Chapitre 29

Groupe symétrique

29.26 Lemme 26

Lemme 29.26

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On a :

$$\left|\prod_{1\leq i<j\leq n}(\sigma(i)-\sigma(j))\right| = \prod_{X\in\mathcal{P}_2(\llbracket 1,n\rrbracket)}\delta_\sigma(X) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(j-i)$$

- La première égalité est justifiée car on a une bijection entre $\{(i,j) \mid 1\leq i<j\leq n\}$ et $\mathcal{P}_2(\llbracket 1,n\rrbracket)$.
- La seconde égalité est justifiée d'après (28.23).

29.29 Propriété fondamentale de la signature

Théorème 29.29

La signature est un morphisme de groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1,1\}, \times)$.

Montrons que $\epsilon(\sigma\circ\xi) = \epsilon(\sigma)\times\epsilon(\xi)$.
Pour $\sigma, \xi \in \mathcal{S}_n$:

$$\begin{aligned}
\epsilon(\sigma\circ\xi) &= \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(\sigma\circ\xi(j)-\sigma\circ\xi(i))}{\prod_{1\leq i<j\leq n}(j-i)} \times \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(\xi(j)-\xi(i))}{\prod_{1\leq i<j\leq n}(\xi(j)-\xi(i))} \\
&= \epsilon(\xi)\times\prod_{X\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)}\tau_\sigma(\xi(X)) \\
&= \epsilon(\xi)\times\prod_{X\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)}\tau_\sigma(X) \\
&= \epsilon(\xi)\times\epsilon(\sigma)
\end{aligned}$$

29.35 Décomposition d'une transposition à l'aide des τ_i

Propostion 29.35

soit $1\leq i<j\leq n$ et $\tau = (i,j)$. Alors :

$$\tau = \tau_{j-1}\circ\cdots\circ\tau_{i+1}\circ\tau_i\circ\tau_{i+1}\circ\cdots\circ\tau_{j-1}$$

- Si $k>j$, alors pour tout $p\in\llbracket i,j-1\rrbracket$, $\tau_p(k)=k$.
  Donc $\sigma(k)=k$.
  Cela reste vrai si $k<i$.
- On a :

$$\begin{aligned}
\sigma(i) &= \tau_{j-1}\circ\tau_{j-2}\circ\cdots\circ\tau_{i+1}\circ\tau_i \\
&= \tau_{j-1}\circ\cdots\circ\tau_{i+1}(i+1) \\
&= \tau_{j-1}(j-1) \\
&= j \\
\sigma(j) &= \tau_{j-1}\circ\cdots\tau_i\circ\cdots\circ\tau_{j-1}(j) \\
&= \tau_{j-1}\circ\cdots\tau_i\circ\cdots\tau_{j-2}(j-1) \\
&= \tau_{j-1}\circ\cdots\tau_i(i+1) \\
&= \tau_{j-1}\circ\cdots\tau_{i+1}(i) \\
&= i
\end{aligned}$$

— Si $i < k < j$, alors :

$$\begin{aligned}\sigma(k) &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \tau_k(k) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \tau_{k-1}(k+1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_k(k+1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \tau_{k+1}(k) \\ &= k\end{aligned}$$

29.37 Caractère générateur des transpositions

Théorème 29.37

Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est un produit de transposition.

On prouve le résultat par récurrence sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

— pour $n = 2$, $\mathcal{S}_2 = \{id, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\}$ et $id = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^2$.

— On suppose le résultat vrai pour $n \geq 2$.
Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$.

  — Si $\sigma(n+1) = n+1$, σ induit naturellement une permutation $\tilde{\sigma}$ sur S_n, donc $\tilde{\sigma}$ est un produit de transpositions $\tilde{\tau}$, et chaque $\tilde{\tau}$ se relève en une transposition τ de $\mathcal{S}_{n+1}$.

  — Si $\sigma(n+1) = i \in [\![1, n]\!]$, alors :

$$\varphi = \begin{pmatrix}i & n+1\end{pmatrix} \circ \sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$$

  et $\varphi(n+1) = n+1$.
  D'après le point précédent, φ est un produit de transposition.
  Donc $\sigma = \begin{pmatrix}i & n+1\end{pmatrix} \circ \varphi$ est aussi un produit de transposition.

29.40 Effet de la conjugaison sur un cycle

Théorème 29.40

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $\begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_k\end{pmatrix}$ un cycle. Alors :

$$\sigma \circ \begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_k\end{pmatrix} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix}\sigma(a_1) & \cdots & \sigma(a_k)\end{pmatrix}$$

— Si $\sigma^{-1}(i) \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$ alors $\sigma \circ \begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_k\end{pmatrix} \circ \sigma^{-1}(i) = \sigma \circ \sigma^{-1}(i) = i$.

— Si $\sigma^{-1}(i) = a_j$, alors $\sigma \circ \begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_k\end{pmatrix} \circ \sigma^{-1}(i) = \sigma(a_{j+1})$.

29.41 Corollaire 29.41

Corollaire 29.41

Soit $\varphi : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ un morphisme. Soit $\alpha \in \{1-, 1\}$. S'il existe une transposition τ_0 telle que $\varphi(\tau_0) = \alpha$, alors pour toute transposition τ, on a $\varphi(\tau) = \alpha$.
Ainsi, φ prend une valeur constante sur les transpositions.

Par conjugaison. Soit $\tau_0 = \begin{pmatrix}i & j\end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix}k & l\end{pmatrix}$.
On a :

$$\tau = \sigma \circ \tau_0 \circ \sigma^{-1}$$

avec $\sigma = \begin{pmatrix}i & k & j & l\end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) &= \varphi(\sigma \circ \tau_0 \circ \sigma^{-1}) \\ &= \varphi(\sigma) \times \varphi(\tau_0) \times \varphi(\sigma^{-1}) \\ &= \varphi(\tau_0) \times \varphi(\sigma)^2 \\ &= \varphi(\tau_0)\end{aligned}$$

29.42 Unicité de la signature

Théorème 29.42

La signature est l'unique morphisme de groupe non trivial de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$.

Soit φ un morphismede groupes de $\mathcal{S}_n$ dans $\{\pm 1\}$.
Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. D'après (29.37), $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$.

— Si la valeur prise par φ sur les transpositions et 1 (29.40), alors :

$$\varphi(\sigma) = \prod_{i=1}^{k} \varphi(\tau_i) = 1$$

Donc φ est triviale.

— Si la valeur prise par φ sur les transpositions est -1 (29.41), alors :

$$\varphi(0) = \prod_{i=1}^{k} \varphi(\tau_i) = (-1)^k = \epsilon(\sigma)$$

Donc $\varphi = \epsilon$.

29.52 Décomposition en cycle d'une permutation

Théorème 29.52

Soit σ une permutation de $\mathcal{S}_n$. A permutation près des facteurs, il existe une unique décomposition de σ en produit de cycle à supports disjoints.

$$\sigma = C_1 \circ \cdots \circ C_k$$

telles que les supports des cycles forment un partition de $[\![1, n]\!]$. De plus, l'unique cycle de cette décomposition contenant x est égale à C_x.

— <u>Existence :</u> On note $\{\overline{C_1}, \dots, \overline{C_k}\} = [\![1, n]\!] / \equiv_\sigma$.
On note (29.49) c_i la permutation induite par σ sur $\overline{C_i}$ ($C_i = \begin{pmatrix} p & \sigma(p) & \cdots & \sigma^j(p) \end{pmatrix}$).
On pose $\varphi = C_1 \circ \ldots \circ C_k$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$, alors $i \in \overline{C_q}$ avec $q \in [\![1, k]\!]$.
D'après (29.51), $\varphi(i) = C_q(i) = \sigma(i)$.
Donc $\varphi = \sigma$.

— <u>Unicité :</u> On suppose que $\sigma = C_1 \circ \ldots \circ C_k = U_1 \circ \ldots \circ U_q$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. $i \in supp(C_1) \in supp(U_1)$ (quitte à permuter les rôles).
On a donc $\sigma(i) = C_1(i) = U_1(i)$ et $\sigma^2(i) = C_1^2(i) = U_1^2(i)$ et ....
Donc $C_1 = U_1$.

29.62 Décomposition d'un cycle en transpositions

Lemme 29.62

Soit $(i_1, \dots, i_k)$ des entiers deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$. Alors :

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i_1 & i_{k-1} \end{pmatrix} \circ \cdots \circ \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}$$

On note $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}$.
Soit $p \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. On a bien $\sigma(p) = p$.
Soit $i_j \in \{i_1, \dots, i_k\}$. $(j \neq k)$

—

$$\begin{aligned}\sigma(i_1) &= \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix} (i_1) \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_3 \end{pmatrix} (i_2) \\ &= i_2\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}\sigma(i_j) &= \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix} (i_j) \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_j \end{pmatrix} (i_j) \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_{j+1} \end{pmatrix} (i_1) \\ &= i_{j+1}\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}\sigma(i_k) &= \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} (i_k) \\ &= i_1\end{aligned}$$

29.63 Signature d'un cycle

Propostion 29.63

Soit C un cucle et $\ell(C)$ sa longueur. Alors :

$$\epsilon(C) = (-1)^{\ell(C)-1}$$

Avec ce qui précède :

$$\begin{aligned}\epsilon(\sigma) &= \prod_{j=2}^{k} \epsilon(\begin{pmatrix} i_1 & i_j \end{pmatrix}) \\ &= (-1)^{k-1} \\ &= (-1)^{\ell(C)-1}\end{aligned}$$

29.64 Détermination de ϵ par le type cyclique

Théorème 29.64

Soit σ une permutation de $\mathcal{S}_n$ et $c(\sigma)$ le nombre de parts dans son support cyclique (ou de façon équivalente dans son type cyclique). Alors :

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-c(\sigma)}$$

Soit $\sigma = C_1 \circ \cdots \circ C_{c(\sigma)}$. On a :

$$\begin{aligned}\epsilon(0) &= \prod_{i=1}^{c(\sigma)} \epsilon(C_i) \text{ } (\epsilon \text{ morphisme}) \\ &= \prod_{i=1}^{c(\sigma)} (-1)^{\ell(C_i)-1} \text{ } (29.63) \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^{c(\sigma)} [\ell(C_i)-1]} \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^{c(\sigma)} \ell(C_i) - c(\sigma)} \\ &= (-1)^{n-c(\sigma)}\end{aligned}$$

29.69 Exemple

Exemple 29.69

Calculer la signature de la permutation suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & 1 & 3 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, le couple $(i, k+n)$ donne une inversion avec $k \in [\![1, i]\!]$.
On dénombre donc :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc :

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Exercice 4

Soit $g \in G$. On note $\varphi_g : G \to G; h \mapsto gh$.
On a $\varphi_g \in S(G)$ car φ_g est bijective de réciproque φ_g^{-1}.
On note $\varphi : G \to S(G); g \mapsto \varphi_g$.
On a évidemment pour tout $(g, k) \in G^2$:

$$\varphi(g \times k) = \varphi_g \circ \varphi_k$$

Donc φ est un morphisme de groupe.
Si $g \in \ker \varphi$, $\varphi(g) = \mathrm{id}$, donc :

$$\forall h \in G, \varphi_g(h) = h$$
$$\text{donc } g = 1_G$$

Donc G est isomorphe à $\mathrm{Im}\,\varphi$, qui est un sous-groupe de $S(G)$.