

Chapitre 34

Espaces préhilbertiens réels

34 Espaces préhilbertiens réels	1
34.4 Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n	2
34.5 Exemple	2
34.14 Identités remarquables	2
34.15 Proposition 34.15 bis	3
34.16 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire	3
34.17 Exemple	4
34.18 Exemple	4
34.20 Vecteur orthogonal à tout vecteur	5
34.21 Exemple	5
34.23 Exemple	5
34.24 Exemple	6
34.25 Propriétés des familles orthogonales	6
34.26 Coordonnées dans une base orthonormale	6
34.27 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale	7
34.28 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	7
34.29 Exemple	8
34.34 Propriétés de l'orthogonal d'une partie	9
34.38 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie	10
34.49 Exemple	11
34.50 Exemple	12
34.53 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie	12
34.54 Distance à un hyperplan affine	13

34.4 Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n

Théorème 34.4

L'application

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; (X, Y) \mapsto {}^tXY = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n , appelé produit scalaire canonique.

Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

- ${}^tXY \in \mathbb{R}$ donc ${}^tYX = {}^t({}^tXY) = {}^tXY$
- bilinéarité : RAF
- ${}^tXX = \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 0$ et $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$

34.5 Exemple

Exemple

Montrer que

$$(X, Y) \mapsto {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

est un exemple de produit scalaire sur \mathbb{R}^2 distinct du produit scalaire usuel.

- bilinéarité : RAF
- Pour $X, Y \in \mathbb{R}^2$, ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \in \mathbb{R}$, donc :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y &= {}^t \left({}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \right) \\ &= {}^t Y {}^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \\ &= {}^tY \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 \\ &= \underbrace{2(x^2 + xy + y^2)}_{\geq 0 \text{ car } x^2 + xy + y^2 \geq |xy|} \end{aligned}$$

En particulier, si ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = 0$ alors $|xy| = 0$, puis $x = y = 0$.

La forme est définie positive.

34.14 Identités remarquables

Proposition 34.14

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

et

$$\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$$

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \text{ (bilinéarité)} \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \text{ (symétrie)}
\end{aligned}$$

Idem pour la seconde identité.

34.15 Proposition 34.15 bis

Proposition 34.15 bis

Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne. Soit $x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.

- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|^2 &= \langle \lambda x, \lambda x \rangle \\
&= \lambda^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

34.16 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire

Théorème 34.16

Soit E un espace préhilbertien réel et x et y dans E .

- Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

- Inégalité triangulaire :

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires.

- Inégalité triangulaire, version distance :

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(y, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

- Si $x = 0$, l'inégalité est vérifiée pour tout $y \in E$.

On suppose $x \neq 0$. On considère, pour $y \in E$ fixé :

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \|tx + y\|^2 \\
&= \langle tx + y, tx + y \rangle \\
&= t^2 \|x\|^2 + 2t \langle x, y \rangle + \|y\|^2
\end{aligned}$$

f est une fonction polynomiale de degré 2 ($\|x\| \neq 0$) positive donc de discriminant $\Delta \leq 0$.

Or $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2$. D'où le résultat.

Si $\Delta = 0$, alors f s'annule une unique fois en t_0 . On a alors $\|t_0 x + y\|^2 = 0$.

Donc $t_0 x + y = 0$.

Donc (x, y) est liée.

Réciproquement, si (x, y) est liée, alors $y = t_0 x$ ($x \neq 0$) et on a encore $f(t_0) = 0$.

- Pour $(x, y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}
\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| &\Leftrightarrow \|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\
&\Leftrightarrow \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|
\end{aligned}$$

La dernière assertion est vraie d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la première l'est tout autant.

RAS pour l'inégalité généralisée.

Si $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz affirme que (par ex) :

$$y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$$

Mais alors (en supposant $x \neq 0$) :

$$\|1 + \alpha\|x\| = \|x + y\| = (1 + |\alpha|)\|x\|$$

Donc $|1 + \alpha| = 1 + |\alpha|$.

Nécessairement, $\alpha \geq 0$

34.17 Exemple

Exemple 34.17

Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

On munit $E = \mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right| &\leq \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \\ \left| \sum_{k=1}^n 1 \times x_k \right| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2} \\ &= \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \end{aligned}$$

34.18 Exemple

Exemple 34.18

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Pour tout $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$, on a

$$f(b)^2 - f(a)^2 \leq 2 \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b f'(t)^2 dt}$$

On munit $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \cdot \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs f et f' :

$$\begin{aligned} \|f\| \times \|f'\| &\geq |\langle f, f' \rangle| \\ &= \left| \int_a^b f(t)f'(t) dt \right| \\ &= \left| \left[\frac{f^2(t)}{2} \right]_a^b \right| \\ &= \left| \frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2} \right| \end{aligned}$$

34.20 Vecteur orthogonal à tout vecteur

Théorème 34.20

Dans un espace préhilbertien réel, le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur.

\Rightarrow RAF

\Leftarrow Si x est orthogonal à tout vecteur de E , alors $x \perp x$, donc $\|x\|^2 = 0$, donc $x = 0$.

34.21 Exemple

Exemple 34.21

Exemple 34.21 Montrer que pour le produit scalaire

$$(X, Y) \mapsto {}^t X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

sur \mathbb{R}^2 , la base canonique n'est pas orthormale, mais la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2)\right)$ l'est.

$$\|(1, 0)\| = \sqrt{2} = \|(0, 1)\|$$

$$\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 1$$

Donc

$$\|\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0)\| = 1$$

$$\text{On a } \|(1, -2)\| = \sqrt{6}$$

$$\text{Et } \langle (1, 0), (1, -2) \rangle = 0.$$

34.23 Exemple

Exemple 34.23

La famille des fonctions $t \mapsto \sin(nt)$, où $n \in \mathbb{N}$ est orthonormale dans $\mathcal{C}([0; 2\pi], \mathbb{R})$ pour le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$$

On note pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin(nx)$.

Soit $p \neq n$.

$$\begin{aligned} \langle f_p, f_n \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_n(t) f_p(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt) \sin(pt) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{n-p} \sin((n-p)t) - \frac{1}{n+p} \sin((n+p)t) \right]_0^{2\pi} \quad (n \neq p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si $n = p$ alors :

$$\begin{aligned} \|f_n\| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2nt)) dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc (f_n) est bien une famille orthonormée.

34.24 Exemple

Exemple 34.24

Dans $\mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux pour le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

D'après le chapitre 4, si f est impaire :

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = 0$$

Si f est paire et g impaire, alors fg est impaire et ainsi $\langle f, g \rangle = 0$.

34.25 Propriétés des familles orthogonales

Théorème 34.25

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. Théorème de Pythagore : pour tout $(x, y) \in E^2$, x et y sont orthogonaux ssi $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
De surcroît, si (x_1, \dots, x_n) est une famille orthogonale de vecteurs de E , alors

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

2. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre. En particulier, si E est de dimension finie n non nulle, toute famille orthogonale de n vecteurs est une base orthogonale.

1. RAF

2. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale. Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires à support fini. On suppose en outre que :

$$\forall i \in I, e_i \neq 0$$

On suppose que $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0$.

Soit $j \in I$.

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i \in I} \lambda_i e_i, e_j \right\rangle &= 0 \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=0 \text{ pour } i \neq j} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lambda_j \|e_j\|^2 = 0$$

$$\text{donc } \lambda_j = 0$$

Donc la famille est libre.

34.26 Coordonnées dans une base orthonormale

Théorème 34.26

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle et (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de E , et $x \in E$. Alors

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

Autrement dit, les coordonnées de x dans la base (e_1, \dots, e_n) sont $(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$.

Comme $(e_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base, tout $x \in E$ s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \langle x, e_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \lambda_j \end{aligned}$$

34.27 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale

Théorème 34.27

Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien et $(x, y) \in E^2$ de coordonnées respectives $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ dans une certaine base orthonormale de E . Alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = {}^t X Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 = {}^t X X$$

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormale de E . Pour $(x, y) \in E^2$:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \\ y &= \sum_{i=1}^n \langle y, e_i \rangle e_i \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^n \langle y, e_j \rangle e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

34.28 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 34.28

Soit E un espace préhilbertien réel et (e_1, \dots, e_n) une famille libre de E . On peut transformer (e_1, \dots, e_n) en une famille orthonormale de (u_1, \dots, u_n) de E telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k).$$

Les vecteurs u_1, \dots, u_n peuvent être construits de proche en proche depuis u_1 jusqu'à u_n et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on n'a que deux choix possibles pour u_k :

$$\pm \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i \right\|}$$

- Nécessairement, $u_1 = \pm \frac{e_1}{\|e_1\|}$ pour que u_1 soit unitaire et $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(u_1)$.
 - Supposons construits (u_1, \dots, u_k) , $k \leq n-1$ vérifiant :
 - $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$
 - (u_1, \dots, u_k) est une famille orthornormale
- Soit $v \in E$. Comme $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1})$.
 Si $v \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$, on a alors :

$$v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i + \mu_{k+1} e_{k+1}$$

On a :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k, v) \Leftrightarrow \lambda_{k+1} \neq 0$$

On suppose désormais $\lambda_{k+1} \neq 0$.

On a (u_1, \dots, u_k, v) une famille orthogonale si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \langle u_i, v \rangle &= 0 \\ \text{ssi. } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, 0 &= \langle u_i, \sum_{p=1}^k \lambda_p u_p + \lambda_{k+1} e_{k+1} \rangle \\ &= \sum_{p=1}^k \lambda_p \langle u_i, u_p \rangle + \lambda_{k+1} \langle u_i, e_{k+1} \rangle \\ &= \lambda_i + \lambda_{k+1} \langle u_i, e_{k+1} \rangle \\ \text{ssi. } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \lambda_i &= -\lambda_{k+1} \langle u_i, e_{k+1} \rangle \\ \text{ssi. } v &= \lambda_{k+1} (e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle u_i, e_{k+1} \rangle u_i) \end{aligned}$$

Ainsi, (u_1, \dots, u_{k+1}) est orthonormée avec $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ si et seulement si :

$$u_{k+1} = \pm \frac{e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_{k+1}, u_i \rangle u_i}{\|e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_{k+1}, u_i \rangle u_i\|}$$

34.29 Exemple

Exemple 34.29

Sur $\mathbb{R}[X]$, la famille $(1, \sqrt{3}(2X-1), \sqrt{5}(6X^2-6X+1))$ est orthonormale pour le produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

On orthonormalise $(1, X, X^2) = (P_0, P_1, P_2)$ avec Gram-Schmidt.

- $\|P_0\| = 1$ donc on pose $V_0 = P_0$.
- Soit $\tilde{V}_1 = X + aV_0$

$$\langle \tilde{V}_1, V_0 \rangle = \langle X, V_0 \rangle + a\|V_0\|^2 = \frac{1}{2} + a$$

On pose donc $\tilde{V}_1 = X - \frac{1}{2}$. On a :

$$\begin{aligned} \|\tilde{V}_1\|^2 &= \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 dt \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

On pose $V_1 = \frac{\tilde{V}_1}{\|\tilde{V}_1\|} = \sqrt{12}(X - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}(2X - 1)$.

On pose $\tilde{V}_2 = X^2 + aV_1 + bV_0$.

On a :

$$\begin{aligned}\langle \tilde{V}_2, V_1 \rangle &= \langle X^2, V_1 \rangle + a\|V_1\|^2 \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 t^2(2t-1) dt + a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} + a \\ \langle \tilde{V}_2, V_0 \rangle &= \langle X^2, V_0 \rangle + b\|V_0\|^2 \\ &= \frac{1}{3} + b\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}\tilde{V}_2 &= X^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{3}(2X-1) - \frac{1}{3} \\ &= X^2 - X + \frac{1}{6} \\ \|\tilde{V}_2\|^2 &= \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 dt \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{180}\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}V_2 &= \sqrt{180}(X^2 - X + \frac{1}{6}) \\ &= \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)\end{aligned}$$

34.34 Propriétés de l'orthogonal d'une partie

Proposition 34.34

Avec les mêmes hypothèses que la définition précédente :

1. X^\perp est un sous-espace vectoriel de E , orthogonal à X .
2. Si X est un sous-espace vectoriel de E , orthogonal à X .
3. Si $X \subset Y$ alors $Y^\perp \subset X^\perp$.
4. On a $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$ et $X \subset (X^\perp)^\perp$

1. $X^\perp \perp X$.

- $X^\perp \subset E$
- $0 \in X^\perp$
- Si $(t, u) \in (X^\perp)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\forall x \in X, \langle t + \alpha u, x \rangle &= \langle t, x \rangle + \alpha \langle u, x \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $t + \alpha u \in X^\perp$.

Donc X^\perp est bien un sous-espace vectoriel de E .

2. On suppose X un sous-espace vectoriel de E .

Soit $x \in X \cap X^\perp$ donc $x \perp x$ donc $x = 0_E$.

Donc $X \cap X^\perp = \{0_E\}$.

3. Soit $X \subset Y$ et $t \in Y^\perp$.

Donc :

$$\forall x \in Y, \langle x, t \rangle = 0$$

Donc :

$$\forall x \in X, \langle x, t \rangle = 0$$

Donc $t \in X^\perp$.

4. Comme $X \subset \text{Vect}(X)$, on a :

$$\text{Vect}(X)^\perp \subset X^\perp$$

Soit $t \in X^\perp$. Soit $u = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \in \text{Vect}(X)$ ($x_i \in X$ et (λ_i) famille à support fini).

$$\langle t, u \rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle t, x_i \rangle = 0$$

Donc $t \in \text{Vect}(X)^\perp$.

34.38 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie

Théorème 34.38

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

1. F^\perp est l'unique supplémentaire de F dans E orthogonal à F . On l'appelle le supplémentaire orthogonal de F dans E .
2. $F^{\perp\perp} = F$.

1. Existence :

On remarque que la propriété est vraie pour $F = \{x\}$.

On suppose $F \neq \{0_E\}$.

Comme F est de dimension finie non nulle il possède une base orthonormée notée (e_1, \dots, e_n) .

Soit $x \in E$, on décompose $x = \underbrace{x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k}_{:=v} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k}_{\in F}$.

Or pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \langle v, e_i \rangle &= \langle x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, e_i \rangle \\ &= \langle x, e_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_i \rangle \\ &= \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $v \in F^\perp$.

Unicité :

On suppose que $F \oplus \perp G = F \oplus \perp F^\perp$.

Par définition, $G \subset F^\perp$.

Soit $t \in F^\perp$.

On décompose $t = f + g$.

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle f, f \rangle \\ &= \langle f, t - g \rangle \\ &= \langle f, t \rangle - \langle f, g \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. On sait que $F \subset (F^\perp)^\perp$.

Soit $x \in (F^\perp)^\perp$.

D'après (1), $x = f + v$ avec $f \in F, v \in F^\perp$.

Or :

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \langle v, v \rangle = \langle v, x - f \rangle \\ &= \langle v, x \rangle - \langle v, f \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $v = 0$.

34.49 Exemple

Exemple 34.49

On note F le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\sin, \cos)$ de $\mathcal{C}([0; 2\pi], \mathbb{R})$. Montrer que le projeté orthogonal de l'identité sur F pour le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

est la fonction $t \mapsto -2 \sin t$.

Première Méthode :

—

$$\begin{aligned}\|\sin\|^2 &= \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \pi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\ &= \pi \\ &= \|\cos\|^2\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}\langle \cos, \sin \rangle &= \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt \\ &= 0\end{aligned}$$

On note $f_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin$ et $f_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos$.

(f_1, f_2) est une base orthonormée de F .

D'après le cours :

$$P_F(\text{id}) = \langle \text{id}, f_1 \rangle f_1 + \langle \text{id}, f_2 \rangle f_2$$

Or :

$$\begin{aligned}\langle \text{id}, \sin \rangle &= \int_0^{2\pi} \sin(t) dt \\ &= [-t \cos(t)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(t) dt \\ &= -2\pi \\ \langle \text{id}, \cos \rangle &= \int_0^{2\pi} t \cos(t) dt \\ &= [t \sin(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(t) dt \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P_F(\text{id}) &= \langle \text{id}, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \rangle \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \\ &= -2 \sin \end{aligned}$$

Deuxième Méthode :

$P_F(\text{id}) \in \text{Vect}(\sin, \cos)$.

On écrit donc :

$$P_F(\text{id}) = a \sin + b \cos$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{id} - P_F(\text{id}) \in F &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \text{id} - P_F(\text{id}), \sin \rangle = 0 \\ \langle \text{id} - P_F(\text{id}), \cos \rangle = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \text{id}, \sin \rangle - a \|\sin\|^2 - b \langle \sin, \cos \rangle = 0 \\ \langle \text{id}, \cos \rangle - a \langle \sin, \cos \rangle - b \|\cos\|^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2\pi - a\pi - b \times 0 = 0 \\ 0 - a \times 0 + b\pi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

34.50 Exemple

Exemple 34.50

Soit E un espace euclidien de dimension finie non nulle et H un hyperplan de E de vecteur normal a . On note p la projection orthogonale sur H . Montrer que pour tout $x \in E$,

$$p(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle a}{\|a\|^2}$$

En notant q la projection orthogonale sur H^\perp .

Or $H^\perp = \text{Vect}(a) = \text{Vect}\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$.

$$\begin{aligned} q(x) &= \left\langle x, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \frac{a}{\|a\|} \\ &= \frac{\langle x, a \rangle a}{\|a\|^2} \end{aligned}$$

34.53 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Théorème 34.53

Soit E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de dimension finie et $x \in E$. On note p la projection orthogonale sur F .

1. On a

$$d(x, F) = \|x - p(x)\| = d(x, p(x))$$

La distance de x à F est donc atteinte et est donc un minimum. Le minimum est donc atteint en projetant x orthogonalement sur F .

2. Par ailleurs

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2$$

Comme F est un espace vectoriel de dimension finie, p est bien définie.

Soit $f \in F$. On écrit :

$$\begin{aligned} \|x - f\|^2 &= \left\| \underbrace{x - p(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p(x) - f}_{\in F} \right\|^2 \\ &= \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2 \quad (\text{Pythagore}) \\ &\geq \|x - p(x)\|^2 \end{aligned}$$

Donc $\|x - f\| \geq \|x - p(x)\|^2$.

Donc $\|x - f\| \geq \|x - p(x)\|$ ($t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante).

Par définition de la borne inférieure :

$$d(x, F) \geq \|x - p(x)\|$$

Or $p(x) \in F$ donc $\|x - p(x)\| \in \{d(x, f), f \in F\}$.

Donc $d(x, F) = \|x - p(x)\|$.

La dernière égalité provient du théorème de Pythagore.

34.54 Distance à un hyperplan affine

Théorème 34.54

Soit E un espace euclidien, \mathcal{H} un hyperplan affine passant par A et de vecteur normal unitaire a . Pour tout $M \in E$, on a

$$d(M, \mathcal{H}) = |\langle \overrightarrow{AM}, a \rangle|$$

On note H la direction de \mathcal{H} .

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{H}) &= d(M, A + H) \\ &= d(M - A, H) \\ &= d(\overrightarrow{AM}, H) \\ &= \|\overrightarrow{AM} - P_H(\overrightarrow{AM})\| \quad (34.53) \\ &= \|\langle \overrightarrow{AM}, a \rangle a\| \quad (34.50) \\ &= |\langle \overrightarrow{AM}, a \rangle| \quad (a \text{ unitaire}) \end{aligned}$$

Exercice 6

D'après le cours :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \text{tr}({}^tAB) \end{aligned}$$

définit un produit scalaire dont N est la norme associée.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

$$\begin{aligned} N(AB)^2 &= \text{tr}({}^tABAB) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (AB)_{ji}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki} \right]^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n A_{jk}^2 \right] \times \left[\sum_{p=1}^n B_{pi}^2 \right] \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n B_{pi}^2 \right) \times \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk}^2 \right) \\ &= N(A)^2 N(B)^2 \end{aligned}$$

Exercice 7

- (a) RAF d'après la définition d'un produit scalaire.

- (b) Pour $u \in E$, on note $f_u : E \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \langle u, x \rangle$ et on note $f : E \rightarrow E^*; u \mapsto f_u$.
On a $\dim(E^*) = \dim(E)$ donc f est surjective.
Soit $u \in \ker f$. Donc :

$$\forall x \in E, \langle u, x \rangle = 0$$

Donc $u = 0_E$.

Donc f est injective.

Donc f est bijective.

2. (a) On munit $\mathbb{R}_n[X]$ (de dimension finie) du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

On note $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}; P \mapsto P(0)$.

Ainsi, $\varphi \in \mathbb{R}_n[X]^*$.

D'après (1.b), il existe un unique $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] : \varphi(P) = \langle A, P \rangle$$

- (b) Par l'absurde, supposons qu'il existe $A \neq 0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P(t)A(t) dt = P(0)$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t^k A(t) dt = 0$.

En particulier, $\int_0^1 t A(t) dt = 0$.

Donc $t \mapsto tA(t)$ doit s'annuler sur $]0, 1[$.

Donc A possède au moins une racine sur $]0, 1[$.

Notons r_1, \dots, r_k les racines de A sur $]0, 1[$. ($k \leq n$)

On pose $P = X \prod_{i \in [1, k]} (X - r_i) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

On a $\int_0^1 \underbrace{P(t)A(t)}_{\text{de signe constant}} dt = P(0) = 0$.

Donc $PA = 0$. Absurde.