $I$  intervalle donc  $f^{-1}$  est continue sur  $f(I)$  (15.73  $\Rightarrow$ ).

Ainsi,  $f$  induit un homéomorphisme de  $I$  sur  $f(I)$ .

La nature des bornes (fermées ou ouvertes) provient de la monotonie de  $f$ .

## Chapitre 16

# Arithmétique des polynômes



## 16.1 Division euclidienne

### Théorème 16.1

Soit  $A \in \mathbb{K}[X]$  et  $B \in \mathbb{K}[X]$  non nul, il existe un unique couple de polynômes  $(Q, R)$  tel que  $A = BQ + R$  avec  $\deg R < \deg B$ . Le polynôme  $Q$  est appelé **quotient** et  $R$  le **reste**.

#### Existence :

On raisonne par récurrence sur le degré de  $A$ .

- Pour  $n = \deg A = 0$ . Soit  $A \in \mathbb{K}[X]$ .
  - Si  $\deg B > 0$ , alors  $(0, A)$  convient.
  - Si  $\deg B = 0$ , le couple  $(B^{-1} \times A, 0)$  convient (comme  $B$  est constant et non nul), alors  $B \in \mathbb{K}^*$  donc inversible).
- On suppose le résultat vrai pour tout  $A \in \mathbb{K}_n[X]$ .  
 Soit  $A \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$  avec  $\deg A = n + 1$ .  
 On écrit  $A = \underbrace{a}_{\neq 0} X^{n+1} + A_1$  avec  $A_1 \in \mathbb{K}_n[X]$ .
  - Si  $\deg A < \deg B$ , le couple  $(0, A)$  convient.
  - Si  $\deg A \geq \deg B$  et on note  $b$  le coefficient dominant de  $B$  :

$$A - ab^{-1}B \times X^{n+1-\deg B} \in \mathbb{K}_n[X]$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on choisit  $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $\deg R < \deg B$  et  $A - ab^{-1}B \times X^{n+1-\deg B} = QB + R$ .

Donc :

$$A = [Q + ab^{-1}X^{n+1-\deg A}] \times B + R$$

#### Unicité :

On suppose que  $A = BQ + R = BQ_1 + R_1$ .

Donc :

$$\begin{aligned} B(Q - Q_1) &= R_1 - R \\ \text{donc } \underbrace{\deg(B(Q - Q_1))}_{\deg B + \deg Q - Q_1} &= \deg(R_1 - R) \\ &\leq \max(\deg R_1, \deg R) \\ &< \deg B \\ \text{donc } \deg(Q - Q_1) &< 0 \\ \text{donc } Q - Q_1 &= 0 \\ \text{puis } R_1 - R &= 0 \end{aligned}$$

## 16.7 Proposition 16.7

### Proposition 16.7

On a :

1. Soit  $A$  et  $P$  deux polynômes non nuls. Si  $A|P$  et si  $P|A$ , alors il existe  $\alpha \in \mathbb{K}^*$  tel que  $P = \alpha A$ . (La relation de divisibilité n'est pas antisymétrique)
2. Si  $A|B$  et si  $B|C$ , alors  $A|C$ . La relation de divisibilité est transitive.
3. Pour tout  $A \in \mathbb{K}[X]$  non nul,  $A|A$ . La relation de divisibilité est réflexive.

1.  $P \neq 0, A \neq 0$ . Si  $A|P$  et  $P|A$ , alors (16.6.2) :

$$\deg A \leq \deg P \text{ et } \deg P \leq \deg A$$

Donc :

$$\deg P = \deg A$$

Or  $A|P$ , alors :

$$P = A \times Q$$

Puis :

$$\deg P = \deg(AQ) = \deg A + \deg Q \text{ (}\mathbb{K} \text{ est intègre)}$$

Donc :

$$\deg Q = 0$$

Donc :

$$Q = \alpha \in \mathbb{K}^*$$

2. RAS

3. RAS

## 16.15 Principauté de $\mathbb{K}[X]$

### Théorème 16.15

Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  non réduit à  $\{0\}$ . Il existe un unique polynôme unitaire  $D$  tel que

$$I = D\mathbb{K}[X]$$

Existence :

Soit  $I \neq \{0\}$  un idéal.

On note  $A = \{\deg P, P \in I \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{N}$ .

$A \neq \emptyset$  ( $I \neq \{0\}$ ), d'après la propriété fondamentale de  $\mathbb{N}$ ,  $A$  possède un plus petit élément noté  $n \geq 0$ .

Comme  $n \in A$ , on choisit  $D \in I$  tel que  $\deg D = n$ .

Comme  $I$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  et que  $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}[X]$ , on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha D \in I$$

On peut donc supposer  $D$  unitaire. Comme  $I$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ , on a :

$$D \times \mathbb{K}[X] \subset I$$

Soit  $P \in I$ . On effectue la division euclidienne de  $P$  par  $D$  ( $\neq 0$ ) :

$$P = BD + R$$

avec  $\deg R < \deg D$ .

Or :

$$R = \underbrace{P}_{\in I} - \underbrace{BD}_{\in I} \in I$$

Par définition de  $\deg D = n$ ,  $R = 0$ .

Unicité :

$$I = D\mathbb{K}[X] = J\mathbb{K}[X]$$

avec  $D$  et  $J$  unitaires.

Or ils sont associés, donc égaux.

## 16.17 Existence de $\text{pgcd}$

### Proposition 16.17

Si  $A$  et  $B$  sont deux polynômes non nuls, de tels PGCD existent.

Soit  $A, B$  dans  $\mathbb{K}[X]$ ,  $(A, B) \neq (0, 0)$ .

On note  $\mathcal{C} = \{\deg P, P|A \text{ et } P|B \text{ et } P \neq 0\} \subset \mathbb{N}$ .

$\mathcal{C} \neq \emptyset$  car  $0 \in \mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}$  est majoré par  $\deg B$  ( $\max(\deg A, \deg B)$ ).

L'existence est assurée par la propriété fondamentale de  $\mathbb{N}$ .

## 16.18 Principauté de $\mathbb{K}[X]$

### Proposition 16.18

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes non tous deux nuls. Soit  $D \in \mathbb{K}[X]$ . Alors  $D$  est un PGCD de  $A$  et  $B$  si et seulement si

$$A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X].$$

D'après (16.15), on choisit  $F \in \mathbb{K}[X]$  tel que :

$$A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = F\mathbb{K}[X]$$

Soit  $D \in \mathbb{K}[X]$ .

$\Rightarrow$

On suppose que  $D$  est un PGCD.

Donc  $D|A$  et  $D|B$ .

Donc  $D|F$  (combinaison  $F \in A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X]$ ).

Or  $F|A$  et  $F|B$  ( $A \in F\mathbb{K}[X]$ ,  $B \in F\mathbb{K}[X]$ ).

Par maximalité de  $\deg D$ , on a  $F$  et  $D$  associés.

$\Leftarrow$

$$D\mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = F\mathbb{K}[X]$$

Donc  $D|A$  et  $D|B$ .

Pour tout diviseur commun  $P$  de  $A$  et  $B$ ,  $P|A$  et  $P|B$ .

Donc  $P|D$  ( $D \in A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X]$ ).

Donc  $\deg D$  est maximal pour la divisibilité.

## 16.24 Lemme de préparation au calcul pratique du PGCD unitaire

### Lemme 16.24

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes tels que  $B \neq 0$ . Pour tout  $Q \in \mathbb{K}[X]$ , on a  $A \wedge B = (A - BQ) \wedge B$ .

En particulier, si  $Q$  et  $R$  sont le quotient et le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  Alors  $A \wedge B = B \wedge R$ .

$$\begin{aligned} (A \wedge B)\mathbb{K}[X] &= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\ &= (A - BQ)\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\ &= ((A - BQ) \wedge B)\mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

Donc  $A \wedge B$  et  $(A - BQ) \wedge B$  sont associés, unitaires par définition, donc égaux.

## 16.26 Exemple

### Exemple alternatif 16.26

Trouver les PGCD de  $A = X^5 + 2X$  et de  $B = X^4 + 2X^3 + 4$  et une relation de Bézout.

$$\begin{aligned} X^5 + 2X &= (X^4 + 2X^3 + 4)(X - 2) + 4X^3 - 2X + 8 \\ X^4 + 2X^3 + 4 &= (4X^3 - 2X + 8)\left(\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}X^2 - X \\ 4X^3 - 2X + 8 &= \left(\frac{1}{2}X^2 - X\right)(8X + 16) + 14X + 8 \\ \frac{1}{2}X^2 - X &= (14X + 8)\left(\frac{1}{28}X - \frac{9}{14 \times 7}\right) + \frac{9 \times 4}{7^2} \\ A \wedge B &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{9 \times 4}{7^2} &= \frac{1}{2}X^2 - X - (14X + 8)\left(\frac{1}{28}X - \frac{9}{2 \times 7^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}X^2 - X - (4X^3 - 2X + 8 - \left(\frac{1}{2}X^2 - X\right)(8X + 16))\left(\frac{1}{28}X - \frac{9}{2 \times 7^2}\right) \end{aligned}$$

## 16.27 Propriétés du PGCD

### Proposition 16.27

L'opération  $\wedge$  est commutative et associative. Par ailleurs, si  $C$  est unitaire, alors  $(A \wedge B)C = (AC) \wedge (BC)$ .

Soit  $(A, B, C) \in \mathbb{K}[X]^3$  non tous nuls.

$$\begin{aligned} (A \wedge B)\mathbb{K}[X] &= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\ &= B\mathbb{K}[X] + A\mathbb{K}[X] \\ &= (B \wedge A)\mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

Donc  $A \wedge B$  et  $B \wedge A$  sont associés et unitaires donc égaux.

$$\begin{aligned} ((A \wedge B) \wedge C)\mathbb{K}[X] &= (A \wedge B)\mathbb{K}[X] + C\mathbb{K}[X] \\ &= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] + C\mathbb{K}[X] \\ &= (A \wedge (B \wedge C))\mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

Donc  $A \wedge (B \wedge C)$  et  $(A \wedge B) \wedge C$  sont associés et unitaires donc égaux.

On suppose  $C$  unitaire.

On a :

$$\begin{aligned} (A \wedge B)\mathbb{K}[X] &= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\ \text{donc } (A \wedge B)C\mathbb{K}[X] &= AC\mathbb{K}[X] + BC\mathbb{K}[X] \\ &= ((AC) \wedge (BC))\mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

Ainsi  $C(A \wedge B)$  et  $(AC) \wedge (BC)$  sont associés et unitaires donc égaux.

## 16.29 Existence de PPCM

### Proposition 16.29

Soit  $\mathbb{K}$  un corps. Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes non nuls de  $\mathbb{K}[X]$ . Alors  $A$  et  $B$  admettent des PPCM.

On note  $\mathcal{D} = \{\deg P, A|P, B|P, P \neq 0\} \subset \mathbb{N}$ .

$$\deg AB \in \mathcal{D} \neq \emptyset$$

On conclut avec la propriété fondamentale de  $\mathbb{N}$ .

## 16.30 Caractérisation des PPCM par les idéaux

### Proposition 16.30

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes non nuls de  $\mathbb{K}[X]$  et soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Alors  $P$  est un PPCM de  $A$  et  $B$  si et seulement si

$$A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X].$$

$A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ , donc de la forme  $M\mathbb{K}[X]$  (16.15).

Montrons que  $P$  est un PPCM de  $A$  et  $B$  si et seulement si  $P$  et  $M$  sont associés.

$\Rightarrow$

On a donc :

$$\begin{aligned} P &\in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] \\ &\in M\mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

Donc  $M|P$ .

Or  $M$  est un multiple commun à  $A$  et  $B$ , donc par définition de  $P$ , on a :

$$\deg P \leq \deg M$$

Donc  $P$  et  $M$  sont associés.

$\Leftarrow$

On suppose  $P$  et  $M$  associés, donc :

$$\begin{aligned} P\mathbb{K}[X] &= M\mathbb{K}[X] \\ &= A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

En particulier,  $P$  est un multiple commun à  $A$  et  $B$  et pour tout  $Q \in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$ , donc  $P|Q$ .

Donc :

$$\deg P \leq \deg Q$$

## 16.42 Cas d'unicité d'une relation de Bézout

### Proposition 16.42

Soit  $A$  et  $B$  non constants et premiers entre eux. Il existe un unique couple  $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que

$$AU + BV = 1 \text{ et } \deg U < \deg B \text{ et } \deg V < \deg A.$$

Existence :

Soit  $(C, D) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que (16.37 - Bézout) :

$$AC + BD = 1$$

On effectue la division euclidienne de  $C$  par  $B$  :

$$\begin{aligned} C &= BE + U \text{ avec } \deg U < \deg B \\ \text{donc } AU + B \underbrace{(D + AE)}_V &= 1 \\ \text{donc } \deg(AU + BV) &= 0 \end{aligned}$$

Si  $\deg V \geq \deg A$ , alors :

$$\begin{aligned} \deg B + \deg V &\geq \deg B + \deg A \\ &> \deg U + \deg B \\ &= \deg AU \end{aligned}$$

Donc  $\deg(AU + BV) = \deg BV > 0$ .

Absurde.

L'existence est prouvée.

Unicité :

Avec les hypothèses correspondantes :

$$\begin{aligned} AU_1 + BV_1 &= 1 = AU_2 + BV_2 \\ \text{donc } A(U_1 - U_2) &= B(V_2 - V_1) \\ \text{donc } A|B(V_2 - V_1) \end{aligned}$$

Or  $A \wedge B = 1$ , donc  $A|(V_2 - V_1)$ .

Or  $\deg(V_2 - V_1) < \deg A$ .

Donc  $V_2 - V_1 = 0$ .

Puis  $A(U_1 - U_2) = 0$ , donc  $U_1 - U_2 = 0$  car  $\mathbb{K}[X]$  est intègre avec  $A \neq 0$ .

## 16.43 Corollaire

### Corollaire 16.43

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois polynômes avec  $A$  et  $B$  premiers entre eux. Alors  $A \wedge (BC) = A \wedge C$ .

—  $A \wedge C|A$  donc  $A \wedge C|A \wedge (BC)$ . Donc  $A \wedge C|BC$ .

—  $A \wedge (BC)|A$ . Or  $A \wedge B = 1$  donc on peut écrire  $AU + BV = 1$ . Donc  $ACU + BCV = C$ .

Or  $A \wedge (BC)|ACU + BCV$  soit  $A \wedge (BC)|C$ . Donc  $A \wedge (BC)|A \wedge C$ .

Ainsi,  $A \wedge C$  et  $A \wedge (BC)$  sont associés et unitaires donc égaux.

## 16.44 Caractérisation des PGCD et PPCM

### Proposition 16.44

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes non nuls,  $M$  et  $D$  deux polynômes. Alors

$$M = A \vee B \Leftrightarrow (M \text{ unitaire et } \exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, M = AU = BV \text{ et } U \wedge V = 1).$$

$$D = A \wedge B \Leftrightarrow (D \text{ unitaire et } \exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, A = DU \text{ et } B = DV \text{ et } U \wedge V = 1).$$

—

$\Rightarrow$

$M = A \vee B$ . On écrit  $M = AU + BV$  avec  $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ .

On note  $R = U \wedge V$ . On écrit  $U = RU_1$  et  $V = RV_1$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} M &= RAU_1 = RBV_1 \\ \text{donc } R(AU_1 - BV_1) &= 0 \\ \text{donc } AU_1 &= BV_1 \text{ (}\mathbb{K}[X]\text{ est intègre)} \end{aligned}$$

Donc  $M_1 = AU_1 = BV_1$  est un multiple commun et par minimalité des degrés :

$$RM_1 = M|M_1 \text{ donc } R = 1$$

⇐

Par hypothèse,  $M$  est un multiple commun, donc :

$$M \in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = (A \vee B)\mathbb{K}[X]$$

Donc  $A \vee B | M$ .

Donc  $M = D \times A \vee B$ .

Or  $A \vee B = AU_1 = BV_1$ .

Donc  $M = DAU_1 = DBV_1 = AU = BV$ .

Donc :

$$A(DU_1 - U) = 0$$

$$B(DV_1 - V) = 0$$

Or  $\mathbb{K}[X]$  est intègre donc  $DU_1 = U$  et  $DV_1 = V$ .

Donc  $D|U \wedge V = 1$ .

—

⇒

$D = A \wedge B$ . On écrit  $A = DU$  et  $B = DV$ .

Or pour  $R = U \wedge V$ , on écrit  $U = RU_1$  et  $V = RV_1$ .

Donc  $A = DRU_1$  et  $B = DRV_1$ .

Donc  $DR|A$  et  $DR|B$ .

Donc  $DR|D$ .

Nécessairement,  $R = 1$ .

⇐

Par hypothèse,  $D|A$  et  $D|B$ , donc  $D|A \wedge B$ .

Comme  $U \wedge V = 1$ , d'après le théorème de Bézout :

$$UU_1 + VV_1 = 1$$

$$\text{donc } DUU_1 + DVV_1 = D$$

$$\text{soit } AU_1 + BV_1 = D$$

$$\text{donc } A \wedge B | D$$

Ainsi,  $A \wedge B$  et  $D$  sont associés. Or ils sont unitaires, donc égaux.

## 16.53 Caractérisation des racines par la divisibilité

### Théorème 16.53

Soit  $\mathbb{K}$  un corps,  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $r \in \mathbb{K}$ . Alors  $r$  est racine de  $P$  si et seulement si  $X - r$  divise  $P$ . Donc s'il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P = (X - r)Q$ .

⇐

Si  $P = (X - r)Q$ , alors :

$$\tilde{P}(r) = (X - r)\tilde{Q}(r)$$

$$= 0 \times \tilde{Q}(r)$$

$$= 0$$

⇒

On suppose  $r$  racine de  $P$ .

On effectue la division euclidienne de  $P$  par  $X - r$  :

$$P = (X - r)Q + R, R \in \mathbb{K}_0[X]$$

Donc  $0 = \tilde{P}(r) = \tilde{R}(r)$ .

Donc  $R = 0$ .

Donc  $X - r | P$ .

## 16.56 Formule de Taylor pour les polynômes

### Théorème 16.56

Soit  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique nulle,  $P$  un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  de degré  $d$  et  $a \in \mathbb{K}$ , alors

$$P = \sum_{k=0}^d \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

On note  $E_k = X^k$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ .

On a, pour  $i \in \mathbb{N}$  :

$$E_k^{(i)} = \begin{cases} \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E_k(X + a) &= (X + a)^k \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{k-i} X^i \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} a^{k-i} X^i \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{E_k^{(i)}(a)}{i!} X^i \end{aligned}$$

Soit  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k = \sum_{k=0}^d a_k E_k$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(x + a) &= \sum_{k=0}^d a_k E_k(X + a) \\ &= \sum_{k=0}^d a_k \sum_{i=0}^k \frac{E_k^{(i)}(a)}{i!} X^i \\ &= \sum_{i=0}^d \frac{1}{i!} \left( \sum_{k=i}^d a_k E_k^{(i)}(a) \right) X^i \\ &= \sum_{i=0}^d \frac{1}{i!} \left( \sum_{k=0}^d a_k E_k^{(i)}(a) \right) X^i \\ &= \sum_{i=0}^d \frac{1}{i!} P^{(i)}(a) X^i \end{aligned}$$

## 16.57 Caractérisation de la multiplicité par les dérivées

### Théorème 16.57

Soit  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique nulle,  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $a \in \mathbb{K}$ . Le réel  $a$  est racine d'ordre multiplicité  $k$  de  $P$  si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(k)}(a) \neq 0.$$





D'après la formule de Taylor :

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{i=0}^d \frac{P^{(i)}(a)}{i!} (X-a)^i \\
 &= \sum_{i=k}^d \frac{P^{(i)}(a)}{i!} (X-a)^i \\
 &= (X-a)^k \underbrace{\sum_{i=k}^d \frac{P^{(i)}(a)}{i!} (X-a)^{i-k}}_{=Q} \\
 Q(a) &= \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \neq 0
 \end{aligned}$$

$$P = \underbrace{(X-a)^k}_B Q \text{ avec } Q(a) \neq 0.$$

Pour tout  $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$  :

$$\begin{aligned}
 P^{(i)} &= (BQ)^{(i)} \\
 &= \sum_{l=0}^i \binom{i}{l} B^{(l)} Q^{(i-l)} \\
 P^{(i)}(a) &= 0 \\
 P^{(k)} &= \binom{k}{k} B^{(k)}(a) \times Q^{(k-k)}(a) \\
 &= k! \times Q(a) \neq 0
 \end{aligned}$$

## 16.59 Caractérisation de la multiplicité des racines par la divisibilité

### Théorème 16.59

Soit  $\mathbb{K}$  un corps. Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $r_1, \dots, r_k$  des racines deux à deux distinctes de  $P$ , de multiplicités respectives  $a_1, \dots, a_k$ . Alors  $(X-r_1)^{a_1} \dots (X-r_k)^{a_k}$  divise  $P$  et  $r_1, \dots, r_k$  ne sont pas racines du quotient.

RAF :

$$(X-r_i)^{\alpha_1} \wedge (X-r_k)^{\alpha_k} = 1 \text{ si } i \neq k$$

## 16.63 Polynômes formels et fonctions polynomiales

### Théorème 16.63

Soit  $\mathbb{K}$  un corps infini. Alors l'application de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathbb{K}[x]$  qui à un polynôme formel associe sa fonction polynomiale est un isomorphisme d'anneaux.

RAF :  $\varphi(P) = \varphi(Q)$  donc  $\varphi(P-Q) = 0$

$\tilde{P} - \tilde{Q}$  s'annule sur  $\mathbb{K}$  infini et on applique (16.62).

## 16.66 Caractérisation des polynômes interpolateurs

### Lemme 16.66

Le polynôme  $L_i$  est l'unique polynôme de degré au plus  $n$  tel que pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ .

Existence : RAF

Unicité : (16.61.3)

## 16.69 Corollaire

### Corollaire 16.69

Soit  $P$  le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la famille  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  et aux valeurs  $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ . Soit  $P_0 = (X - x_0) \dots (X - x_n)$ . L'ensemble  $E$  des polynômes  $Q$  (sans restriction de degré) tel que pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $Q(x_i) = y_i$  est décrit par

$$E = P + (P_0) = \{P + (X - x_0) \dots (X - x_n)R, R \in \mathbb{K}[X]\}$$



Si  $Q = P + (X - x_0) \dots (X - x_n)R$ , alors :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, Q(x_i) = P(x_i) = y_i$$

Donc  $Q \in E$ .



Soit  $Q \in E$ , alors  $x_0, \dots, x_n$  sont racines de  $Q - P$ .

Donc  $(X - x_0) \dots (X - x_n) \mid Q - P$ .

## 16.74 Proposition

### Proposition 16.74 (HP)

Soit  $P$  un polynôme scindé non constant de  $\mathbb{R}[X]$  à racines simples. Alors  $P'$  est scindé, et ses racines séparent celles de  $P$ .

Soit  $P = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$  avec  $x_1 < \dots < x_n$ .

D'après le théorème de Rolle, comme  $P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_n) = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on choisit  $y_k \in ]x_k, x_{k+1}[$  tel que  $P'(y_k) = 0$ .

On a donc :

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < y_{n-1} < x_n$$

et  $y_1, \dots, y_{n-1}$  sont  $n-1$  racines distinctes de  $P'$  de degré  $n-1$  ( $\mathbb{R}$  de caractéristique nulle).

Donc  $P'$  est scindé (à racines simples).

## 16.76 Relation de Viète

### Théorème 16.76

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme de degré  $n$ , scindé, de racines (éventuellement non distinctes, apparaissant dans la liste autant de fois que sa multiplicité)  $r_1, \dots, r_n$  alors pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} r_{i_1} \dots r_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^n a_k X^k \\ &= a_n \prod_{k=1}^n (X - r_k) \end{aligned}$$

Les relations de Viète consistent simplement à développer l'expression de droite et à identifier les mnômes de degré  $n - k$ .

$$a_{n-k} = (-1)^k a_n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} r_{i_1} \dots r_{i_k}$$

## 16.88 Lemme

### Lemme 16.88

Soit  $P$  un polynôme irréductible de  $\mathbb{K}[X]$  et  $A$  un polynôme non multiple de  $P$ . Alors  $A$  et  $P$  ont premiers entre eux.

Soit  $D$  unitaire  $\in \mathcal{D}_{A,P}$ .

Si  $P \nmid A$ , alors  $D \neq U(P)$ .

Donc  $D = 1$ .

Donc  $P \wedge A = 1$ .

## 16.98 Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ par les racines

### Théorème 16.98

Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$ . Alors  $P$  divise  $Q$  si et seulement si toute racine de  $P$  est aussi une racine de  $Q$ , et que sa multiplicité dans  $Q$  est supérieure ou égale à sa multiplicité dans  $P$ .

$\Rightarrow$

Supposons  $P|Q$ .

Soit  $r$  une racine de  $P$  de multiplicité  $\alpha$ . Donc :

$$(X - r)^\alpha | P \\ \text{donc } (X - r)^\alpha | Q$$

Donc  $r$  est racine de  $Q$  de multiplicité supérieure à  $\alpha$ .

$\Leftarrow$

On décompose  $P = \lambda \prod_{i=1}^n (X - r_i)^{\alpha_i}$  ( $P$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ ).

Par hypothèse,  $\prod_{i=1}^n (X - r_i)^{\alpha_i} | Q$ .

Donc  $P|Q$ .

## 16.99 Caractérisation des polynômes à coefficients réels

### Théorème 16.99

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Les propositions sont équivalentes :

1.  $P$  est à coefficients réels ;
2.  $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$  ;
3. pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ .

$1 \Rightarrow 2$

RAF

$2 \Rightarrow 1$

On suppose que  $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ .

Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^n a_k X^k \\ \overline{P(z)} &= \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \overline{a_k} (\overline{z})^k \end{aligned}$$

Par hypothèse, pour  $z \in \mathbb{R}$ ,  $P(z) \in \mathbb{R}$ , soit  $\overline{P(z)} = P(z)$ .  
Ainsi, pour  $z \in \mathbb{R}$  :

$$\sum_{k=0}^n \overline{a_k} z^k = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

Les deux polynômes  $\sum_{k=0}^n \overline{a_k} X^k$  et  $\sum_{k=0}^n a_k X^k$  coïncident sur une infinité de valeurs, donc (théorème de rigidité) ils sont égaux.  
Donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = \overline{a_k}$$

Donc  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

$\boxed{1 \Rightarrow 3}$

RAF

$\boxed{3 \Rightarrow 2}$

Si  $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , alors en particulier pour  $z \in \mathbb{R}$ ,  $\overline{P(z)} = P(z)$  soit  $P(z) \in \mathbb{R}$ .

## 16.100 Racine complexe d'un polynôme réel

### Corollaire 16.100

Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels et  $r$  une racine de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ . Si  $r \notin \mathbb{R}$ , alors  $\bar{r}$  est aussi une racine de  $P$  et elles ont la même multiplicité.

Soit  $r$  une racine complexe de  $P$ .

Donc  $P(r) = 0$ .

Donc  $\overline{P(r)} = 0$ .

Donc (16.99.3)  $P(\bar{r}) = 0$ .

Donc  $\bar{r}$  est aussi une racine de  $P$ .

Donc  $(X - \bar{r})(X - r) \mid P$ .

Donc  $P = (X - \bar{r})(X - r)Q$  et si  $r$  est une racine de  $Q$ ,  $\bar{r}$  également, ce qui justifie que  $\bar{r}$  a la même multiplicité que  $r$ .

## 16.101 Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

### Théorème 16.101

1. Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.
2. Ainsi, tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  peut être factorisé en produit de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  de degré 1 ou de degré 2, de discriminant strictement négatif.

1. Les polynômes annoncés sont bien les seuls irréductibles dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , avec  $\deg P \geq 3$ . Dans  $\mathbb{C}[X]$ ,  $P$  est scindé.

Si  $P$  admet une racine dans  $\mathbb{R}$ ,  $P$  est réductible.

Supposons maintenant que toutes les racines de  $P$  sont complexes. Soit  $r$  l'une d'entre elles.

Alors  $\bar{r} \neq r$  est aussi une racine de  $P$ .

Donc  $(X - r)(X - \bar{r})|P$ .

Donc :

$$\begin{aligned} P &= (X - r)(X - \bar{r})Q \text{ avec } Q \in \mathbb{C}[X] \\ &= \underbrace{(x^2 - 2\operatorname{Re}(r)X + |r|^2)}_{:=R \in \mathbb{R}[X]}Q \end{aligned}$$

Donc  $P = RQ$  est la division euclidienne de  $P$  par  $R$  dans  $\mathbb{C}[X]$  et aussi dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Par unicité, on a donc  $Q \in \mathbb{R}[X]$  et  $P$  est réductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .

2. RAF

## Chapitre 17

# Fractions rationnelles

## 17.2 Addition, multiplication et produit par un scalaire

### Définition 17.2

Soit  $\frac{P}{Q}$  et  $\frac{R}{S}$  deux fractions rationnelles et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On pose

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + QR}{QS}, \quad \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS} \quad \text{et} \quad \lambda \times \frac{P}{Q} = \frac{\lambda P}{Q}.$$

Montrons que l'addition est bien définie.

Soit  $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q}$  et  $\frac{R}{S}$  dans  $\mathbb{K}(X)$ .

Montrons que :

$$\frac{PS + QR}{QS} = \frac{P_1S + Q_1R}{Q_1S}$$

On a :

$$(PS + QR)Q_1S - (P_1S + Q_1R)QS = S^2 \underbrace{(PQ_1 - P_1Q)}_{=0} + RS \underbrace{(QQ_1 - Q_1Q)}_{=0} = 0$$

On raisonne de la même manière pour  $\frac{R}{S} = \frac{R_1}{S_1}$  et ainsi, l'opération est bien définie.

## 17.10 Degré d'une fraction

### Définition 17.10

Soit  $F = \frac{P}{Q}$  une fraction. On pose  $\deg(F) = -\infty$  si  $F = 0$  et  $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$  sinon. Le degré d'une fraction est donc un élément de  $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ .

Si  $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q}$ , alors :

$$P_1Q = PQ_1$$

$$\text{donc } \deg(P_1Q) = \deg(PQ_1)$$

$$\text{donc } \deg(P_1) + \deg(Q) = \deg(P) + \deg(Q_1) \quad (\mathbb{K} \text{ int\`egre})$$

$$\text{donc } \deg(P_1) - \deg(Q_1) = \deg(P) - \deg(Q)$$

## 17.13 Propriété du degré

### Théorème 17.13

Soit  $F$  et  $G$  deux fractions rationnelles. On a

$$\deg(F + G) \leq \max(\deg(F), \deg(G)) \quad \text{et} \quad \deg(F \times G) = \deg(F) + \deg(G).$$

On retrouve les mêmes propriétés que pour les polynômes.

Soit  $F = \frac{P}{Q}$  et  $G = \frac{R}{S}$ .

$$\begin{aligned} \deg(F + G) &= \deg\left(\frac{PS + QR}{QS}\right) \\ &= \deg(PS + QR) - \deg(QS) \\ &\leq \max(\deg(PS), \deg(QR)) - \deg(QS) \\ &= \max(\deg(PS) - \deg(QS), \deg(QR) - \deg(QS)) \\ &= \max\left(\deg\left(\frac{P}{Q}\right), \deg\left(\frac{R}{Q}\right)\right) \\ &= \max(\deg(F), \deg(G)) \end{aligned}$$

— RAS

## 17.19 Théorème

### Théorème 17.19

Soit  $F$  et  $G$  deux fractions rationnelles. Si les fonctions rationnelles  $\tilde{F}$  et  $\tilde{G}$  sont égales sur une partie infinie  $\mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}_G$  alors les fractions rationnelles sont égales, i.e.  $F = G$ .

On note  $F = \frac{P}{Q}$  et  $G = \frac{R}{S}$  avec  $P \wedge Q = 1$  et  $R \wedge S = 1$ .

On a :

$$\forall x \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}_G, \tilde{F}(x) = \tilde{G}(x)$$

Soit :

$$\forall x \in \mathcal{D}, P\tilde{x} \times S\tilde{x} = R\tilde{x} \times Q\tilde{x}$$

Comme  $\mathcal{D}$  est infini, d'après le théorème de rigidité,  $PS = RQ$ , donc  $F = G$ .

## 17.20 Fraction dérivée

### Définition 17.20

Soit  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ . On appelle **fraction dérivée** de  $F$  la fraction notée  $F'$  (ou  $\frac{dF}{dX}$ ) définie par

$$F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

Le résultat ne dépend pas du représentant de  $F$  choisi. On définit également les dérivées successives de  $F$  en posant  $F^{(0)} = F$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F^{(n+1)} = (F^{(n)})'$ .

On écrit  $F = \frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$ .

Montrons que  $\frac{P'Q - Q'P}{Q^2} = \frac{R'S - RS'}{S^2}$ .

Comme  $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$ , on a  $PS = RQ$ .

Donc  $P'S + S'P = R'Q + Q'R$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} [P'Q - PQ']S^2 - [R'S - RS']Q^2 &= P'SQ^2 + S'PQ^2 - R'QS^2 - Q'RS^2 \\ &= QS(P'S - R'Q) + Q^2RS' - S^2Q'P \\ &= QS(Q'R - S'P) + PSQS' - SQRQ' \\ &= 0 \end{aligned}$$

## 17.24 Dérivée logarithmique d'un produit

### Théorème 17.24

Si  $F$  est une fraction non nulle qui se factorise en  $F = F_1 \times \dots \times F_n$  dans  $\mathbb{K}(X)$  avec  $n \in \mathbb{N}$  alors

$$\frac{F'}{F} = \frac{F'_1}{F_1} + \dots + \frac{F'_n}{F_n}.$$

Pour  $n = 2$  seulement.

$$F = F_1 \times F_2 \neq 0$$

Donc :

$$F' = F'_1 F_2 + F_1 F'_2$$

Donc :

$$\frac{F'}{F} = \frac{F'_1 F_2}{F_1 F_2} + \frac{F_1 F'_2}{F_1 F_2} = \frac{F'_1}{F_1} + \frac{F'_2}{F_2}$$



## 17.25 Partie entière

### Théorème 17.25

Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ . Il existe un unique polynôme  $Q$  tel que  $\deg(F - Q) < 0$ . Celui-ci est appelé **partie entière** de  $F$ , c'est le quotient dans la division euclidienne du numérateur de  $F$  par le dénominateur.

Existence :

Soit  $F = \frac{A}{B}$  avec  $A \wedge B = 1$ .

Soit la division euclidienne de  $A$  par  $B$  :

$$A = BQ + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(B)$$

Donc :

$$F = \frac{A}{B} = \frac{BQ + R}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

Donc :

$$\deg(F - Q) = \deg\left(\frac{R}{B}\right) = \deg(R) - \deg(B) < 0$$

Unicité :

On suppose que :

$$F = Q + G = Q_1 + G_1 \text{ avec } (Q_1, G_1) \in \mathbb{K}[X]^2 \text{ et } \deg(G), \deg(G_1) < 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} Q - Q_1 &= G_1 - G \\ \text{donc } \deg(Q - Q_1) &= \deg(G_1 - G) \\ &\leq \max(\deg(G_1), \deg(G)) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Or  $Q - Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ , donc  $Q = Q_1$ .

## 17.31 Existence d'une décomposition

### Théorème 17.31

Si  $T$  et  $S$  sont deux polynômes premiers entre eux et si  $\deg\left(\frac{A}{TS}\right) < 0$ , alors il existe deux polynômes  $U$  et  $V$  tels que

$$\frac{A}{TS} = \frac{U}{T} + \frac{V}{S}, \text{ avec } \deg(U) < \deg(T) \text{ et } \deg(V) < \deg(S).$$

Comme  $T \wedge S = 1$ , d'après le théorème de Bézout, on écrit :

$$CT + DS = 1$$

Donc :

$$ACT + DSA = A$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{A}{TS} &= \frac{ACT + DSA}{TS} \\ &= \frac{DA}{T} + \frac{AC}{S} \end{aligned}$$

On écrit la division euclidienne de  $DA$  par  $T$  et de  $AC$  par  $S$  :

$$DA = TQ + U \text{ avec } \deg(U) < \deg(T)$$

$$AC = SH + V \text{ avec } \deg(V) < \deg(S)$$

Donc :

$$\frac{A}{TS} = \frac{U}{T} + \frac{V}{S} + Q + H$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \deg(Q + H) &= \deg\left(\frac{A}{TS} - \frac{U}{T} - \frac{V}{S}\right) \\ &\leq \max(\dots, \dots, \dots) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Donc  $Q + H = 0$ .

## 17.32 Théorème

### Théorème 17.33

Si  $T$  est un polynôme irréductible unitaire et si  $\deg\left(\frac{A}{T^n}\right) < 0$  (avec  $n \geq 1$ ), alors il existe des polynômes  $V_1, \dots, V_n$  tels que

$$\frac{A}{T^n} = \sum_{k=1}^n \frac{V_k}{T^k}, \text{ avec } \deg(V_k) < \deg(T).$$

C'est une **décomposition en éléments simples**.

Par récurrence sur  $n$ .

- Pour  $n = 1$ , RAF.
- On suppose le résultat vrai pour  $n \geq 1$  fixé.  
On écrit la division euclidienne de  $A$  par  $T$  :

$$A = BT + V_{n+1} \text{ avec } \deg(V_{n+1}) < \deg(T)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{A}{T^{n+1}} &= \frac{BT + V_{n+1}}{T^{n+1}} \\ &= \frac{B}{T^n} + \frac{V_{n+1}}{T^{n+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{V_k}{T^k} + \frac{V_{n+1}}{T^{n+1}} \text{ (Hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

## 17.38 Cas d'un pôle simple

### Proposition 17.38

Si  $a$  est un pôle simple de  $F = \frac{A}{B}$ , alors la partie polaire de  $F$  relative à  $a$  est

$$P_F(a) = \frac{c}{X-a} \text{ avec } c = \frac{A(a)}{B'(a)} = \frac{A(a)}{Q(a)} \text{ où } B = (X-a)Q.$$

D'après le théorème d'existence de la DES :

$$\frac{A}{B} = F = E + \frac{c}{X-a} + G$$

Donc :

$$\begin{aligned} c &= \frac{(X-a)A}{B} - (X-a)E - (X-a)G \\ &= \frac{A}{Q} - (X-a)E - (X-a)G \end{aligned}$$

Donc  $c = \frac{A(a)}{Q(a)}$ .

Si  $B = (X-a)Q$ , alors  $B'(a) = Q(a)$ .

## 17.39 Exemple

### Exemple 17.39

Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  la fraction rationnelle  $F = \frac{1}{X^n - 1}$  avec  $n \geq 1$ .

- $\deg F = -n < 0$ .
- $F$  possède  $n$  pôles simples.  $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \omega_k$ .
- D'après le théorème de DES :

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{X - \omega_k}$$

Or, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $c_k = \frac{1}{nw_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n}$ .

$$F = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k}$$

## 17.40 Cas d'un pôle double

### Proposition 17.40

Si  $a$  est un pôle double de  $F = \frac{A}{B}$ , alors la partie polaire de  $F$  relative à  $a$  est

$$P_F(a) = \frac{\alpha}{X - a} + \frac{\beta}{(X - a)^2} \text{ avec } \beta = H(a) \text{ et } \alpha = H'(a) \text{ en posant } H = (X - a)^2 F.$$

On a (notations 17.38) :

$$F = E + \frac{\alpha}{X - a} + \frac{\beta}{(X - a)^2} + G$$

$$\beta + (X - a)\alpha = \underbrace{(X - a)^2 F - (X - a)^2 E - (X - a)^2 G}_{:=H}$$

En évaluant en  $a$  :  $\beta = H(a)$ .

On dérive et on évalue en  $a$  :  $\alpha = H'(a)$ .

## 17.42 Exemple

### Exemple 17.42

Décomposer  $F = \frac{X^6}{(X-1)^2(X^3+1)}$  en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$ .

- $\deg F = 1 \geq 0$
- 

$$X^6 = (X - 1)^2(X^3 + 1)(X + 2) + R \text{ avec } \deg R < 5$$

— D'après le théorème DES :

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{X^6}{(X-1)^2(X+1)(X+j)(X+j^2)} \\
 &= X+2 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{X+j} + \frac{e}{x+j^2} \\
 c &= (x+1)\tilde{F}(-1) = \frac{1}{4} \\
 d &= (x+j)\tilde{F}(-j) \\
 &= \frac{1}{(j+1)^2(1-j)(-j+j^2)} \\
 &= \frac{1}{(1+j)(1-j^2)(j-1)j} \\
 &= \frac{-1}{(1-j^2)^2j} \\
 &= \frac{-1}{j(-3j^2)} \\
 &= \frac{1}{3} \\
 e &= (x+j^2)\tilde{F}(-j^2) = \frac{1}{3} \\
 H &= (X-1)^2F = \frac{X^6}{X^3+1} \\
 b &= H(1) = \frac{1}{2} \\
 a &= H'(1) = \frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

## 17.44 Parties polaires conjuguées d'une fraction réelle

Proposition 17.44

Si  $F$  est à coefficients réels, alors les parties polaires relatives aux pôles conjugués sont conjuguées.

Soit  $F \in \mathbb{R}(X) \subset \mathbb{C}(X)$ .

On écrit  $F = \frac{A}{B}$  avec  $A, B \in \mathbb{R}(X)^2$ .

Soit  $r$  un pôle de multiplicité  $m$ .

Comme  $F \in \mathbb{R}(X)$ ,  $\bar{r}$  est un pôle de multiplicité  $m$ . On suppose que  $r \neq \bar{r}$ .

D'après le théorème de DES, on écrit :

$$F = E + P_F(r) + G \text{ avec } (E, r) \in \mathbb{R}(X)^2, G \in \mathbb{C}(X)$$

$r$  n'est pas un pôle de  $G$  ( $\bar{r}$  oui).

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 F &= \bar{F} \\
 &= \overline{E + P_F(r) + G} \\
 &= \bar{E} + P_F(\bar{r}) + \bar{G} \\
 &= E + \overline{P_F(r)} + \bar{G}
 \end{aligned}$$

Or  $r$  n'est pas un pôle de  $\overline{P_F(r)}$  mais  $\bar{r}$  est un pôle de  $\overline{P_F(r)}$ .

De la même manière, comme  $r$  n'est pas un pôle de  $G$ ,  $\bar{r}$  n'est pas un pôle de  $\bar{G}$ .

Donc  $P_F(\bar{r}) = \overline{P_F(r)}$ .

## 17.45 Exemple

### Exemple 17.45

Décomposer en éléments simples  $F = \frac{1}{(X^2+X+1)^2}$  dans  $\mathbb{C}(X)$ .

$$F = \overline{(x^2 + x + 1)^2}, \deg(F) = -4 < 0.$$

Les pôles de  $F$  sont  $j$  et  $j^2$  (de multiplicité 2).

D'après le théorème de DES :

$$F = \frac{a}{X-j} + \frac{b}{(X-j)^2} + \frac{c}{X-j^2} + \frac{d}{(X-j^2)^2} \text{ car } F \in \mathbb{R}(X)$$

$$\text{On pose } H = (X-j)^2 F = \frac{1}{(x-j^2)^2}.$$

$$\text{On trouve } b = H(j) = \frac{j}{(1-j)} \text{ et } a = H'(j) = \frac{-2}{(1-j)^3} = \frac{-2j^2}{3(1-j)j}.$$

## 17.46 Exemple

### Exemple 17.47

Décomposer en éléments simples  $F = \frac{X^4+1}{X(X^2-1)^2}$  dans  $\mathbb{R}(X)$ .

$$F = \frac{X^4+1}{X(X^2-1)^2}, \deg F = -1 < 0. \text{ Donc :}$$

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{X+1} + \frac{e}{(X+1)^2}$$

$F$  est impaire donc :

$$\begin{aligned} F(-X) &= -\frac{a}{X} + \frac{b}{-X-1} + \frac{c}{(-X-1)^2} + \frac{d}{-X+1} + \frac{e}{(-X+1)^2} \\ &= -\frac{a}{X} - \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2} - \frac{d}{X-1} + \frac{e}{(X-1)^2} \\ &= -F \\ &= -\frac{a}{X} - \frac{b}{X-1} - \frac{c}{(X-1)^2} - \frac{d}{X+1} - \frac{e}{(X+1)^2} \end{aligned}$$

Par unicité :

$$\begin{cases} a = a \\ -b = -d \\ -c = e \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} b = d \\ e = -c \end{cases}$$

$$\text{On a : } a = \tilde{X}F(0) = 1.$$

On pose :

$$\begin{aligned} H &= (X-1)^2 F = \frac{X^4+1}{X(X+1)^2} \\ c &= H(1) = \frac{1}{2} \\ b &= H'(1) \\ &= \frac{4 \times 4 - 2 \times (3+4+1)}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

## 17.51 Exemple - Calcul de la dérivée $n$ -ième d'une fraction

### Exemple 17.51

Soit  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ . Calculer  $f^{(n)}(x)$ .

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x^2+1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

On définit :

$$F = \frac{1}{X^2+1} \in \mathbb{R}(X) \\ \in \mathbb{C}(X)$$

D'après le théorème de DES, car les pôles de  $F$  sont simples, égaux à  $i$  et  $-i$  :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\frac{1}{-2i}}{X+i} + \frac{\frac{1}{2i}}{X-i} \\ F^{(n)} &= \frac{\frac{i}{2}(-1)^n n!}{(X+i)^{n+1}} + \frac{\frac{-i}{2}(-1)^n n!}{(X-i)^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(X^2+i)^{n+1}} \frac{i}{2} [(X-i)^{n+1} - (X+i)^{n+1}] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(X^2+1)^{n+1}} \frac{i}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} [(-i)^k - i^k] X^{n+1-k} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(X^2+1)^{n+1}} \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2k+1} (-i)^{k+1} X^{n-2k} \end{aligned}$$

Donc :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}} \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2k+1} (-i)^{k+1} x^{n-2k}$$

## Chapitre 18

# Dérivabilité

## 18.13 Condition nécessaire du premier ordre pour l'existence d'un extremum

### Théorème 18.13

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  un intervalle ouvert et  $x_0 \in I$ . Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  et admet un extremum local en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .

On suppose que  $f$  atteint un maximum local en  $x_0$ .

On choisit  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  tel que :

$$\forall x \in U \cap I, f(x) \leq f(x_0)$$

En particulier :

$$\begin{aligned} \forall x \in U, x > x_0, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\leq 0 \\ \forall x \in U, x < x_0, \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} &\geq 0 \end{aligned}$$

D'après le TCILPPL :

$$f'_{\text{droite}}(x_0) \leq 0 \text{ et } f'_{\text{gauche}}(x_0) \geq 0$$

Donc  $f$  est dérivable en  $x_0$ .

Donc  $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = 0$ .

## 18.17 Théorème de Rolle

### Théorème 18.17

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  dérivable sur  $]a, b[$ . Alors si  $f(a) = f(b)$ , il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ .

D'après le théorème de compacité, elle possède un maximum et un minimum.

Si ils sont tous les deux égaux à  $f(a)$ , alors  $f$  est constante et  $f'(c) = 0$  pour tout  $c \in ]a, b[$ .

Sinon, l'un des deux est différent de  $f(a) = f(b)$  et est atteint dans  $]a, b[$ .

D'après (18.13),  $f'(c) = 0$ .

## 18.21 Théorème des accroissements finis

### Théorème 18.21

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Soit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x) - \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)$ .

$g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b[, \mathbb{R})$ .

$g(a) = f(a) = g(b)$ , donc d'après le théorème de Rolle, on choisit  $c \in ]a, b[$  tel que  $g'(c) = 0$ .



## 18.37 Caractérisation par la dérivée de la variation des fonctions

### Théorème 18.37

Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $I$  et dérivable sur  $I \setminus X$ , où  $X$  est un ensemble fini. Alors :

1.  $f$  est croissante sur  $I$  si et seulement si pour tout  $x \in I \setminus X$ ,  $f'(x) \geq 0$ . Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors  $f$  est strictement croissante.
2.  $f$  est décroissante sur  $I$  si et seulement si pour tout  $x \in I \setminus X$ ,  $f'(x) \leq 0$ . Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors  $f$  est strictement décroissante.

1.  $\Rightarrow$

On suppose  $f$  croissante. Soit  $a \in I \setminus X$ . Soit  $x \in I \setminus \{a\}$ . On a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

D'après le TCILPPL, on a  $f'(x) \geq 0$ .

$\Leftarrow$

On suppose  $X \neq \emptyset$ . Soit  $x < y$  et  $f \in \mathcal{C}^0([x, y], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]x, y[, \mathbb{R})$ .

D'après le TAF, on choisit  $c \in ]x, y[$  tel que :

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$$

Supposons  $X = \{\alpha\}$  avec  $x < \alpha < y$ .

On applique les TAF deux fois sur  $[x, \alpha]$  et  $[\alpha, y]$ .

et on choisit  $c_1 \in ]x, \alpha[$  et  $c_2 \in ]\alpha, y[$  tel que :

$$f(\alpha) - f(x) = f'(c_1)(\alpha - x) \leq 0$$

$$f(y) - f(\alpha) = f'(c_2)(y - \alpha) \leq 0$$

On généralise sans difficulté quand  $X$  est fini.

Si  $\varphi = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$  est fini, on utilise la même méthode,  $X \equiv X \cup \varphi$ .

2. RAS

## 18.43 Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^n$ - HP

### Théorème 18.43 - HP

Soit  $I$  un intervalle et  $x_0 \in I$ . Soit  $f$  une fonction définie de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I \setminus \{x_0\}$ . Si  $f^{(n)}$  admet une limite finie en  $x_0$ , alors  $f$  est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ .

— On prouve le théorème pour  $n = 1$ . On suppose  $f \in \mathcal{C}^1(I \setminus \{x_0\}, \mathbb{R})$  et que  $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ .

On prolonge  $f'$  en une fonction  $g$  par continuité en  $x_0$ . Ainsi,  $g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ .

On remarque que pour tout  $x \neq x_0$  :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

où  $a \in I \setminus \{x_0\}$  quelconque.

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \int_a^x g(t) dt}_{\text{Admet une limite finie quand } x \rightarrow x_0}$$

Donc  $f(x)$  admet également une limite finie quand  $x \rightarrow x_0$ .

On prolonge alors  $f$  par continuité en  $\tilde{f}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

— On raisonne par récurrence. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$P(n)$  : "Pour tout  $f \in \mathcal{C}^n(I \setminus \{x_0\}, \mathbb{R})$ , si  $f^{(n)}$  admet une limite finie en  $x_0$ , alors  $f$  se prolonge en  $\tilde{f} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ".

Pour  $n = 0$ , c'est le prolongement par continuité.

Pour  $n = 1$ , c'est fait.

On suppose  $P(n)$  vraie pour  $n \geq 1$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I \setminus \{x_0\}, \mathbb{R})$ , etc...

Donc  $f' \in \mathcal{C}^n(I \setminus \{x_0\}, \mathbb{R})$  et  $f^{(n)}$  admet une limite finie en  $x_0$ .

D'après  $P(n)$ , on prolonge  $f'$  en  $g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ .

En particulier,  $g$  est continue sur  $I$ .

Donc  $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ .

On applique  $P(1)$ . On prolonge  $f$  en  $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ .

Or  $\tilde{f}' = g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ .

Donc  $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ .

## 18.45 IAF pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

### Théorème 18.45

Soit  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$  et  $M$  un réel tel que  $|f'| \leq M$  sur  $]a, b[$ . Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Si  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ , alors :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$$

D'après l'inégalité triangulaire intégrale :

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \left| \int_a^b f'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b M dt \\ &= M|b - a| \end{aligned}$$

## Chapitre 19

# Convexité

## 19.7 Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes

### Proposition 19.7

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe et  $(x, y) \in I^2$  avec  $x < y$ .

Le graphe de  $f$  est situé en-dessous de sa sécante sur l'intervalle  $[x, y]$  et au-dessus à l'extérieur, soit sur  $I \cap ]-\infty, x] \cup [y, +\infty[$ .

On pose  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(t-x) + f(x)$ .

$g$  paramètre la sécante passant par les points  $(x, f(x))$  et  $(y, f(y))$ .

— Sur  $[x, y]$ , RAF car  $f$  est convexe.

— Soit  $t > y$ . On pose  $\lambda = \frac{y-x}{t-x} \neq 0 \in [0, 1]$ . On a :

$$\begin{aligned} \lambda t + (1-\lambda)x &= \frac{y-x}{t-x}t + \left(1 - \frac{y-x}{t-x}\right)x \\ &= \frac{t(y-x) + x(t-y)}{t-x} \\ &= y \end{aligned}$$

Par convexité de  $f$  :

$$\begin{aligned} f(y) &= f(\lambda t + (1-\lambda)x) \\ &\leq \lambda f(t) + (1-\lambda)f(x) \\ \text{donc } f(t) &\geq \frac{1}{\lambda}f(y) - \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)f(x) \\ &= \frac{t-x}{y-x}f(y) - \left(\frac{t-x}{y-x} - 1\right)f(x) \\ &= \frac{t-x}{y-x} \times (f(y) - f(x)) + f(x) \\ &= g(t) \end{aligned}$$

— On raisonne de la même manière si  $t \leq x < y$ .

## 19.8 Inégalités des pentes

### Proposition 19.8

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est convexe si et seulement si pour tout  $a \in I$ , la fonction  $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  est croissante sur  $I \setminus \{a\}$ .
- Si  $f$  est convexe, alors pour tout  $(a, b, c) \in I^3$  avec  $a < b < c$ ,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

1.  $\Rightarrow$

On suppose  $f$  convexe. Soit  $a \in I$  et  $x < y$  dans  $I \setminus \{a\}$ .

— On suppose  $x < a < y$ . D'après (19.7) :

$$f(y) \leq \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \times (y-a) + f(a)$$

Donc :

$$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \geq \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$$

— Si  $x < a < y$ , d'après (19.7) :

$$f(y) \geq \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \times (y - a) + f(a)$$

Donc :

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \geq \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

— Les autres cas s'y ramènent.



On suppose que pour tout  $a \in I$ ,  $g_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  est croissante.

Soit  $x < y$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ . On pose  $a = \lambda y + (1 - \lambda)x$ .

$g_a$  est croissante sur  $I \setminus \{a\}$ , donc :

$$g_a(x) \leq g_a(y)$$

Donc :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Donc :

$$\begin{aligned} x - a &< 0 \text{ et } y - a > 0 \\ (f(x) - f(a))(y - a) &\leq (f(y) - f(a))(x - a) \\ \text{donc } f(a)(y - x) &\leq f(x)(y - a) - f(y)(x - a) \\ \text{soit } f(a) &\leq f(x) \frac{y - a}{y - x} + f(y) \frac{a - x}{y - x} \\ &= (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \end{aligned}$$

2. Soit  $a < b < c$ .

$$g_a(b) \leq g_a(c) = g_c(a) \leq g_c(b)$$

## 19.9 Continuité et dérivabilité des fonctions convexes

### Théorème 19.9

Soit  $f$  une fonction convexe sur un intervalle  $I$  ouvert. La fonction  $f$  est alors continue et possède des dérivées à gauche et à droite en tout point (où les limites sont envisageables). Pour tout  $a \in I$ , on a

$$f'_g(a) \leq f'_d(a)$$

Pour  $a \in I$ , on note encore  $g_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

Comme  $g$  est définie à gauche et à droite de  $a$  ( $I$  est ouvert) et que  $g$  est croissante sur  $I \setminus \{a\}$ , d'après le TLM  $g$  admet des limites finies à gauche et à droite de  $a$  et :

$$\begin{aligned} \lim_{a^+} g &= f'_d(a) \geq f'_g(a) = \lim_{a^-} g \\ \forall x \neq a, f(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow a^-} f(a) \end{aligned}$$

## 19.11 Caractérisation des fonctions convexes par les variations de la dérivée

### Théorème 19.11

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $I$ . Alors  $f$  est convexe si et seulement si  $f'$  est croissante.

$\Rightarrow$

On suppose  $f$  convexe. Soit  $x < y$ . Soit  $a$  tel que  $x < a < y$ .  
D'après l'inégalité des pentes ( $f$  est convexe), on a :

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

En considérant les limites  $a \rightarrow x^+$  et  $a \rightarrow y^-$  et par TCILPPL :

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

Donc  $f'$  est croissante.

$\Leftarrow$

On suppose  $f'$  croissante sur  $I$ . Soit  $x < y$ . Soit  $a \in ]x, y[$ .  
On applique deux fois le TAF : on choisit  $\alpha \in ]x, a[$  et  $\beta \in ]a, y[$  tels que :

$$\frac{f(a) - f(x)}{-x + a} = f'(\alpha) \text{ et } \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(\beta)$$

Comme  $f'$  est croissante, on a  $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$ , soit :

$$\begin{aligned} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} &\leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \\ \text{donc } f(a) &\leq \frac{a - x}{y - x} f(y) + \frac{y - a}{y - x} f(x) \end{aligned}$$

Comme  $a \in ]x, y[$ ,  $a = \lambda y + (1 - \lambda)x$  et aussi :

$$f(a) = f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x)$$

Donc  $f$  est convexe (sur  $I$ ).

## 19.13 Caractérisation des fonctions convexes par les tangentes

### Proposition 19.13

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Alors  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si le graphe de  $f$  est situé au-dessus de toutes ses tangentes.

$\Rightarrow$

On suppose  $f$  convexe. Soit  $a \in I$  et soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto f'(a)(t - a) + f(a)$ .  
On pose  $h = f - \varphi \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$  et  $h' = f' - f'(a)$ .  
Or  $f$  est convexe donc  $f'$  est croissante sur  $I$ . Donc :

$a$	
$h'$	$- \quad 0 \quad +$
$h$	$\searrow \quad 0 \quad \nearrow$
$h$	$\quad + \quad$

$\Leftarrow$

Soit  $x < y$  et  $a = \lambda y + (1 - \lambda)x \in ]x, y[$ .  
Par hypothèse, le graphe de  $f$  est situé au-dessus de sa tangente en  $a$ .

$$\forall t \in I, f(t) \geq f'(a)(t - a) + f(a)$$

En particulier :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f'(a)(x-a) + f(a) \\ f(y) &\geq f'(a)(y-a) + f(a) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} (y-a)f(x) + (a-x)f(y) &\geq (y-a)f(a) \\ \text{donc } f(a) &\leq \frac{y-a}{y-x}f(x) + \frac{a-x}{y-x}f(y) \\ &= (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \end{aligned}$$

## 19.17 Somme de fonctions convexes

Proposition 19.17

La somme de deux fonctions convexes est convexe.

Soit  $f$  et  $g$  convexes. Soit  $x < y$  et  $a = \lambda x + (1-\lambda)y \in ]x, y[$ .

On a :

$$\begin{aligned} f(a) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\ g(a) &\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \end{aligned}$$

Donc :

$$(f+g)(a) \leq \lambda(f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y)$$

Donc  $f+g$  est convexe.

## 19.18 Composition de fonctions convexes

Proposition 19.18

Soit  $f : I \rightarrow J$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions convexes avec  $g$  croissante. Alors  $g \circ f$  est convexe sur  $I$ .

Soit  $x < y$  et  $a = \lambda x + (1-\lambda)y \in ]x, y[$ .

On a :

$$\begin{aligned} f(a) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\ \text{donc } g \circ f(a) &\leq g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \\ &\leq \lambda(g \circ f(x)) + (1-\lambda)(g \circ f(y)) \end{aligned}$$

Donc  $g \circ f$  est convexe.

## 19.19 Réciproque de fonctions convexes

Proposition 19.19

Soit  $f : I \rightarrow J$  une fonction convexe bijective avec  $I$  ouvert. Alors  $g = f^{-1}$  est soit concave, soit convexe sur  $J$ .

Comme  $f$  est convexe sur  $I$  ouvert,  $f$  est continue sur  $I$  (19.9).

Or  $f$  est bijective, donc  $f$  est strictement monotone sur  $I$  (15.72).

— Supposons  $f$  strictement croissante sur  $I$ . Soit  $x < y$  dans  $J = f(I)$ . Soit  $\lambda \in ]0, 1[$ . Alors  $g$  est strictement croissante.

On pose  $x = f(a)$  et  $y = f(b)$ . On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda a + (1-\lambda)b) &\leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \\ &\leq \lambda x + (1-\lambda)y \end{aligned}$$

Or  $g$  est strictement croissante, donc :

$$\begin{aligned}\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) &= \lambda a + (1 - \lambda)b \\ &\leq g(\lambda x + (1 - \lambda)y)\end{aligned}$$

Donc  $g$  est concave sur  $J$ .

— Si  $f$  est strictement décroissante (et donc  $g$  strictement décroissante), alors  $g$  est concave sur  $J$ .

## 19.20 Extrema des fonctions convexes

### Proposition 19.20

Soit  $f$  une fonction convexe définie par un intervalle  $I$  ouvert. Alors  $f$  admet un minimum global en un point  $a$  si et seulement si  $a$  est un point critique.

$\Rightarrow$

RAF

$\Leftarrow$

On suppose que  $a$  est un point critique. Donc  $f'(a) = 0$ .

Or le graphe de  $f$  est situé au-dessus de sa tangente en  $a$ , soit :

$$\forall x \in I, f(x) \geq \underbrace{f'(a)(x - a)}_0 + f(a) = f(a)$$

Donc  $f(a)$  est un minimum global de  $f$ .

## 19.24 Inégalité de Jensen

### Théorème 19.24

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe. Soit  $n \geq 2$ . Pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0; 1]^n$  avec  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ , alors

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

Par récurrence.

— Pour  $n = 2$ , RAF (cf. définition)

— On suppose la propriété vraie au rang  $n$ .

Soit  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ ,  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in [0, 1]^{n+1}$  avec  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ .

Si  $\lambda_{n+1} = 0$ , on applique directement l'hypothèse au rang  $n$  (RAF).

On suppose  $\lambda_{n+1} \neq 0$ . On a :

$$\begin{aligned}f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \times \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_{n+1}\right)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i) + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \times f\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_{n+1}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i) + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \times \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_n) + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_{n+1})\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\end{aligned}$$



## 19.25 Exemple - Inégalité arithmético-géométrique

### Exemple 19.25

Soit  $n \geq 1$ . Pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

La fonction logarithme est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ .

On remarque que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$ . D'après l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) &\geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(x_k) \\ &= \frac{1}{n} \ln \left( \prod_{k=1}^n x_k \right) \\ &= \ln \left( \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \right) \end{aligned}$$

On compose alors par exp (strictement croissante).

D'après le résultat précédent appliqué à  $\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)$  :

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$$

Donc  $(x \mapsto \frac{1}{x})$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}$$

## 19.26 Inégalités de Holder et Minkowski

### Théorème 19.26

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p$  et  $q$  deux nombres réels strictement positifs vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$  et  $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ . On a

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p} \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n b_k^q} \quad \text{Inégalité de Holder}$$

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n b_k^p} \quad \text{Inégalité de Minkowski}$$

— On rappelle que le logarithme est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc pour tout  $u > 0$  et  $v > 0$ , on a :

$$\ln\left(\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln(u^p) + \frac{1}{q} \ln(v^q) = \ln(uv)$$

Donc :

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Et en particulier :

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q}$$

En particulier, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\underbrace{\left[ \frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} \right]^{\frac{1}{p}} \times \left[ \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \right]^{\frac{1}{q}}}_{\frac{a_k b_k}{\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n a_i^p} \times \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n b_i^q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q} \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n a_i^p} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n b_i^q}} &\leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n \frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k b_k}{\sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p} \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n b_k^q}} \leq 1$$

—

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p &= \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)(a_k + b_k)^{p-1} \quad (p \neq 1) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n b_k (a_k + b_k)^{p-1} \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Holder  $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p &\leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p}^q \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{(p-1)q}} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n b_k^p}^q \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{(p-1)q}} \\ &= \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p}^q \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n b_k^p}^q \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p} \\ \text{donc } \left[ \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) \right]^{\overbrace{\left(1 - \frac{1}{q}\right)}^{\frac{1}{p}}} &= \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n b_k^p} \end{aligned}$$

Pour  $p = 1$ , RAF.

## Chapitre 20

# Espace Vectoriels

## 20.2 Propriétés du 0, régularité

### Proposition 20.2

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev. Pour tout  $x \in E$  :

1.  $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$
2. pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda.0_E = 0_E$
3.  $(-1).x = -x$
4. si  $x \neq 0_E$ ,  

$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$$
5. si  $x \neq 0_{\mathbb{K}}$ ,  

$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow x = 0_E$$

1.  $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x$ . Donc  $0_E = 0_{\mathbb{K}}.x$ .
2. RAS.
3.  $x + (-1).x = (1 - 1).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$ .
4. Par l'absurde, si  $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ , de  $\lambda x = 0_E$  on tire  $\lambda^{-1}\lambda x = \lambda^{-1}x0_E$ , soit  $x = 0_E$ . Absurde.
5. Idem.

## 20.10 Espace vectoriel de référence

### Proposition 20.10

1.  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel sur lui-même.
2. Plus généralement, soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $F$  un ensemble quelconque. Alors l'ensemble des fonctions  $E^F$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

1. RAF.
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $F$  un ensemble quelconque.  
 $E^F$  est un groupe abélien (cf. chap 10).  
 Le produit externe est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E^F &\longrightarrow E^F \\ (\lambda, f) &\longmapsto (\lambda.f, x \mapsto \lambda.f(x)) \end{aligned}$$

Vérification facile.

## 20.11 Transfert de structure

### Lemme 20.11

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $G$  un ensemble quelconque et  $\varphi : E \rightarrow G$  une bijection. Alors en définissant sur  $G$  une loi interne et une loi externe par

$$\forall (x, y, \lambda) \in G \times G \times \mathbb{K}, x + y = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)) \text{ et } \lambda.x = \varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)),$$

on munit  $G$  d'une structure d'espace vectoriel.

Vérifions les axiomes.

— LCI :

$$\begin{aligned}
 (x+y)+ &= \varphi(\varphi^{-1}(x+y) + \varphi(z)) \\
 &= \varphi(\underbrace{\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y) + \varphi^{-1}(z)}_{\text{associativité dans } E}) \\
 &= x + (y+z) \\
 x + \varphi(0) &= \varphi(\varphi^{-1}(x) + 0) = x \quad (\varphi \text{ neutre}) \\
 x + \varphi(-\varphi^{-1}(x)) &= \varphi(\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(x)) = \varphi(0) \\
 x + y &= y + x
 \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}
 \lambda.(\mu.x) &= \varphi(\lambda\varphi^{-1}(\mu x)) \\
 &= \varphi(\lambda\mu\varphi^{-1}(x)) \\
 &= (\lambda\mu).x \\
 1.x &= \varphi(1.\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \varphi \circ \varphi^{-1}(x) \\
 &= x \\
 (\mu + \lambda).x &= \varphi((\mu + \lambda).\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x) + \lambda\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x)) + \varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \mu.x + \lambda.x
 \end{aligned}$$

De même pour la dernière.

## 20.16 Caractérisation des sous-espaces vectoriels

### Théorème 20.16

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un ensemble  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si

1.  $F \subset E$ ;
2.  $0 \in F$ ;
3.  $F$  est stable par combinaisons linéaire, ce qui équivaut à

$$\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F.$$

$\Rightarrow$

1. Oui.
2.  $F$  est un sous-groupe de  $E$  donc  $0_E \in F$ .
3. Pour tout  $(x, y) \in F^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda x \in F$  et  $y \in F$ . Donc  $\lambda x + y \in F$ .

$\Leftarrow$

D'après (3) avec :

- $y = 0$  :  $\times$  est LCE.
- $\lambda = 1$  :  $+$  est LCI.

$0 \in F$  et  $\lambda = -1$ ,  $F$  est un sous-groupe, donc un groupe abélien. RAF pour les 4 dernières propriétés.

## 20.22 Propostion 20.22

### Propostion 20.22

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $D_1$  et  $D_2$  deux droites vectorielles. Alors soit  $D_1 \cap D_2 = \{0_E\}$ , soit  $D_1 = D_2$ .

Par définition,  $0_E \in D_1 \cap D_2$ .

Supposons  $D_1 \cap D_2 \neq \{0_E\}$  et fixons  $x \in D_1 \cap D_2$  avec  $x \neq 0_E$ .

Soit  $v \in D_1$ . Par définition, on écrit  $D_1 = \mathbb{K}x_1$  et  $D_2 = \mathbb{K}x_2$ .

On a donc  $v = \alpha x_1$ ,  $x = \lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2$  avec  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ .

Ainsi :

$$v = \alpha \lambda_1^{-1} \lambda_1 x_1 = \alpha \lambda_1^{-1} x = \alpha \lambda_1^{-1} \lambda_2 x_2 \in D_2$$

Donc  $D_1 \subset D_2$  et par symétrie,  $D_1 = D_2$ .

## 20.27 Intersection de sous-espaces vectoriels

### Proposition 20.27

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $(E_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $\bigcap_{i \in I} E_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- $\bigcap_{i \in I} E_i \subset E$ .
- $\forall i \in I, 0 \in E_i$  donc  $0 \in \bigcap_{i \in I} E_i$ .
- Soit  $(x, y) \in \left[ \bigcap_{i \in I} E_i \right]^2, \lambda \in \mathbb{K}$  :

$$\forall x \in I, \lambda x + y \in E_i$$

$$\text{Donc } \lambda x + y \in \bigcap_{i \in I} E_i.$$

## 20.34 Description de $\text{Vect}(X)$

### Proposition 20.34

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $X$  un sous-ensemble de  $E$ . Alors  $\text{Vect}(X)$  est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de  $X$ .

On note  $F$  l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de  $X$ .

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient  $X$ .

Par définition,  $\text{Vect}(X) \subset F$ .

Or  $\text{Vect}(X)$  est un sous-espace vectoriel qui contient  $X$ . Il doit donc contenir les combinaisons linéaires de  $X$  soit  $F$ .

Donc  $F = \text{Vect}(X)$ .

## 20.36 Opérations sur les sous-espaces vectoriels engendrés

### Proposition 20.36

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles. On a

1.  $A \subset \text{Vect}(A)$
2. Si  $A \subset B$  alors  $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$ .
3.  $A = \text{Vect}(A)$  si et seulement si  $A$  est un espace vectoriel.
4.  $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$ .
5.  $\text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A)$  si et seulement si  $x \in \text{Vect}(A)$ .

1. RAF

2. RAF (20.24)

3. Si  $A = \underbrace{\text{Vect}(A)}_{\text{sous-espace vectoriel}}$ , alors  $A$  est un sous-espace vectoriel.

Si  $A$  est un espace vectoriel, par minimalité,  $A = \text{Vect}(A)$ .

4. RAF (20.36.3)

5. On a toujours  $\text{Vect}(A \cup \{x\}) \supset \text{Vect}(A)$  (20.36.2) si  $\text{Vect}(A \cup \{x\}) \subset \text{Vect}(A)$ .

Or  $x \in \text{Vect}(A \cup \{x\})$ .

Donc  $x \in \text{Vect}(A)$ .

Réciproquement, si  $x \in \text{Vect}(A)$ , d'après (20.34) :

$$\text{Vect}(A \cup \{x\}) \subset \text{Vect}(A)$$

Si  $u \in \text{Vect}(A \cup \{x\})$ , alors :

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} x \\ &= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} (\mu_1 a'_1 + \dots + \mu_p a'_p) \\ &\in \text{Vect}(A) \end{aligned}$$

## 20.41 Somme de sous-espaces vectoriels engendrés

Proposition 20.41

Soit  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles de  $E$ . Alors

$$\text{Vect}(X \cup Y) = \text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y)$$

On a :

$$\begin{aligned} \text{Vect}(X) &\subset \text{Vect}(X \cup Y) \\ \text{Vect}(Y) &\subset \text{Vect}(X \cup Y) \\ \text{donc } \text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y) &\subset \text{Vect}(X \cup Y) \end{aligned}$$

Par minimalité :

$$\boxed{\text{Vect}(X \cup Y) = \text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y)}$$

## 20.43 Description d'une somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Proposition 20.43

Soit  $E_1, \dots, E_n$  et  $F$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Sont équivalentes :

1.  $F = E_1 + \dots + E_n$  ;
2.  $F = (\dots((E_1 + E_2) + E_3) + \dots + E_{n-1}) + E_n$  ;
3.  $F = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n \mid (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n\}$ .

2. Associativité fournie par la définition.

3. (20.39) + (20.43.2)

### Exemple

Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $E = \text{Vect}((1, 0, 0))$  et  $F = \text{Vect}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ .

Soit  $u \in E \cap F$ .

$$u = \alpha(1, 0, 0) = \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1).$$

$$\text{Donc } (-\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0).$$

$$\text{Donc } \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Dans  $\mathbb{R}^4$  avec  $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1, 0)$  et  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ .

$$E = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$$

$$F = Vect(e_1 + e_3, 2e_2 + e_1 - e_4)$$

Soit  $u \in E \cap F$ .

$$\begin{aligned} u &= \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta, \beta) \\ &= \gamma(e_1 + e_3) + \delta(2e_2 + e_1 - e_4) = (\gamma + \delta, 2\delta, \gamma, -\delta) \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{donc } \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma - \delta = 0 \\ \alpha + \beta - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \beta + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta = 0 \text{ (} L_1 - L_3 \text{)} \\ \beta = 0 \text{ (} L_4 \text{)} \\ \alpha = 0 \text{ (} L_2 \text{)} \\ \gamma = 0 \text{ (} L_2 \text{)} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{E \cap F = \{0\}}$$

## 20.47 Unicité de l'écriture de la somme directe

### Remarque 20.47

En d'autres termes, la somme est directe si et seulement si tout élément  $x$  de  $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$  s'écrit de façon unique sous la forme  $x = x_1 + \dots + x_n$ .

$\Rightarrow$

On suppose que la somme est directe.

Soit  $x \in E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ .

On écrit :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \dots + x_n \\ &= x'_1 + \dots + x'_n \\ \text{donc } \underbrace{x'_n - x_n}_{\in E_n} &= \underbrace{(x_1 - x'_1)}_{\in E_1} + \dots + \underbrace{(x_{n-1} - x'_{n-1})}_{\in E_{n-1}} \in E_n \cap (E_1 + \dots + E_{n-1}) = \{0\} \\ \text{donc } x'_n &= x_n \end{aligned}$$

On poursuit par récurrence.

$\Leftarrow$

On remarque que  $0 = 0 + \dots + 0$ .

Soit  $u \in E_n \cap (E_1 + \dots + E_{n-1})$ .

Donc :

$$\begin{aligned} u &= e_n = e_1 + \dots + e_{n-1} \\ \text{donc } e_1 + \dots + e_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Par unicité :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, e_i &= 0 \\ \text{donc } u &= 0 \end{aligned}$$

On termine le travail par récurrence.



## 20.51 Famille libre

### Proposition 20.51

Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est **libre** si une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Pour toute famille  $(\lambda_i)_{i \in I}$  de scalaires de  $\mathbb{K}$ , à support fini,  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$ .
2. Pour tout  $x \in \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$  il existe une **unique** famille  $(\lambda_i)_{i \in I}$  de scalaires de  $\mathbb{K}$ , à support fini, telle que  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ .

Si de plus,  $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ , les points précédents sont équivalents aux points suivants :

3. Les  $x_i$  sont non nuls et la somme  $\mathbb{K}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}x_n$  est directe.
4. La fonction  $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow E; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  est injective.

$1 \Rightarrow 2$

On écrit, pour tout  $x \in \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$  :

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = \sum_{i \in I} \mu_i x_i$$

$$\text{donc } \sum_{i \in I} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$$

Comme  $(\lambda_i)$  et  $(\mu_i)$  sont des familles de scalaires à support fini,  $(\lambda_i - \mu_i)$  aussi et d'après (20.51.1) :

$$\forall i \in I, \lambda_i - \mu_i = 0$$

$2 \Rightarrow 1$

Soit  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$  avec  $(\lambda_i)$  une famille de scalaires à support fini.

Comme :

$$0 = \sum_{i \in I} 0 x_i$$

Par unicité :

$$\forall i \in I, \lambda_i = 0$$

$1, 2 \Rightarrow 3$

Nécessairement, les  $x_i$  sont tous non nuls (sinon, on écrit  $1 \times x_1 = 0$ ).

Soit  $x \in (\mathbb{K} + \dots + \mathbb{K}x_{n-1}) \cap \mathbb{K}x_n$ .

On écrit :

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} = \alpha_n x_n$$

$$\text{donc } \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} - \alpha_n x_n = 0$$

Par hypothèse :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_i = 0$$

On poursuit le travail par récurrence pour montrer que la somme est directe.

$3 \Rightarrow 4$

RAF : (20.47)

$4 \Rightarrow 1, 2$

RAF : définition de l'injectivité pour 2.

## 20.52 Exemple

### Exemple 20.54

1. Montrer que la famille  $((1, 1), (0, 1))$  est libre.
2. Montrer que la famille  $((1, 2, 1), (1, 0, 1), (0, 1, -1))$  est libre.
3. Montrer que la famille  $((1, 2, 1), (1, 0, 1), (1, 6, 1))$  est liée.

1. On suppose  $\alpha(1, 1) + \beta(0, 1) = 0$ .  
Donc :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

donc  $\alpha = \beta = 0$

La famille est libre.

2. Par équivalence. Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . On a :

$$\begin{aligned} a(1, 2, 1) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, -1) &= (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b &= 0 \\ 2a + c &= 0 \\ a + b - c &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b + a &= 0 \\ 2a + c &= 0 \\ c &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

La famille est libre.

3. Avec les mêmes notations :

$$\begin{aligned} a(1, 2, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 6, 1) &= (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c &= 0 \\ 2a + 6c &= 0 \\ a + b + c &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c &= 0 \\ a + 3c &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système admet des solutions non nulles (par exemple  $(-3, 2, 1)$ ), donc la famille est liée.

## 20.58 Caractérisation de la liberté pour des familles infinies

### Proposition 20.58

Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

$\Rightarrow$

RAF : (20.57)

$\Leftarrow$

Soit  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille à support fini telle que :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \tag{20.1}$$

On choisit  $J \subset I$ , fini, tel que :

$$\begin{aligned} \forall i \in I \setminus J, \lambda_i &= 0 \\ \text{donc } \sum_{i \in J} \lambda_i x_i &= 0 \end{aligned}$$

Or  $(x_i)_{i \in J}$  est libre (finie), donc :

$$\begin{aligned} \forall i \in J, \lambda_i &= 0 \\ \text{donc } \forall i \in I, \lambda_i &= 0 \end{aligned}$$

## 20.60 Caractérisation de la liberté pour les familles infinies indexées par $\mathbb{N}$

### Proposition 20.60

Une famille  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est libre si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(x_0, \dots, x_n)$  est libre.

$\Rightarrow$

Si  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est libre, alors (20.58) ses sous-familles finies sont libres, en particulier celles sous la forme  $(x_0, \dots, x_n)$ .

$\Leftarrow$

Soit  $(x_i)_{i \in J}$  avec  $J$  un sous-ensemble fini de  $\mathbb{N}$ .

Or pose  $n = \max J$ , donc  $J \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Par hypothèse,  $(x_0, \dots, x_n)$  est libre.

Donc (20.57),  $(x_i)_{i \in J}$  est libre.

D'après (20.58),  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est libre.

## 20.61 Ajout d'un élément à une famille libre

### Proposition 20.61

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille libre de  $E$  et  $x_j \in E$  avec  $j \notin I$ . La famille  $(x_i)_{i \in I \cup \{j\}}$  est libre si et seulement si  $x_j \notin \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$ .

$\Rightarrow$

Si  $x_j \in \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$ , alors  $(x_i)_{i \in I \cup \{j\}}$  est liée.

En effet,  $x_j = \sum_{i \in J} \lambda_i x_i$  avec  $J$  fini.

Donc  $\sum_{i \in J \cup \{j\}} \lambda_i x_i = 0$  avec  $\lambda_j = -1$ .

La famille  $(x_i)_{i \in J \cup \{j\}}$ .

$\Leftarrow$

On suppose que  $(x_i)_{i \in J \cup \{j\}}$  est liée.

On choisit une famille de scalaires à support fini  $(\lambda_i)_{i \in I \cup \{j\}}$  telle que :

$$\sum_{i \in I \cup \{j\}} \lambda_i x_i = 0 \text{ et } (\lambda_i) \neq (0)$$

Donc :

$$\lambda_j + x_j + \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$$

Comme  $(x_i)_{i \in I}$  est libre,  $\lambda_j \neq 0$  et  $x_j = -\sum_{i \in I} \lambda_i \lambda_j^{-1} x_i \in \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$ .

## 20.63 Généricité d'une famille libre maximale

### Proposition 20.63

Une famille libre maximale est génératrice dans le sens de la définition ci après : tout élément de  $E$  est combinaison linéaire de vecteurs de la famille.

Soit  $\mathcal{F}$  une famille libre maximale.

Soit  $x \in E$ . Alors  $\mathcal{F} \cup \{x\}$  est liée.

Donc (20.61) :

$$x \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

## 20.64 Caractérisation des sommes directes par la liberté

### Proposition 20.64

Soit  $E_1, \dots, E_n$  des espaces sous-espaces vectoriels non triviaux de  $E$ . Alors la somme  $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$  est directe si et seulement si tout  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  d'éléments tous non nuls de  $E_1 \times \dots \times E_n$  est une famille libre dans  $E$ .

$\Rightarrow$

On suppose  $\bigoplus_{i=1}^n E_i$ . Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, x_i \neq 0$ .

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  telle que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$$

En particulier,  $\lambda_i x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i \in E_n \cap \sum_{i=1}^{n-1} E_i = \{0\}$ . Donc  $\lambda_n = 0$ . On réitère le procédé pour trouver  $\lambda_n = \dots = \lambda_1 = 0$ .

Donc  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre.

$\Leftarrow$

Soit  $x \in E_n \cap \sum_{i=1}^{n-1} E_i$ . On écrit  $x = x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ .

Donc :

$$x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n = 0$$

Par hypothèse, on doit avoir :

$$x_n = x_{n-1} = \dots = x_1 = 0$$

Donc  $x = 0$  et  $E_n \cap \left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i\right) = \{0\}$ .

On réitère le procédé pour montrer que  $\bigoplus_{i=1}^n E_i$ .

## 20.65 Somme directes et caractérisation de familles libres

### Proposition 20.65

1. Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tel que  $F + G$  soit directe. Alors la concaténation d'une famille libre de  $F$  et d'une famille libre de  $G$  est une famille libre de  $E$ .
2. Réciproquement, si  $(b_1, \dots, b_n)$  est une famille libre de  $E$ , alors  $\text{Vect}(b_1, \dots, b_k) \oplus \text{Vect}(b_{k+1}, \dots, b_n)$  est directe.

1.  $(x_1, \dots, x_k)$  famille libre de  $F$ .  
 $(x_{k+1}, \dots, x_n)$  famille libre de  $G$ .  
 Soit  $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{K}^n$  telle que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i &= 0 \\ \text{donc } \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i &= - \sum_{i=k+1}^n \lambda_i x_i \in F \cap G = \{0\} \\ \text{donc } \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i &= 0 = \sum_{i=k+1}^n \lambda_i x_i \\ \text{donc } \lambda_i &= 0 \text{ pour } i \in \llbracket 1, k \rrbracket \cup \llbracket k+1, n \rrbracket \end{aligned}$$

2. RAS

## 20.66 Familles génératrices

### Proposition 20.66

Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est une famille **génératrice** de  $E$  si l'une des propriétés équivalentes est satisfaite :

1. Tout  $x \in E$  est une combinaison linéaire des  $x_i, i \in I$ .
2.  $\text{Vect}((x_i)_{i \in I}) = E$ .  
 Si de plus  $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ , les points précédents sont équivalents à :
3.  $E = \sum_{i=1}^n \mathbb{K}x_i$ .
4. La fonction  $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow E; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  est surjective.

$$\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$$

RAF, il s'agit des définitions.

$$\boxed{2 \Leftrightarrow 3}$$

Lorsque  $I = \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} \text{Vect}((x_i)_{i \in I}) &= \text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \mathbb{K}x_1 + \dots + \mathbb{K}x_n \quad (20.44) \end{aligned}$$

Donc  $2 \Leftrightarrow 3$ .

$$\boxed{3 \Leftrightarrow 4}$$

RAF, il s'agit des définitions.

## 20.68 Stabilité des familles génératrices par ajout

### Proposition 20.68

Toute famille contenant une famille génératrice de  $E$  est une famille génératrice de  $E$ .

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille quelconque et on suppose qu'il existe  $J \subset I$  tel que  $(x_i)_{i \in J}$  est génératrice.

$$E \supset \text{Vect}((x_i)_{i \in I}) \supset \text{Vect}((x_i)_{i \in J}) = E$$

## 20.69 Restriction d'une famille génératrice

### Proposition 20.69

La famille obtenue en retirant un élément  $x$  d'une famille génératrice de  $E$  est encore génératrice si et seulement si  $x$  est une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

RAF : (20.36.5)

## 20.71 Liberté d'une famille génératrice minimale

### Proposition 20.71

Une famille génératrice minimale est libre.

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille génératrice minimale.

On suppose  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$  avec  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille de scalaires à support fini.

Soit  $k \in I$ , on a :

$$\lambda_k x_k = - \sum_{i \in I, i \neq k} \lambda_i x_i \in \text{Vect}((x_i)_{i \in I \setminus \{k\}})$$

Or  $x_k \notin \text{Vect}((x_i)_{i \neq k})$  car la famille est minimale (20.69).

Donc  $\lambda_k = 0$ .

## 20.78 Famille échelonnée en degrés

### Proposition 20.78

Si  $(P_0, \dots, P_n)$  est une famille d'éléments de  $\mathbb{K}_n[X]$  telle que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\deg(P_k) = k$ , alors  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

Soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ . Soit  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ . On a :

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i = P$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_n c_n + \dots &= a_n \\ \vdots & \\ \lambda_0 c_0 &= a_0 \end{cases}$$

où  $c_0, \dots, c_n$  sont les coefficients dominants de  $P_0, \dots, P_n$  et  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ .

Le système est triangulaire supérieur avec une diagonale ne contenant aucun 0 il est inversible.

Il existe bien une unique famille  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  telle que  $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i$ .

## Chapitre 21

# Applications linéaires

## 21.4 Exemple

### Exemple 21.4.1

L'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = 2x + 3y$ .

Soit  $((x, y), (x', y'), \lambda) \in (\mathbb{R}^2)^2 \times \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} f((x, y) + \lambda(x', y')) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y') \\ &= 2(x + \lambda x') + 3(y + \lambda y') \\ &= 2x + 3y + \lambda(2x' + 3y') \\ &= f(x, y) + \lambda f(x', y'). \end{aligned}$$

## 21.8 Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

### Proposition 21.8

$\mathcal{L}(E, F)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

- $\mathcal{L}(E, F) \subset F^E$
- $\vec{0} \in \mathcal{L}(E, F)$
- Soit  $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Soit  $(x, y) \in E^2, \lambda \in \mathbb{K}$ . On a :

$$\begin{aligned} (f + \alpha g)(x + \lambda y) &= f(x + \lambda y) + \alpha g(x + \lambda y) \\ &= f(x) + \lambda f(y) + \alpha g(x) + \alpha \lambda g(y) \\ &= f(x) + \alpha g(x) + \lambda(f(y) + \alpha g(y)) \\ &= (f + \alpha g)(x) + \lambda(f + \alpha g)(y). \end{aligned}$$

Donc  $f + \alpha g \in \mathcal{L}(E, F)$ .

## 21.10 Composition de deux AL

### Proposition 21.10

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ .

Soit  $(x, y) \in E^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  :

$$\begin{aligned} g \circ f(x + \lambda y) &= g(f(x + \lambda y)) \\ &= g(f(x) + \lambda f(y)) \\ &= g(f(x)) + \lambda g(f(y)) \\ &= g \circ f(x) + \lambda g \circ f(y). \end{aligned}$$

Donc  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ .

## 21.13 Bilinéarité de la composition

### Proposition 21.13

La composition d'application linéaire est bilinéaire. En termes plus précis,  $E, F$  et  $G$  étant des  $\mathbb{K}$ -ev, l'application

$$\Psi : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G); (u, v) \mapsto v \circ u$$

est une application bilinéaire.



D'après la remarque (21.11),  $\Psi$  est linéaire à droite.

$$\forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall (v, v') \in \mathcal{L}(F, G)^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \Psi(u, v + \lambda v') = \Psi(u, v) + \lambda \Psi(u, v')$$

Soit  $(u, u') \in \mathcal{L}(E, F)^2, v \in \mathcal{L}(F, G), \lambda \in \mathbb{K}$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{E}, \Psi(u + \lambda u', v)(x) &= v \circ (u + \lambda u')(x) \\ &= v(u(x) + \lambda u'(x)) \\ &= v(u(x)) + \lambda v(u'(x)) \\ &= \Psi(u, v)(x) + \lambda \Psi(u', v)(x) \end{aligned}$$

Donc  $\Psi(u + \lambda u', v) = \Psi(u, v) + \lambda \Psi(u', v)$ .

## 21.16 Structure des images directes et réciproques

### Proposition 21.16

1. Soit  $E'$  un sev de  $E$ . Alors  $f(E')$  est un sev de  $F$ .
2. Soit  $F'$  un sev de  $F$ . Alors  $f^{-1}(F')$  est un sev de  $E$ .

1. —  $f(E') \subset F$   
 —  $0 = f(0) \in f(E')$   
 — Soit  $(x, y) \in f(E')^2, \lambda \in \mathbb{K}$ . On écrit  $x = f(\alpha), y = f(\beta)$  avec  $(\alpha, \beta) \in E'^2$ .

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= f(\alpha) + \lambda f(\beta) \\ &= f(\alpha + \lambda \beta) \\ &\in f(E') \end{aligned}$$

2. —  $f^{-1}(F') \subset E$   
 —  $0 = f(0) \in f^{-1}(F')$   
 — Soit  $(x, y) \in f^{-1}(F')^2, \lambda \in \mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned} f(x + \lambda y) &= f(x) + \lambda f(y) \in F' \\ \text{donc } x + \lambda y &\in f^{-1}(F') \end{aligned}$$

## 21.21 Famille génératrice de $Im(f)$

### Proposition 21.21

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $(e_i)_{i \in I}$  une famille génératrice de  $E$ . Alors  $(f(e_i))_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $Im(f)$ .

Soit

$$Im(f) = Vect(f(e_i)_{i \in I})$$

- Pour tout  $i \in I, f(e_i) \in Im(f)$ .  
 Comme  $Im(f)$  est un sev :

$$Vect(f(e_i)_{i \in I}) \subset Im(f)$$

- Soit  $a \in Im(f)$ . On choisit  $x \in E$  tel que  $a = f(x)$ .  
 Comme  $(e_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $E$ , on peut écrire  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$  où  $(\lambda_i)_{i \in I}$  est à support fini.

$$\begin{aligned} a &= f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) \\ &\in Vect(f(e_i)_{i \in I}) \end{aligned}$$

## 21.23 Réciproque d'un isomorphisme

### Théorème 12.23

Soit  $f$  un isomorphisme de  $E$  vers  $F$ . Alors  $f^{-1}$  est une application linéaire, donc un isomorphisme de  $F$  vers  $E$ .

On pose  $g = f^{-1}$ . Soit  $(x, y) \in F^2, \lambda \in \mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned} g(x + \lambda y) &= g(f(g(x)) + \lambda f(g(y))) \\ &= g(f(g(x)) + \lambda f(g(y))) \\ &= g(x) + \lambda g(y) \end{aligned}$$

Donc  $g \in \mathcal{L}(F, E)$ .

## 21.41 Structure de l'ensemble des polynômes annulateurs - Hors Programme

### Proposition 21.41 - HP

L'ensemble des polynômes annulateurs de  $f$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ .

Si  $P$  et  $Q$  annulent  $u$ , alors :

$$(P - Q)(u) = P(u) - Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Si  $B \in \mathbb{K}[X]$  :

$$(PB)(u) = P(u) \circ B(u) = B(u) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

## 21.52 Caractérisation de l'image d'un projecteur

### Proposition 21.52

Soit  $p$  un projecteur de  $E$ . Alors  $x \in \text{Im}(p)$  si et seulement si  $p(x) = x$ . Soit :

$$\text{Im}(p) = \ker(p - \text{id}_E)$$

Soit  $p$  un projecteur. Soit  $x \in E$ .

- Si  $x \in \text{Im}(p)$ , on choisit  $y \in E$  tel que  $x = p(y)$ .  
Donc  $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$ .
- Si  $p(x) = x$ , alors  $x \in \text{Im}(p)$ .
- 

$$\begin{aligned} x \in \text{Im}(p) &\Leftrightarrow p(x) = x \\ &\Leftrightarrow p(x) - x = 0 \\ &\Leftrightarrow (p - \text{id})(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker(p - \text{id}) \end{aligned}$$

## 21.53 Diagonalisation d'un projecteur

### Théorème 21.53

Soit  $p$  un projecteur de  $E$ . Alors :

$$E = \ker(p) \oplus \ker(p - \text{id}_E)$$

Soit  $x \in \ker(p) \cap \ker(p - \text{id}_E)$ .

Donc  $p(x) = 0$  et  $p(x) - x = 0$ .

Donc  $x = 0$ .

Soit  $x \in E$ , on écrit  $x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \ker(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im}(p) = \ker(p-id)}$ .

Donc  $E = \ker(p) \oplus \ker(p - id)$ .

## 21.57 Caractérisation géométrique des projecteurs

### Théorème 21.57

Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$ .

—  $p$  est un projecteur si, et seulement si, il existe deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  tels que  $E = F \oplus G$  et

$$\forall f \in F, \forall g \in G, p(f + g) = f.$$

— Dans ce cas,  $F = \operatorname{Im}(p)$  et  $G = \ker(p)$ .

— Ainsi, un projecteur est une projection géométrique sur  $\operatorname{Im}(p)$  parallèlement à  $\ker(p)$ .

$\Rightarrow$

Existence justifiée avec  $F = \operatorname{Im}(p)$  et  $G = \ker(p)$ .

$\Leftarrow$

Soit  $x = f + g \in E$ .

$$\begin{aligned} p^2(x) &= p \circ p(f + g) \\ &= p(f) \\ &= f \\ &= p(f + g) \\ &= p(x) \end{aligned}$$

Donc  $p^2 = p$ , donc  $p$  est un projecteur.

## 21.59 Diagonalisation d'une symétrie

### Théorème 21.59

On suppose que  $\mathbb{K}$  n'est pas de caractéristique 2. Soit  $s$  une symétrie de  $E$ . Alors :

$$E = \ker(s + id_E) \oplus \ker(s - id_E)$$

— Soit  $x \in \ker(s - id) \cap \ker(s + id)$ . Donc :

$$\begin{aligned} s(x) - x &= 0 \\ s(x) + x &= 0 \\ \text{donc } 2x &= 0 \\ \text{donc } x &= 0 \end{aligned}$$

— Pour  $x \in E$ ,  $x = \frac{1}{2}(\underbrace{x - s(x)}_{\in \ker(s+id)}) + \frac{1}{2}(\underbrace{x + s(x)}_{\in \ker(s-id)})$ .

## 21.63 Détermination d'une AL par l'image d'une base, ou rigidité

### Proposition 21.63

Etant donné une base  $(b_i)_{i \in I}$  de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de  $F$ , il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que pour tout  $i \in I$ ,  $u(b_i) = f_i$ .

Soit  $(b_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de  $F$ .

Soit  $x \in E$ . On écrit  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$  avec  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille de scalaires à support fini.

On pose  $u(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i f_i$ . On définit bien une application car les  $\lambda_i$  sont uniques.

Montrons que  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $(x, y) \in E^2$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

On écrit  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$  et  $y = \sum_{i \in I} \mu_i b_i$ . Ainsi :

$$x + \alpha y = \sum_{i \in I} (\lambda_i + \alpha \mu_i) b_i$$

Par définition :

$$\begin{aligned} u(x + \alpha y) &= \sum_{i \in I} (\lambda_i + \alpha \mu_i) f_i \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i f_i + \alpha \sum_{i \in I} \mu_i f_i \\ &= u(x) + \alpha u(y) \end{aligned}$$

L'existence est prouvée, et si  $v \in \mathcal{L}(E, F)$  tel que :

$$\forall i \in I, v(b_i) = f_i$$

Le raisonnement précédent impose que :

$$\forall x \in E, u(x) = v(x)$$

Soit :

$$u = v$$

## 21.64 Exemple

### Exemple 21.64

1. Déterminer l'expression générale de l'application lin de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que :

$$f(1, 0) = (3, 2) \quad \text{et} \quad f(0, 1) = (2, 1)$$

2. Montrer que toute application linéaire de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$  est de la forme  $X \mapsto MX$  et décrire  $M$  à partir d'une base de  $\mathbb{R}^p$ .
3. Soit  $(b_i)_{i \in I}$  de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de  $F$ , il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que pour tout  $i \in I$ ,  $u(b_i) = f_i$ .

1. Pour tout  $(x, y)$ .

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x(1, 0) + y(0, 1)) \\ &= xf(1, 0) + yf(0, 1) \\ &= x(3, 2) + y(2, 1) \\ &= (3x + 2y, 2x + y) \end{aligned}$$

2. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ .

Soit  $(b_1, \dots, b_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(b_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} e_i$$

Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ .

$$\begin{aligned}
 f(X) &= f\left(\sum_{j=1}^p x_j b_j\right) \\
 &= \sum_{j=1}^p x_j f(b_j) \\
 &= \sum_{j=1}^p x_j \sum_{i=1}^n m_{ij} e_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p m_{ij} x_j\right) e_i \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p m_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p m_{nj} x_j \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## 21.68 Caractérisation de l'injectivité par l'image d'une base

### Proposition 21.68

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est injective
2. l'image de la famille libre de  $E$  par  $f$  est une famille libre de  $F$   
Si de plus  $E$  admet au moins une base, elles sont aussi équivalentes à :
3. l'image de toute base de  $E$  par  $f$  est une famille libre de  $F$
4. il existe une base de  $E$  dont l'image par  $f$  est une famille libre de  $F$

$1 \Rightarrow 2$

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille libre de  $E$ .

On suppose  $\sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) = 0$  avec  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille de scalaires à support fini.

Donc :

$$\begin{aligned}
 f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) &= 0 \\
 \text{donc } \sum_{i \in I} \lambda_i x_i &= 0 \\
 \text{donc } \forall i \in I, \lambda_i &= 0
 \end{aligned}$$

$2 \Rightarrow 1$

On suppose  $f$  non injective. Donc  $\ker(f) \neq \{0\}$ .

Soit  $x \neq 0$  tel que  $f(x) = 0$ .

Or  $(x)$  est libre ( $x \neq 0$ ) et  $(f(x))$  est liée.

On suppose que  $E$  admet une base.

$2 \Rightarrow 3$  RAF

$3 \Rightarrow 4$  RAF

$4 \Rightarrow 1$

Soit  $(b_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  telle que  $(f(b_i))_{i \in I}$  est libre.

Soit  $x \in \ker f$ . Donc  $f(x) = 0$  et  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$  avec  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille de scalaires à support fini.

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i f(b_i) \end{aligned}$$

Donc, car  $(f(b_i))_{i \in I}$  est libre, on a :

$$\forall i \in I, \lambda_i = 0$$

Donc  $x = 0$ .

Donc  $f$  est injective.

## 21.69 Caractérisation de la surjectivité par l'image d'une base

Proposition 21.69

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Sont équivalentes :

1.  $f$  est surjective
2. l'image de toute famille génératrice de  $E$  par  $f$  est une famille génératrice de  $F$   
Si de plus  $F$  admet au moins une base, les propriétés précédentes sont équivalentes à :
3. l'image de toute base de  $E$  par  $f$  est une famille génératrice de  $F$
4. il existe une base de  $E$  dont l'image par  $f$  est une famille génératrice de  $F$

$1 \Rightarrow 2$

On suppose  $f$  surjective. Soit  $\mathcal{F}$  une famille génératrice de  $E$ .

$$\mathcal{F} = \text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\mathcal{F}))$$

Donc  $f(\mathcal{F})$  est génératrice.

$2 \Rightarrow 1$   $\mathcal{F} = (x)_{x \in E}$

$2 \Rightarrow 3$  RAF

$3 \Rightarrow 4$  RAF

$4 \Rightarrow 1$

Soit  $B$  la base considérée.

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(B)) = F$$

## Chapitre 22

# Espaces de dimension finie

## 22.3 Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants

### Proposition 22.3

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie engendré par  $n$  éléments. Alors toute partie libre de  $E$  possède au plus  $n$  éléments.

Soit  $G$  une famille génératrice de  $E$  avec  $G = (g_1, \dots, g_n)$ . Soit  $\mathcal{L}$  une famille libre de  $E$ .

Supposons par l'absurde que  $|\mathcal{L}| > n$ . Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note :

$$P(k) : "E \text{ est engendré par } n - k \text{ vecteurs de } G \text{ et } k \text{ vecteurs de } \mathcal{L}"$$

Pour  $k = 0$ , la famille convient.

On suppose que pour  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ ,  $E = \text{Vect}(\underbrace{g_1, \dots, g_{n-k}}_{\in G}, \underbrace{l_1, \dots, l_k}_{\in \mathcal{L}})$

Comme  $l_{k+1} \in E$ , on écrit  $l_{k+1} = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i g_i + \sum_{i=1}^k \beta_i l_i$ .

Comme  $\mathcal{L}$  est libre,  $l_{k+1} \notin \text{Vect}(l_1, \dots, l_k)$ .

Donc il existe  $i \in \llbracket 1, n - k \rrbracket$ ,  $\alpha_i \neq 0$  et quitte à renommer les  $g_i$ , on peut supposer  $\alpha_{n-k} \neq 0$  et ainsi :

$$g_{n-k} \in \text{Vect}(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_{k+1})$$

Ainsi :

$$E = \text{Vect}(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_{k+1})$$

Par récurrence,  $P(k)$  est vraie pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , en particulier,  $P(n)$  est vraie.

$(l_1, \dots, l_n)$  est une base de  $E$ . Or  $l_{n+1} \in E$  et  $(l_1, \dots, l_{n+1})$  libre. Absurde.

## 22.5 Algorithme de la base incomplète

### Théorème 22.5

Soit  $E \neq \{0\}$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$  une partie génératrice de  $E$  dont les  $p$  premiers vecteurs sont linéairement indépendants. Dans ces conditions,  $E$  possède une base constituée des vecteurs  $x_1, \dots, x_p$  et de certains vecteurs  $x_{p+1}, \dots, x_n$ .

On utilise l'algorithme suivant :

On initialise  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ . Pour tout  $k \in \llbracket p + 1, n \rrbracket$  :

- Si  $x_k \in \text{Vect}(\mathcal{F})$ , on laisse  $\mathcal{F}$  invariant.
- Si  $x_k \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$ , on remplace  $\mathcal{F}$  par  $\mathcal{F} \cup \{x_k\}$ .

L'algorithme s'arrête en temps fini.

La famille  $\mathcal{F}$  obtenue est libre, elle est également génératrice car :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in \mathcal{F} \text{ ou } x_i \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

Donc  $E = \text{Vect}(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \subset \text{Vect}(\mathcal{F}) \subset E$ . Donc  $\mathcal{F}$  est une base.

## 22.8 Théorème de la base incomplète

### Théorème 22.8

Soit  $E \neq \{0\}$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

1. Toute famille libre de  $E$  peut être complétée en une base finie de  $E$ .
2. De toute famille génératrice de  $E$  on peut extraire une base finie de  $E$ .

En particulier,  $E$  possède une base finie.

Soit  $\mathcal{G}$  une famille génératrice finie.

1. Soit  $\mathcal{L}$  une famille libre. On applique l'algorithme de la base incomplète à  $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$  qui fournit une base  $B$  de  $E$  contenant  $\mathcal{L}$ .



2. Comme  $\mathcal{G}$  est génératrice, on fixe  $x \neq 0 \in \mathcal{G}$  comme premier vecteur de  $\mathcal{G}$  et on lui applique l'algorithme de la base incomplète.  
La base obtenue est bien constituée de vecteurs de  $\mathcal{G}$ .

## Remarque

### Remarque

Si  $\mathcal{G}$  est une famille génératrice, elle contient nécessairement une famille génératrice finie.

## 22.11 Caractérisation de la dimension finie par le cardinal des familles libres

### Corollaire 22.11

Soit  $E$  un espace vectoriel. Alors  $E$  est de dimension finie si et seulement si toute famille libre de  $E$  est de cardinal fini.



On suppose  $E$  de dimension finie. Donc  $E$  possède une famille génératrice à  $n$  vecteurs.  
Donc les familles libres de  $E$  ont un cardinal inférieur à  $n$ .  
Elles sont finies.



Par contraposée, on suppose  $E$  de dimension infinie.  
Soit  $x \in E$  avec  $x \neq 0$ .  
On pose  $x_1 = x$ . Comme  $E$  est de dimension infinie, on choisit  $x_2 \in E \setminus \text{Vect}(x_1)$ .  
On poursuit les raisonnements par récurrence pour obtenir une famille libre  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

## 22.12 Théorème de la dimension

### Théorème 22.12

Soit  $E \neq \{0\}$  un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de  $E$  sont finies et sont de même cardinal.

Soit  $B$  et  $B'$  deux bases. On a :

$$|B| \leq |B'| \text{ et } |B'| \leq |B|$$

Donc :

$$|B| = |B'|$$

## 22.18 Caractérisation des bases en dimension finie

### Théorème 22.18

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n \neq 0$ . Une famille de  $n$  vecteurs est une base si, et seulement si, elle est libre, si, et seulement si, elle est génératrice.

Soit  $\mathcal{F}$  une famille avec  $|\mathcal{F}| = \dim E = n$ .

- On suppose que  $\mathcal{F}$  est libre.  
On applique sur  $\mathcal{F}$  le théorème de la base incomplète.  
On obtient alors une base  $B$  de  $E$  avec :

$$\mathcal{F} \subset B$$

Or  $|B| = \dim E = |\mathcal{F}|$ .

Donc  $\mathcal{F} = B$ .

— On suppose  $\mathcal{F}$  génératrice. On procède de la même manière en utilisant le théorème de la base extraite.

## 22.20 Majoration du rang et cas d'égalité

### Proposition 22.20

On a

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_k) \leq k$$

avec égalité si et seulement si la famille est libre.

Soit  $\text{Vect}((x_i)_{i \leq k})$  possède un système fini de  $k$  vecteurs générateurs.

$$\dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)) \leq k$$

— Si  $\dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)) = k$ , alors (22.18),  $(x_1, \dots, x_k)$  est une base, donc est libre.

— Si la famille est libre, c'est une base de  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ , donc  $\dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)) = k$ .

## 22.22 Dimension d'un sous-espace vectoriel

### Proposition 22.22

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$ , avec égalité si et seulement si  $F = E$ .

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , avec  $E$  de dimension finie.

Ainsi,  $F$  est lui-même de dimension finie (22.11).

Si  $\mathcal{L}$  est une famille libre de  $F$  :

$$|\mathcal{L}| \leq \dim E$$

Donc (il suffit de prendre pour  $\mathcal{L}$  une base de  $F$ ) :

$$\dim F \leq \dim E$$

Si  $\dim F = \dim E$ , alors une base de  $F$  est aussi une base de  $E$  (22.18).

Ainsi :

$$F = \text{Vect}(B) = E$$

## 22.23 Formule de Grassmann

### Théorème 22.23

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors  $F + G$  est de dimension finie et :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

$F \cap G \subset F$ , donc  $F \cap G$  est de dimension finie.

On note  $n = \dim F \cap G$ .

On choisit une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $F \cap G$ .

On complète cette famille libre en :

— une base  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$  de  $F$

— une base  $(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q)$  de  $G$

Montrons que  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$  est une base de  $F + G$ .

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p) + \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q) \\ &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q) \end{aligned}$$

La famille génératrice. On suppose :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^p \beta_i f_i + \sum_{i=1}^q \gamma_i g_i = 0$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^q \gamma_i g_i = - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^p \beta_i f_i \in F \cap G$$

Donc (liberté de  $(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q)$ ) :

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = (0, \dots, 0)$$

Puis :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^p \beta_i f_i = 0$$

Donc (liberté de  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ ) :

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= (0, \dots, 0) \\ (\beta_1, \dots, \beta_p) &= (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \dim(F + G) &= n + p + q \\ &= n + p + n + q - n \\ &= \dim F + \dim G - \dim F \cap G \end{aligned}$$

## 22.27 Caractérisation des couples de sous-espaces vectoriels supplémentaires

### Proposition 22.27

Soit  $E$  un espace de dimension finie,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $F$ . Alors  $F$  et  $G$  sont supplémentaires si et seulement si :

$$F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E$$

si et seulement si :

$$F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E$$

$F$  et  $G$  sont supplémentaires ssi  $F \oplus G = E$

$$\text{ssi } F \cap G = \{0\} \text{ et } F + G = E$$

( $\Rightarrow$ ) 22.26 ( $\Leftarrow$ ) 22.26, 22.22) ssi  $F \cap G = \{0\}$  et  $\dim F + \dim G = \dim E$

( $\Rightarrow$ ) 22.26 ( $\Leftarrow$ ) 22.23) ssi  $F + G = E$  et  $\dim F + \dim G = \dim E$

## 22.28 Existence et dimension d'un supplémentaire en dimension finie

### Théorème 22.28

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ . Alors il existe un supplémentaire  $S$  de  $F$  et :

$$\dim S = \dim E - \dim F$$

- Si  $F = \{0\}$ ,  $E$  convient.
- Si  $F \neq \{0\}$ , on choisit une base de  $F$   $(f_1, \dots, f_p)$  que l'on complète en une base  $(f_1, \dots, f_p, s_1, \dots, s_q)$  de  $E$  ( $\dim E = p + q$ ).  
 $S = \text{Vect}(s_1, \dots, s_q)$  convient.

## 22.30 Base de $\mathcal{L}(E, F)$

### Proposition 22.30

Si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, la famille  $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  décrite dans l'exemple précédent est une base de  $\mathcal{L}(E, F)$ .

- Montrons que  $(u_{i,j})$  est libre.  
 On suppose  $\sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{i,j} u_{i,j} = 0$ .

$$\begin{aligned} \forall k \in I, \quad \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{i,j} u_{i,j}(b_k) &= 0 \\ \text{donc} \quad \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{i,j} \delta_{i,k} c_j &= 0 \\ \text{donc} \quad \sum_{j \in J} \lambda_{k,j} c_j &= 0 \end{aligned}$$

Par liberté des  $(c_j)$ , on a :

$$\forall k \in I, \forall j \in J, \lambda_{k,j} = 0$$

- Montrons que  $(u_{i,j})$  est génératrice.  
 Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .  
 Pour tout  $k \in I$ ,  $f(b_k) = \sum_{j \in J} \lambda_{k,j} c_j$  ( $(c_j)$  est une base de  $F$ ).  
 Alors :

$$f = \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{i,j} u_{i,j} \text{ (théorème de rigidité)}$$

## 22.32 Dimension d'espaces isomorphes

### Proposition 22.32

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces isomorphes. Si l'un des deux est de dimension finie, alors les deux le sont et :

$$\dim E = \dim F$$

Réciproquement, si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie avec  $\dim E = \dim F$ , alors  $E$  et  $F$  sont isomorphes.

- Si  $\dim E = n$ , on choisit  $B$  une base de  $E$ .  
 Si  $f : E \rightarrow F$  est un isomorphisme, alors  $f(B)$  est une base de  $F$ .  
 Donc  $F$  est de dimension finie et  $\dim F = |f(B)| = |B| = n = \dim E$ .

- On suppose que  $\dim E = n = \dim F$ .  
Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$ .  
On définit (théorème de rigidité)  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i$$

D'après (21.70),  $u$  est un isomorphisme.

## 22.35 Rang d'une famille génératrice

### Proposition 22.35

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille génératrice de  $E$ . Le rang de  $u$ , s'il existe est égal au rang de la famille  $(u(x_i))_{i \in I}$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u) &= \dim(\operatorname{Im}(u)) \\ &= \dim(\operatorname{Vect}(u(x_i))_{i \in I}) \quad (21.21) \\ &= \operatorname{rg}(u(x_i))_{i \in I} \end{aligned}$$

## 22.36 Existence et majoration du rang en dimension finie

### Proposition 22.36

- Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $E$  ou  $F$  sont de dimension finie, alors  $\operatorname{Im}(u)$  est également de dimension finie et (avec les conditions adéquates) :

$$\operatorname{rg}(u) \leq \dim E \text{ ou } \operatorname{rg}(u) \leq \dim F$$

- Avec les conditions appropriées :
  - $\operatorname{rg}(u) = \dim E$  si et seulement si  $u$  est injective
  - $\operatorname{rg}(u) = \dim F$  si et seulement si  $u$  est surjective

On suppose  $E$  et  $F$  de dimension finie.

- $\operatorname{Im}(u) \subset F$  et  $\dim(\operatorname{Im}(u)) \leq \dim F$  et  $\operatorname{rg}(u) = \dim F$  si et seulement si (22.22)  $\operatorname{Im}(u) = F$  si et seulement si  $u$  est surjective.
- Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .  
Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  engendre  $E$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u) &= \operatorname{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \quad (22.35) \\ &\leq n = \dim E \quad (22.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n)) &= n \text{ ssi } (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est libre} \\ &\quad (21.68) \text{ ssi } u \text{ est injective} \end{aligned}$$

## 22.39 Effet d'une composition sur le rang

### Théorème 22.39

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors :

1.  $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$
2. si  $v$  est injective, alors  $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$
3. si  $u$  est surjective, alors  $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$

1.  $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im}(v)$  donc  $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \operatorname{rg}(v)$  et  $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im}(v|_{\operatorname{Im}(u)})$  donc :

$$\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v|_{\operatorname{Im}(u)}) \leq \dim(\operatorname{Im}(u)) = \operatorname{rg}(u)$$

2. Si  $v$  est injective, alors (22.36),  $rg(v|_{Im(u)}) = \dim(Im(u)) = rg(u)$
3. Si  $u$  est surjective, alors  $Im(u) = F$ , et d'après (22.39.1) :

$$rg(v \circ u) = rg(v|_F) = rg(v)$$

## 22.40 Noyau et image d'une restriction

### Lemme 22.40

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $E'$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Soit  $v \in \mathcal{L}(E', F)$  la restriction de  $u$  à  $E'$ . Alors :

- $\ker v = \ker u \cap E'$
- Si  $\ker u + E' = E$ , alors  $Im(v) = Im(u)$

Soit  $x \in E$ .

—

$$\begin{aligned} x \in \ker v &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in E' \\ v(x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in E' \\ u(x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in \ker u \cap E' \end{aligned}$$

- Supposons que  $\ker u + E' = E$ . On a toujours  $Im(v) \subset Im(u)$ .  
Soit  $y \in Im(u)$ . On choisit  $x \in E$  tel que  $y = u(x)$ .  
On écrit  $x = \alpha + \beta$  avec  $\alpha \in \ker u$  et  $\beta \in E'$ .  
Ainsi :

$$y = u(x) = u(\alpha + \beta) = u(\alpha) + u(\beta) = 0 + v(\beta) \in Im(v)$$

## 22.41 Restriction de $u$ à un supplémentaire de $\ker u$

### Corollaire 22.41

Soit  $S$  un supplémentaire de  $\ker u$  dans  $E$ . Alors  $u$  induit un isomorphisme de  $S$  sur  $Im(u)$ .

Soit  $v : S \rightarrow Im(u); x \mapsto u(x)$ .

D'après (22.40),  $v$  est injective et surjective, donc fournit bien un isomorphisme de  $S$  sur  $Im(u)$ .

## 22.43 Théorème du rang

### Théorème 22.43

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un espace vectoriel quelconque. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim \ker f + rg(f) = \dim E$$

Comme  $E$  est de dimension finie,  $\ker f$  et  $Im(f)$  sont de dimension finie.

D'après (22.28), on choisit  $S$  un supplémentaire de  $\ker f$  dans  $E$ .

D'après (22.41),  $S$  et  $Im(f)$  sont isomorphes.

Donc  $rg(f) = \dim S = \dim E - \dim \ker f$  (22.28).

## 22.53 Caractérisation par les supplémentaires

### Théorème 22.53

Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $H$  est un hyperplan de  $E$  si et seulement si  $H$  admet une droite de  $E$  comme supplémentaire.

$\Rightarrow$

On suppose que  $H$  est un hyperplan de  $E$ .  
Soit  $\varphi \in E^*, \varphi \neq 0$  tel que :

$$H = \ker \varphi$$

Comme  $\varphi \neq 0$ , on choisit  $x \in E \setminus \ker \varphi$ .  
On a clairement  $H \cap \text{Vect}(x) = \{0\}$ .  
On rappelle que  $\varphi(x) \in \mathbb{K}^*$ . Soit  $v \in E$ .  
On a :

$$\varphi(v) = \frac{1}{\varphi(x)} \varphi(\varphi(x)v)$$

$$\text{On écrit } v = \underbrace{v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(x)}x}_{\in \ker \varphi} + \underbrace{\frac{\varphi(v)}{\varphi(x)}x}_{\in \text{Vect}(x)}.$$

$\Leftarrow$

On suppose que  $E = H \oplus \text{Vect}(x)$ .  
Soit  $v \in E$ . On écrit  $v = h + \lambda x$ .  
On lui associe  $\varphi(v) = \lambda$ . L'application  $\varphi$  est bien définie car la décomposition est unique.  
Cette application est bien linéaire, dont le noyau est  $H$ .  
Par définition,  $H$  est un hyperplan.

## 22.54 Comparaison de deux équations de $H$

### Proposition 22.54

Soit  $H$  un hyperplan de  $E$  d'équation  $\varphi \in E^*$ . Alors pour tout  $\psi \in E^*, \psi(x) \neq 0$  est une équation de  $H$  si et seulement si  $\psi \neq 0$  et  $\psi \in \text{Vect}(\varphi)$ .

On note  $H = \ker \varphi$  avec  $\varphi \in E^*$  non nulle.

$\Rightarrow$

Soit  $\psi \in E^*$  non nulle. On suppose  $H = \ker \psi$ .  
Comme  $\psi$  est non nulle, on choisit  $\alpha \in E$  tel que :

$$\psi(\alpha) = 0 \text{ dans } \mathbb{K}$$

Comme  $\alpha \notin \ker \psi$ ,  $\varphi(\alpha) \neq 0$ .  
On écrit :

$$\psi(\alpha) = \lambda \varphi(\alpha) \text{ avec } \lambda = \frac{\psi(\alpha)}{\varphi(\alpha)} \neq 0$$

D'après (22.53) :

$$E = H \oplus \text{Vect}(\alpha)$$

Soit  $x \in E, x = h + \mu \alpha$  ( $h \in H, \mu \in \mathbb{K}$ ).

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(h) + \mu \psi(\alpha) \\ &= \mu \lambda \varphi(\alpha) \\ &= \lambda \varphi(h + \mu \alpha) \\ &= \lambda \varphi(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\psi = \lambda \varphi \in \text{Vect}(\varphi)$$



si  $\psi \in \text{Vect}(\varphi)$ , on écrit  $\psi = \lambda\varphi, \lambda \neq 0$ .  
 Pour  $x \in E$  :

$$\begin{aligned} x \in H &\Leftrightarrow x \in \ker \varphi \\ &\Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda\varphi(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker \psi \end{aligned}$$

## 22.55 Intersection d'hyperplans

### Théorème 22.55

Soit  $E$  un espace de dimension finie  $n$ .

1. L'intersection de  $m$  hyperplans de  $E$  est un sous-espace vectoriel de dimension au moins  $n - m$ .
2. Réciproquement, tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  de dimension  $n - m$  peut s'écrire comme l'intersection de  $m$  hyperplans.

1. Le résultat est vrai pour  $m = 1$  (avec égalité).

Soit  $H_1$  et  $H_2$  deux hyperplans.

On a :

$$\dim H_1 = \dim H_2 = n - 1$$

D'après la formule de Grassmann :

$$\begin{aligned} \dim(H_1 \cap H_2) &= \underbrace{-\dim(H_1 + H_2)}_{\in \{n-1, n\}} + \dim H_1 + \dim H_2 \\ &\geq 2n - 2 - n \\ &= n - 2 \end{aligned}$$

On poursuit le résultat par récurrence.

2. Soit  $F \neq \{0\}$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - m$ .

On fixe une base  $(f_1, \dots, f_{n-m})$  de  $F$ . On la complète en  $(f_1, \dots, f_{n-m}, f_{n-m+1}, \dots, f_n)$  une base de  $E$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $p_k$  la projection canonique sur la  $k$ -ième coordonnée.

$$p_k \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right) = \alpha_k$$

Par construction,  $p_k$  est une forme linéaire, non nulle.

$$F = \bigcap_{i=n-m+1}^n \ker p_i$$



## Chapitre 23

### Sous-espaces affines

## 23.1 Sous-espace affine

### Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- On appelle **sous-espace affine de  $E$**  toute partie  $\mathcal{F}$  de  $E$  de la forme :

$$\mathcal{F} = x + F = \{f + x \mid f \in F\}$$

où  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $x$  un vecteur de  $E$ .

- Le sous-espace vectoriel  $F$  associé au sous-espace affine  $\mathcal{F}$  est unique. On l'appelle **direction de  $\mathcal{F}$**  et ses éléments sont appelés les **vecteurs directeurs de  $\mathcal{F}$** .

On suppose que  $\mathcal{F} = x_1 + F_1 = x_2 + F_2$ .

Soit  $y \in F_1$ .

On a  $y + x_1 \in \mathcal{F}$  donc  $y + x_1 = x_2 + y_2$  avec  $y_2 \in F_2$ .

Or  $x_1 \in \mathcal{F}$  donc  $x_1 = x_2 + g_2$  avec  $g_2 \in F_2$ .

Donc :

$$\begin{aligned} y &= x_2 - x_1 + y_2 \\ &= y_2 - g_2 \\ &\in F_2 \end{aligned}$$

avec  $F_1 \subset F_2$ .

Par symétrie :

$$F_1 = F_2$$

## 23.8 Caractérisation des sous-espaces affines par leur direction et leur point

### Théorème 23.8

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine de  $E$  de direction  $F$  et  $A \in \mathcal{F}$ , alors :

$$\mathcal{F} = A + F$$

$\mathcal{F} = x + F$ . Soit  $A \in \mathcal{F}$ .

Donc  $A = x + f, f \in F$ .

Donc  $A - x \in F$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= x + F \\ &= (x - A) + A + F \\ &= A + F \end{aligned}$$

## 23.11 Fibre d'une application linéaire

### Théorème 23.11

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $y \in F$ . Alors  $u^{-1}(\{y\})$  est soit vide, soit un sous-espace affine de  $E$  et de direction  $\ker u$ .

On suppose que  $u^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ . Fixons  $x_0 \in u^{-1}(\{y\})$ .

Soit  $x \in E$ . On a :

$$\begin{aligned} x \in u^{-1}(\{y\}) &\Leftrightarrow u(x) = y \\ &\Leftrightarrow u(x) = u(x_0) \\ &\Leftrightarrow x - x_0 \in \ker u \\ &\Leftrightarrow x \in x_0 + \ker u \end{aligned}$$

Donc :

$$u^{-1}(\{y\}) = x_0 + \ker u$$

## 23.13 Exemple

### Exemple 23.13

- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire non homogène de degré 1 ou 2.
  - L'ensemble des polynômes interpolateurs en un certain nombre de points.
  - Equations arithmético-géométrique.
- $\{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), ay' + b = f\} = u^{-1}(\{f\})$  où  $u : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}); y \mapsto ay' + by$ .
  - Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  deux à deux distincts et  $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  quelconques deux à deux distincts.  
 $\{P \in \mathbb{R}[X], \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_i) = b_i\} = u^{-1}(\{(b_1, \dots, b_n)\})$  où  $u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n; P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$ .
  - $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \geq 0, u_{n+1} = au_n + b\} = u^{-1}(\{(b)_{n \geq 0}\})$  où  $u : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; (u_n) \mapsto (u_{n+1} - au_n)_{n \geq 0}$ .

## Chapitre 24

# Comparaison locale des suites

## 24.18 Caractérisation de l'équivalence par la négligabilité

Proposition 24.18

On a :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$$

$\Rightarrow$

Si  $u_n \sim v_n$  à partir d'un certain rang :

$$u_n = a_n v_n \text{ avec } a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{(a_n - 1)}_{=o(1)} v_n + v_n \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(v_n) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

Si  $u_n = v_n + o(v_n)$ , alors à partir d'un certain rang :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \epsilon_n v_n \text{ avec } \epsilon_n = o(1) \\ &= \underbrace{(1 + \epsilon_n)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} v_n \end{aligned}$$

Donc :

$$u_n \sim v_n$$

## 24.20 Equivalent d'un polynôme

Proposition 24.20

Soit  $P$  un polynôme de monôme dominant  $a_d X^d$ . Alors  $P(n) \sim a_d n^d$ .

On note  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ .

Pour  $k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$  :

$$n^k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^d) \text{ et } a_k n^k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a_d n^d)$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{d-1} a_k n^k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a_d n^d)$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(n) &= a_d n^d + o(a_d n^d) \\ &\sim a_d n^d \end{aligned}$$

## 24.31 Exemple

### Exemple 24.31

Déterminons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^3 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) \sqrt{3n+1}}$$

On note  $u_n$  l'expression de l'exemple.

But : trouver un équivalent (simple) de  $u_n$ .

—

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^3 \sim \frac{1}{n^3}$$

—

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \\ &\sim \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

—

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

—

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) &= \ln\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) \\ &\sim \frac{3}{n^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) \sim \frac{9}{n^4}$$

—

$$\sqrt{3n+1} \sim \sqrt{3n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_n &\sim \frac{\frac{1}{n^3} \times \frac{1}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{9}{n^4} \times \sqrt{3n}} \\ &= \frac{1}{18\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Donc :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{18\sqrt{3}}$$

## 24.36 Exemple

### Exemple 24.36

Déterminer un équivalent de  $\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ .

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2}{n}\right) &= \frac{2}{n} + o\left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{2}{n} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\sim \frac{1}{n}\end{aligned}$$

## 24.43 Exemple

### Exemple 24.43

Trouver un équivalent de  $\ln \sin \frac{1}{n}$ .

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= \ln\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln(1 + o(1)) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + o(1) + o(o(1)) \\ &= \underbrace{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow -\infty} + o(1) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\sim \ln\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

## 24.46 Exemple

### Exemple 24.46

Soit  $(u_n)$  une suite non nulle de limite nulle. On admet que  $\ln(1 + u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$ , montrer que :

$$\exp\left(5n + n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}}$$

(au voisinage de 0).

$$\begin{aligned} \exp\left(5n + n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(5n + n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(6n - \frac{1}{2} + o(1)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}} \times e^{o(1)} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

## Exercice 24.9

### Exercice 24.9

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}$ . Donner un équivalent simple de  $u_n$ .

$$\begin{aligned} u_n &= e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} \\ &= e^{\frac{1}{n}} \left(1 - e^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}\right) \\ &= e^{\frac{1}{n}} \left(1 - e^{\frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}}\right) \\ &= e^{\frac{1}{n}} \left(1 - e^{\frac{1}{n} \left[(1+\frac{1}{n})^{-1} - 1\right]}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{\frac{1}{n}} \left(1 - e^{\frac{1}{n} \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{\frac{1}{n}} \left(1 - e^{-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$



## Exercice 24.10

## Exercice 24.10

Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = \frac{\pi}{2}$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin u_n$$

1. Montrer que la suite  $u$  est strictement positive, décroissante et de limite nulle.
2. On admet que si  $u$  est une suite de limite nulle, alors quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\sin u_n = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$ . Déterminer le réel  $\alpha$  tel que la suite  $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$  ait une limite réelle non nulle. En appliquant le lemme de Césaro à la suite  $(v_n)$ , en déduire un équivalent simple de  $(u_n)$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ .

1. L'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$  est stable par la fonction sinus.  
Comme  $\sin$  est croissante, la suite  $(u_n)$  est monotone. On a  $u_1 < u_0$  donc  $(u_n)$  est décroissante.  
Par stabilité,  $(u_n)$  est positive.  
D'après le théorème de la limite monotone,  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .  
D'après le théorème du point fixe, car  $\sin$  est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $\sin \ell = \ell$ .  
En étudiant les variations de  $x \mapsto \sin x - x$ , on trouve un unique point fixe : 0.
2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \\ &= \sin^\alpha u_n - u_n^\alpha \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3) - u_n^\alpha \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n^\alpha \left( 1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right)^\alpha - u_n^\alpha \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n^\alpha \left[ 1 + \alpha \left( -\frac{u_n^2}{6} \right) + o(u_n^2) \right] - u_n^\alpha \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\alpha \frac{u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha}) \end{aligned}$$

Pour  $\alpha = -2$ , on a :

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3} + o(1)$$

D'après le lemme de Césaro :

$$\frac{u_n^{-2} - u_0^{-2}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{1}{3}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{u_n^{-2}}{n} &= \frac{u_0^{-2}}{n} + \frac{1}{3} + o(1) \\ &\sim \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc :

$$u_n^2 \sim \frac{3}{n}$$

Donc :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

## Chapitre 25

# Comparaison locale des fonctions

## 25.6 Caractérisation séquentielle

### Théorème 25.6

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions sur  $X$  et  $a \in \overline{X}$ . Alors :

1.  $f \underset{a}{=} O(g)$  si et seulement si pour toute suite  $(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$  à valeurs dans  $X$ , alors  $f(u_n) = O(g(u_n))$ .
2.  $f \underset{a}{=} o(g)$  si et seulement si pour toute suite  $(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$  à valeurs dans  $X$ , alors  $f(u_n) = o(g(u_n))$ .

1.

$f \underset{a}{=} O(g)$  ssi il existe  $h$  bornée au voisinage de  $a$  tel que  $f = g \cdot h$

ssi Pour toute suite  $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$  avec  $u_n \rightarrow a$ ,  $f(u_n) = g(u_n) \times w_n$  où  $(w_n)$  est une suite bornée.

$\Rightarrow$   $w_n = h(u_n)$  ssi bornée  $\Leftarrow$  Par l'absurde avec (25.5).

ssi Pour toute suite  $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$  avec  $u_n \rightarrow a$ ,  $f(u_n) = O(g(u_n))$ .

2. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite (nulle).

## 25.14 Existence, unicité et expression du développement de Taylor de $f$

### Théorème 25.14

Soit  $f$  une fonction  $n$  fois dérivable en  $x_0$ . Alors le développement de Taylor de  $f$  en  $x_0$  à l'ordre  $n$  existe et est unique. Il est donné explicitement par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

RAS, cf. (16.56)

## 25.20 Formule de Taylor avec reste intégral de l'ordre $n$ au point $a$

### Théorème 25.20

Soit  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}([a, b])$  Alors :

$$\forall x \in [a, b], f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

On raisonne par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

— On suppose  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], \sum_{k=0}^0 \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t) dt &= f(a) + \int_a^x f'(t) dt \\ &= f(x) \end{aligned}$$

— On suppose le résultat vrai pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a, b], \mathbb{R})$ . En particulier,  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ (\text{IPP}) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

## 25.22 Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n$ au point $a$ évaluée en $b$ - Hors Programme

### Théorème 25.22

Soit  $a < b$  deux réels et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[a, b]$  et  $n+1$  dérivable sur  $]a, b[$ . Alors :

$$\exists c \in ]a, b[, f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

On introduit :

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

On remarque que  $g(b) = f(b)$ .

On choisit  $A$  de telle sorte que  $g(a) = f(b)$ .

On pose :

$$A = \frac{-(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left[ -\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + f(b) \right]$$

Par hypothèse,  $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b[, \mathbb{R})$ .

D'après le théorème de Rolle, on choisit  $c \in ]a, b[$  tel que  $g'(c) = 0$ .

Or :

$$\begin{aligned} \forall x \in ]a, b[, g'(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} - A \frac{(b-x)^n}{n!} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n - A \frac{(b-x)^n}{n!} \end{aligned}$$

En particulier :

$$\frac{A(b-c)^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (b-c)^n$$

Or  $c \neq b$  donc  $A = f^{(n+1)}(c)$ .

On conclut avec  $f(b) = g(a)$ .

## 25.27 Formule de Taylor-Young à l'ordre $n$ au point $x_0$

### Théorème 25.27

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  au voisinage de  $x_0$ . Alors au voisinage de  $x_0$ , on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

On a  $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^{(n-n+1)}(I, \mathbb{R})$ .

D'après la formule de Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

Montrons que :

$$\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \underset{x \rightarrow x_0}{=} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt - \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} &= \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt - \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0) dt \\ &= \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)] dt \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , on choisit  $v \in \mathcal{V}(x_0)$  tel que :

$$\forall x \in v, |f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)| \leq \varepsilon$$

car  $f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ .

Soit  $x \in \mathcal{V}, x > x_0$ . On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)] dt \right| &\leq \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)| dt \\ &\leq \varepsilon \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} dt \\ &= \frac{\varepsilon(x-x_0)^n}{n!} \end{aligned}$$

Le résultat reste vrai (au signe près) pour  $x \leq x_0$ .

Par définition (avec les  $\varepsilon$ ), on a le résultat souhaité.

## 25.28 Développement limité de l'exponentielle

### Proposition 25.28

La formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  en 0 de l'exponentielle donne l'égalité suivante au voisinage de 0 :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$f = \exp \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

## 25.29 Développement limité du logarithme

### Proposition 25.29

La formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  en 0 de  $x \mapsto \ln(1+x)$  donne l'égalité suivante au voisinage de 1 :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$$

$$f : x \mapsto \ln(1+x) \in \mathcal{C}^n ]-1, \infty[ , \mathbb{R} ).$$

$$\begin{aligned} \forall x > -1, f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall x > -1, f^{(k+1)}(x) &= \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} \\ f^{(k+1)}(0) &= (-1)^k k! \end{aligned}$$

Donc, d'après Taylor-Young :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

## 25.30 Développement limité de cosinus et sinus

### Proposition 25.30

La formule de Taylor-Young à l'ordre  $2n+2$  pour le sinus et à l'ordre  $2n+1$  pour le cosinus en 0 donne les égalités suivantes au voisinage de 0 :

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{et} \quad \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} \sin^{(2k)}(0) = 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) = 1 \\ \sin^{(4k+3)}(0) = -1 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sin x &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{2n+2}) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

Idem pour cos.

## 25.40 Unicité du DL

### Théorème 25.40

Si  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$ , alors ce développement est unique.

On suppose que :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ &\underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \end{aligned}$$

On suppose par l'absurde que les développements sont différents.

On note  $p = \min(k \mid a_k \neq b_k)$ .

Or :

$$\sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n a_k (x - x_0)^k &\underset{x \rightarrow x_0}{=} o((x - x_0)^n) \\ \text{donc } a_p (x - x_0)^p + \sum_{k=p+1}^n a_k (x - x_0)^k &\underset{x \rightarrow x_0}{=} b_p (x - x_0)^p + \sum_{k=p+1}^n b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ \text{donc } a_p (x - x_0)^p &\underset{x \rightarrow x_0}{=} b_p (x - x_0)^p + o((x - x_0)^n) \\ \text{donc } a_p &= b_p + o(1) \end{aligned}$$

Absurde car  $a_p \neq b_p$ .

## 25.41 DL de fonctions paires ou impaires

### Proposition 25.41

Soit  $f$  une fonction admettant un DL à l'ordre  $n$  au voisinage de 0. Alors :

- si  $f$  est paire, son DL n'est constitué que de monômes de degré pair.
- si  $f$  est impaire, son DL n'est constitué que de monômes de degré impair.

— On suppose  $f$  paire et :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

Donc :

$$f(-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k x^k + o(x^n)$$

Par unicité du DL :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = (-1)^k a_k$$

Donc pour  $k$  impair :

$$a_k = 0$$

— Même raisonnement pour  $f$  impaire.

## 25.42 Remarque

### Remarque 25.42

3. L'existence d'un DL à l'ordre  $n$  en  $x_0$  n'implique pas l'existence de la dérivée  $n$ -ième de  $f$  en  $x_0$ . Ainsi, tous les DL ne sont pas obtenus par la formule de Taylor-Young.

3. Si  $f$  admet un DL<sub>0</sub> en  $x_0$ , on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a + o(1)$$

Donc :

$$f(x) - a \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

Donc :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a$$

Nécessairement,  $a = f(x_0)$  et  $f$  est continue en  $x_0$ .

Si  $f$  admet un  $DL_1$  en  $x_0$ , on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Donc :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \rightarrow x_0}{=} a + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a$$

## 25.43 Exemple

Exemple 25.43.2

2. La fonction  $f : t \mapsto \cos t + t^3 \sin \frac{1}{t}$  prolongée en 0 par  $f(0) = 1$  admet un DL d'ordre 2 en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

2.

$$\begin{aligned} f(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) &= \cos t - 1 + \frac{t^2}{2} + t^3 \sin \frac{1}{t} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} o(t^2) + t^2 \times t \sin \frac{1}{t} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} o(t^2) \end{aligned}$$

Donc  $f$  admet bien un  $DL_2$  en 0, donc un  $DL_1$  en 0, donc est dérivable en 0 (et donc sur  $\mathbb{R}$  par théorème d'opérations).

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= -\sin x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \\ \frac{f'(x)}{x} &= -\frac{\sin x}{x} + 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

## 25.50 Forme normalisée d'un DL au voisinage de 0

Proposition 25.50

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $x_0$ , admettant à l'ordre  $n$  un DL non nul. Alors il existe un unique entier  $m \leq n$  tel que pour  $h$  au voisinage de 0 on ait :

$$f(x_0 + h) \underset{x \rightarrow x_0}{=} h^m (a_0 + a_1 h + \dots + a_{n-m} h^{n-m}) + o(h^{n-m})$$

avec  $a_0 \neq 0$ . Il s'agit de la **forme normalisée** du DL à l'ordre  $n$  de  $f$  au voisinage de  $x_0$ .

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ &= \sum_{k=m}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^k) \\ &\underset{x \rightarrow x_0}{=} (x - x_0)^m \left( \sum_{k=0}^{n-m} a_{k+m} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n-m}) \right) \end{aligned}$$

Puis on effectue un changement de variable :  $x = x_0 + h$ .



## 25.56 Produit de DL

### Proposition 25.56

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un voisinage de 0 et  $P$  et  $Q$  deux polynômes de degré au plus  $n$ .  
Si au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n)$$

Alors :

$$(fg)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} (P(x) + o(x^n))(Q(x) + o(x^n)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} P(x)Q(x) + P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} P(x)Q(x) + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n) \end{aligned}$$

## 25.57 Exemple

### Exemple 25.57

1.  $\frac{\cos x}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$
2.  $(e^x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$

1.

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1+x} &= \cos x \times (1+x)^{-1} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (e^x)^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

## 25.58 Exemple

### Exemple 25.58

1.  $(\sin x - x)(\cos x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5}{12} - \frac{x^7}{90} + o(x^8)$

1.

$$\begin{aligned}
(\sin x - x)(\cos x - 1) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left( -\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \right) \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5}{12} + \left( \frac{-1}{2 \times 5!} - \frac{1}{3!4!} \right) x^7 + o(x^8) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5}{12} - \frac{1}{5 \times 3 \times 3!} x^7 + o(x^8) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5}{12} - \frac{x^7}{90} + o(x^8)
\end{aligned}$$

## 25.59 Composition de DL

### Proposition 25.59

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de 0 avec  $f(0) = 0$ . Si  $P$  et  $Q$  sont des développements limités de  $f$  et  $g$  en 0 à l'ordre  $n$ , alors  $T_n(Q \circ P)$  est un DL en 0 de  $g \circ f$  à l'ordre  $n$  :

$$g \circ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(Q \circ P)(x) + o(x^n)$$

On suppose que :

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \\
g(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n)
\end{aligned}$$

Comme  $f(0) = 0$ , on a  $P(0) = 0$ .

$$g \circ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(f(x)) + o(x^n)$$

Avec la notation  $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ , on a :

$$\begin{aligned}
g \circ f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k f(x)^k + o(f(x)^n) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k (P(x) + o(x^n))^k + o((P(x) + o(x^n))^n) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \left[ b_k (P(x))^k + \underbrace{o(x^n)}_{P(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(1)} \right] + o\left( \underbrace{P(x)^k}_{P(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)} \right) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k P(x)^k + o(x^n) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} Q \circ P(x) + o(x^n) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(Q \circ P)(x) + o(x^n)
\end{aligned}$$

## 25.60 Exemple

### Exemple 25.59

1.  $e^{\sin x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
2.  $e^{\cos x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$

1.

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} (x + O(x^3))^2 + \frac{1}{6} (x + O(x^3))^3 + o(x^3) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + o(x^3)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
e^{\cos x - 1} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

## 25.61 Exemple

### Exemple 25.61

1.  $\ln \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$
3.  $\sin\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \frac{x^2}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{2} + o(x^9)$

1.

$$\begin{aligned}
\ln \cos x &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{8}\right) x^4 + o(x^4) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \frac{x^2}{1+x^2} &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{3!} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + o(x^{10}) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{6} x^6 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^3 + O(x^{10}) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{6} x^6 (1 - x^2 + O(x^4))^3 + O(x^{10}) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{6} x^6 (1 - 3x^2 + O(x^4)) + O(x^{10}) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{2} x^8 + o(x^9)
\end{aligned}$$

## 25.63 Exemple

### Exemple 25.63

Montrer que  $f : x \mapsto x \cos x$  est injective sur un voisinage de 0 et trouver un DL à l'ordre 3 d'une réciproque locale (on doit trouver  $f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ ).

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x \left( 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

En particulier,  $f'(0) = 1$ , donc  $f' > 0$  sur un voisinage de 0 car  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , donc  $f$  est strictement croissante sur un voisinage de 0, où elle est surjective.

$f$  induit une bijection  $\tilde{f} : u \rightarrow f(u)$ . On note  $f^{-1} : f(u) \rightarrow u$  la bijection réciproque induite par  $\tilde{f}$ . Comme  $\tilde{f}$  ne s'annule pas sur  $u$ , d'après le théorème de la bijection dérivable,  $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(f(u), u)$ . Donc en particulier  $f^{-1}$  possède un  $\text{DL}_3(f(0))$ .

On a :

$$f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$$

Comme  $f^{-1}(f(0)) = 0$ ,  $a_0 = 0$ .

Enfin :

$$\begin{aligned} x &= f^{-1} \circ f(x) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} f^{-1} \circ f(x) + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} a_1 \left( x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \right) + a_2(x + O(x^3))^2 + a_3(x + O(x^3))^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} a_1x + a_2x^2 + \left( -\frac{a_1}{2} + a_3 \right) x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Par unicité des DL :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ -\frac{a_1}{2} + a_3 = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc :

$$f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

## 25.65 DL d'un inverse

### Proposition 25.65

Soit  $g$  une fonction définie sur un voisinage de 0 et ne s'annulant pas en 0. Si  $g$  admet un DL donné par le polynôme  $P$  en 0 à l'ordre  $n$ , alors  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{1}{P}$  aussi et les DL à l'ordre  $n$  en 0 de  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{1}{P}$  sont identiques. Autrement dit, si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  avec  $g(0) \neq 0$  et  $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)$ , alors :

$$\frac{1}{g(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \Leftrightarrow \frac{A}{P(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{P(x)} &= \frac{P(x) - g(x)}{P(x)g(x)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n) \times O(1) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n) \end{aligned}$$

## 25.67 Exemple

### Exemple 25.67

1. (archi classique) :  $\frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + o(x^7)$
2. (archi classique) :  $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + o(x^{10})$

1.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\cos x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8)} \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \left[ -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8) \right] + \left[ -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6) \right]^2 - \left[ -\frac{x^2}{2} + O(x^4) \right]^3 + O(x^8) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \left[ -\frac{1}{4!} + \frac{1}{4} \right] x^4 + \left[ \frac{1}{6!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{8} \right] x^6 + O(x^8) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + O(x^8)
 \end{aligned}$$

2. A l'ordre 5 :

$$\begin{aligned}
 \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
 &= \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4) \right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \left( \frac{5}{4!} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5!} \right) x^5 + o(x^5) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)
 \end{aligned}$$

## 25.70 Primitiver un DL

### Proposition 25.70

Soit  $f$  une fonction dérivable au voisinage de 0, dont la dérivée admet un DL à l'ordre  $n-1$  au voisinage de 0, donné par :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

Alors  $f$  admet au voisinage de 0 un DL à l'ordre  $n$  donné par :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$$

On pose  $g : x \mapsto f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} \in \mathcal{D}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  avec  $\mathcal{U} \in \mathcal{V}(0)$ .

on remarque que  $g(0) = 0$  et en appliquant le TAF sur  $\mathcal{U}$  :

Pour  $x \in \mathcal{U}$ , il existe  $c_x$  tel que :  $\begin{cases} 0 < c_x < x \\ \text{OU} \\ x < c_x < 0 \end{cases}$  vérifiant :

$$g(x) = g(x) - g(0) = x \times g'(c_x)$$

Par théorème d'encadrement :

$$c_x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Or par construction :

$$\begin{aligned} g'(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{n-1}) \\ \text{donc } g'(c_x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(c_x^{n-1}) \\ &= o(x^{n-1}) \text{ car } c_x \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} g(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x \times o(x^{n-1}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n) \end{aligned}$$

## 25.72 Exemple

### Exemple 25.72

1. Donner le DL de  $\arctan x$  et  $\arccos x$  à tout ordre.
2. On peut faire la même chose avec  $\operatorname{Argth}(x)$ ,  $\operatorname{Argsh}(x)$  et  $\operatorname{Argch}(x)$ .
3. Montrer que  $\arctan\left(\frac{x^2+1}{x-2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\arctan \frac{1}{2} - \frac{1}{5}x - \frac{12}{25}x^2 - \frac{56}{375}x^3 + o(x^3)$ .
4. Voir l'exercice E-2 pour arcsin.

1. On pose  $f = \arctan$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ donc } f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$$

Donc :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

On pose  $f = \arccos \in \mathcal{D}^1(]-1, 1[, \mathbb{R})$  et :

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-1, 1[, f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{donc } f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -1 - \sum_{k=0}^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k! 2^k k!} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} x^{2k} + o(x^{2n}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} x^{2k} + o(x^{2n}) \end{aligned}$$

Donc :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \underbrace{f(0)}_{\frac{\pi}{2}} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)2^{2k}} \binom{2k}{k} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

## 25.74 Dérivation d'un DL

### Proposition 25.74

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  au voisinage de 0, admettant (donc) un DL à l'ordre  $n$  en 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$

Alors  $f'$  admet un DL à l'ordre  $n-1$  en 0, égal à :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + o(x^{n-1})$$

On applique la formule de Taylor-Young à  $f$  et  $f'$  :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^k) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n-1}) \end{aligned}$$

En posant  $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ , on obtient le résultat souhaité.

## 25.75 Exemple

### Exemple 25.75

On a :

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} &= \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left[1 - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right] + \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right]^2 - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right]^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

## 25.78 Exemple

### Exemple 25.78

$$1. \quad \frac{e^x - 1}{\cos x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-2}{x} - 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$$

1.

$$\begin{aligned}
 \frac{e^x - 1}{\cos x - 1} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)} \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} \times \frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)} \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} \times \left[ 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right] \left[ 1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2) \right] \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} \left[ 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2) \right] \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{2}x + o(x)
 \end{aligned}$$

## 25.85 Exemple

### Exemple 25.85

Montrer que la parabole d'équation  $y = ex^2 + \frac{e}{2}x + \frac{e}{24}$  est asymptote à la courbe de  $f : x \mapsto x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$  et que la courbe de  $f$  est située au-dessus de sa courbe asymptote (le terme d'ordre 1 est  $\frac{e}{48}$ ).

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \\
 &= x^2 \exp \left( (x+1) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) \\
 &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^2 \exp \left( (x+1) \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) \right) \\
 &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^2 \exp \left( 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{12x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \\
 &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} ex^2 \left[ 1 + \left[ \frac{1}{2x} - \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{12x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2x} - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right]^2 + \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right] \\
 &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} ex^2 + \frac{e}{2}x - \frac{e}{24} + \frac{e}{48x} + o\left(\frac{1}{x}\right)
 \end{aligned}$$

## Exercice 11

### Exercice 25.11

On note  $f$  la fonction  $x \mapsto x + \ln(1+x)$  sur  $] -1, +\infty[$ .

1. Montrer que  $f$  est bijective de  $] -1, +\infty[$  sur son image (que l'on précisera).

1.  $f$  est strictement croissante et continue donc d'après le théorème de la bijection continue,  $f$  induit une bijection de  $] -1, +\infty[$  sur  $] \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ = \mathbb{R}$ .

2.  $f \in \mathcal{C}^\infty(] -1, +\infty[, \mathbb{R})$  et :

$$\forall x \in ] -1, +\infty[, f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$$

D'après le TBD,  $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, ] -1, +\infty[)$  donc possède un DL<sub>3</sub> en 0.

Or :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$



On note  $f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ .

Or :

$$x = f^{-1} \circ f(x)$$

$$\begin{aligned} &\underset{x \rightarrow 0}{=} a_1 \left( 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right) + a_2 \left( 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right)^2 + a_3 \left( 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right)^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2a_1x + \left( -\frac{a_1}{2} + 4a_2 \right) x^2 + \left( \frac{a_1}{3} - 2a_2 + 8a_3 \right) x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Par unicité du  $DL_3(0)$  :

$$\begin{cases} 2a_1 &= 1 \\ -\frac{a_1}{2} + 4a_2 &= 0 \\ \frac{a_1}{3} - 2a_2 + 8a_3 &= 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 &= \frac{1}{16} \\ a_3 &= -\frac{1}{192} \end{cases}$$

Donc :

$$f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{192} + o(x^3)$$

## Chapitre 26

# Intégration sur un segment

## 26.12 Image d'une fonction en escalier

### Proposition 26.12

L'image d'une fonction en escalier est un ensemble fini. En particulier, une fonction en escalier est bornée.

Si  $v = \{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$  est une subdivision associée à  $f$ , alors :

$$|Im(f)| \leq \underbrace{n}_{\text{valeurs sur chaque intervalle ouvert}} + \underbrace{n+1}_{\text{valeurs de } f(v_i)} = 2n+1$$

## 26.14 Subdivision commune

### Lemme 26.14

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions en escalier. Il existe une subdivision commune associée à  $f$  et  $g$ .

Si  $\sigma$  est une subdivision associée à  $f$  et  $\tau$  est une subdivision associée à  $g$  :

$$\begin{aligned} \sigma \cup \tau &\leq \sigma \\ &\leq \tau \end{aligned}$$

Donc  $\sigma \cup \tau$  est une subdivision commune associée à  $f$  et  $g$ .

## 26.15 Structure de l'ensemble des fonctions en escalier

### Théorème 26.15

L'ensemble  $Esc([a, b])$  des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[a, b]$  (c'est même une sous-algèbre).

PRAS (26.14)

## 26.17 Théorème

### Théorème 26.17

Pour toutes subdivisions  $\sigma$  et  $\tau$  associées à  $f$ , on a :

$$I(f, \sigma) = I(f, \tau)$$

Autrement dit, la quantité  $I(f, \sigma)$  est indépendante du choix de la subdivision associée.

Dans un premier temps, on suppose  $\tau \subset \sigma$ .

Notons :

$$\begin{aligned} \tau &= \{\tau_0, \dots, \tau_n\} \\ &= \{v_{i_0}, \dots, v_{i_n}\} \end{aligned}$$

On note  $f_k$  la valeur constante de  $f$  sur  $] \tau_k, \tau_{k+1}[$  et ainsi :

$$\begin{aligned}
 I(f, \tau) &= \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_{i_{k+1}} - \sigma_{i_k}) f_k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \sum_{p=i_k}^{i_{k+1}-1} (\sigma_{p+1} - \sigma_p) \right] f_k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=i_k}^{i_{k+1}-1} (\sigma_{p+1} - \sigma_p) f_p \\
 &= \sum_{p=0}^{i_n-1} (\sigma_{p+1} - \sigma_p) f_p \\
 &= I(f, \sigma)
 \end{aligned}$$

Dans le cas général :

$$I(f, \tau) = I(f, \tau \cup \sigma) = I(f, \sigma)$$

#### Proposition 26.21

Soit  $f$  une fonction en escalier sur  $[a, b]$  et soit  $c \in ]a, b[$ , alors  $f$  est en escalier sur  $[a, c]$  et  $[c, b]$  et :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Soit  $\sigma$  associée à  $f$ ,  $\sigma \cup \{c\}$  est toujours associée à  $f$ , alors  $\sigma \cup \{c\} \cap [a, c]$  est associée à  $f|_{[a, c]}$ .  
RAS pour la suite.

## 26.23 Intégrale de deux fonctions en escalier égales presque partout

#### Proposition 26.23

Si deux fonctions en escalier ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales.

Dans ce cas,  $f - g$  est nulle presque partout et on utilise la linéarité et (26.20).

## 26.24 Positivité ou croissance de l'intégrale

#### Proposition 26.24

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions en escalier sur  $[a, b]$  (avec  $a \leq b$ ) telles que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$ , alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

En particulier, si  $f$  est en escalier sur  $[a, b]$  et positive, alors :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

En reprenant la notation du (20.18), pour tout  $i$ ,  $f_i \geq 0$ . Donc :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

On obtient la croissance par linéarité.

## 26.26 Inégalité triangulaire intégrale

### Proposition 26.26

Soit  $f$  une fonction en escalier sur  $[a, b]$  (avec toujours  $a \leq b$ ) à valeurs réelles. Alors  $|f|$  est aussi en escalier sur  $[a, b]$  et :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Si  $\sigma$  est associée à  $f$ , elle reste associée à  $|f|$  et ensuite on utilise l'inégalité triangulaire classique avec (26.20).

## 26.36 Théorème

### Théorème 26.36

$f$  est intégrable si et seulement si  $I_-(f)$  et  $I_+(f)$  existent et si  $I_-(f) = I_+(f)$ .

$\Rightarrow$

On suppose  $f$  intégrable. Donc  $Esc_+(f)$  et  $Esc_-(f)$  ne sont pas vides.

En particulier  $A_+(f) \neq \emptyset$  est minoré et  $A_-(f) \neq \emptyset$  est majoré.

D'après la propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$ ,  $I_-(f)$  et  $I_+(f)$  sont bien définis.

Soit  $\epsilon > 0$ , on choisit  $(h, g) \in Esc_-(f) \times Esc_+(f)$  tel que :

$$\int_a^b (g - h)(x) dx < \epsilon$$

Donc :

$$I_+ \leq \int_a^b g(x) dx < \int_a^b h(x) dx + \epsilon \leq I_- + \epsilon$$

Donc :

$$I_+ \leq I_- + \epsilon$$

Donc :

$$I_+ \leq I_-$$

Donc :

$$I_+ = I_-$$

$\Leftarrow$

On suppose  $I_+ = I_-$ .

Soit  $\epsilon > 0$ .

$I_+ + \frac{\epsilon}{2}$  ne minore pas  $A_+$ .

$I_- - \frac{\epsilon}{2}$  ne majore pas  $A_-$ .

On choisit donc  $h \in Esc_-$  et  $g \in Esc_+$  telles que :

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) dx &< I_+ + \frac{\epsilon}{2} \\ \int_a^b h(x) dx &> I_- - \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_a^b (g(x) - h(x)) dx < I_+ - I_- + \epsilon = \epsilon$$

## 26.42 Intégrabilité des fonctions monotones

### Théorème 26.42

Soit  $f$  une fonction monotone sur  $[a, b]$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

On suppose  $f$  croissante. Alors  $f$  est bornée (minorée par  $f(a)$ , majorée par  $f(b)$ ).  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\sigma_n$  la subdivision régulière de  $[a, b]$  à  $n$  pas.

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sigma_k^{(n)} = a + \frac{(b-a)}{n}k$$

On définit  $h_n \in Esc_-(f)$  et  $g_n \in Esc_+(f)$  par :

$$\begin{cases} \forall x \in ]\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}], g_n(x) = f(\sigma_{k+1}^{(n)}) \\ g_n(a) = f(a) \\ \forall x \in [\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}[, h_n(x) = f(\sigma_k^{(n)}) \\ h_n(b) = f(b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b (g_n - h_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times (f(\sigma_{k+1}^{(n)}) - f(\sigma_k^{(n)})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

D'après (26.41),  $f$  est intégrable.

## 26.43 Intégrabilité des fonctions continues

### Théorème 26.43

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ .

Comme  $[a, b]$  est un segment,  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$  d'après le théorème de Heine.

Soit  $\epsilon > 0$ . On choisit  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Soit  $\sigma^{(n)}$  la subdivision régulière de  $[a, b]$  à  $n$  pas ( $n \geq 1$ ).

On choisit  $n$  tel que  $\frac{b-a}{n} < \eta$ .

Pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $f$  est continue sur  $[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$  donc  $y$  atteint ses bornes ( $[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$  est compact/théorème des bornes atteintes).

On note alors  $m_k$  et  $M_k$  respectivement les minimum et maximum sur  $[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$ .

On pose alors  $h_n$  et  $g_n$ .

— Pour  $x \in [\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}[, h_n(x) = m_k$  et  $g_n(x) = M_k$ .

—  $h_n(b) = g_n(b) = f(b)$

Par construction,  $h_n \in Esc_-(f)$  et  $g_n \in Esc_+(f)$ , et :

$$\int_a^b (g_n - h_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_{k+1}^{(n)} - \sigma_k^{(n)}) (M_k - m_k) < \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_{k+1}^{(n)} - \sigma_k^{(n)}) \times \epsilon = \epsilon \times (b-a)$$

Par définition :

$$\int_a^b (g_n - h_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

## 26.46 Relation de Chasles

### Proposition 26.46

Soit une fonction  $f$  définie sur  $[a, b]$  et  $c \in ]a, b[$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si  $f$  est intégrable sur  $[a, c]$  et  $[c, b]$  et dans ce cas :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

cf. annexe

## 26.49 Croissance et positivité de l'intégrale

### Proposition 20.49

Soit  $f$  et  $g$  deux fonction intégrables sur  $[a, b]$  (avec  $a \leq b$ ) telles que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$ . Alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

En particulier, si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  et positive, alors :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Si  $f \geq 0$ , alors  $0 \in Esc_-(f)$ .

$$\int_a^b 0 = 0 \in A_-(f)$$

Donc :

$$I_-(f) = \int_a^b f \geq 0$$

## 26.51 Inégalité triangulaire intégrale

### Proposition 26.51

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$ , alors  $|f|$  est intégrable sur  $[a, b]$  et :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

On suppose  $f$  intégrable sur  $[a, b]$ .

On choisit  $(\varphi_n, \theta_n)$  associé à  $f$  (26.39).

Comme :

$$\forall x \in [a, b], ||f(x)| - |\varphi_n(x)|| \leq |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x)$$

Alors  $(|\varphi_n|, \theta_n)$  est associée à  $|f|$ . Par conséquent,  $|f|$  est intégrable sur  $[a, b]$ . On a :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx$$

Or, d'après (26.26) :

$$\left| \int_a^b \varphi_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi_n(x)| dx$$

Donc, d'après le TCILPPL :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

## 26.56 Bornitude des fonctions continues par morceaux

### Proposition 26.56

Les fonctions continues par morceaux sur un segment  $[a, b]$  sont bornées.

Soit  $f$  continue par morceaux sur  $[a, b]$ .

Soit  $\sigma$  une subdivision associée.

Comme  $f$  est continue sur  $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$  et que  $f$  possède des limites finies en  $\sigma_i^+$  et  $\sigma_{i+1}^-$ ,  $f$  se prolonge par continuité en  $f_i$  sur  $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ .

D'après le théorème des bornes atteintes,  $f_i$  est bornée.

Donc  $f|_{] \sigma_i, \sigma_{i+1}[}$  est également bornée.

Donc  $f|_{[a, b] \setminus \{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}}$  est bornée.

Donc  $f$  est bornée sur  $[a, b]$  car  $f$  est définie sur chaque  $\sigma_i$ .

## 26.58 Intégrabilité des fonctions continues par morceaux

### Théorème 26.58

Toute fonction continue par morceaux sur le segment  $[a, b]$  est intégrable.

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ .

Soit  $\sigma$  une subdivision associée à  $f$ .

Sur chaque intervalle  $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$ ,  $f$  se prolonge par continuité en  $f_i$  sur  $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ .

Donc  $f_i$  est intégrable sur  $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$  et  $f_i$  et  $f|_{[\sigma_i, \sigma_{i+1}]}$  sont égales presque partout, donc  $f|_{[\sigma_i, \sigma_{i+1}]}$  est intégrable sur  $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ .

D'après la relation de Chasles,  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

## 26.61 Norme

### Proposition 26.61

Pour toute fonction  $f$  et  $g$  bornées sur un même segment  $[a, b]$ , on a :

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

et si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors :

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty$$

Enfin :

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

— D'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \forall x[a, b], |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \end{aligned}$$

Par définition :

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$



- RAF
- Si  $f = 0$ ,  $\|f\|_\infty = 0$ .  
Si  $\|f\|_\infty = 0$ , alors  $\forall x \in [a, b], |f(x)| = 0$ .  
Donc  $f = 0$ .

## 26.63 Densité

### Théorème 26.63

- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Alors il existe une suite de fonctions en escalier  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\|f - \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  alors il existe une suite de fonctions en escalier  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\|f - \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ , donc  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ .  
Soit  $\epsilon > 0$ , on choisit  $\eta > 0$  module de continuité uniforme associé à  $\epsilon$ .  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on introduit la subdivision régulière  $\sigma^{(n)}$  de  $[a, b]$ .  
On choisit  $n$  tel que  $\frac{b-a}{n} < \eta$ .  
Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $f$  est continue sur  $[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$  donc y atteint ses bornes (max)  $M_k$ . On définit  $\varphi_n \in \text{Esc}([a, b], \mathbb{R})$  par :  
— si  $x \in [\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}[$ , alors  $\varphi_n(x) = M_k$   
  
—  $\varphi_n(b) = f(b)$   
Par construction, pour tout  $x \in [a, b]$  :

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \epsilon$$

Donc :

$$\|f - \varphi_n\|_\infty \leq \epsilon$$

Par définition :

$$\|f - \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- Si  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ , et  $\sigma$  une subdivision associée à  $f$ , on applique le résultat précédent sur chaque intervalle  $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ .

## 26.64 Théorème fondamental du calcul intégral

### Théorème 26.64

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Soit  $x_0 \in I$ . Alors l'application :

$$x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  qui s'annule en  $x_0$ .

Notons  $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ , bien définie car  $f$  est continue sur  $I$ .

$F(x_0) = 0$ .

Montrons que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

Soit  $a \in I$  et soit  $x \neq a$ .

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a} \int_a^x f(t) dt$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{F(x) - F(a)}{x - a} - f(a) &= \frac{1}{x - a} \int_a^x f(t) dt - \frac{1}{x - a} \int_a^x f(a) dt \\ &= \frac{1}{x - a} \int_a^x (f(t) - f(a)) dt\end{aligned}$$

Soit  $\epsilon > 0$ , par continuité de  $f$  en  $a$ , on choisit  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x \in I, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

On suppose  $x > a$  et  $x - a < \eta$ , d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}\left| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} - f(a) \right| &\leq \frac{1}{x - a} \int_a^x |f(t) - f(a)| dt \\ &\leq \frac{1}{x - a} \int_a^x \epsilon dt \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

Cela reste valable si  $x < a$  et  $|x - a| < \eta$ .

Donc :

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$$

## 26.66 Limite

### Proposition 26.66

Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$  :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$$

On fixe  $a$  et on pose  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ .

Donc  $F \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ .

Donc  $F(b) = \lim_{x \rightarrow b} F(x)$ .

## 26.68 Exemple

### Exemple 26.68

La fonction  $\varphi : x \mapsto \int_0^x \exp(xt^2) dt$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ , de dérivée :

$$x \mapsto \frac{3ex^3}{2} - \frac{1}{2x} \int_0^x \exp(xt^2) dt$$

Pour  $x > 0$  :

$$\varphi(x) = \int_0^x \exp(xt^2) dt = \int_0^1 \exp(xt^2) dt + \int_1^x e^{xt^2} dt$$

On effectue le changement de variable  $u^2 = xt^2$ , soit  $u = \sqrt{x}t$  donc  $du = \sqrt{x} dt$ .

Si  $t = 0$ ,  $u = 0$ .

Si  $t = x$ ,  $u = x^{\frac{3}{2}}$ .

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{x^{\frac{3}{2}}} e^{u^2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} F(x^{\frac{3}{2}})\end{aligned}$$

avec d'après le TFCI  $F : x \mapsto \int_0^x e^{u^2} du \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Par opération,  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\frac{1}{2x\sqrt{x}}F(x^{\frac{3}{2}}) + \frac{3}{2}F'(x^{\frac{3}{2}}) \\ &= -\frac{1}{2x} \int_0^x e^{xt^2} dt + \frac{3}{2}e^{x^3}\end{aligned}$$

Pour  $x < 0$ , on effectue le changement de variable  $u^2 = -xt^2$ , soit  $u = \sqrt{-xt}$  et on suit la méthode principale.

## 26.69 Intégrale nulle d'une fonction positive et continue

### Proposition 26.69

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et positive, avec  $a < b$ . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$\Rightarrow$

$f$  est continue et positive, donc d'après le TFCI :

$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est dérivable sur  $[a, b]$  avec  $F' = f \geq 0$  donc  $F$  est croissante sur  $[a, b]$ .

Or  $F(a) = 0 = F(b)$ .

Donc  $F = 0$ , puis  $f = F' = 0$ .

## 26.70 Somme de Riemann

### Théorème 26.70

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right)$$

Plus généralement, soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma^{(n)} = (\sigma_k^{(n)})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  une subdivision et supposons que la suite des pas vérifie :

$$p(\sigma^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $k \in \llbracket 0, \ell_n - 1 \rrbracket$ ,  $x_{n,k}$  un élément de  $[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$ . Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_{k+1}^{(n)} - \sigma_k^{(n)}) f(x_{n,k})$$

Soit  $\epsilon > 0$ , on choisit  $\eta$  un module de continuité uniforme pour  $f$  d'après le théorème de Heine.

On définit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varphi_n \in \text{Esc}([a, b], \mathbb{R})$  par :

— pour  $x \in [\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$ ,  $\varphi_n(x) = f(x_{n,k})$

—  $\varphi_n(b) = f(b)$

Or  $p(\sigma^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . On choisit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, p(\sigma^{(n)}) < \eta$$

Pour  $n \geq N$  :

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \epsilon$$

Par définition :

$$\|f - \varphi_n\|_\infty \rightarrow 0$$

Donc :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx$$

Puis (26.18).

## 26.72 Exemple

Exemple 26.72

On montre que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x} \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ . Donc TSR :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

## 26.75 Inégalité triangulaire intégrale dans $\mathbb{C}$

Théorème 26.75

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  intégrable, avec  $a < b$ . Alors  $|f|$  est aussi intégrable et :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

On décompose  $\int_a^b f(t) dt = re^{i\theta}$  avec  $r \geq 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Par opération,  $|f|$  est intégrable.

On pose  $g = e^{-i\theta} \times f$ .

Par linéarité :

$$\int_a^b g(t) dt = e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt = r$$

On décompose  $g = g_r + ig_i$ .

Par définition :

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b g_r(t) dt + i \int_a^b g_i(t) dt$$

Donc :

$$\int_a^b g_r(t) dt = r \quad \text{et} \quad \int_a^b g_i(t) dt = 0$$

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = r = \int_a^b g_r(t) dt = \left| \int_a^b g_r(t) dt \right| \underset{\text{IT sur } \mathbb{R}}{\leq} \int_a^b |g_r(t)| dt \underset{\text{croissance de l'I}}{\leq} \int_a^b |g(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt$$

## Exercice 17

### Exercice 26.17

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on ait :

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Montrer que  $f = g = 0$ .

D'après le TFCI,  $(f, g) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$f'' = f \quad \text{et} \quad g'' = g$$

D'après le chapitre 7, on choisit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que :

$$\begin{cases} f : x \mapsto ae^x + be^{-x} \\ g : x \mapsto ce^x + de^{-x} \end{cases}$$

Or  $f' = g$  donc  $a = c$  et  $b = d$  par liberté de  $(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x})$ .

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 = g(0) \\ \text{donc } a &= b = c = d = 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$f = g = 0$$

## 26.76 Lemme de Riemann-Lesbegue

### Lemme 26.7

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . On suppose que  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ , alors :

$$\int_a^b f(x) e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ .

Par IPP ( $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ ,  $t \mapsto \frac{e^{int}}{in} \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$ ) :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) e^{int} dt &= \left[ \frac{f(x) e^{int}}{in} \right]_a^b - \frac{1}{in} \int_a^b f'(x) e^{int} dt \\ &= \frac{f(b) e^{inb} - f(a) e^{ina}}{in} - \frac{1}{in} \int_a^b f'(x) e^{int} dt \end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$\frac{1}{in} \left| \int_a^b f'(x) e^{int} dt \right| \leq \frac{1}{in} \int_a^b |f'(x)| dt$$

## Chapitre 27

# Séries numériques

## 27.6 Série géométrique

### Théorème 27.6

Soit  $a \in \mathbb{C}$ . La série  $\sum a^n$  converge si et seulement si  $|a| < 1$ . Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$S_n = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-a} \quad (|a| < 1)$$

La série converge et  $\sum_{n \geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$ .

## 27.11 Deux séries de termes généraux égaux presque partout

### Proposition 27.11

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

On note  $A = \{n \in \mathbb{N}, u_n \neq v_n\}$ . Supposons  $A \neq \emptyset$ .

D'après les hypothèses,  $A$  est majoré donc possède un maximum  $N$  d'après la propriété fondamentale de  $\mathbb{N}$ .

On note  $(S_n)$  et  $(S'_n)$  les sommes partielles associée à  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ .

Pour  $n \geq N$  :

$$S_n = S'_n + K \text{ où } K = \sum_{k \in A} (u_k - v_k) \text{ (constant)}$$

Ainsi  $(S_n)$  converge si et seulement si  $(S'_n)$  converge.

## 27.12 CN de convergence portant sur le terme général

### Théorème 27.12

Si  $\sum u_n$  converge, alors  $(u_n)$  converge vers 0. De manière équivalente, si  $(u_n)$  ne tend pas vers 0, la série  $\sum u_n$  diverge.

On suppose que  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ .

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \ell - \ell = 0$$

## 27.16 Théorème de comparaison des séries à termes positifs

### Théorème 27.16

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs telles qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  :

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

Alors :

- Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge aussi.
- Si  $\sum u_n$  diverge (vers  $+\infty$  donc), alors  $\sum v_n$  diverge aussi (vers  $+\infty$  donc).

De plus, si la divergence est grossière pour  $\sum u_n$ , elle l'est aussi pour  $\sum v_n$ .

En utilisant les notations du (27.11), on peut supposer que :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq u_n \leq v_n$$

Puis :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq S_n \leq S'_n$$

On utilise alors le théorème de comparaison sur les suites.

## 27.20 Convergence absolue entraîne convergence

### Théorème 27.20

Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.

- On suppose que  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , avec  $\sum |u_n|$  convergente.

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \geq 0 \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0) \geq 0$$

Ainsi,  $u_n = u_n^+ - u_n^-$ .

Or, pour tout  $n$  :

$$0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$$

$$0 \leq u_n^- \leq |u_n|$$

Par comparaison des séries à termes positifs,  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  convergent et par linéarité (27.16)  $\sum u_n$  converge.

- On suppose que  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ , avec  $\sum |u_n|$  convergente.

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |Re(u_n)| \leq |u_n|$$

$$|Im(u_n)| \leq |u_n|$$

Donc,  $\sum Re(u_n)$  et  $\sum Im(u_n)$  sont absolument convergentes (27.15) donc convergent, puis par combinaison linéaire (27.16)  $\sum u_n$  converge.

## 27.23 Comparaison des séries par domination ou négligabilité

### Théorème 27.23

Soit  $\sum u_n$  une série à termes quelconques et  $\sum v_n$  une série à termes positifs telles que  $u_n = O(v_n)$  (ou  $u_n = o(v_n)$ ). Alors :

- La convergence de  $\sum v_n$  entraîne la convergence absolue de  $\sum u_n$ .
- La divergence de  $\sum u_n$  (celle de  $\sum |u_n|$  suffit) entraîne la divergence de  $\sum v_n$ .

On suppose  $u_n = O(v_n)$  avec  $v_n \geq 0$ .

- On suppose que  $\sum v_n$  converge. On a  $|u_n| = O(v_n)$  donc à partir d'un certain rang :

$$0 \leq |u_n| \leq Mv_n$$

D'après le théorème de comparaison par majoration des séries à termes positifs,  $\sum |u_n|$  converge donc  $\sum u_n$  converge.

- Si  $\sum |u_n|$  diverge, par comparaison par minoration des séries à termes positifs,  $\sum v_n$  diverge.

## 27.24 Comparaison des séries à termes positifs par équivalence

### Théorème 27.24

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs. Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$  et  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$ .

On conclut avec (27.23).



## 27.25 Théorème de comparaison entre série et intégrale

### Théorème 27.25

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et soit  $f : [a; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction décroissante et positive. Alors  $\sum f(n)$  converge si et seulement si  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge aussi (i.e.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$  existe et est finie).

D'après le TLM ( $f \geq 0$ ),  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$  existe dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(t) dt$$

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  avec  $n_0 \geq a$ .  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  et  $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$  sont de même nature. Comme  $f$  est décroissante, pour tout  $n \geq n_0$  :

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)$$

Donc par Chasles :

$$\underbrace{\sum_{k=n_0}^n f(k+1)}_{\sum_{k=n_0}^{n+1} f(k) - f(n_0)} \leq \int_{n_0}^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^n f(k)$$

D'après le TLM :

- Si  $\sum(f_n)$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{n_0}^{n+1} f(t) dt \in \mathbb{R}_+$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{n_0}^{n+1} f(t) dt \in \mathbb{R}_+$ , alors  $\sum(f_n)$  converge.

## Exercice 1

### Exercice 27.1

En utilisant le théorème de comparaison, déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$ .

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} e^{o(1)} \\ &\geq \frac{1}{2n} \text{ à partir d'un certain rang} \end{aligned}$$

Par comparaison des séries à termes positifs,  $\sum u_n$  diverge.

## Exercice 2

### Exercice 27.2

En utilisant un théorème de comparaison par domination ou négligabilité, déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{\frac{3}{2}} - \lfloor n^{\frac{3}{2}} \rfloor + n}$$

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{\frac{3}{2}} - \lfloor n^{\frac{3}{2}} \rfloor + n} \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{e - \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{O(1) + n} \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{e - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n + o(n)} \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{e - e \times \exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n + o(n)} \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{e - e\left(1 - \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n + o(n)}
\end{aligned}$$

Par comparaison par  $\sim$ ,  $\sum u_n$  est convergent.

## 27.29 Nature des séries de Riemann

### Théorème 27.29

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

- Si  $\alpha < 0$ , la divergence est grossière.
- On a montré que  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.
- Si  $\alpha \in ]0, 1]$  :

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$$

Donc  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  diverge d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

- Soit  $\alpha > 1$ ,  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est décroissante et positive sur  $[1, +\infty[$ .  
Pour  $x \geq 1$  :

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt &= \left[ \frac{1}{(-\alpha + 1)t^{\alpha-1}} \right]_1^x \\
&= \frac{1}{(1 - \alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1 - \alpha)} \\
&\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \alpha}
\end{aligned}$$

Par comparaison série intégrale,  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge.

## 27.30 Nature des séries exponentielles

### Théorème 27.30

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la série exponentielle  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  est absolument convergente et sa somme vaut  $e^x$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{x^n}{n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison par domination à une série de Riemann de paramètre  $2 > 1$ ,  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  est absolument convergente.

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on applique la formule de Taylor avec reste intégral :  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

On pose  $M = \max(1, e^x)$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \right| &\leq \pm \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} M dt \\ &= M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

## 27.32 Nature des séries de Bertrand - Hors Programme

### Proposition 27.32 - HP

La **série de Bertrand de paramètre**  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  est définie par  $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ . Elle est convergente si et seulement si  $(\alpha, \beta) > (1, 1)$  pour l'ordre lexicographique. Cela signifie :

- si  $\alpha > 1$ , la série converge
- si  $\alpha < 1$ , la série diverge
- pour  $\alpha = 1$  :
  - si  $\beta > 1$ , la série converge
  - si  $\beta \leq 1$ , la série diverge

— Si  $\alpha > 1$ , alors pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$$

Comme  $\frac{1+\alpha}{2} > 1$ , par comparaison en 0,  $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$  converge.

— Si  $\alpha < 1$ , alors pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$$

Comme  $\frac{\alpha+1}{2} < 1$ , par comparaison en 0,  $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$  diverge.

— Si  $\alpha = 1$ . Pour  $\beta = 1$ ,  $\sum \frac{1}{n \ln n}$  diverge (comparaison série intégrale).  
Pour  $\beta < 1$  :

$$\frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{n \ln^\beta n}$$

$\sum \frac{1}{n \ln n}$  diverge donc par comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$  diverge.  
Pour  $\beta > 1$ ,  $t \mapsto \frac{1}{t \ln^\beta t}$  est positive et décroissante sur  $[2, +\infty[$ .

$$\int_2^x \frac{dt}{t \ln^\beta t} = \int_2^x \frac{1}{t} \times (\ln t)^{-\beta} dt = \left[ \frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta} \right]_2^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)^{1-\beta}}{\beta-1}$$

Par comparaison série intégrale,  $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$  converge.

## 27.35 Règle d'Alembert - Hors Programme

### Théorème 27.35 - HP

Soit  $\sum u_n$  à termes quelconques non nuls. On suppose que  $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$  admet une limite (finie)  $\ell$ . Alors :

1. si  $0 \leq \ell < 1$ , alors  $\sum u_n$  converge absolument
2. si  $\ell > 1$ , alors  $\sum u_n$  diverge grossièrement
3. si  $\ell = 1$ , on ne peut rien dire

—

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in [0, 1[$$

A partir d'un rang  $n_0$  :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \frac{\ell+1}{2}$$

On a directement :

$$0 \leq |u_n| \leq \underbrace{\left( \frac{\ell+1}{2} \right)^{n-n_0}}_{\text{terme général d'une série géométrique de raison } \frac{\ell+1}{2}} \times |u_{n_0}|$$

Par comparaison des séries à termes positifs,  $\sum u_n$  est absolument convergente donc convergente.

- Même raisonnement si  $\ell > 1$ .
- $\frac{1}{n^2}$  et  $\frac{1}{n}$  fournissent des contre-exemples.

## 27.39 Critère spécial des séries alternées

### Théorème 27.39

Toute série alternée est convergente.

Soit  $\sum (-1)^n a_n$  une série alternée. Ainsi,  $a_n \geq 0$  pour tout  $n \geq 0$ .  $(a_n)$  est décroissante et  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

On note  $(S_n)$  la suite des sommes partielles associée à cette série. Montrons que  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes.

$$\forall n \geq 0, S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

— Pour  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned} S_{2n+3} - S_{2n+1} &= (-1)^{2n+3} a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\ &= a_{2n+1} - a_{2n+2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Les suites  $(S_{2n+1})$  et  $(S_{2n})$  sont adjacentes, donc elles convergent vers une limite commune. Donc  $(S_n)$  converge, donc  $\sum (-1)^n a_n$  converge.

## 27.42 Majoration du reste d'une série alternée

### Proposition 27.42

Soit  $\sum u_n$  une série alternée. On note  $R_n$  le reste d'ordre  $n$ . Alors :

1.  $R_n$  est du signe de  $u_{n+1}$
2. On a  $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

On reprend les notations de (27.39).

$$\forall n \geq 0, u_n = (-1)^n a_n$$

1. D'après la démonstration de (27.39), on a :

$$\forall n \geq 0, S_{2n+1} \leq \sum_{k \geq 0} u_k \leq S_{2n}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 0, R_{2n} &= \sum_{k \geq 0} u_k - S_{2n} \leq 0 \\ R_{2n+1} &= \sum_{k \geq 0} u_k - S_{2n+1} \geq 0\end{aligned}$$

On obtient alors le résultat souhaité.

2. Soit  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned}|R_{2n}| &= -R_{2n} = -\sum u_k + S_{2n} \leq S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n+1} = |u_{2n+1}| \\ |R_{2n+1}| &= R_{2n+1} = \sum u_k - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2} = |u_{2n+2}|\end{aligned}$$

## 27.44 Critère d'Abel - Hors Programme

### Théorème 27.44 - HP

1. Soit  $\sum a_n b_n$  une série telle que  $(a_n)$  soit une suite réelle positive décroissante de limite nulle, et telle que la suite  $(B_n)$  des sommes partielles de  $\sum b_n$  soit bornée ( $(b_n)$  est une suite complexe ou réelle). Alors  $\sum a_n b_n$  converge.
2. Les suites  $(b_n)$  définies par  $b_n = e^{ina}, \cos(an), \sin(an)$  remplissent les conditions requises, lorsque  $a \neq 0 \pmod{2\pi}$ .

1. On note  $(S_n)$  la suite des sommes partielles associées à  $\sum a_n b_n$ .  
On convient que  $B_{-1} = 0$ . Pour  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (B_k - B_{k-1})\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^n a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k\end{aligned}$$

— On a :

$$a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (a_n \rightarrow 0 \text{ et } (B_n) \text{ bornée})$$

—

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} |(a_k - a_{k+1}) B_k| &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) |B_k| \quad (a_n \text{ décroissante}) \\ &\leq M \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \quad ((B_n) \text{ bornée}) \\ &= M(a_0 - a_n) \\ &\leq M a_0\end{aligned}$$

Donc  $\sum (a_k - a_{k+1}) B_k$  est absolument convergente donc convergente.

Donc  $(\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k)$  admet une limite finie.

Donc  $(S_n)$  converge.

Donc  $\sum a_n b_n$  converge.

2. — Soit  $a \neq 0 \pmod{2\pi}$ , on note  $(b_n) = (e^{ina})$ .  
Pour  $n \geq 0$  :

$$B_n = \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=0}^n e^{ika} = \frac{1 - e^{i(n+1)a}}{1 - e^{ia}} \quad (e^{ia} \neq 1)$$

Donc :

$$|B_n| \leq \frac{2}{|1 - e^{ia}|}$$

- Si  $a = 0 \pmod{2\pi}$  :

$$B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (B_n = n + 1)$$

## Chapitre 28

# Matrice d'une application linéaire

## 28.5 Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs

### Théorème 28.5

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n \neq 0$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{F}$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Alors  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$  est inversible.

Soit  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs et  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  une base de  $E$ .

On note  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Ainsi :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} b_i$$

$\mathcal{F}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\mathcal{F}$  est libre (car  $|\mathcal{F}| = \dim E$ ), si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0 \Rightarrow \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = 0$$

Or pour  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{i=1}^n m_{ij} b_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \lambda_j \right) b_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i b_i \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0 &\Leftrightarrow \left[ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left[ M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i = 0 \right] \\ &\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \ker M \end{aligned}$$

En conclusion,  $\mathcal{F}$  est une base si et seulement si  $\ker M = \{0\}$ , si et seulement si  $M$  est inversible.

## 28.6 Exemple

### Exemple 28.6

Montrer que la famille  $(X^2 + 3X + 1, 2X^2 + X, x^2)$  de  $\mathbb{R}[X]$  est libre.

On note  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ .

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  est triangulaire inférieure avec une diagonale ne contenant aucun 0 : elle est donc inversible. Donc  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ , donc libre.



## 28.9 Caractérisation des matrices inversibles au moyen de leur lignes et colonnes

### Théorème 28.9

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $A$  est inversible
- la famille des colonnes de  $A$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)
- la famille des lignes de  $A$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$ ,  $L_1, \dots, L_n$  les lignes de  $A$ ,  $\mathcal{B}_n$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

$A$  est inversible si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(C_1, \dots, C_n)$  est inversible (28.8).

Si et seulement si  $(C_1, \dots, C_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  (28.5).

Si et seulement si  ${}^t A$  est inversible (11.42).

Si et seulement si  $(L_1, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ .

## 28.13 Exemple

### Exemple 28.13

On note  $T$  l'endomorphisme  $P \mapsto X^2 P'' + P(1)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  et  $\mathcal{B}_3$  la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ . Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(T)$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= (1, X, X^2, X^3) \\ T(1) &= 1 \\ T(X) &= 1 \\ T(X^2) &= 2X^2 + 1 \\ T(X^3) &= 6X^2 + 1 \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}}(T) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## 28.15 Exemple

### Exemple 28.15

Déterminer l'application canoniquement associée à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\hat{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y, z) \mapsto (x + z, 2x + y)$$

## 28.18 Exemple

### Exemple 28.18

On note  $\varphi$  l'application canoniquement associée à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{B}'_2$  la base  $((0, 1), (1, 0))$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{B}'_3$  la base  $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ . Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3}(\varphi)$ .

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, x + y, -x + y). \\ \varphi(1, 0) &= (1, 1, -1) = -(1, 1, 1) + 2(1, 1, .) \\ \varphi(0, 1) &= (0, 1, 1) = (1, 1, 1) - (1, 1, 0)\end{aligned}$$

$$Mat_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 28.19 Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire

### Théorème 28.19

Soit  $E \neq \{0\}$  et  $F \neq \{0\}$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $p$  et  $n$ ,  $e$  une base de  $E$  et  $f$  une base de  $F$ ,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $x \in E$ . Alors :

$$\underbrace{Mat_f(u(x))}_{(n,1)} = \underbrace{Mat_{e,f}(u)}_{(n,p)} \underbrace{Mat_e(x)}_{(p,1)}$$

On note  $e = (e_1, \dots, e_p)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$  et  $Mat_{e,f}(u) = M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$

Soit  $x \in E$ . On écrit  $m = \sum_{j=1}^p \alpha_j e_j$ . Par conséquent :

$$Mat_e(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{aligned}u(x) &= u\left(\sum_{j=1}^p \alpha_j e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^p \alpha_j u(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{i=1}^n m_{ij} f_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^p m_{ij} \alpha_j \right] f_i \\ &= \sum_{i=1}^n [M \times Mat_e(x)]_i f_i\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}Mat_f(u(x)) &= \begin{pmatrix} [M \times Mat_e(x)]_1 \\ \vdots \\ [M \times Mat_e(x)]_n \end{pmatrix} \\ &= M \times Mat_e(x)\end{aligned}$$

## 28.20 Exemple

### Exemple 28.20

On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  de matrice  $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  dans la base canonique.

Montrer que  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(3, 2X^2 + X)$  et  $\ker f = \text{Vect}(X^2 - 2X)$ .

On a :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X]; aX^2 + bX + c \mapsto (4a + 2b)X^2 + (2a + b)X + (6a + 3b + 3c) \\ \hat{f} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3; (c, b, a) \mapsto (3c + 3b + 6a, b + 2a, 2b + 4a) \end{aligned}$$

— Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  :

$$\begin{aligned} MX = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 3y + 6z \\ y + 2z \\ 2y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\ker M = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \ker f &= \text{Vect}(X^2 - 2X) \\ &= \text{Vect}(-2X + 1) \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} \text{Im}(M) &= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(1 + X + 2X^2)$$

## 28.21 Lien entre produit matriciel et composition d'applications linéaires

### Théorème 28.21

1. Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies non nulles  $p$  et  $n$  respectivement. L'application  $u : \text{Mat}_{e,f}(u)$  est un isomorphisme entre  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .
2. Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions non nulles et de bases respectives  $e, f$  et  $g$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors :

$$\text{Mat}_{e,g}(v \circ u) = \text{Mat}_{f,g}(v) \times \text{Mat}_{e,f}(u)$$

3. Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de même dimensions finies et non nulles. Soit  $e$  une base de  $E$ ,  $f$  une base de  $F$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $u$  est un isomorphisme entre  $E$  et  $F$  si et seulement si  $\text{Mat}_{e,f}(u)$  est inversible. Dans ce cas on a :

$$\text{Mat}_{f,e}(u^{-1}) = \text{Mat}_{e,f}(u)^{-1}$$

1. Le théorème de rigidité (21.63) justifie que l'application  $u \mapsto \text{Mat}_{e,f}(u)$  est bijective. Par construction, elle est bien linéaire.
2. Soit  $x \in F$ .

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{e,g}(v \circ u) \text{Mat}_e(x) &= \text{Mat}_g(v \circ u(x)) \\ &= \text{Mat}_g(v(u(x))) \\ &= \text{Mat}_{f,g}(v) \text{Mat}_f(u(x)) \\ &= \text{Mat}_{f,g}(v) \text{Mat}_{e,f}(u) \text{Mat}_e(x) \end{aligned}$$

Nécessairement :

$$\text{Mat}_{e,g}(v \circ u) = \text{Mat}_{f,g}(v) \text{Mat}_{e,f}(u)$$

3.

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{e,f}(u) \times \text{Mat}_{f,e}(u^{-1}) &= \text{Mat}_f(u \circ u^{-1}) \\ &= \text{Mat}_f(id) \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{Mat}_{e,f}(u) \in GL_n(\mathbb{K})$$

On note  $P = M^{-1}$ . D'après le premier point, on note  $\sigma$  l'unique élément de  $\mathcal{L}(F, E)$  tel que  $\text{Mat}_{f,e}(\sigma) = P$ .

On a :

$$Id = MP = \text{Mat}_{e,f}(u) \times \text{Mat}_{f,e}(v) = \text{Mat}_f(u \circ v)$$

Donc :

$$u \circ v = id$$

Donc ( $E$  est de dimension finie) :

$$u^{-1} = v$$

## 28.22 Exemple

### Exemple 28.22

Montrer que l'endomorphisme  $\omega$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  est :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est la symétrie par rapport à  $Vect(X^3 + X^2 + X, X^2 + 1)$  parallèlement à  $Vect(X^3 + X + 1, X^3 + X^2)$ .

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\Omega - I_4)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + c - d \\ -a + c - d \\ 2b - 2d \\ -a + 2b + c - 3d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\Omega - I_4)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a - c + d &= 0 \\ b - d &= 0 \\ -a + 2b + c - 3d &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - c + d &= 0 \\ b - d &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= c - d \\ b &= d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \ker(\Omega - I_4) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{Donc } \ker(\omega - id) = Vect(1 + X^2, -1 + X + X^3).$$

$$(\Omega + I_4)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c - d \\ -a + 2b + c - d \\ 2b + 2c - 2d \\ -a + 2b + c - d \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 (\Omega + I_4)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a + c - d = 0 \\ b + c - d = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = -c + d \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -c + d \\ -c + d \\ c \\ d \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow X \in Vect \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Donc  $\ker(\omega + id) = Vect(1 + X + X^3, X^2 + X^3)$ .

## 28.23 CNS d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde

### Théorème 28.23

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ . On appelle **matrice de Vandermonde de  $x_1, \dots, x_n$**  la matrice  $(x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Cette matrice est inversible si et seulement si les scalaires  $x_1, \dots, x_n$  sont distincts deux à deux.

$$M = (x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On définit  $\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n; P \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n))$ .

On suppose que tous les  $x_i$  sont distincts deux à deux.

Si  $P \in \ker \varphi$ ,  $P$  possède (au moins)  $n$  racines distinctes, or  $\deg P \leq n - 1$  donc par rigidité,  $P = 0$ .

Donc  $\varphi$  est injective ( $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R}^n)$ ).

Donc  $\varphi$  est un isomorphisme ( $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n$ ).

Or, en notant  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  les bases canoniques de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  et  $\mathbb{R}^n$  :

$$Mat_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\varphi) = M$$

Donc  $M$  est inversible (28.21).

Si  $x_1 = x_j$  avec  $x \neq j$ ,  $M$  possède deux lignes identiques, donc  $M \notin GL_n(\mathbb{K})$  (28.9).

## 28.28 Exemple

### Exemple 28.28

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension 3 et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $u$  est donc nilpotent d'indice 2.

Montrer que dans une certaine base,  $u$  a pour matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

— D'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim \ker u}_{\geq 1} + \underbrace{\operatorname{rg} u}_{\geq 1} = 3$$

Comme  $u^2 = 0$ ,  $\operatorname{Im} u \subset \ker u$ .

On a nécessairement  $\operatorname{rg} u = 1$  et  $\dim \ker u = 2$ .

- Soit  $x \in E$  tel que  $u(x) \neq 0$ . Or  $u(x) \in \ker u$  et  $\dim \ker u = 2$ , on complète donc  $(u(x), y)$  en une base de  $\ker u$ .
- La famille  $(y, x, u(x))$  est libre :

$$\begin{aligned} ay + bx + cu(x) &= 0 \\ \text{donc } bu(x) &= 0 \\ \text{donc } b &= 0 \\ \text{donc } ay + cu(x) &= 0 \\ \text{donc } a = c = 0 &\text{ car } (y, u(x)) \text{ est libre} \end{aligned}$$

$(y, x, u(x))$  est de cardinal 3 =  $\dim E$ , donc est une base de  $E$  et :

$$\text{Mat}_{(u(x), y, x)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 28.29 Exemple

### Exemple 28.29

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies non nulles et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  de rang  $r$ .

Montrer qu'il existe une base  $e$  de  $E$  et une base  $f$  de  $F$  telles que  $\text{Mat}_{e,f}(u) = J_r$ , où  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Comme  $\text{rg } u = r$ ,  $\dim \ker u = p - r$  ( $p = \dim E$ ).

Soit  $S$  un supplémentaire de  $\ker u$  dans  $E$ .

$\dim S = r$ . Soit  $e = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$  une base adaptée à  $E = S \oplus \ker u$ .

$(u(e_1), \dots, u(e_r))$  est une base de  $\text{Im } u$ , donc libre dans  $F$ , que l'on complète en une base  $f$  de  $F$ .

Par construction :

$$\text{Mat}_{e,f}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

## 28.33 Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice

### Proposition 28.33

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , où  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. Soit  $e$  et  $f$  deux bases quelconques, respectivement de  $E$  et  $F$ . Alors :

$$\text{rg } u = \text{rg } \text{Mat}_{e,f}(u)$$

On note  $e = (e_i)$ .

$$\begin{aligned} \text{rg } \dim \text{Vect}((u(e_i))) &= \dim \text{Vect}((C_i)) \\ &= \text{rg } \text{Mat}_{e,f}(u) \end{aligned}$$

## 28.35 Invariance du rang par une matrice inversible

### Proposition 28.35

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ,  $R \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ , alors :

$$\text{rg}(PMR) = \text{rg } M$$

Soit  $\hat{M}, \hat{P}, \hat{R}$  les applications canoniquement associées à  $M, P, R$ .  
 $\hat{P}, \hat{R}$  sont des isomorphismes ( $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $R \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ ). Ainsi :

$$\text{rg}(PMR) = \text{rg}(\hat{P} \circ \hat{M} \circ \hat{R}) = \text{rg}(\hat{M}) = \text{rg } M$$

## 28.37 Exemple

### Exemple 28.37

Déterminer le rang de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le rang de cette matrice est 2 donc  $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$ .

## 28.38 Matrice de changement d'une base à une autre

### Théorème 28.38

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie non nulle, et  $e, f$  et  $g$  trois bases de  $E$ . On appelle **matrice de passage de  $e$  à  $f$**  la matrice :

$$\text{Mat}_e(f) = \text{Mat}_{f,e}(\text{id}_E)$$

Cette matrice est souvent notée  $P_e^f$  (ou quelques fois  $P_{e \rightarrow f}$ ). De plus :

1.  $P_e^f$  est inversible, d'inverse  $P_f^e$ .
2.  $P_e^f \times P_f^g = P_e^g$ .

1. On a  $P_e^f = \text{Mat}_{f,e}(\text{id})$ .  
Donc ( $\text{id}$  est inversible) :

$$(P_e^f)^{-1} = \text{Mat}_{e,f}(\text{id}^{-1}) = \text{Mat}_{e,f}(\text{id}) = P_f^e$$

- 2.

$$\begin{aligned} P_e^f \times P_f^g &= \text{Mat}_{f,e}(\text{id}) \times \text{Mat}_{g,f}(\text{id}) \\ &= \text{Mat}_{g,e}(\text{id} \circ \text{id}) \quad (28.21) \\ &= \text{Mat}_{g,e}(\text{id}) \\ &= P_e^g \end{aligned}$$



## 28.41 Exemple

### Exemple 28.41

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  fixé. Notons  $e = (i, j)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et posons

$$\begin{cases} u_\theta = \cos(\theta)i + \sin(\theta)j \\ v_\theta = -\sin(\theta)i + \cos(\theta)j \end{cases}$$

La matrice de la famille  $(u_\theta, v_\theta)$  dans la base  $(i, j)$  est :

$$\text{Mat}_{(i,j)}(u_\theta, v_\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Comme le déterminant de cette matrice vaut 1 (et donc non nul), alors  $b_\theta = (u_\theta, v_\theta)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , déterminer les coordonnées de  $u$  dans la nouvelle base  $b_\theta$ .

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{Mat}_e((x, y))$ .

On note  $X' = \text{Mat}_{(u_\theta, v_\theta)}((x, y))$ .

D'après la formule de changement de base :

$$\begin{aligned} X &= PX' \\ \text{donc } X' &= P^{-1}X \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta x & \sin \theta y \\ -\sin \theta x & \cos \theta y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc  $(x, y) = (\cos \theta x + \sin \theta y)u_\theta + (-\sin \theta x + \cos \theta y)v_\theta$ .

## 28.42 Changement de bases pour une application linéaire

### Théorème 28.42

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies non nulles,  $e$  et  $e'$  deux bases de  $E$ ,  $f$  et  $f'$  deux bases de  $F$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\text{Mat}_{e',f'}(u) = P_{f'}^f \text{Mat}_{e,f}(u) P_e^{e'}$$

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{e',f'}(u) &= \text{Mat}_{e',f'}(\text{id}_F \circ u \circ \text{id}_E) \\ &= \text{Mat}_{f',f'}(\text{id}) \times \text{Mat}_{e,f}(u) \times \text{Mat}_{e',e}(\text{id}) \\ &= P_{f'}^f \text{Mat}_{e,f}(u) P_e^{e'} \end{aligned}$$

## 28.47 Exemple fondamental

### Proposition 28.47

Deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. Cela revient à dire que toute matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est équivalente à  $J_r$ .

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  de rang  $r$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$  l'application canoniquement associée à  $M$ .

Donc  $\text{rg } u = r$ .

D'après (28.29), on choisit une base  $e$  de  $\mathbb{K}^p$  et  $f$  de  $\mathbb{K}^n$  telles que :

$$\text{Mat}_{e,f}(u) = J_r$$

D'après (28.44),  $M$  et  $\text{Mat}_{e,f}(u)$  sont équivalentes, soit :

$$M \sim J_r$$

## 28.48 Invariance du rang par transposition

### Théorème 28.48

Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , on a  $\text{rg } {}^t A = \text{rg } A$ .

En effet car  ${}^t(J_r) = J_r$ .

Ainsi,  $A \sim J_r$ .

Alors  $A = Q^{-1} J_r P$ .

Et  ${}^t A = {}^t P {}^t J_r {}^t Q^{-1}$ .

Donc  ${}^t A \sim J_r$ .

Donc  $\text{rg } {}^t A = \text{rg } A$ .

## 28.52 Rang d'une matrice extraite

### Proposition 28.52

Pour toute matrice  $B$  extraite de  $A$ , on a  $\text{rg } B \leq \text{rg } A$ . Le rang de  $A$  est la taille maximale des matrices inversibles que l'on peut extraire de  $A$ .

Extraire une matrice  $B$  de  $A$  revient à supprimer des colonnes et des lignes de  $A$ .

On note  $C$  la matrice intermédiaire en supprimant les colonnes de  $A$ .

Ainsi,  $B$  s'obtient à partir de  $C$  en supprimant les lignes de  $C$ .

Par définition (28.30),  $\text{rg } C \leq \text{rg } A$ .

Puis (28.49),  $\text{rg } B \leq \text{rg } C$ .

On note  $r$  le rang de  $A$ .

D'après (28.30), il existe  $r$  colonnes de  $A$  linéairement indépendantes.

Soit  $C$  la matrice extraite de  $A$ , constituée de ses vecteurs colonnes.

En particulier,  $\text{rg } C = r$ .

D'après (28.49), il existe  $r$  vecteurs lignes de  $C$ , libres.

On note  $B$  la matrice (extraite de  $C$ ) constituée de ces vecteurs lignes.

On a  $\text{rg } B = r$  et  $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ .

Donc  $B \in \text{GL}_r(\mathbb{K})$  (28.9).

## 28.57 Invariance du rang et de la trace par similitude

### Proposition 28.57

Deux matrices semblables ont même rang et même trace.

- Deux matrices semblables sont équivalentes (28.54) et ont le même rang (28.47).
- Si  $B = P^{-1}AP$ , alors :

$$\begin{aligned} \text{tr } B &= \text{tr}(P^{-1}AP) \\ &= \text{tr}(APP^{-1}) \\ &= \text{tr}(A) \end{aligned}$$

La trace et le rang sont des invariants de similitude.

## 28.60 Exemple

### Exemple 28.60

Les matrices  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  sont semblables.

On note  $u$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . En notant  $e = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , on a :

$$\begin{aligned} u(e_1) &= 0 \\ u(e_2) &= e_1 \\ u(e_3) &= e_1 + e_3 \end{aligned}$$

En posant  $f = (e_3, e_1, e_2)$  on obtient  $B = \text{Mat}_f(u)$ .

En posant  $g = (\frac{1}{2}e_1, 2e_2, e_3)$  on obtient  $C = \text{Mat}_g(u)$ .

D'après l'exemple fondamental,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont semblables.

## 28.63 Opération sur la trace

### Proposition 28.63

La trace est linéaire. De plus, pour tout  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ , on a  $\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$ .

- Linéarité : RAF
- Pseudo-commutativité : RAF

## 28.64 Exemple

### Exemple 28.64

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle, et  $p$  un projecteur de  $E$ . Alors  $\text{tr } p = \text{rg } p$ .

Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur.

$$E = \text{Im } p \oplus \ker p$$

Dans une base adaptée à cette décomposition :

$$\begin{aligned} \text{Mat}(p) &= J_r \\ r &= \text{rg } p \\ \text{or } \text{tr } J_r &= \text{tr } p = r \end{aligned}$$

## Chapitre 29

# Groupe symétrique

## 29.26 Lemme 26

### Lemme 29.26

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . On a :

$$\left| \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(i) - \sigma(j)) \right| = \prod_{X \in \mathcal{P}_2(\llbracket 1, n \rrbracket)} \delta_\sigma(X) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$$

- La première égalité est justifiée car on a une bijection entre  $\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$  et  $\mathcal{P}_2(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .
- La seconde égalité est justifiée d'après (28.23).

## 29.29 Propriété fondamentale de la signature

### Théorème 29.29

La signature est un morphisme de groupe de  $(\mathcal{S}_n, \circ)$  dans  $(\{-1, 1\}, \times)$ .

Montrons que  $\epsilon(\sigma \circ \xi) = \epsilon(\sigma) \times \epsilon(\xi)$ .

Pour  $\sigma, \xi \in \mathcal{S}_n$  :

$$\begin{aligned} \epsilon(\sigma \circ \xi) &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma \circ \xi(j) - \sigma \circ \xi(i))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)} \times \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi(j) - \xi(i))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi(j) - \xi(i))} \\ &= \epsilon(\xi) \times \prod_{X \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \tau_\sigma(\xi(X)) \\ &= \epsilon(\xi) \times \prod_{X \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \tau_\sigma(X) \\ &= \epsilon(\xi) \times \epsilon(\sigma) \end{aligned}$$

## 29.35 Décomposition d'une transposition à l'aide des $\tau_i$

### Proposition 29.35

soit  $1 \leq i < j \leq n$  et  $\tau = (i, j)$ . Alors :

$$\tau = \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i \circ \tau_{i+1} \circ \cdots \circ \tau_{j-1}$$

- Si  $k > j$ , alors pour tout  $p \in \llbracket i, j-1 \rrbracket$ ,  $\tau_p(k) = k$ .  
Donc  $\sigma(k) = k$ .  
Cela reste vrai si  $k < i$ .
- On a :

$$\begin{aligned} \sigma(i) &= \tau_{j-1} \circ \tau_{j-2} \circ \cdots \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_{i+1}(i+1) \\ &= \tau_{j-1}(j-1) \\ &= j \\ \sigma(j) &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \circ \tau_{j-1}(j) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \circ \tau_{j-2}(j-1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i(i+1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_{i+1}(i) \\ &= i \end{aligned}$$

— Si  $i < k < j$ , alors :

$$\begin{aligned}\sigma(k) &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \tau_k(k) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \tau_{k-1}(k+1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_k(k+1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \tau_{k+1}(k) \\ &= k\end{aligned}$$

## 29.37 Caractère générateur des transpositions

### Théorème 29.37

Toute permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  est un produit de transposition.

On prouve le résultat par récurrence sur  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

— pour  $n = 2$ ,  $\mathcal{S}_2 = \{id, (1 \ 2)\}$  et  $id = (1 \ 2)^2$ .

— On suppose le résultat vrai pour  $n \geq 2$ .

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$ .

— Si  $\sigma(n+1) = n+1$ ,  $\sigma$  induit naturellement une permutation  $\tilde{\sigma}$  sur  $\mathcal{S}_n$ , donc  $\tilde{\sigma}$  est un produit de transpositions  $\tilde{\tau}$ , et chaque  $\tilde{\tau}$  se relève en une transposition  $\tau$  de  $\mathcal{S}_{n+1}$ .

— Si  $\sigma(n+1) = i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors :

$$\varphi = (i \ n+1) \circ \sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$$

et  $\varphi(n+1) = n+1$ .

D'après le point précédent,  $\varphi$  est un produit de transposition.

Donc  $\sigma = (i \ n+1) \circ \varphi$  est aussi un produit de transposition.

## 29.40 Effet de la conjugaison sur un cycle

### Théorème 29.40

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  et  $(a_1 \ \cdots \ a_k)$  un cycle. Alors :

$$\sigma \circ (a_1 \ \cdots \ a_k) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \ \cdots \ \sigma(a_k))$$

— Si  $\sigma^{-1}(i) \notin \{a_1, \dots, a_n\}$  alors  $\sigma \circ (a_1 \ \cdots \ a_k) \circ \sigma^{-1}(i) = \sigma \circ \sigma^{-1}(i) = i$ .

— Si  $\sigma^{-1}(i) = a_j$ , alors  $\sigma \circ (a_1 \ \cdots \ a_k) \circ \sigma^{-1}(i) = \sigma(a_{j+1})$ .

## 29.41 Corollaire 29.41

### Corollaire 29.41

Soit  $\varphi : \mathcal{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$  un morphisme. Soit  $\alpha \in \{1, -1\}$ . S'il existe une transposition  $\tau_0$  telle que  $\varphi(\tau_0) = \alpha$ , alors pour toute transposition  $\tau$ , on a  $\varphi(\tau) = \alpha$ .

Ainsi,  $\varphi$  prend une valeur constante sur les transpositions.

Par conjugaison. Soit  $\tau_0 = (i \ j)$  et  $\tau = (k \ l)$ .

On a :

$$\tau = \sigma \circ \tau_0 \circ \sigma^{-1}$$

avec  $\sigma = (i \ k \ j \ l)$ . Alors :

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) &= \varphi(\sigma \circ \tau_0 \circ \sigma^{-1}) \\ &= \varphi(\sigma) \times \varphi(\tau_0) \times \varphi(\sigma^{-1}) \\ &= \varphi(\tau_0) \times \varphi(\sigma)^2 \\ &= \varphi(\tau_0)\end{aligned}$$

## 29.42 Unicité de la signature

### Théorème 29.42

La signature est l'unique morphisme de groupe non trivial de  $\mathcal{S}_n$  dans  $\{-1, 1\}$ .

Soit  $\varphi$  un morphisme de groupes de  $\mathcal{S}_n$  dans  $\{\pm 1\}$ .

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . D'après (29.37),  $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ .

— Si la valeur prise par  $\varphi$  sur les transpositions est 1 (29.40), alors :

$$\varphi(\sigma) = \prod_{i=1}^k \varphi(\tau_i) = 1$$

Donc  $\varphi$  est triviale.

— Si la valeur prise par  $\varphi$  sur les transpositions est  $-1$  (29.41), alors :

$$\varphi(\sigma) = \prod_{i=1}^k \varphi(\tau_i) = (-1)^k = \epsilon(\sigma)$$

Donc  $\varphi = \epsilon$ .

## 29.52 Décomposition en cycle d'une permutation

### Théorème 29.52

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathcal{S}_n$ . A permutation près des facteurs, il existe une unique décomposition de  $\sigma$  en produit de cycle à supports disjoints.

$$\sigma = C_1 \circ \dots \circ C_k$$

telles que les supports des cycles forment un partition de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . De plus, l'unique cycle de cette décomposition contenant  $x$  est égale à  $C_x$ .

— Existence : On note  $\{\overline{C_1}, \dots, \overline{C_k}\} = \llbracket 1, n \rrbracket / \equiv_\sigma$ .

On note (29.49)  $c_i$  la permutation induite par  $\sigma$  sur  $\overline{C_i}$  ( $C_i = (p \ \sigma(p) \ \dots \ \sigma^j(p))$ ).

On pose  $\varphi = C_1 \circ \dots \circ C_k$ .

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors  $i \in \overline{C_q}$  avec  $q \in \llbracket 1, k \rrbracket$ .

D'après (29.51),  $\varphi(i) = C_q(i) = \sigma(i)$ .

Donc  $\varphi = \sigma$ .

— Unicité : On suppose que  $\sigma = C_1 \circ \dots \circ C_k = U_1 \circ \dots \circ U_q$ .

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .  $i \in \text{supp}(C_1) \in \text{supp}(U_1)$  (quitte à permuter les rôles).

On a donc  $\sigma(i) = C_1(i) = U_1(i)$  et  $\sigma^2(i) = C_1^2(i) = U_1^2(i)$  et ....

Donc  $C_1 = U_1$ .

## 29.62 Décomposition d'un cycle en transpositions

### Lemme 29.62

Soit  $(i_1, \dots, i_k)$  des entiers deux à deux distincts de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors :

$$(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_k) = (i_1 \ i_k) \circ (i_1 \ i_{k-1}) \circ \dots \circ (i_1 \ i_2)$$

On note  $\sigma = (i_1 \ i_k) \dots (i_1 \ i_2)$ .

Soit  $p \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ . On a bien  $\sigma(p) = p$ .

Soit  $i_j \in \{i_1, \dots, i_k\}$ . ( $j \neq k$ )

$$\begin{aligned}\sigma(i_1) &= (i_1 \ i_k) \cdots (i_1 \ i_2)(i_1) \\ &= (i_1 \ i_k) \cdots (i_1 \ i_3)(i_2) \\ &= i_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(i_j) &= (i_1 \ i_k) \cdots (i_1 \ i_2)(i_j) \\ &= (i_1 \ i_k) \cdots (i_1 \ i_j)(i_j) \\ &= (i_1 \ i_k) \cdots (i_1 \ i_{j+1})(i_1) \\ &= i_{j+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(i_k) &= (i_1 \ i_k)(i_k) \\ &= i_1\end{aligned}$$

### 29.63 Signature d'un cycle

Proposition 29.63

Soit  $C$  un cycle et  $\ell(C)$  sa longueur. Alors :

$$\epsilon(C) = (-1)^{\ell(C)-1}$$

Avec ce qui précède :

$$\begin{aligned}\epsilon(\sigma) &= \prod_{j=2}^k \epsilon((i_1 \ i_j)) \\ &= (-1)^{k-1} \\ &= (-1)^{\ell(C)-1}\end{aligned}$$

### 29.64 Détermination de $\epsilon$ par le type cyclique

Théorème 29.64

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathcal{S}_n$  et  $c(\sigma)$  le nombre de parts dans son support cyclique (ou de façon équivalente dans son type cyclique). Alors :

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-c(\sigma)}$$

Soit  $\sigma = C_1 \circ \cdots \circ C_{c(\sigma)}$ . On a :

$$\begin{aligned}\epsilon(\sigma) &= \prod_{i=1}^{c(\sigma)} \epsilon(C_i) \text{ (}\epsilon \text{ morphisme)} \\ &= \prod_{i=1}^{c(\sigma)} (-1)^{\ell(C_i)-1} \text{ (29.63)} \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^{c(\sigma)} [\ell(C_i)-1]} \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^{c(\sigma)} \ell(C_i) - c(\sigma)} \\ &= (-1)^{n-c(\sigma)}\end{aligned}$$



## 29.69 Exemple

### Exemple 29.69

Calculer la signature de la permutation suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & 1 & 3 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , le couple  $(i, k+n)$  donne une inversion avec  $k \in \llbracket 1, i \rrbracket$ .

On dénombre donc :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc :

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

## Exercice 4

Soit  $g \in G$ . On note  $\varphi_g : G \rightarrow G; h \mapsto gh$ .

On a  $\varphi_g \in S(G)$  car  $\varphi_g$  est bijective de réciproque  $\varphi_g^{-1}$ .

On note  $\varphi : G \rightarrow S(G); g \mapsto \varphi_g$ .

On a évidemment pour tout  $(g, k) \in G^2$  :

$$\varphi(g \times k) = \varphi_g \circ \varphi_k$$

Donc  $\varphi$  est un morphisme de groupe.

Si  $g \in \ker \varphi$ ,  $\varphi(g) = \text{id}$ , donc :

$$\begin{aligned} \forall h \in G, \varphi_g(h) &= h \\ \text{donc } g &= 1_G \end{aligned}$$

Donc  $G$  est isomorphe à  $\text{Im } \varphi$ , qui est un sous-groupe de  $S(G)$ .

## Chapitre 30

# Déterminant

## 30.4 Exemple

### Exemple 30.4

On considère l'application :

$$\delta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}; ((a, b), (c, d)) \mapsto ad - bc$$

Montrer que cette application est bien 2-linéaire.

$$\begin{aligned} \delta \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \right) &= \delta \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c + \lambda c' \\ d + \lambda d' \end{pmatrix} \right) \\ &= a(d + \lambda d') - b(c + \lambda c') \\ &= ad - bc + \lambda(ad' - bc') \\ &= \delta \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) + \lambda \delta \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

## 30.11 Détermination d'une application n-linéaire sur une base

### Proposition 30.11

Soit pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d_i}$  une base de  $E_i$  et pour tout  $(j_1, \dots, j_n) \in \llbracket 1, d_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, d_n \rrbracket$ ,  $f_{j_1, \dots, j_n} \in F$ .

Alors il existe une unique application  $n$ -linéaire  $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$  telle que :

$$\forall (j_1, \dots, j_n) \in \llbracket 1, d_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, d_n \rrbracket, \varphi(e_{1,j_1}, \dots, e_{n,j_n}) = f_{j_1, \dots, j_n}$$

Si  $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d_i}$  est une base de  $E_i$  alors  $((e_{1,2}, 0, \dots, 0, \dots, e_{1,d}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, e_{n,1}, \dots, (0, \dots, 0, e_{n,d})))$  est une base de  $E_1 \times \dots \times E_n$ . (22.16), théorème de rigidité.

## 30.18 Caractérisation par les transpositions

### Lemme 30.18

Pour qu'une forme  $f$  soit antisymétrique, il faut et il suffit que l'échange de deux variables quelconques provoque un changement de signe.

Par hypothèse, si  $\tau$  est une transposition alors  $\varphi(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n}) = -\varepsilon(\tau)\varphi(x_1, \dots, x_n)$ .  
Soit  $\sigma \in S_n$ . On écrit  $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$  avec  $\tau_i$  des transpositions. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}) &= \varphi(x_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(n)}) \\ &= \varepsilon(\tau_1) \varphi(x_{\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(n)}) \\ &= \varepsilon(\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k) \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \varepsilon(\sigma) \varphi(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

### 30.19 Une forme alternée change de signe par transposition

#### Lemme 30.19

Soit  $\varphi$  une forme alternée. Alors pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  et tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  avec  $i \neq j$  :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Cela revient à dire que pour toute transposition  $\tau \in S_n$ , on a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = -\varepsilon(\tau)\varphi(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n})$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite et si  $\mathbb{K}$  n'est pas de caractéristique 2, alors  $\varphi$  est alternée.

Soit  $\varphi$  alternée.

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_j + x_i, \dots, x_n) \\ &= \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &\quad + \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ &\quad + \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &\quad + \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ &= \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) + \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

On suppose que  $\text{carac}(\mathbb{K}) \neq 2$ .

On a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \text{ (antisymétrie)}$$

Donc :

$$2\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

Donc :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

### 30.21 Image d'une famille liée par une forme alternée

#### Proposition 30.21

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille liée et  $\varphi$  une forme alternée. Alors :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée, alors on peut écrire par exemple :

$$x_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i x_i$$

Donc :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n) &= \varphi\left(\sum_{i=2}^n \lambda_i x_i, x_2, \dots, x_n\right) \\ &= \sum_{i=2}^n \lambda_i \varphi(x_i, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

### 30.22 Forme $n$ -linéaire d'un espace de dimension $n$

#### Théorème 30.22

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  non nulle et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

1. Il existe une unique forme  $n$ -linéaire  $\varphi$  sur  $E$  telle que  $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$ .
2. Cette forme  $n$ -linéaire est entièrement décrite sur les vecteurs de la base par :

$$\begin{cases} \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0 & \text{s'il existe } j \neq k \text{ tel que } i_j = i_k \\ \varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) & \text{où } \sigma \in \mathcal{S}_n \end{cases}$$

3. Toute autre forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  est de la forme  $\lambda\varphi$ , où  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

1, 2

On utilise le théorème de rigidité des applications  $n$ -linéaires (30.11) en fixant l'image de chaque  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$  avec  $(i_1, \dots, i_n) \in \llbracket 1, n \rrbracket^n$ .

- $\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$  s'il existe  $i_j = i_k$  avec  $j \neq k$ .
- $\varphi(\underbrace{e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}}_{(i_1, \dots, i_n) \text{ fournit alors une permutation } \sigma \in \mathcal{S}_n}) = \varepsilon(\sigma) \times \underbrace{1}_{\varphi(e_1, \dots, e_n)}.$

Le théorème nous fournit l'existence de la forme alternée et l'unicité.

3

Soit  $\psi$  une forme  $n$ -linéaire alternée. On pose  $\lambda = \psi(e_1, \dots, e_n)$ .

- si  $\lambda = 0$ , par alternance (et antisymétrie) on a  $\psi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$  pour tout  $i_1, \dots, i_n$ .  
Par rigidité,  $\psi = 0 = 0 \times \varphi$ .
- si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\frac{1}{\lambda}\psi(e_1, \dots, e_n) = 1$ .  
Par unicité (1),  $\frac{1}{\lambda}\psi = \varphi$ .  
Donc  $\psi = \lambda\varphi$ .

### 30.25 Exemple

#### Exemple 30.25

On considère  $E = \mathbb{R}^2$ , muni de sa base canonique  $e = (e_1, e_2) = ((1, 0), (0, 1))$ . Soit  $((a, b), (c, d)) \in E^2$ . Montrer que :

$$\det_e((a, b), (c, d)) = ad - bc$$

$e = ((1, 0), (0, 1)).$   
 $((a, b), (c, d)) \in (E)^2.$

$$\begin{aligned} \det_e((a, b), (c, d)) &= \det_e(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\ &= ac \times \cancel{\det_e(e_1, e_1)} + ad \times \det_e(e_1, e_2) + bc \times \det_e(e_2, e_1) + bd \times \cancel{\det_e(e_2, e_2)} \\ &= ad \times \det_e(e_1, e_2) - bc \times \det_e(e_1, e_2) \\ &= (ad - bc) \end{aligned}$$

### 30.26 Description du déterminant par les coordonnées

#### Théorème 30.26

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  non nulle et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille d'éléments de  $E$ , dont les coordonnées sont :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i \quad \text{donc} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)}$$

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) &= \det_{\mathcal{B}} \left( \sum_{i=1}^n a_{i,1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n} e_{i_n} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \quad (\text{multilinéarité}) \\ &= \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} = \llbracket 1, n \rrbracket} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \quad (\text{alternance}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})}_{=\varepsilon(\sigma)} \quad (\text{reformulation}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)} \end{aligned}$$

### 30.28 Effet d'un changement de base sur le déterminant

#### Proposition 30.28

Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Alors :

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}}$$

D'après le corollaire (30.27), on écrit :

$$\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

En particulier :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda$$

### 30.30 Caractérisation des bases par le déterminant

#### Proposition 30.30

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  non nulle, muni d'une base  $\mathcal{B}$ . Une famille  $\mathcal{F}$  de cardinal  $n$  est une base si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$ .

D'après (30.29), si  $\mathcal{F}$  est une base alors  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$ .

Si  $\mathcal{F}$  n'est pas une base, alors elle est liée ( $|\mathcal{F}| = n$ )

Donc  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$  (30.21).

### 30.36 Déterminant d'un produit

#### Théorème 30.36

Soit  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(BA)$$

Soit  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $A_1, \dots, A_n$  les colonnes de  $A$  et  $B_1, \dots, B_n$  les colonnes de  $B$ .  
On considère l'application :

$$\varphi : (\mathbb{K}^n)^n \rightarrow \mathbb{K}; (X_1, \dots, X_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}_C}(AX_1, \dots, AX_n)$$

$\varphi$  est une forme  $n$ -linéaire alternée.

On choisit donc  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}_C}$ . On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{B}_C) &= \lambda \det_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_C) \\ &= \lambda \\ &= \det_{\mathcal{B}_C} \left( A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det_{\mathcal{B}_C}(A_1, \dots, A_n) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

Ainsi  $\varphi = \det(A) \det_{\mathcal{B}_C}$ .

Donc :

$$\begin{aligned} \det(A) \det(B) &= \det(A) \det_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n) \\ &= \varphi(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_C}(AB_1, \dots, AB_n) \\ &= \det(AB) \end{aligned}$$

### 30.40 Expression des déterminants classiques

#### Proposition 30.40

1. On a :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Soit : diagonales descendantes moins les diagonales ascendantes.

2.  $\mathcal{S}_3 = \{\text{id}, (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2), (1 \ 2), (1 \ 3), (2 \ 3)\}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

### 30.41 Invariance du déterminant par transposée

#### Théorème 30.41

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

$$\det({}^t A) = \det(A)$$

RAF avec (30.34)

### 30.42 Déterminant d'un endomorphisme

#### Théorème 30.42

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Le scalaire  $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$  ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$  choisie. On appelle ce scalaire **déterminant de  $f$**  et est noté  $\det(f)$ .

Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases de  $E$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$  sont semblables, donc elles ont le même déterminant (30.37).

### 30.44 Déterminant et conjugaison

#### Proposition 30.44

Soit  $\psi : E \rightarrow F$  un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension finie non nulles et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$$\det(\underbrace{\psi \circ u \circ \psi^{-1}}_{\in \mathcal{L}(F)}) = \det(u)$$

Soit  $e$  une base de  $E$  et  $f$  une base de  $F$ .

$$\begin{aligned} \det(\psi \circ u \circ \psi^{-1}) &= \det(\text{Mat}_f(\psi \circ u \circ \psi^{-1})) \quad (30.42) \\ &= \det(\text{Mat}_{e,f}(\psi) \times \text{Mat}_e(u) \times \text{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})) \quad (28.42) \\ &= \det(\text{Mat}_{e,f}(\psi)) \times \det(\text{Mat}_e(u)) \times \det(\text{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})) \quad (30.36) \\ &= \det(\underbrace{\text{Mat}_{\psi} \times \text{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})}_{I_n}) \times \det(\text{Mat}_e(u)) \quad (30.36) \\ &= \det(\text{Mat}_e(u)) \end{aligned}$$

### 30.45 Déterminant d'une matrice triangulaire

#### Proposition 30.45

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Soit  $T$  une matrice triangulaire supérieure (on passe à la transposée sinon).  
Ainsi :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i > j \Rightarrow t_{i,j} = 0$$



D'après la formule sur les coefficients (30.34) :

$$\begin{aligned}\det(T) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n t_{\sigma(i),i} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(i) \leq i \equiv \text{id}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n t_{\sigma(i),i} \\ &= \sigma(\text{id}) \prod_{i=1}^n t_{ii}\end{aligned}$$

### 30.47 Déterminant des matrices de codage des opérations

#### Lemme 30.47

On a :

$$\det(P_{ij}) = -1, \quad \det(Q_i(\lambda)) = \lambda \quad \text{et} \quad \det(R_{ij}(\lambda)) = 1$$

$Q_i(\lambda)$  et  $R_{ij}(\lambda)$  sont triangulaires.

D'après (30.45) :

$$\begin{aligned}\det(Q_i(\lambda)) &= \lambda \\ \det(R_{ij}(\lambda)) &= 1 \\ \det(P_{ij}) &= \det_{\mathcal{B}_C}(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_C}(C_{\tau_{ij}(1)}, \dots, C_{\tau_{ij}(n)}) \text{ où } \tau_{ij} = \begin{pmatrix} i & j \\ & \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon(\tau_{ij}) \det_{\mathcal{B}_C}(C_1, \dots, C_n) \\ &= -1\end{aligned}$$

### 30.50 Exemple

#### Exemple 30.50

Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

### 30.51 Exemple

Exemple 30.51

Calculer pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_n(a) &= \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1-a & 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix} \\
 &= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (a+n-1)(a-1)^{n-1}
 \end{aligned}$$

### 30.52 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

#### Proposition 30.52

Soit  $T$  une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} A_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

où les  $A_i$  sont des matrices carrées. Alors :

$$\det(T) = \prod_{i=1}^k \det(A_i)$$

On montre le résultat dans le cas où  $T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ .

On généralisera alors par récurrence et transposée.

Soit  $(A_1, \dots, A_n)$  les colonnes de  $A$  et  $(B_1, \dots, B_p)$  les lignes de  $B$ .

On définit :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{K}^n)^n &\rightarrow \mathbb{K} \\ (X_1, \dots, X_n) &\mapsto \begin{vmatrix} X_1 & \cdots & X_n & C \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$\varphi$  est une forme  $n$ -linéaire alternée.

Donc on choisit  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que :

$$\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}_n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{B}_n) &= \lambda \det_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{B}_n) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

On cherche donc :

$$\varphi(\mathcal{B}_n) = \begin{vmatrix} 1 & & C \\ & \ddots & \\ & & B \end{vmatrix}$$

On définit :

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{K}^p)^p &\rightarrow \mathbb{K} \\ (Y_1, \dots, Y_p) &\mapsto \begin{vmatrix} 1 & & C \\ & \ddots & \\ & & 1 & Y_1 \\ & & & \vdots \\ & & & & Y_p \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$\psi$  est une forme  $p$ -linéaire alternée donc on choisit  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que :

$$\psi = \alpha \det_{\mathcal{B}_p}$$

On a :

$$\begin{aligned} \alpha &= \psi(\mathcal{B}_p) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & 1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\psi = \det_{\mathbb{B}_p}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lambda &= \varphi(\mathcal{B}_n) \\ &= \psi(B_1, \dots, B_p) \\ &= \det(B) \end{aligned}$$

Donc :

$$\varphi = \det(B) \times \det_{\mathcal{B}_n}$$

Donc :

$$\varphi(A_1, \dots, A_n) = \det(B) \det_{\mathcal{B}_n}(A_1, \dots, A_n)$$

Soit :

$$\det(T) = \det(B) \det(A)$$

### 30.57 Exemple

#### Exemple 30.57

Déterminer la comatrice de  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

$$\Delta_{11}(M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$\Delta_{12}(M) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_{13}(M) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_{21}(M) = \dots$$

$$\text{Com}(M) = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

### 30.58 Développement suivant une colonne

#### Théorème 30.58

Soit  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} m_{ij} \Delta_{ij}(M)$$

On note  $(E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

On note  $M_1, \dots, M_n$  les colonnes de  $M$ .

Par hypothèses :

$$M_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} E_i$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det_{\mathcal{B}_C}(M_1, \dots, M_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_C} \left( M_1, \dots, \sum_{i=1}^n m_{ij} E_i, \dots, M_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^n m_{ij} \det_{\mathcal{B}_C}(M_1, \dots, E_i, \dots, M_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} m_{ij} \det_{\mathcal{B}_C}(E_i, \dots, M_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} m_{ij} \begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & M_1 & \cdots & M_n \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} m_{ij} \begin{vmatrix} 1 & m_{i1} & \cdots & m_{in} \\ 0 & m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m_{i-1,1} & \cdots & m_{i-1,n} \\ 0 & m_{i+1,1} & \cdots & m_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j+1} m_{ij} \Delta_{ij} \end{aligned}$$

### 30.59 Développement selon une ligne

#### Théorème 30.59

Soit  $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors :

$$\det(M) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} m_{ij} \Delta_{ij}(M)$$

$\det(M) = \det({}^t M)$  et on utilise (30.58).

### 30.61 Expression de l'inverse de la comatrice, Cayley

#### Corollaire 30.61

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

$$M^t \text{Com}(M) = {}^t \text{Com}(M) M \det(M) I_n$$

En particulier,  $M$  est inversible si et seulement si  $\det(M) \neq 0$  et dans ce cas :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t \text{Com}(M)$$

On montre seulement  $M^t \text{Com}(M) = \det(M) I_n$ .

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

$$\begin{aligned} [M^t \text{Com}(M)]_{ij} &= \sum_{j=1}^n M_{ik} [{}^t \text{Com}(M)]_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^n M_{ij} \text{Com}(M)_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n M_{ij} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}(M) \\ &= \det(M) \quad (\text{formule du développement}) \end{aligned}$$

On suppose que  $i \neq j$ . En reprenant les étapes précédentes :

$$\begin{aligned} [M^t \text{Com}(M)]_{ij} &= \sum_{k=1}^n M_{ik} \text{Com}(M)_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} M_{ik} \Delta_{jk}(M) \end{aligned}$$

On considère le déterminant suivant (on a remplacé la ligne  $j$  par  $i$ ) :

$$\begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & \cdots & m_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & \cdots & m_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{\text{développement de la ligne } j}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} m_{ik} \Delta_{jk}(M)$$

### 30.63 Cramer

#### Corollaire 30.63

Le système  $AX = B$  d'inconnue  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$  admet une unique solution si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ .

Si  $A_1, \dots, A_n$  sont les colonnes de  $A$ , cette solution est donnée par :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = \frac{\det(A_1, \dots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \dots, A_n)}{\det(A)}$$

— Le système admet une unique solution si et seulement si  $A$  est inversible, c'est-à-dire  $\det(A) \neq 0$ .

- On suppose  $A$  inversible. Si  $AX = B$ , alors  $X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{Com}(A)B$ .  
 Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

$$\begin{aligned}
 x_k &= X_{k,1} \\
 &= \frac{1}{\det(A)} [{}^t \text{Com}(A)B]_{k,1} \\
 &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^n [{}^t \text{Com}(A)]_{k,i} B_{i,1} \\
 &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^n \text{Com}(A)_{ik} b_i \\
 &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} b_i \Delta_{ik}(A) \\
 &= \frac{\det(A_1, \dots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \dots, A_n)}{\det(A)} \quad (\text{développement de la } k\text{-ième colonne})
 \end{aligned}$$

### 30.64 Exemple

#### Exemple 30.64

Calculer le déterminant de la matrice suivante, avec  $a \neq b$  dans  $\mathbb{K}$  :

$$\begin{pmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

Convention :  $\Delta_1 = a+b$ .

On a  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2$ .

Soit  $n \geq 3$  :

$$\begin{aligned}
 \Delta_n &= (a+b) \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}_{n-1} - b \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & a+b & a & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}_{n-1} \\
 &= (a+b)\Delta_{n-1} - ba\Delta_{n-2}
 \end{aligned}$$

$(\Delta_n)_{n \geq 0}$  vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 - (a+b)r + ab = 0$$

Cette équation admet  $a$  et  $b$  comme racines distinctes.

D'après le cours, on choisit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$  tel que :

$$\forall n \geq 0, \Delta_n = \alpha a^n + \beta b^n$$

Les conditions initiales imposent  $\alpha + \beta = 1$  et  $\alpha a + \beta b = a + b$ .

Donc  $\alpha = \frac{a}{a-b}$  et  $\beta = \frac{b}{b-a}$ .

### 30.71 Déterminant de Vandermonde

#### Proposition 30.71

Le déterminant de Vandermonde est donné par :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Ainsi on retrouve qu'une matrice de Vandermonde est inversible si et seulement si tous les scalaires  $x_1, \dots, x_n$  sont deux à deux distincts.

— S'il existe  $i \neq j$  tel que  $x_i = x_j$  :

$$V(x_1, \dots, x_n) = 0$$

— Supposons désormais que les  $x_i$  sont distincts deux à deux.

On considère :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto V(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

D'après le caractère polynomial du déterminant,  $\varphi$  est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n-1$  et dont le coefficient de degré  $n-1$  est  $V(x_1, \dots, x_{n-1}) \neq 0$  (28.23) (par développement par la dernière colonne).

Or :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \varphi(x_i) = 0$$

D'après le cours sur les polynômes,  $\varphi$  est scindé et :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \varphi(x) = V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i)$$

Donc :

$$V(x_1, \dots, x_n) = V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$$

On termine par récurrence.

La formule reste vraie si les  $x_i$  ne sont pas tous distincts.

### Notion d'orientation

Notons  $P$  l'ensemble des bases de  $E$  (ev de dimension  $n$ ).

#### Définition

$$(B, B') \in P^2, B \sim B' \equiv \det_B(B') > 0$$

—  $\det_B(B) = 1, B \sim B$

— Si  $B \sim B', \det_B(B') > 0$ . Or  $\det_{B'}(B) = \frac{1}{\det_B(B')}$ .

Donc  $B' \sim B$ .



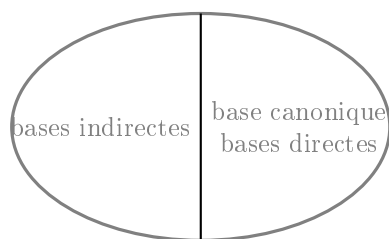
— Si  $B \sim B'$  et  $B' \sim B''$ , alors :  $\det_B(B') > 0$  et  $\det_{B'}(B'') > 0$ .

Donc  $\det_B(B') \det_{B'}(B'') = \det_B(B'') > 0$ .

Donc  $B \sim B''$ .

$\sim$  est une relation d'équivalence.

$$|P/\sim| = 2$$



## Chapitre 31

# Dénombrement

### 31.12 Exemple : parcours d'une fourmi

#### Exemple 31.12

La fourmi Donald se promène sur un grillage du plan de taille  $2 \times p$  dont chaque arête est de longueur 1. Combien de chemins de longueur minimale peut-elle emprunter pour gagner le point d'arrivée depuis son point de départ ?

Compter ce nombre de chemins revient à dénombrer le nombre de mots de  $p + 2$  lettres contenant exactement  $p$  lettres  $D$  et 2 lettres  $B$ .

Pour construire un tel mot, il suffit de choisir la place des deux  $B$ .

On a  $p + 1$  choix pour le premier  $B$ .

Pour chaque choix de position  $k \in \llbracket 1, p + 1 \rrbracket$ , il reste  $p + 2 - k$  choix pour le second  $B$ .

Le nombre de choix possible final est donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} (p+2-k) &= \sum_{k=1}^{p+1} k \\ &= \frac{(p+1)(p+2)}{2} \end{aligned}$$

### 31.19 Exemple

#### Exemple 31.19

Combien y-a-t-il de couples  $(x, y)$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$  avec  $x \neq y$  ?

Étape 1 : On choisit  $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , soit  $n$  choix.

Étape 2 : On choisit  $y \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x\}$ , soit  $n - 1$  choix.

Au total  $n(n - 1)$  choix (principe des bergers).

### 31.20 Exemple

#### Exemple 31.20

A partir d'un alphabet de  $p$  lettres, combien de mots de  $n$  lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

Étape 1 : On choisit la première lettre :  $p$  possibilités.

Étape 2 : On choisit la deuxième lettre :  $p - 1$  possibilités.

Étape 3 : On choisit la troisième lettre :  $p - 1$  possibilités.

...

Au total :  $p(p - 1)^{n-1}$  possibilités.

### 31.27 Exemple

#### Exemple 31.27

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-listes d'un ensemble de cardinal 52, soit  $52^5$  possibilités.

### 31.28 Exemple

#### Exemple 31.28

Combien y-a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot "OUPS" ?

Étape 1 : Choix de la place du mot "OUPS" : 4 choix possibles.

Étape 2 : On complète avec un mot de 3 lettres.

Cela revient à compter le nombre de 3-listes d'un ensemble à 26 éléments :  $26^3$  possibilités.

Aut total :  $4 \times 26^3$  possibilités.

### 31.32 Exemple

#### Exemple 31.32

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement sans remise dans un jeu de 52 cartes ?

Cela revient à compter le nombre de 5-arrangements d'un ensemble de cardinal 52, soit  $\frac{52!}{(52-5)!}$ .

### 31.33 Exemple

#### Exemple 31.33

De combien de façons peut-on asseoir  $n$  personnes sur un banc rectiligne ? Autour d'une table ronde ?

- Sur un banc rectiligne, cela revient à calculer le nombre de  $n$ -arrangements d'un ensemble de cardinal  $n$ , soit  $n!$  choix.
- En choisissant arbitrairement la place d'une personne (par exemple Jack), il suffit de compléter par un  $(n-1)$ -arrangement d'un ensemble à  $n-1$  éléments, soit  $(n-1)!$  choix.

### 31.38 Nombre de combinaisons

#### Proposition 31.38

Soit  $p \in \mathbb{N}$  et notons  $n = |E|$ . Il y a  $\binom{n}{p}$   $p$ -combinaisons de  $E$ .

Pour construire une  $p$ -combinaison :

- On choisit un  $p$ -arrangement de  $E$  :  $\frac{n!}{(n-p)!}$  possibilités.
- On choisit l'ensemble des éléments qui constituent cet arrangement.  
Or toute permutation du  $p$ -arrangement conduit à la même combinaison. Il y a donc  $|S_p| = p!$  arrangements qui donne la même combinaison (il n'y en a pas d'autres).  
On a donc  $\frac{n!}{(n-p)!p!}$   $p$ -combinaisons.

### 31.40 Exemple

#### Exemple 31.40

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-combinaisons d'un ensemble de cardinal 52. Il y en a  $\binom{52}{5}$ .

### 31.41 $k$ -listes strictement croissantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$

#### Théorème 31.41

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $\binom{n}{k}$  familles d'entiers  $(i_1, \dots, i_k)$  pour lesquelles  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ .

Pour tout ensemble à  $k$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  distincts, il existe une unique manière de les ordonner. Réciproquement tout  $k$ -uplet  $(i_1, \dots, i_k)$  avec  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  fournit un sous-ensemble à  $k$  éléments distincts de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Il y a donc en tout  $\binom{n}{k}$  familles recherchées.

### 31.43 Exemple

#### Exemple 31.43

Combien le mot "BOROROS" a-t-il d'anagrammes ?

Construire un anagramme de "BOROROS" c'est construire un mot de 7 lettres composé de 1 B, 3 O, 2 R et 1 S.

Étape 1 :  $\binom{7}{1}$  choix pour la place de B.

Étape 2 :  $\binom{6}{3}$  choix pour la place des O.

Étape 3 :  $\binom{3}{2}$  choix pour la place des R.

Étape 4 :  $\binom{1}{1}$  choix pour la place de S.

Au total :

$$\begin{aligned} \binom{7}{1} \binom{6}{3} \binom{3}{2} \binom{1}{1} &= 7 \times \frac{6!}{3!3!} \times \frac{3!}{2!} \\ &= 7 \times 5 \times 4 \times 3 \end{aligned}$$

### 31.45 Exemple

#### Exemple 31.45

Un jeu de tarot contient 78 cartes :

- 21 atouts
- 1 excuse
- 14 cartes de chaque couleur (coeur, pique, trèfle, carreau)

Combien de tirages simultanés de 6 cartes d'un tel jeu peut-on obtenir contenant 2 atouts et 4 trèfles ?  
Et ensuite, contenant exactement un atout et au moins 3 as ?

— Pour construire une telle main :

Étape 1 :  $\binom{21}{2}$  choix pour les atouts.

Étape 2 :  $\binom{14}{4}$  choix pour les trèfles.

Au total  $\binom{21}{2} \binom{14}{4}$  mains possibles.

—  $\binom{21}{1} \binom{4}{3} \binom{78-21-4}{2} + \binom{21}{1} \binom{4}{4} \binom{78-21-4}{1}$ .

### 31.48 Exemple

#### Exemple 31.48

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . De combien de façons peut-on extraire la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  de  $A$  ?

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . De combien de façons peut-on extraire la matrice  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  de  $A$  ?

1. Disjonctions de cas : Si on extrait par rapport à la deuxième ligne :  $\binom{5}{3}$ .

Si on extrait par rapport à la troisième ligne :  $\binom{4}{3}$ .

Au total :  $\binom{5}{3} + \binom{4}{3}$  choix possibles.

2. Avec le même principe :

$$\binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2}$$

### 31.49 Nombre de parties d'un ensemble fini

#### Théorème 31.49

On a :

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$$

Méthode 1 :

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(E)| &= \sum_{k=0}^{|E|} |\mathcal{P}_k(E)| \\ &= \sum_{k=0}^{|E|} \binom{|E|}{k} \\ &= 2^{|E|} \text{ (binôme)} \end{aligned}$$

Méthode 2 :

On liste les éléments de  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ .

Toute partie de  $E$  peut-être codée de manière unique par un mot de  $n$  lettres à partir de l'alphabet  $\{0, 1\}$  de manière suivante :

$$\underbrace{0}_{e_1 \notin A} \underbrace{1}_{e_2 \in A} \dots \underbrace{\quad}_{1 \text{ si } e_i \in A, 0 \text{ sinon}} \dots$$

Donc  $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$ .

### 31.51 Exemple : formule du capitaine

#### Exemple 31.51

Pour tous entiers  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{N}^*$  avec  $n \geq p$ , on a :

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

Dans une classe de  $n$  élèves, on décide de composer des équipes de  $p$  élèves dont un capitaine désigné.

Méthode 1 :

$$\underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{choix du capitaine}} \times \underbrace{\binom{n-1}{p-1}}_{\text{choix des autres élèves}}$$

Méthode 2 :

$$\underbrace{\binom{n}{p}}_{\text{choix de l'équipe}} \times \underbrace{\binom{p}{1}}_{\text{choix du capitaine}}$$

On a par double comptage :

$$\binom{n}{1} \binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p} \binom{p}{1}$$

Soit :

$$n \binom{n-1}{p-1} = p \binom{n}{p}$$

### 31.53 Exemple : formule de Pascal

#### Exemple 31.53

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*$  avec  $p \leq n$ , on a :

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

Pour construire une partie à  $p$  éléments, on peut commencer par fixer un élément quelconque  $e \in E$ . Puis :

- construire une partie contenant  $e$  :  $\binom{n}{p-1}$  possibilités.
- construire une partie qui ne contient pas  $e$  :  $\binom{n}{p}$  possibilités.

Par double comptage :

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

#### Exercice 1

$$\underbrace{2n}_{\text{choix de la première boule}} \times \underbrace{n}_{\text{choix d'une parité différente}} \times (n-1)(n-1) \cdots 1 = 2(n!)^2$$

#### Exercice 3

1.

$$\binom{n}{n'} \binom{p}{p'}$$

2.

$$\begin{aligned} \sum_{p'=1}^p \sum_{n'=1}^n \binom{n}{n'} \binom{p}{p'} &= \left( \sum_{p'=1}^p \binom{p}{p'} \right) \left( \sum_{n'=1}^n \binom{n}{n'} \right) \\ &= (2^p - 1)(2^n - 1) \end{aligned}$$

#### Exercice 6

Construire une telle permutation revient à construire une bijection de  $\llbracket 3, n \rrbracket$  sur  $\llbracket 4, n \rrbracket \cup \{1\}$ .  
Il y en a  $(n-2)!$ .

#### Exercice 9

On code toute configuration de la manière suivante : on associe à une boule la lettre 0 et à une urne la lettre |. Réciproquement, à tout mot de  $p+n-1$  lettres composées d'exactly  $n-1$  lettres | et  $p$  lettres 0. Au total, il y a  $\binom{n+p-1}{p}$  configurations.

#### Exercice 10

On dénombre le nombre d'équipes de  $n$  joueurs choisis parmi  $p$  attaquants et  $q$  défenseurs. On distingue alors selon le nombre  $k$  d'attaquants choisis.

#### Exercice 14

1.  $\binom{32}{5}$
2. (a)  $\binom{4}{4} \binom{32-4}{1}$

- (b)  $\binom{8}{1} \binom{4}{4} \binom{32-4}{1}$
- (c)  $\binom{8}{1} \binom{4}{3} \binom{7}{1} \binom{4}{2}$
- (d)  $\frac{1}{2} \binom{8}{1} \binom{4}{3} \binom{7}{1} \binom{4}{1} \binom{6}{1} \binom{4}{1} = \binom{8}{1} \binom{4}{3} \binom{7}{2} \binom{4}{1} \binom{4}{1}$
- (e)  $\binom{4}{1} \binom{4}{1}$
- (f)  $\binom{4}{1} \binom{8}{5} - \binom{4}{1} \binom{4}{1}$
- (g)  $\binom{3}{2} \binom{7}{3}$  (sans roi de coeur)



## Chapitre 32

# Espaces probabilisés finis

### 32.19 Exemple

#### Exemple 32.19

Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On en tire simultanément 4 boules. Avec quelle probabilité n'a-t-on tiré que des boules noires ?

Sans perte de généralité, on peut numéroté les boules de 1 à 8, les 3 premières boules sont blanches et les 5 suivantes noires.

On note  $X$  la variable aléatoire donnant la 4-combinaison des boules obtenues.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(P_4[[1, 8]])$$

En notant  $A$  "on ne tire que des boules noires", on a :

$$\begin{aligned} A &= (X \in P_4[[4, 8]]) \\ P(A) &= P(X \in P_4[[4, 8]]) \\ &= \frac{|P_4[[4, 8]]|}{|P_4[[1, 8]]|} \\ &= \frac{\binom{5}{4}}{\binom{8}{4}} \end{aligned}$$

### 32.25 Exemple

#### Exemple 32.25

On choisit un entier  $X$  au hasard entre  $-3$  et  $3$ . Quelle est la loi de la variable  $X^2 + 1$  ?

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([-3, 3])$$

$$(X^2 + 1)(\omega) = \{1, 2, 5, 10\}$$

Et :

$$\begin{aligned} P(X^2 + 1 = 1) &= P(X = 0) \\ &= \frac{1}{7} \\ P(X^2 + 1 = 2) &= P(X = -1) + P(X = 1) \\ &= \frac{2}{7} \\ P(X^2 + 1 = 5) &= P(X = -2) + P(X = 2) \\ &= \frac{2}{7} \\ P(X^2 + 1 = 10) &= P(X = -3) + P(X = 3) \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

### 32.26 Exemple

#### Exemple 32.26

On choisit un entier  $X$  au hasard entre 1 et  $2n$ . Quelle est la loi de  $(-1)^X$  ?

$$\begin{aligned}
X &\hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2n \rrbracket) \\
(-1)^X &\hookrightarrow \{-1, 1\} \\
P((-1)^X = 1) &= P(X \text{ pair}) \\
&= \frac{n}{2n} \\
&= \frac{1}{2} \\
&= P((-1)^X = -1)
\end{aligned}$$

### 32.28 Définition implicite d'un espace probabilisé par la donnée d'une loi de variable aléatoire

#### Théorème 32.28

Soit  $E = \{x_1, \dots, x_r\}$  un ensemble et  $p_1, \dots, p_r \in [0, 1]$  des réels pour lesquels  $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ . Il existe alors un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  et une variable aléatoire  $X$  sur  $\Omega$ , d'image  $E$ , pour lesquels pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  :

$$P(X = x_i) = p_i$$

$$\omega = E \text{ et } X = \text{id}$$

On applique (32.12) pour avoir l'existence de  $P$ .

### 32.30 Probabilité conditionnelle

#### Théorème 32.30

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini et  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  pour lequel  $P(B) > 0$ . Pour tout  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ , le réel

$$P(A | B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

est appelé la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$ . L'application  $P_B$  est alors une probabilité sur  $\Omega$ , appelée sa probabilité conditionnelle sachant  $B$ .

—

$$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

—

$$\begin{aligned}
P_B(A \sqcup C) &= \frac{P(B \cap (A \sqcup C))}{P(B)} \\
&= \frac{P(B \cap A) \sqcup (B \cap C))}{P(B)} \\
&= \frac{P(B \cap A)}{P(B)} + \frac{P(B \cap C)}{P(B)} \\
&= P_B(A) + P_B(C)
\end{aligned}$$

### 32.31 Formule des probabilités totales

#### Théorème 32.31

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini et  $\{A_1, \dots, A_n\}$  un système complet d'événements de  $\Omega$  de probabilités strictement positives. Alors, pour tout  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P_{A_i}(B)P(A_i)$$

Soit  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ . On a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) \\ &= P(B \cap \bigsqcup_{i=1}^n A_i) \\ &= P(\bigsqcup_{i=1}^n (B \cap A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n P(B \mid A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

Avec  $P(A_i) > 0$  pour définir les probabilités conditionnelles.

### 32.32 Exemple

#### Exemple 32.32

Dans une classe de 40 étudiants (25 filles et 15 garçons), le professeur principal se propose de désigner brutalement deux délégués provisoires. Il prend une liste de la classe, ferme les yeux et pointe au hasard un premier nom avec la pointe du stylo puis de même avec un deuxième. Avec quelle probabilité le deuxième nom tiré est celui d'un garçon ?

On note  $G_i$  : "le  $i$ -ème nom tiré est celui d'un garçon".  
 $\{G_1, \overline{G_1}\}$  forme un système complet d'événements de probabilités strictement positives.  
 D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_2 \mid G_1) \times P(G_1) + P(G_2 \mid \overline{G_1}) \times P(\overline{G_1}) \\ &= \frac{14}{39} \times \frac{3}{8} + \frac{15}{39} \times \frac{5}{8} \end{aligned}$$

### 32.33 Formule de Bayes

#### Théorème 32.33

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini et  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  pour lequel  $P(B) > 0$ .

1. Pour tout  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ , si  $P(A) > 0$ , alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

2. Soit  $\{A_1, \dots, A_n\}$  un système complet d'événements de  $\Omega$  de probabilités strictement positives. Alors

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_B(A_j) = \frac{P_{A_j}(B)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P_{A_i}(B)P(A_i)}$$

1.

$$P(A)P(B) = P(A \cap B) = P(B)P(A | B)$$

2.

$$P(A_j | B) = \frac{P(A_j)P(B | A_j)}{\sum_{i=1} P(A_i)P(B | A_i)} \text{ (probas totales)}$$

### 32.35 Exemple

#### Exemple 32.35

Juge au tribunal, je dois juger de la culpabilité d'une compagnie de taxis bleus. Un soir de brouillard, un taxi a percuté un piéton qui traversait la rue dans son bon droit, puis a pris la fuite. Un témoin affirme que le taxi était bien bleu et c'est sur la base de ce témoignage que le procès a été instruit. Or dans la ville, deux compagnies de taxis se partagent le marché. La compagnie des taxis bleus et la compagnie des taxis verts. Toutefois, les taxis vert dominent le marché au sens où 90% des taxis dans la ville sont verts. On demande au témoin d'effectuer des tests de reconnaissance des couleurs pour mesurer la fiabilité de son témoignage. Il s'avère qu'il est fiable dans 90% des cas pour la couleur bleue et 80% des cas pour la couleur verte. Dois-je condamner ou non la compagnie des taxis bleus ?

— On note  $B$  : "le taxi coupable est bleu"

— On note  $T_B$  : "le témoin pense que le taxi coupable est bleu"

On souhaite calculer  $P(B | T_B)$ .

—  $P(B) = 0.1$

—  $P(T_B | B) = 0.9$

—  $P(T_B | \bar{B}) = 0.8$

On a :

$$\begin{aligned} P(B | T_B) &= \frac{P(T_B | B) \times P(B)}{P(T_B | B)P(B) + P(T_B | \bar{B})P(\bar{B})} \\ &= \frac{0.9 \times 0.1}{0.9 \times 0.1 + (1 - 0.8) \times 0.9} \\ &= \frac{9}{9 + 2 \times 9} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

### 32.37 Formule des probabilités composées

#### Théorème 32.37

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini et  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$  pour lesquels  $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ , alors :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \dots \times P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n P(A_i | A_1 \dots A_{i-1}) &= \prod_{k=1}^n \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap A_k)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})} \\ &= P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

### 32.43 Indépendance et complémentarité

#### Théorème 32.43

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini et  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ . Si  $A_1, \dots, A_n$  sont indépendants, les événements  $A_1^0, \dots, A_n^0$  le sont aussi, pour tout  $A_1^0 \in \{A_1, \bar{A}_1\}, \dots, A_n^0 \in \{A_n, \bar{A}_n\}$ .

- On s'occupe du cas  $n = 2$ .  
On généralise ensuite par récurrence.
- Soit  $A, B$  deux événements indépendants.

$$\begin{aligned}
 P(A \cap \overline{B}) &= P(A \setminus B) \\
 &= P(A) - P(A \cap B) \\
 &= P(A) - P(A)P(B) \\
 &= P(A)(1 - P(B)) \\
 &= P(A)P(\overline{B})
 \end{aligned}$$

Donc  $A$  et  $\overline{B}$  sont indépendants.

## 32.44 Exemple

### Exemple 32.44

Le concept d'indépendance va maintenant nous permettre de définir une loi usuelle très importante en pratique : la loi binomiale. Intéressons-nous pour cela à la répétition  $n$  fois indépendamment d'une expérience aléatoire à deux issues, disons « favorable » et « défavorable » de probabilité  $p$  pour la première. Quelle est la loi du nombre  $X$  d'issues favorables ?

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$$

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $F_i$  : "la  $i$ -ème issue est favorable".

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

$$\begin{aligned}
 (X = k) &= \bigsqcup_{I \in P_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} \left( \bigcap_{i \in I} F_i \bigcap_{i \notin I} \overline{F_i} \right) \\
 P(X = k) &= \sum_{I \in P_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} P \left( \bigcap_{i \in I} F_i \bigcap_{i \notin I} \overline{F_i} \right) \\
 &= \sum_{I \in P_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} \prod_{i \in I} P(F_i) \prod_{i \notin I} P(\overline{F_i}) \quad (\text{indépendance}) \\
 &= \sum_{I \in P_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} p^{|I|} (1-p)^{n-|I|} \\
 &= p^k (1-p)^{n-k} |P_k(\llbracket 1, n \rrbracket)| \\
 &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
 \end{aligned}$$

## 32.48 Exemple

### Exemple 32.48

On lance 5 fois un dé équilibré à 6 faces dont 2 blanches et 4 noires. Avec quelle probabilité obtient-on exactement 3 fois une face noire ?

Soit  $X$  le nombre de faces noires obtenues.

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(5, \frac{4}{6}).$$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

## 32.50 Une propriété des couples de variables aléatoires indépendantes

### Théorème 32.50

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probailisé fini et  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur  $\Omega$ . Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors pour toute parties  $A$  de  $X(\Omega)$  et  $B$  de  $Y(\Omega)$ , les événements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendantes, i.e. :

$$P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}, B = \{b_1, \dots, b_m\}.$$

$$\begin{aligned} P(X \in A \text{ et } Y \in B) &= P\left(\bigsqcup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} (X = a_i) \text{ et } (Y = b_j)\right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} P(X = a_i \text{ et } Y = b_j) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} P(X = a_i)P(Y = b_j) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} P(X = a_i) \sum_{1 \leq j \leq p} P(Y = b_j) \\ &= P(X \in A)P(Y \in B) \end{aligned}$$

## 32.51 Exemple

### Exemple 32.51

On lance un dé à 6 faces 2 fois et on note  $X_1$  (resp.  $X_2$ ) la face obtenue au premier (resp. au second) lancer. Avec quelle probabilité obtient-on els deux fois une face impaire ?

$X_1$  et  $X_2$  sont indépendants.

$$\begin{aligned} P(X_1 \text{ et } X_2 \text{ impairs}) &= P(X_1 \text{ impair}) \times P(X_2 \text{ impair}) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

## 32.53 Exemple

### Exemple

Soit  $(p_1, \dots, p_n) \in [0; 1]^n$  et  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes de lois respectives  $\mathcal{B}(p_1), \dots, \mathcal{B}(p_n)$ , alors  $X_1 \times \dots \times X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p_1 \times \dots \times p_n)$ .

$X_i \hookrightarrow \mathbb{B}(p_i) : P(X_i = 1) = p_i$  ( $P(X_i = 0) = 1 - p_i$ ).  
 $(X_1 \times \dots \times X_n)(\Omega) = P(X_1 = 1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n = 1)$ .

$$\begin{aligned} P(X_1 \cdots X_n = 1) &= P(X_1 = 1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n = 1) \\ &= \prod_{k=1}^n P(X_k = 1) \\ &= \prod_{k=1}^n p_k \end{aligned}$$

## 32.54 Exemple

### Exemple 32.54

Un jeu de 32 cartes a été malicieusement truqué. On y a remplacé une autre carte que l'as de pique par un deuxième as de pique. On répète  $n$  fois avec remise l'expérience consistant à tirer 4 cartes. À partir de quelle valeur de  $n$  la probabilité de déceler la supercherie est-elle supérieure ou égale à 0.9 ?

Soit  $X$  la variable aléatoire donnant la 4-combinaison de cartes. On peut numéroté les cartes de 1 à 32, où 1 et 2 sont les as de pique.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}(P_4[[1, 32]])$ .

On a :

$$\begin{aligned} P(\{1, 2\} \subset X) &= \frac{\binom{32}{2}}{\binom{32}{4}} \\ &= \frac{29 \times 30}{2} \times \frac{4!28!}{32!} \\ &= \frac{3}{248} \end{aligned}$$

Sur  $n$  tirages successifs. La probabilité  $p$  de déceler la supercherie est :

$$p = 1 - \left(\frac{245}{248}\right)^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned} p \geq 0.9 &\Leftrightarrow \left(\frac{245}{248}\right)^n \leq 0.1 \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0.1}{\ln 245 - \ln 248} \end{aligned}$$

## 32.55 Indépendance des images de variables aléatoires indépendantes par des fonctions

### Théorème 32.55

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini,  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires sur  $\Omega$  et  $f : (X_1, \dots, X_m)(\Omega) \rightarrow E$  et  $g : (X_{m+1}, \dots, X_n)(\Omega) \rightarrow F$  deux fonctions. Si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, alors  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$  le sont aussi.

On prouve le théorème dans le cas  $X, Y$  indépendantes.

Soit  $f : X(\Omega) \rightarrow E$  et  $g : Y(\Omega) \rightarrow F$ .

Soit  $a \in f \circ X(\Omega)$  et  $b \in g \circ Y(\Omega)$ .

$$\begin{aligned} P(f \circ X = a \text{ et } g \circ Y = b) &= P(X \in f^{-1}(\{a\}) \text{ et } Y \in g^{-1}(\{b\})) \\ &= P(X \in f^{-1}(\{a\})) \times P(Y \in g^{-1}(\{b\})) \\ &= P(f \circ X = a) \times P(g \circ Y = b) \end{aligned}$$



### 32.61 Calcul des lois marginales à partir de la loi conjointe

#### Théorème 32.61

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur  $\Omega$ . La loi conjointe  $P_{(X,Y)}$  du couple  $(X, Y)$  détermine entièrement ses lois marginales  $P_X$  et  $P_Y$ . Plus précisément, pour tout  $x \in X(\Omega)$

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y)$$

et pour tout  $y \in Y(\Omega)$ ,

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y)$$

Soit  $x \in X(\Omega)$ . On a :

$$(X = x) = \bigsqcup_{y \in Y(\Omega)} (X = x \text{ et } Y = y)$$

Donc :

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y)$$

### 32.63 Loi uniforme et produit cartésien

#### Théorème 32.63

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles finis et  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{U}(E \times F)$  ;
2.  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(F)$ .

Cet énoncé se généralise sans difficulté au cas d'un nombre fini de variables aléatoires.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

On suppose que  $(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{U}(E \times F)$ .

Soit  $x \in X(\Omega)$ .

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y) \quad (32.61) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \frac{1}{|E \times F|} \\ &= |F| \times \frac{1}{|E \times F|} \\ &= \frac{1}{|E|} \end{aligned}$$

Donc  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$ .

De la même manière,  $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(F)$ .

Comme :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E \times F, P(X = x \text{ et } Y = y) &= \frac{1}{|E \times F|} \\ &= \frac{1}{|E|} \times \frac{1}{|F|} \\ &= P(X = x) \times P(Y = y) \end{aligned}$$

Donc  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

$$\boxed{2 \Rightarrow 1}$$

Soit  $(x, y) \in E \times F$ .

$$\begin{aligned} P(X = x \text{ et } Y = y) &= P(X = x) \times P(Y = y) \text{ (indépendance)} \\ &= \frac{1}{|E|} \times \frac{1}{|F|} \\ &= \frac{1}{|E \times F|} \end{aligned}$$

Donc  $(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{U}(E \times F)$ .

## 32.66 Exemple

### Exemple 32.66

On lance deux fois un dé équilibré à 6 faces. La valeur obtenue au premier (resp. deuxième) lancer est notée  $X_1$  (resp  $X_2$ ). Les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ , mais on pourrait dire de façon équivalente, comme nous l'avons vu plus haut, que le couple  $(X_1, X_2)$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ . Déterminer la loi de la somme  $S = X_1 + X_2$ , la loi conditionnelle de  $X_1$  sachant  $(S = 4)$  et la loi de l'écart  $E = |X_1 - X_2|$ .

$$S(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket.$$

$$\text{Soit } i \in \llbracket 2, 12 \rrbracket.$$

$$\begin{aligned} P(S = i) &= P(X_1 + X_2 = i) \\ &= \sum_{k=1}^i P(X_1 = k \text{ et } X_2 = i - k) \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} P(X_1 = k) P(X_2 = i - k) \\ &= \sum_{k=\max(1, i-6)}^{\min(i-1, 6)} P(X_1 = k) P(X_2 = i - k) \\ &= \min(i - 1, 6) - \max(1, i - 6) \end{aligned}$$

$$\text{Soit } j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket.$$

$$P(X_1 = 4 \mid S = 4) = P(X_1 = 5 \mid S = 4) = P(X_1 = 6 \mid S = 4) = 0$$

$$\begin{aligned} P(X_1 = j \mid S = 4) &= \frac{P(X_1 = j \text{ et } S = 4)}{P(S = 4)} \\ &= \frac{P(X_1 = j \text{ et } X_2 = 4 - j)}{P(S = 4)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3-1+1}{36}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$E(\Omega) = \llbracket 0, 5 \rrbracket$$

$$\begin{aligned} P(E = 0) &= \sum_{k=1}^n P(X_1 = X_2 = k) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

etc.

### 32.67 Exemple

#### Exemple 32.67

Dans un centre d'appel, un employé effectue  $n$  appels téléphoniques vers  $n$  correspondants distincts dont chacun décroche avec une probabilité  $p$ .

- On note  $N_1$  le nombre de correspondants qui ont décroché. Quelle est donc la loi de  $N_1$ ? Réponse sans calcul :  $N_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  car les appels sont indépendants et la probabilité d'obtenir un correspondant ne dépend pas du correspondant choisi.
- L'employé rappelle un peu plus tard les  $n - N_1$  correspondants qui n'ont pas décroché lors de sa première série d'appels. On note  $N_2$  le nombre de ces correspondants qui décrochent cette fois et  $N$  le nombre total des correspondants qui ont décroché. Quelle est la loi de  $N$ ?

$N_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .  
 $(N_2 \mid N_1 = k) \hookrightarrow \mathcal{B}(n - k, p)$ .  
 $N(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ .  
 Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

$$\begin{aligned}
 P(N = i) &= \sum_{k=0}^n P(N_2 = i \mid N_1 = k) P(N_1 = k) \\
 &= \sum_{k=0}^i P(N_2 = i - k \text{ et } N_1 = k) \\
 &= \sum_{k=0}^i P(N_2 = i - k \mid N_1 = k) P(N_1 = k) \\
 &= \sum_{k=0}^i \binom{n-k}{i-k} p^{i-k} (1-p)^{n-i} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^i \binom{n-k}{i-k} \binom{n}{k} p^i (1-p)^{2n-i-k} \\
 &= \sum_{k=0}^i \frac{(n-k)!}{(n-i)!(i-k)!} \frac{n!i!}{k!(n-k)!i!} p^i (1-p)^{2n-i-k} \\
 &= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{2n-i-k} \\
 &= \binom{n}{i} p^i (1-p)^{2i} \sum_{k=0}^n \binom{i}{k} \left(\frac{1}{1-p}\right)^k \\
 &= \binom{n}{i} p^i (1-p)^{2n-i} \left(1 + \frac{p}{1-p}\right)^i \\
 &= \binom{n}{i} \frac{p^i (i-p)^{2n-1} (2-p)^i}{(1-p)^i} \\
 &= \binom{n}{i} (p^2 + 2p)^i (1 - 2p + p^2)^{n-i}
 \end{aligned}$$

$$N \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 2p - p^2).$$

### 32.68 Somme de variables aléatoires indépendantes de lois binomiales

#### Théorème 32.68

Soit  $p \in [0; 1]$  et  $n$  et  $m$  deux entiers naturels non nuls et  $X, Y, X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini.

1. Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  et si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m + n, p)$$

2. Si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  et si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, alors

$$\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

1.  $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 0, n + m \rrbracket$ .  
Soit  $k \in \llbracket 0, n + m \rrbracket$ .

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{i=0}^k P(X = i \text{ et } Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k P(X = i)P(Y = k - i) \text{ (indépendance)} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} \binom{n}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-k+i} \end{aligned}$$

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= p^k (1-p)^{m+n-k} \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} \\ &= p^k (1-p)^{m+n-k} \binom{m+n}{k} \text{ (Vandermonde)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m + n, p).$$

2. Si  $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ , alors  $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$  et on conclut avec  $\boxed{1.}$

### 32.69 Existence d'une famille finie de variables aléatoires de lois prescrites

#### Théorème 32.69

Soit  $E = \{x_1, \dots, x_r\}$  et  $F = \{y_1, \dots, y_s\}$  deux ensembles et  $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s$  des réels de  $[0; 1]$  pour lesquels

$$\sum_{i=1}^r p_i = 1 \text{ et } \sum_{j=1}^s q_j = 1$$

Il existe alors un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  et des variables aléatoires indépendantes  $X$  et  $Y$  sur  $\Omega$  pour lesquelles pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et tout  $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ ,  $P(X = x_i) = p_i$  et  $P(Y = y_j) = q_j$ . Cet énoncé se généralise sans difficulté au cas d'un nombre fini de variables aléatoires.

On remarque que  $(I = \llbracket 1, r \rrbracket, J = \llbracket 1, s \rrbracket)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in I \times J} p_i q_j &= \left( \sum_{i=1}^r p_i \right) \left( \sum_{j=1}^s q_j \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'après (32.28), il existe  $z : \Omega \rightarrow E \times F$  tel que :

$$\forall (i, j) \in I \times J, P(z = x_i y_j) = p_i q_j$$

En notant  $z = (X, Y)$ , on vérifie :

$$\begin{aligned} \forall i \in I, P(X = x_i) &= \sum_{j=1}^s P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) \\ &= \sum_{j=1}^s P(z = (x_i, y_j)) \\ &= \sum_{j=1}^s p_i q_j \\ &= p_i \sum_{j=1}^s q_j \\ &= p_i \end{aligned}$$

## Chapitre 33

# Variables aléatoires réelles finies

### 33.3 Exemple

#### Exemple 33.3

Un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 a été truqué de telle sorte que les faces 1, 2 et 3 tombent avec une probabilité  $\frac{1}{6}$ , les faces 4 et 5 avec une probabilité  $\frac{1}{12}$  et 6 avec une probabilité de  $\frac{1}{3}$ . Quelle numéro obtient-on en moyenne ?

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{45}{12} \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

### 33.4 Espérance des lois usuelles

#### Théorème 33.4

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ .

1. Variable aléatoire constante : si  $X$  est constante de valeur  $m$ , alors  $E(X) = m$ .
2. Loi uniforme : si  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$  est une partie de  $\mathbb{R}$  et si  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$ , alors  $E(X)$  est la moyenne naturelle des valeurs  $x_1, \dots, x_n$  de  $X$  :

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

3. Loi de Bernoulli : soit  $p \in [0; 1]$ . Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ , alors  $E(X) = p$ .
4. Exemple fondamental : pour tout événement  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ .
5. Loi binomiale : soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0; 1]$ . Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $E(X) = np$ .

1. Si  $X(\Omega) = \{m\}$ ,  $P(X = m) = 1$  et  $E(X) = 1 \times m = m$ .
2. Si  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$  alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^n P(X = x_k) x_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \end{aligned}$$

3. Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  alors :

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times p + 0 \times (1 - p) \\ &= p \end{aligned}$$

4. Si  $A \subset \Omega$ , alors :

$$\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A)) \quad (32.21)$$

Donc (3)  $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ .

5. Par définition :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n P(X = k) k \\ &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Première méthode :

Soit  $Q = (1 - p + Y)^n \in \mathbb{R}[Y]$ .

$$Q = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} Y^k \text{ donc } Q' = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} Y^{k-1}$$

$$\text{donc } YQ' = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} Y^k$$

Par ailleurs  $YQ' = n(1-p+Y)^{n-1}$ .

En évaluant les deux expressions en  $p$ , on obtient l'expression voulue :

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

Deuxième méthode :

On poursuit le calcul de  $E(X)$  en utilisant la formule du capitaine.

Troisième méthode :

En utilisant la linéarité de l'espérance.

### 33.5 Propriétés de l'espérance

#### Proposition 33.5

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ .

1. Reformulation :  $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$ .
2. Linéarité : pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$ .
3. Positivité : si  $X \geq 0$ , alors  $E(X) \geq 0$ .
4. Croissance : si  $X \leq Y$ , alors  $E(X) \leq E(Y)$ .
5. Inégalité triangulaire :  $|E(X)| \leq E(|X|)$ .

1. On rappelle que  $\{(X = x)\}_{x \in X(\Omega)}$  est un SCE.

Ainsi :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)x$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[ \sum_{\omega \in (X=x)} P(X = \omega) \right] x$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$$

2.

$$E(\lambda X + \mu Y) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})(\lambda X(\omega) + \mu Y(\omega))$$

$$= \lambda \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega) + \mu \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})Y(\omega)$$

$$= \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

3. Si  $X \geq 0$ , alors :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \underbrace{P(\{\omega\})}_{\geq 0} \underbrace{X(\omega)}_{\geq 0}$$

$$\geq 0$$

4. RAS (2 + 3)



5.

$$\begin{aligned}
|E(X)| &= \left| \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega) \right| \\
&\leq \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) |X(\omega)| \\
&= E(|X|)
\end{aligned}$$

### 33.6 Exemple

#### Exemple 33.7

Qu'obtient-on en moyenne quand on lance deux fois un dé à 6 faces et qu'on additionne les résultats obtenus ?

$X_1, X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(P(\llbracket 1, 6 \rrbracket))$ .

$$\begin{aligned}
E(X_1 + X_2) &= E(X_1) + E(X_2) \\
&= 2 \times \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k \\
&= 7
\end{aligned}$$

### 33.7 Formule de transfert

#### Théorème 33.8

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$  et  $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. L'espérance de  $f(X)$  est entièrement déterminée par  $f$  et la loi de  $X$  :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x)$$

$\{(X = x)\}_{x \in X(\Omega)}$  est un SCE.

$$\begin{aligned}
E(f(X)) &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(\{\omega\}) f(X(\omega)) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left( \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\}) f(X(\omega)) \right) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left( \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\}) \right) f(x) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x)
\end{aligned}$$

### 33.10 Exemple

#### Exemple 33.10

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Donner un équivalent simple de  $E(X)$  et de  $E(X^2)$ .

$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \\
&= \frac{n+1}{2} \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} k^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{3}
\end{aligned}$$

### 33.11 Espérance du produit de deux variables aléatoires réelles indépendantes

#### Théorème 33.11

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ . Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Ce résultat s'étend naturellement à un nombre fini quelconque de variables aléatoires réelles indépendantes.

$$\begin{aligned}
E(X)E(Y) &= \left( \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)x \right) \left( \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y=y)y \right) \\
&= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P(X=x)P(Y=y)xy \\
&= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P(X=x \text{ et } Y=y)xy \text{ (indépendance)} \\
&= E(XY)
\end{aligned}$$

### 33.13 Propriétés de la variance

#### Proposition 33.13

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle.

1.  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .
2.  $V(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$ . On dit dans ce cas que  $X$  est presque sûrement constante.
3. Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$V(ax + b) = a^2 V(X)$$

En particulier, si  $\sigma(X) > 0$ , la variable  $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est centrée réduite.

1.

$$\begin{aligned}
V(X) &= E((X - E(X))^2) \\
&= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
V(X) = 0 &\Leftrightarrow E((X - E(X))^2) = 0 \\
(\text{fonction de transfert}) \quad &\Leftrightarrow \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)(x - E(X))^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X(\Omega) \setminus \{E(X)\}, P(X = x) = 0 \\
&= P(X = E(X)) = 1
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
V(aX + b) &= E((aX + b - E(aX + b))^2) \\
&= E(a^2(X - E(X))^2) \quad (\text{linéarité}) \\
&= a^2 V(X) \quad (\text{linéarité})
\end{aligned}$$

### 33.15 Propriétés de la covariance

#### Proposition 33.15

On a :

1.  $V(X) = \text{cov}(X, X)$  et  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$ .
2.  $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
3.  $V(X + Y) = V(X) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y) + V(Y)$ .
4. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\text{cov}(X, Y) = 0$  et  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

Les assertions 3 et 4 se généralisent au cas de variables aléatoires réelles  $X_1, \dots, X_n$  sur  $\Omega$ . Dans ce cas :

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont (seulement) deux à deux indépendantes, alors

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

1. RAF

2.

$$\begin{aligned}
\text{cov}(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\
&= E(XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
V(X + Y) &= E((X + Y - E(X + Y))^2) \\
&= E((X - E(X)) + (Y - E(Y)))^2 \\
&= V(X) + 2 \text{cov}(X, Y) + V(Y)
\end{aligned}$$

4. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, donc :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Puis, par (2) :

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

### 33.16 Variance des lois usuelles

#### Théorème 33.16

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle et  $p \in [0; 1]$ .

1. Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  alors  $V(X) = p(1 - p)$ .
2. Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $V(X) = np(1 - p)$ .

1. Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ , alors  $X^2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ .

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

2. Si  $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  avec  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes, alors :

$$\begin{aligned} V(X_1 + \dots + X_n) &= \sum_{k=1}^n V(X_k) \text{ (indépendance)} \\ &= \sum_{k=1}^n p(1 - p) \text{ (1)} \\ &= np(1 - p) \end{aligned}$$

### 33.17 Inégalité de Markov

#### Théorème 33.17

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Pour tout  $a > 0$ , on a

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

On remarque que :

$$\mathbb{1}_{(|X| \geq a)} a \leq \mathbb{1}_{(|X| \geq a)} |X| \leq |X|$$

Par croissance de l'espérance :

$$aP(|X| \geq a) = aE(\mathbb{1}_{(|X| \geq a)}) \leq E(|X|)$$

### 33.19 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

#### Théorème 33.19

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Pour tout  $a > 0$ , on a

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

$$\begin{aligned} P(|X - E(X)| \geq a) &= P((X - E(X))^2 \geq a^2) \leq \frac{E((X - E(X))^2)}{a^2} \text{ (Markov)} \\ &= \frac{V(X)}{a^2} \end{aligned}$$

### 33.20 Exemple

#### Exemple 33.20

On dispose d'une pièce éventuellement truquée dont la probabilité d'obtention de pile est notée  $p$ . Pour connaître  $p$ , on lance cette pièce  $n$  fois et on note  $F$  la fréquence d'apparition de pile ainsi obtenue. À partir de quelle valeur de  $n$  la probabilité pour que  $F$  soit une approximation de  $p$  à  $10^{-2}$  est-elle supérieure à 0.9 ?

On note  $X$  la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de piles obtenus.

Ainsi  $F = \frac{X}{n}$ .

$$\begin{aligned}P(|F - p| \geq 10^{-2}) \leq 0.9 &\Leftrightarrow 1 - P(|F - p| > 10^{-2}) \geq 0.9 \\&\Leftrightarrow P(|F - p| > 10^{-2}) \leq 0.1 \\&\Leftrightarrow P(|X - np| \geq 10^{-2}n) \leq 0.1\end{aligned}$$

Or  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{aligned}P(|X - E(X)| > n \times 10^{-2}) &< \frac{V(X)}{n^2 \times 10^{-4}} \\&= \frac{n(1-p)p}{n^2 \times 10^{-4}} \\&\leq \frac{1}{4n \times 10^{-4}}\end{aligned}$$

Pour  $n \geq \frac{10^5}{4}$ , on a bien  $P(|F - p| \leq 10^{-2}) \geq 0.9$ .

## Chapitre 34

# Espaces préhilbertiens réels

### 34.4 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

#### Théorème 34.4

L'application

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; (X, Y) \mapsto {}^tXY = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ , appelé produit scalaire canonique.

Pour  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  :

- ${}^tXY \in \mathbb{R}$  donc  ${}^tYX = {}^t({}^tXY) = {}^tXY$
- bilinéarité : RAF
- ${}^tXX = \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 0$  et  $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$

### 34.5 Exemple

#### Exemple

Montrer que

$$(X, Y) \mapsto {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

est un exemple de produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$  distinct du produit scalaire usuel.

- bilinéarité : RAF
- Pour  $X, Y \in \mathbb{R}^2$ ,  ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \in \mathbb{R}$ , donc :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y &= {}^t \left( {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \right) \\ &= {}^t Y {}^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \\ &= {}^tY \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 \\ &= \underbrace{2(x^2 + xy + y^2)}_{\geq 0 \text{ car } x^2 + xy + y^2 \geq |xy|} \end{aligned}$$

En particulier, si  ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = 0$  alors  $|xy| = 0$ , puis  $x = y = 0$ .

La forme est définie positive.

### 34.14 Identités remarquables

#### Proposition 34.14

Pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

et

$$\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$$

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \quad (\text{bilinéarité}) \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad (\text{symétrie})
\end{aligned}$$

Idem pour la seconde identité.

### 34.15 Proposition 34.15 bis

Proposition 34.15 bis

Soit  $\|\cdot\|$  une norme euclidienne. Soit  $x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ .

- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|^2 &= \langle \lambda x, \lambda x \rangle \\
&= \lambda^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

### 34.16 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire

Théorème 34.16

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $x$  et  $y$  dans  $E$ .

- Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

- Inégalité triangulaire :

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont positivement colinéaires.

- Inégalité triangulaire, version distance :

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(y, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

- Si  $x = 0$ , l'inégalité est vérifiée pour tout  $y \in E$ .  
On suppose  $x \neq 0$ . On considère, pour  $y \in E$  fixé :

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \|tx + y\|^2 \\
&= \langle tx + y, tx + y \rangle \\
&= t^2 \|x\|^2 + 2t \langle x, y \rangle + \|y\|^2
\end{aligned}$$

$f$  est une fonction polynomiale de degré 2 ( $\|x\| \neq 0$ ) positive donc de discriminant  $\Delta \leq 0$ .

Or  $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2$ . D'où le résultat.

Si  $\Delta = 0$ , alors  $f$  s'annule une unique fois en  $t_0$ . On a alors  $\|t_0 x + y\|^2 = 0$ .

Donc  $t_0 x + y = 0$ .

Donc  $(x, y)$  est liée.

Réciproquement, si  $(x, y)$  est liée, alors  $y = t_0 x$  ( $x \neq 0$ ) et on a encore  $f(t_0) = 0$ .

- Pour  $(x, y) \in E^2$  :

$$\begin{aligned}
\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| &\Leftrightarrow \|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\
&\Leftrightarrow \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|
\end{aligned}$$

La dernière assertion est vraie d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la première l'est tout autant.

RAS pour l'inégalité généralisée.

Si  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ , le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz affirme que (par ex) :

$$y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$$



Mais alors (en supposant  $x \neq 0$ ) :

$$\|1 + \alpha\| \|x\| = \|x + y\| = (1 + |\alpha|) \|x\|$$

Donc  $|1 + \alpha| = 1 + |\alpha|$ .

Nécessairement,  $\alpha \geq 0$

### 34.17 Exemple

Exemple 34.17

Pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

avec égalité si et seulement si  $x_1 = \dots = x_n$ .

On munit  $E = \mathbb{R}^n$  de son produit scalaire canonique.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right| &\leq \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \\ \left| \sum_{k=1}^n 1 \times x_k \right| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2} \\ &= \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \end{aligned}$$

### 34.18 Exemple

Exemple 34.18

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Pour tout  $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$ , on a

$$f(b)^2 - f(a)^2 \leq 2 \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b f'(t)^2 dt}$$

On munit  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$  du produit scalaire usuel :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs  $f$  et  $f'$  :

$$\begin{aligned} \|f\| \times \|f'\| &\geq |\langle f, f' \rangle| \\ &= \left| \int_a^b f(t)f'(t) dt \right| \\ &= \left| \left[ \frac{f^2(t)}{2} \right]_a^b \right| \\ &= \left| \frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2} \right| \end{aligned}$$

### 34.20 Vecteur orthogonal à tout vecteur

#### Théorème 34.20

Dans un espace préhilbertien réel, le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur.

$\Rightarrow$  RAF

$\Leftarrow$  Si  $x$  est orthogonal à tout vecteur de  $E$ , alors  $x \perp x$ , donc  $\|x\|^2 = 0$ , donc  $x = 0$ .

### 34.21 Exemple

#### Exemple 34.21

Exemple 34.21 Montrer que pour le produit scalaire

$$(X, Y) \mapsto {}^t X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

sur  $\mathbb{R}^2$ , la base canonique n'est pas orthormale, mais la famille  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2)\right)$  l'est.

$$\|(1, 0)\| = \sqrt{2} = \|(0, 1)\|$$

$$\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 1$$

Donc

$$\|\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0)\| = 1$$

$$\text{On a } \|(1, -2)\| = \sqrt{6}$$

$$\text{Et } \langle (1, 0), (1, -2) \rangle = 0.$$

### 34.23 Exemple

#### Exemple 34.23

La famille des fonctions  $t \mapsto \sin(nt)$ , où  $n \in \mathbb{N}$  est orthonormale dans  $\mathcal{C}([0; 2\pi], \mathbb{R})$  pour le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$$

On note pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin(nx)$ .

Soit  $p \neq n$ .

$$\begin{aligned} \langle f_p, f_n \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_n(t) f_p(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt) \sin(pt) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{n-p} \sin((n-p)t) - \frac{1}{n+p} \sin((n+p)t) \right]_0^{2\pi} \quad (n \neq p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si  $n = p$  alors :

$$\begin{aligned} \|f_n\| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2nt)) dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc  $(f_n)$  est bien une famille orthonormée.

### 34.24 Exemple

#### Exemple 34.24

Dans  $\mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$ , l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux pour le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

D'après le chapitre 4, si  $f$  est impaire :

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = 0$$

Si  $f$  est paire et  $g$  impaire, alors  $fg$  est impaire et ainsi  $\langle f, g \rangle = 0$ .

### 34.25 Propriétés des familles orthogonales

#### Théorème 34.25

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

1. Théorème de Pythagore : pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $x$  et  $y$  sont orthogonaux ssi  $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .  
De surcroît, si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille orthogonale de vecteurs de  $E$ , alors

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

2. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de  $E$  est libre. En particulier, si  $E$  est de dimension finie  $n$  non nulle, toute famille orthogonale de  $n$  vecteurs est une base orthogonale.

1. RAF

2. Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille orthogonale. Soit  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille de scalaires à support fini. On suppose en outre que :

$$\forall i \in I, e_i \neq 0$$

On suppose que  $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0$ .

Soit  $j \in I$ .

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i \in I} \lambda_i e_i, e_j \right\rangle &= 0 \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=0 \text{ pour } i \neq j} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lambda_j \|e_j\|^2 = 0$$

$$\text{donc } \lambda_j = 0$$

Donc la famille est libre.

### 34.26 Coordonnées dans une base orthonormale

#### Théorème 34.26

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension non nulle et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$ , et  $x \in E$ . Alors

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

Autrement dit, les coordonnées de  $x$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  sont  $(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$ .

Comme  $(e_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une base, tout  $x \in E$  s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

Soit  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} \langle x, e_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \lambda_j \end{aligned}$$

### 34.27 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale

#### Théorème 34.27

Soit  $E \neq \{0_E\}$  un espace euclidien et  $(x, y) \in E^2$  de coordonnées respectives  $X = (x_1, \dots, x_n)$  et  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  dans une certaine base orthonormale de  $E$ . Alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = {}^t X Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 = {}^t X X$$

Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormale de  $E$ . Pour  $(x, y) \in E^2$  :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \\ y &= \sum_{i=1}^n \langle y, e_i \rangle e_i \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^n \langle y, e_j \rangle e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

### 34.28 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

#### Théorème 34.28

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre de  $E$ . On peut transformer  $(e_1, \dots, e_n)$  en une famille orthonormale de  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $E$  telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k).$$

Les vecteurs  $u_1, \dots, u_n$  peuvent être construits de proche en proche depuis  $u_1$  jusqu'à  $u_n$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on n'a que deux choix possibles pour  $u_k$  :

$$\pm \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i \right\|}$$

- Nécessairement,  $u_1 = \pm \frac{e_1}{\|e_1\|}$  pour que  $u_1$  soit unitaire et  $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(u_1)$ .
  - Supposons construits  $(u_1, \dots, u_k)$ ,  $k \leq n-1$  vérifiant :
    - $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$
    - $(u_1, \dots, u_k)$  est une famille orthornormale
- Soit  $v \in E$ . Comme  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1})$ .  
 Si  $v \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ , on a alors :

$$v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i + \mu_{k+1} e_{k+1}$$

On a :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k, v) \Leftrightarrow \lambda_{k+1} \neq 0$$

On suppose désormais  $\lambda_{k+1} \neq 0$ .

On a  $(u_1, \dots, u_k, v)$  une famille orthogonale si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \langle u_i, v \rangle &= 0 \\ \text{ssi. } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, 0 &= \langle u_i, \sum_{p=1}^k \lambda_p u_p + \lambda_{k+1} e_{k+1} \rangle \\ &= \sum_{p=1}^k \lambda_p \langle u_i, u_p \rangle + \lambda_{k+1} \langle u_i, e_{k+1} \rangle \\ &= \lambda_i + \lambda_{k+1} \langle u_i, e_{k+1} \rangle \\ \text{ssi. } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \lambda_i &= -\lambda_{k+1} \langle u_i, e_{k+1} \rangle \\ \text{ssi. } v &= \lambda_{k+1} (e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle u_i, e_{k+1} \rangle u_i) \end{aligned}$$

Ainsi,  $(u_1, \dots, u_{k+1})$  est orthonormée avec  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$  si et seulement si :

$$u_{k+1} = \pm \frac{e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_{k+1}, u_i \rangle u_i}{\|e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_{k+1}, u_i \rangle u_i\|}$$

## 34.29 Exemple

### Exemple 34.29

Sur  $\mathbb{R}[X]$ , la famille  $(1, \sqrt{3}(2X-1), \sqrt{5}(6X^2-6X+1))$  est orthonormale pour le produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

On orthonormalise  $(1, X, X^2) = (P_0, P_1, P_2)$  avec Gram-Schmidt.

- $\|P_0\| = 1$  donc on pose  $V_0 = P_0$ .
- Soit  $\tilde{V}_1 = X + aV_0$

$$\langle \tilde{V}_1, V_0 \rangle = \langle X, V_0 \rangle + a\|V_0\|^2 = \frac{1}{2} + a$$

On pose donc  $\tilde{V}_1 = X - \frac{1}{2}$ . On a :

$$\begin{aligned} \|\tilde{V}_1\|^2 &= \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 dt \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

On pose  $V_1 = \frac{\tilde{V}_1}{\|\tilde{V}_1\|} = \sqrt{12}(X - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}(2X - 1)$ .

On pose  $\tilde{V}_2 = X^2 + aV_1 + bV_0$ .

On a :

$$\begin{aligned}\langle \tilde{V}_2, V_1 \rangle &= \langle X^2, V_1 \rangle + a\|V_1\|^2 \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 t^2(2t-1) dt + a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} + a \\ \langle \tilde{V}_2, V_0 \rangle &= \langle X^2, V_0 \rangle + b\|V_0\|^2 \\ &= \frac{1}{3} + b\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}\tilde{V}_2 &= X^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{3}(2X-1) - \frac{1}{3} \\ &= X^2 - X + \frac{1}{6} \\ \|\tilde{V}_2\|^2 &= \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 dt \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{180}\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}V_2 &= \sqrt{180}(X^2 - X + \frac{1}{6}) \\ &= \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)\end{aligned}$$

### 34.34 Propriétés de l'orthogonal d'une partie

#### Proposition 34.34

Avec les mêmes hypothèses que la définition précédente :

1.  $X^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , orthogonal à  $X$ .
2. Si  $X$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , orthogonal à  $X$ .
3. Si  $X \subset Y$  alors  $Y^\perp \subset X^\perp$ .
4. On a  $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$  et  $X \subset (X^\perp)^\perp$

1.  $X^\perp \perp X$ .

- $X^\perp \subset E$
- $0 \in X^\perp$
- Si  $(t, u) \in (X^\perp)^2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}\forall x \in X, \langle t + \alpha u, x \rangle &= \langle t, x \rangle + \alpha \langle u, x \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc  $t + \alpha u \in X^\perp$ .

Donc  $X^\perp$  est bien un sous-espace vectoriel de  $E$ .

2. On suppose  $X$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
Soit  $x \in X \cap X^\perp$  donc  $x \perp x$  donc  $x = 0_E$ .  
Donc  $X \cap X^\perp = \{0_E\}$ .

3. Soit  $X \subset Y$  et  $t \in Y^\perp$ .

Donc :

$$\forall x \in Y, \langle x, t \rangle = 0$$

Donc :

$$\forall x \in X, \langle x, t \rangle = 0$$

Donc  $t \in X^\perp$ .

4. Comme  $X \subset \text{Vect}(X)$ , on a :

$$\text{Vect}(X)^\perp \subset X^\perp$$

Soit  $t \in X^\perp$ . Soit  $u = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \in \text{Vect}(X)$  ( $x_i \in X$  et  $(\lambda_i)$  famille à support fini).

$$\langle t, u \rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle t, x_i \rangle = 0$$

Donc  $t \in \text{Vect}(X)^\perp$ .

### 34.38 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie

#### Théorème 34.38

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ .

1.  $F^\perp$  est l'unique supplémentaire de  $F$  dans  $E$  orthogonal à  $F$ . On l'appelle le supplémentaire orthogonal de  $F$  dans  $E$ .
2.  $F^{\perp\perp} = F$ .

1. Existence :

On remarque que la propriété est vraie pour  $F = \{x\}$ .

On suppose  $F \neq \{0_E\}$ .

Comme  $F$  est de dimension finie non nulle il possède une base orthonormée notée  $(e_1, \dots, e_n)$ .

Soit  $x \in E$ , on décompose  $x = \underbrace{x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k}_{:=v} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k}_{\in F}$ .

Or pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} \langle v, e_i \rangle &= \langle x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, e_i \rangle \\ &= \langle x, e_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_i \rangle \\ &= \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $v \in F^\perp$ .

Unicité :

On suppose que  $F \oplus \perp G = F \oplus \perp F^\perp$ .

Par définition,  $G \subset F^\perp$ .

Soit  $t \in F^\perp$ .

On décompose  $t = f + g$ .

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle f, f \rangle \\ &= \langle f, t - g \rangle \\ &= \langle f, t \rangle - \langle f, g \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. On sait que  $F \subset (F^\perp)^\perp$ .  
 Soit  $x \in (F^\perp)^\perp$ .  
 D'après (1),  $x = f + v$  avec  $f \in F, v \in F^\perp$ .  
 Or :

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \langle v, v \rangle = \langle v, x - f \rangle \\ &= \langle v, x \rangle - \langle v, f \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc  $v = 0$ .

### 34.49 Exemple

#### Exemple 34.49

On note  $F$  le sous-espace vectoriel  $\text{Vect}(\sin, \cos)$  de  $\mathcal{C}([0; 2\pi], \mathbb{R})$ . Montrer que le projeté orthogonal de l'identité sur  $F$  pour le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

est la fonction  $t \mapsto -2 \sin t$ .

Première Méthode :

—

$$\begin{aligned}\|\sin\|^2 &= \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \pi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\ &= \pi \\ &= \|\cos\|^2\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}\langle \cos, \sin \rangle &= \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt \\ &= 0\end{aligned}$$

On note  $f_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin$  et  $f_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos$ .  
 $(f_1, f_2)$  est une base orthonormée de  $F$ .  
 D'après le cours :

$$P_F(\text{id}) = \langle \text{id}, f_1 \rangle f_1 + \langle \text{id}, f_2 \rangle f_2$$

Or :

$$\begin{aligned}\langle \text{id}, \sin \rangle &= \int_0^{2\pi} \sin(t) dt \\ &= [-t \cos(t)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(t) dt \\ &= -2\pi \\ \langle \text{id}, \cos \rangle &= \int_0^{2\pi} t \cos(t) dt \\ &= [t \sin(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(t) dt \\ &= 0\end{aligned}$$



Ainsi :

$$\begin{aligned} P_F(\text{id}) &= \langle \text{id}, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \rangle \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \\ &= -2 \sin \end{aligned}$$

Deuxième Méthode :

$P_F(\text{id}) \in \text{Vect}(\sin, \cos)$ .

On écrit donc :

$$P_F(\text{id}) = a \sin + b \cos$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{id} - P_F(\text{id}) \in F &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \text{id} - P_F(\text{id}), \sin \rangle = 0 \\ \langle \text{id} - P_F(\text{id}), \cos \rangle = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \text{id}, \sin \rangle - a \|\sin\|^2 - b \langle \sin, \cos \rangle = 0 \\ \langle \text{id}, \cos \rangle - a \langle \sin, \cos \rangle - b \|\cos\|^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2\pi - a\pi - b \times 0 = 0 \\ 0 - a \times 0 + b\pi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

### 34.50 Exemple

#### Exemple 34.50

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension finie non nulle et  $H$  un hyperplan de  $E$  de vecteur normal  $a$ . On note  $p$  la projection orthogonale sur  $H$ . Montrer que pour tout  $x \in E$ ,

$$p(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle a}{\|a\|^2}$$

En notant  $q$  la projection orthogonale sur  $H^\perp$ .

Or  $H^\perp = \text{Vect}(a) = \text{Vect}\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$ .

$$\begin{aligned} q(x) &= \left\langle x, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \frac{a}{\|a\|} \\ &= \frac{\langle x, a \rangle a}{\|a\|^2} \end{aligned}$$

### 34.53 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

#### Théorème 34.53

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel,  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie et  $x \in E$ . On note  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ .

1. On a

$$d(x, F) = \|x - p(x)\| = d(x, p(x))$$

La distance de  $x$  à  $F$  est donc atteinte et est donc un minimum. Le minimum est donc atteint en projetant  $x$  orthogonalement sur  $F$ .

2. Par ailleurs

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2$$

Comme  $F$  est un espace vectoriel de dimension finie,  $p$  est bien définie.

Soit  $f \in F$ . On écrit :

$$\begin{aligned} \|x - f\|^2 &= \left\| \underbrace{x - p(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p(x) - f}_{\in F} \right\|^2 \\ &= \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2 \quad (\text{Pythagore}) \\ &\geq \|x - p(x)\|^2 \end{aligned}$$

Donc  $\|x - f\| \geq \|x - p(x)\|^2$ .

Donc  $\|x - f\| \geq \|x - p(x)\|$  ( $t \mapsto \sqrt{t}$  est croissante).

Par définition de la borne inférieure :

$$d(x, F) \geq \|x - p(x)\|$$

Or  $p(x) \in F$  donc  $\|x - p(x)\| \in \{d(x, f), f \in F\}$ .

Donc  $d(x, F) = \|x - p(x)\|$ .

La dernière égalité provient du théorème de Pythagore.

### 34.54 Distance à un hyperplan affine

#### Théorème 34.54

Soit  $E$  un espace euclidien,  $\mathcal{H}$  un hyperplan affine passant par  $A$  et de vecteur normal unitaire  $a$ . Pour tout  $M \in E$ , on a

$$d(M, \mathcal{H}) = |\langle \overrightarrow{AM}, a \rangle|$$

On note  $H$  la direction de  $\mathcal{H}$ .

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{H}) &= d(M, A + H) \\ &= d(M - A, H) \\ &= d(A\vec{M}, H) \\ &= \|A\vec{M} - P_H(A\vec{M})\| \quad (34.53) \\ &= \|\langle A\vec{M}, a \rangle a\| \quad (34.50) \\ &= |\langle A\vec{M}, a \rangle| \quad (a \text{ unitaire}) \end{aligned}$$

### Exercice 6

D'après le cours :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \text{tr}({}^tAB) \end{aligned}$$

définit un produit scalaire dont  $N$  est la norme associée.

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ .

$$\begin{aligned} N(AB)^2 &= \text{tr}({}^tABAB) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (AB)_{ji}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki} \right]^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n A_{jk}^2 \right] \times \left[ \sum_{p=1}^n B_{pi}^2 \right] \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n B_{pi}^2 \right) \times \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk}^2 \right) \\ &= N(A)^2 N(B)^2 \end{aligned}$$

### Exercice 7

- (a) RAF d'après la définition d'un produit scalaire.

- (b) Pour  $u \in E$ , on note  $f_u : E \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \langle u, x \rangle$  et on note  $f : E \rightarrow E^*; u \mapsto f_u$ .  
On a  $\dim(E^*) = \dim(E)$  donc  $f$  est surjective.  
Soit  $u \in \ker f$ . Donc :

$$\forall x \in E, \langle u, x \rangle = 0$$

Donc  $u = 0_E$ .

Donc  $f$  est injective.

Donc  $f$  est bijective.

2. (a) On munit  $\mathbb{R}_n[X]$  (de dimension finie) du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

On note  $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}; P \mapsto P(0)$ .

Ainsi,  $\varphi \in \mathbb{R}_n[X]^*$ .

D'après (1.b), il existe un unique  $A \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] : \varphi(P) = \langle A, P \rangle$$

- (b) Par l'absurde, supposons qu'il existe  $A \neq 0 \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P(t)A(t) dt = P(0)$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^1 t^k A(t) dt = 0$ .

En particulier,  $\int_0^1 t A(t) dt = 0$ .

Donc  $t \mapsto tA(t)$  doit s'annuler sur  $]0, 1[$ .

Donc  $A$  possède au moins une racine sur  $]0, 1[$ .

Notons  $r_1, \dots, r_k$  les racines de  $A$  sur  $]0, 1[$ . ( $k \leq n$ )

On pose  $P = X \prod_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} (X - r_i) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ .

On a  $\int_0^1 \underbrace{P(t)A(t)}_{\text{de signe constant}} dt = P(0) = 0$ .

Donc  $PA = 0$ . Absurde.

## Chapitre 35

### Familles sommables

## Chapitre 36

# Fonctions de deux variables