Chapitre 34

Espaces préhilbertiens réels

34 Espaces préhilbertiens réels **1**
34.4 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ . . . 2
34.5 Exemple . . . 2
34.14 Identités remarquables . . . 2
34.15 Proposition 34.15 bis . . . 3
34.16 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire . . . 3
34.17 Exemple . . . 4
34.18 Exemple . . . 4
34.20 Vecteur orthogonal à tout vecteur . . . 5
34.21 Exemple . . . 5
34.23 Exemple . . . 5
34.24 Exemple . . . 6
34.25 Propriétés des familles orthogonales . . . 6
34.26 Coordonnées dans une base orthonormale . . . 6
34.27 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale . . . 7
34.28 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt . . . 7
34.29 Exemple . . . 8
34.34 Propriétés de l'orthogonal d'une partie . . . 9
34.38 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie . . . 10
34.49 Exemple . . . 11
34.50 Exemple . . . 12
34.53 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie . . . 12
34.54 Distance à un hyperplan affine . . . 13

34.4 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Théorème 34.4

L'application

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; (X,Y) \mapsto {}^tXY = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé produit scalaire canonique.

Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

— ${}^tXY \in \mathbb{R}$ donc ${}^tYX = {}^t({}^tXY) = {}^tXY$

— bilinéarité : RAF

— ${}^tXX = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 0$ et $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$

34.5 Exemple

Exemple

Montrer que

$$(X,Y) \mapsto {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

est un exemple de produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ distinct du produit scalaire usuel.

— bilinéarité : RAF

— Pour $X, Y \in \mathbb{R}^2, {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \in \mathbb{R}$, donc :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y &= {}^t\left({}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y\right) \\ &= {}^tY{}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \\ &= {}^tY \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 \\ &= \underbrace{2(x^2+xy+y^2)}_{\geqslant 0 \text{ car } x^2+xy+y^2 \geqslant |xy|} \end{aligned}$$

En particulier, si ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = 0$ alors $|xy| = 0$, puis $x = y = 0$.
La forme est définie positive.

34.14 Identités remarquables

Propostion 34.14

Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

et

$$\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$$

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \text{ (bilinéarité)} \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \text{ (symétrie)}\end{aligned}$$

Idem pour la seconde identité.

34.15 Proposition 34.15 bis

Propostion 34.15 bis

Soit $\|.\|$ une norme euclidienne. Soit $x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|^2 &= \langle \lambda x, \lambda x\rangle \\ &= \lambda^2\|x\|^2\end{aligned}$$

34.16 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire

Théorème 34.16

Soit E un espace préhilbertien réel et x et y dans E.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\| \times \|y\|$$
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.
- Inégalité triangulaire :
$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$
l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires.
- Inégalité triangulaire, version distance :
$$|d(x,y) - d(y,z)| \leqslant d(y,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

- Si $x = 0$, l'inégalité est vérifiée pour tout $y \in E$.
  On suppose $x \neq 0$. On considère, pour $y \in E$ fixé :
$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto & \|tx+y\|^2 \\ &= \langle tx+y, tx+y\rangle \\ &= t^2\|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$
  f est une fonction polynomiale de degré 2 ($\|x| \neq 0$) positive donc de discriminant $\Delta \leqslant 0$.
  Or $\Delta = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$. D'où le résultat.
  Si $\Delta = 0$, alors f s'annule une unique fois en t_0. On a alors $\|t_0x+y\|^2 = 0$.
  Donc $t_0x + y = 0$.
  Donc (x,y) est liée.
  Réciproquement, si (x,y) est liée, alors $y = t_0x$ ($x \neq 0$) et on a encore $f(t_0) = 0$.
- Pour $(x,y) \in E^2$:
$$\begin{aligned}\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| &\Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\Leftrightarrow \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \leqslant \|x\|\|y\|\end{aligned}$$
  La dernière assertion est vraie d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la première l'est tout autant.
  RAS pour l'inégalité généralisée.
  Si $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz affirme que (par ex) :
$$y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$$

Mais alors (en supposant $x \neq 0$) :

$$\|1+\alpha\|\|x\| = \|x+y\| = (1+|\alpha|)\|x\|$$

Donc $|1+\alpha| = 1+|\alpha|$.
Nécessairement, $\alpha \geqslant 0$

34.17 Exemple

Exemple 34.17

Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

On munit $E = \mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right| &\leqslant \left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\| \\
\left|\sum_{k=1}^{n} 1 \times x_k\right| &\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \\
&= \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}
\end{aligned}$$

34.18 Exemple

Exemple 34.18

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Pour tout $f \in \mathcal{C}^1([a;b], \mathbb{R})$, on a

$$f(b)^2 - f(a)^2 \leqslant 2\sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt}\sqrt{\int_a^b f'(t)^2\,dt}$$

On munit $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) \cdot \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs f et f' :

$$\begin{aligned}
\|f\| \times \|f'\| &\geqslant |\langle f, f' \rangle| \\
&= \left|\int_a^b f(t)f'(t)\,dt\right| \\
&= \left|\left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_a^b\right| \\
&= \left|\frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2}\right|
\end{aligned}$$

34.20 Vecteur orthogonal à tout vecteur

Théorème 34.20

Dans un espace préhilbertien réel, le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur.

$\boxed{\Rightarrow}$ RAF
$\boxed{\Leftarrow}$ Si x est orthogonal à tout vecteur de E, alors $x \perp x$, donc $\|x\|^2 = 0$, donc $x = 0$.

34.21 Exemple

Exemple 34.21

Exemple 34.21 Montrer que pour le produit scalaire

$$(X, Y) \mapsto^t X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

sur $\mathbb{R}^2$, la base canonique n'est pas orthormale, mais la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2)\right)$ l'est.

$\|(1,0)\| = \sqrt{2} = \|(0,1)\|$
$\langle (1,0), (0,1) \rangle = 1$
Donc
$|\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0)\| = 1$
On a $\|(1,-2)\| = \sqrt{6}$
Et $\langle (1,0), (1,-2) \rangle = 0$.

34.23 Exemple

Exemple 34.23

La famille des fonctions $t \mapsto \sin(nt)$, où $n \in \mathbb{N}$ est orthonormale dans $\mathcal{C}([0; 2\pi], \mathbb{R})$ pour le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\, dt$$

On note pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}; x \mapsto \sin(nx)$.
Soit $p \neq n$.

$$\begin{aligned}
\langle f_p, f_n \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_n(t) f_p(t)\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(pt)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{n-p} \sin((n-p)t) - \frac{1}{n+p} \sin((n+p)t) \right]_0^{2\pi} \quad (n \neq p) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si $n = p$ alors :

$$\begin{aligned}
\|f_n\| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2nt))\, dt \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc (f_n) est bien une famille orthonormée.

34.24 Exemple

Exemple 34.24

Dans $\mathcal{C}([-1;1],\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux pour le produit scalaire

$$(f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$$

D'après le chapitre 4, si f est impaire :

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0$$

Si f est paire et g impaire, alors fg est impaire et ainsi $\langle f,g\rangle = 0$.

34.25 Propriétés des familles orthogonales

Théorème 34.25

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. Théorème de Pythagore : pour tout $(x,y) \in E^2$, x et y sont orthogonaux ssi $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. De surcro ^ it, si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

2. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre. En particulier, si E est de dimension finie n non nulle, toute famille orthogonale de n vecteurs est une base orthogonale.

1. RAF
2. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale. Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires à support fini. On suppose en outre que :

$$\forall i \in I, e_i \neq 0$$

On suppose que $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i e_i = 0$.
Soit $j \in I$.

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{i\in I} \lambda_i e_i, e_j \right\rangle &= 0 \\
&= \sum_{i\in I} \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=0 \text{ pour } i\neq j} \\
\text{donc } \lambda_j \|e_j\|^2 &= 0 \\
\text{donc } \lambda_j &= 0
\end{aligned}$$

Donc la famille est libre.

34.26 Coordonnées dans une base orthonormale

Théorème 34.26

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle et $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E, et $x \in E$. Alors

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$$

Autrement dit, les coordonnées de x dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ sont $(\langle x,e_1\rangle,\dots,\langle x,e_n\rangle)$.

Comme $(e_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une base, tout $x \in E$ s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Soit $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\langle x, e_j\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \lambda_j\end{aligned}$$

34.27 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale

Théorème 34.27

Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien et $(x,y) \in E^2$ de coordonnées respectives $X = (x_1,\ldots,x_n)$ et $Y = (y_1,\ldots,y_n)$ dans une certaine base orthonormale de E. Alors

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^{\mathrm{t}}XY \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = {}^{\mathrm{t}}XX$$

Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormale de E. Pour $(x,y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i \\ y &= \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i\rangle e_i\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j\rangle e_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\end{aligned}$$

34.28 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 34.28

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille libre de E. On peut transformer $(e_1,\ldots,e_n)$ en une famille orthonormale de $(u_1,\ldots,u_n)$ de E telle que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \mathrm{Vect}\,(e_1,\ldots,e_k) = \mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_k)\,.$$

Les vecteurs $u_1,\ldots,u_n$ peuvent être construits de proche en proche depuis u_1 jusqu'à u_n et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on n'a que deux choix possibles pour u_k :

$$\pm \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i\rangle u_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i\rangle u_i \right\|}$$

— Nécessairement, $u_1 = \pm\frac{e_1}{\|e_1\|}$ pour que u_1 soit unitaire et $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(u_1)$.
— Supposons construits $(u_1, \dots, u_k)$, $k \leqslant n-1$ vérifiant :
  — $Vect(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$
  — $(u_1, \dots, u_k)$ est une famille orthornormale

  Soit $v \in E$. Ccomme $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1})$.
  Si $v \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$, on a alors :

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i + \mu_{k+1} e_{k+1}$$

  On a :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k, v) \Leftrightarrow \lambda_{k+1} \neq 0$$

  On suppose désormais $\lambda_{k+1} \neq 0$.
  On a $(u_1, \dots, u_k, v)$ une familel orthogonale si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\forall i \in [\![1, k]\!], \langle u_i, v\rangle = 0 \\
&\text{ssi. } \forall i \in [\![1, k]\!], 0 = \langle u_1, \sum_{p=1}^{k} \lambda_p u_p + \lambda_{k+1} e_{k+1}\rangle \\
&= \sum_{p=1}^{k} \lambda_p \langle u_i, u_p\rangle + \lambda_{k+1}\langle u_i, e_{k+1}\rangle \\
&= \lambda_i + \lambda_{k+1}\langle u_i, e_{k+1}\rangle \\
&\text{ssi. } \forall i \in [\![1, k]\!], \lambda_i = -\lambda_{k+1}\langle u_i, e_{k+1}\rangle \\
&\text{ssi. } v = \lambda_{k+1}(e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, e_k\rangle u_i)
\end{aligned}$$

  Ainsi, $(u_1, \dots, u_{k+1})$ est orthonormée avec $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ si et seulement si :

$$u_{k+1} = \pm \frac{e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}, u_i\rangle u_i}{\|e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}, u_i\rangle u_i\|}$$

34.29 Exemple

Exemple 34.29

Sur $\mathbb{R}[X]$, la famille $\left(1, \sqrt{3}(2X-1), \sqrt{5}\left(6X^2 - 6X + 1\right)\right)$ est orthonormale pour le produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

On orthonormalise $(1, X, X^2) = (P_0, P_1, P_2)$ avec Gram-Schmidt.
— $\|P_0\| = 1$ donc on pose $V_0 = P_0$.
— Soit $\tilde{V_1} = X + aV_0$

$$\langle \tilde{V_1}, V_0\rangle = \langle X, V_0\rangle + a\|V_0\|^2 = \frac{1}{2} + a$$

  On pose donc $\tilde{V_1} = X - \frac{1}{2}$. On a :

$$\begin{aligned}
\|\tilde{V_1}\|^2 &= \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2\, dt \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

On pose $V_1 = \frac{\tilde{V_1}}{\|V_1\|} = \sqrt{12}(X - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}(2X-1)$.
On pose $\tilde{V_2} = X^2 + aV_1 + bV_0$.
On a :

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{V_2}, V_1 \rangle &= \langle X^2, V_1 \rangle + a\|V_1\|^2 \\
&= \sqrt{3}\int_0^1 t^2(2t-1)\,dt + a \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6} + a \\
\langle \tilde{V_2}, V_0 \rangle &= \langle X^2, V_0 \rangle + b\|V_0\|^2 \\
&= \frac{1}{3} + b
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
\tilde{V_2} &= X^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{3}(2X-1) - \frac{1}{3} \\
&= X^2 - X + \frac{1}{6} \\
\|\tilde{V_2}\|^2 &= \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2\,dt \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{180}
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
V_2 &= \sqrt{180}(X^2 - X + \frac{1}{6}) \\
&= \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)
\end{aligned}$$

34.34 Propriétés de l'orthogonal d'une partie

Propostion 34.34

Avec les mêmes hypothèses que la définition précédente :

1. $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, orthogonal à X.
2. Si X est un sous-espace vectoriel de E, orthogonal à X.
3. Si $X \subset Y$ alors $Y^\perp \subset X^\perp$.
4. On a $X^\perp = \mathrm{Vect}(X)^\perp$ et $X \subset (X^\perp)^\perp$

1. $X^\perp \perp X$.

   — $X^\perp \subset E$
   — $0 \in X^\perp$
   — Si $(t,u) \in (X^\perp)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:

   $$\begin{aligned}
   \forall x \in X, \langle t + \alpha u, x \rangle &= \langle t, x \rangle + \alpha \langle u, x \rangle \\
   &= 0
   \end{aligned}$$

   Donc $t + \alpha u \in X^\perp$.
   Donc $X^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

2. On suppose X un sous-espace vectoriel de E.
   Soit $X \in X \cap X^\perp$ donc $x \perp x$ donc $x = 0_E$.
   Donc $X \cap X^\perp = \{0_E\}$.

3. Soit $X \subset Y$ et $t \in Y^{\perp}$.
   Donc :
   $$\forall x \in Y, \langle x, t \rangle = 0$$
   Donc :
   $$\forall x \in X, \langle x, t \rangle = 0$$
   Donc $t \in X^{\perp}$.
4. Comme $X \subset \mathrm{Vect}(X)$, on a :
   $$\mathrm{Vect}(X)^{\perp} \subset X^{\perp}$$
   Soit $t \in X^{\perp}$. Soit $u = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i \in \mathrm{Vect}(X)$ ($X_i \in X$ et (λ_i) famille à support fini).
   $$\langle t, u \rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle t, x_i \rangle = 0$$
   Donc $t \in \mathrm{Vect}(X)^{\perp}$.

34.38 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie

Théorème 34.38

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

1. $F^{\perp}$ est l'unique supplémentaire de F dans E orthogonal à F. On l'appelle le supplémentaire orthogonal de F dans E.
2. $F^{\perp\perp} = F$.

1. Existence :
   On remarque que la propriété est vraie pour $F = \{x\}$.
   On suppose $F \neq \{0_E\}$.
   Comme F est de dimension finie non nulle il possède une base orthonormée notée $(e_1, \dots, e_n)$.
   Soit $x \in E$, on décompose $x = \underbrace{x - \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k}_{:=v} + \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k}_{\in F}$.
   Or pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:
   $$\begin{aligned} \langle v, e_i \rangle &= \langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, e_i \rangle \\ &= \langle x, e_i \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_i \rangle \\ &= \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$
   Donc $v \in F^{\perp}$.
   Unicité :
   On suppose que $F \oplus \perp G = F \oplus \perp F^{\perp}$.
   Par définition, $G \subset F^{\perp}$.
   Soit $t \in F^{\perp}$.
   On décompose $t = f + g$.
   $$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle f, f \rangle \\ &= \langle f, t - g \rangle \\ &= \langle f, t \rangle - \langle f, g \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. On sait que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.
   Soit $x \in (F^{\perp})^{\perp}$.
   D'après (1), $x = f + v$ avec $f \in F, v \in F^{\perp}$.
   Or :

$$\begin{aligned} \|v\|^2 = \langle v, v\rangle &= \langle v, x - f\rangle \\ &= \langle v, x\rangle - \langle v, f\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Donc $v = 0$.

34.49 Exemple

Exemple 34.49

On note F le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ de $\mathcal{C}([0;2\pi],\mathbb{R})$. Montrer que le projeté orthogonal de l'identité sur F pour le produit scalaire

$$(f,g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

est la fonction $t \mapsto -2\sin t$.

Première Méthode :

—

$$\begin{aligned} \|\sin\|^2 &= \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,dt = \pi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt \\ &= \pi \\ &= \|\cos\|^2 \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} \langle \cos, \sin\rangle &= \int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2t)\,dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

On note $f_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin$ et $f_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos$.
(f_1, f_2) est une base orthonormée de F.
D'après le cours :

$$P_F(\mathrm{id}) = \langle \mathrm{id}, f_1\rangle f_1 + \langle \mathrm{id}, f_2\rangle f_2$$

Or :

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{id}, \sin\rangle &= \int_0^{2\pi} \sin(t)\,dt \\ &= [-t\cos(t)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(t)\,dt \\ &= -2\pi \\ \langle \mathrm{id}, \cos\rangle &= \int_0^{2\pi} t\cos(t)\,dt \\ &= [t\sin(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(t)\,dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P_F(\mathrm{id}) &= \langle \mathrm{id}, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \angle \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \\ &= -2\sin \end{aligned}$$

<u>Deuxième Méthode :</u>
$P_F(\mathrm{id}) \in \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$.
On écrit donc :

$$P_F(\mathrm{id}) = a\sin + b\cos$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathrm{id} - P_F(\mathrm{id}) \in F &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \mathrm{id} - P_F(\mathrm{id}), \sin \rangle = 0 \\ \langle \mathrm{id} - P_F(\mathrm{id}), \cos \rangle = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \mathrm{id}, \sin \rangle - a\|\sin\|^2 - b\langle \sin, \cos \rangle = 0 \\ \langle \mathrm{id}, \cos \rangle - a\langle \sin, \cos \rangle - b\|\cos\|^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2\pi - a\pi - b \times 0 = 0 \\ 0 - a \times 0 + b\pi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

34.50 Exemple

Exemple 34.50

Soit E un espace euclidien de dimension finie non nulle et H un hyperplan de E de vecteur normal a. On note p la projection orthogonale sur H. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$p(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle a}{\|a\|^2}$$

En notant q la projection orthogonale sur $H^\perp$.
Or $H^\perp = \mathrm{Vect}(a) = \mathrm{Vect}\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$.

$$\begin{aligned} q(x) &= \langle x, \frac{a}{\|a\|} \rangle \frac{a}{\|a\|} \\ &= \frac{\langle x, a \rangle a}{\|a\|^2} \end{aligned}$$

34.53 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Théorème 34.53

Soit E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de dimension finie et $x \in E$. On note p la projection orthogonale sur F.

1. On a
$$d(x, F) = \|x - p(x)\| = d(x, p(x))$$
La distance de x à F est donc atteinte et est donc un minimum. Le minimum est donc atteint en projetant x orthogonalement sur F.
2. Par ailleurs
$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2$$

Comme F est un espace vectoriel de dimension finie, p est bien définie.
Soit $f \in F$. On écrit :

$$\begin{aligned} \|x - f\|^2 &= \|\underbrace{x - p(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p(x) - f}_{\in F}\|^2 \\ &= \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2 \text{ (Pythagore)} \\ &\geqslant \|x - p(x)\|^2 \end{aligned}$$

Donc $\|x-f\| \geqslant \|x-p(x)\|^2$.
Donc $\|x-f\| \geqslant \|x-p(x)\|$ ($t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante).
Par définition de la borne inférieure :

$$d(x,F) \geqslant \|x-p(x)\|$$

Or $p(x) \in F$ donc $\|x-p(x)\| \in \{d(x,f), f \in F\}$.
Donc $d(x,F) = \|x-p(x)\|$.
La dernière égalité provient du théorème de Pythagore.

34.54 Distance à un hyperplan affine

Théorème 34.54

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{H}$ un hyperplan affine passant par A et de vecteur normal unitaire a. Pour tout $M \in E$, on a

$$d(M,\mathcal{H}) = |\langle \overrightarrow{AM}, a\rangle|$$

On note H la direction de $\mathcal{H}$.

$$\begin{aligned}
d(M,\mathcal{H}) &= d(M, A+H)\\
&= d(M-A, H)\\
&= d(\vec{AM}, H)\\
&= \|\vec{AM} - P_H(\vec{AM})\| \text{ (34.53)}\\
&= \|\langle \vec{AM}, a\rangle a\| \text{ (34.50)}\\
&= |\langle \vec{AM}, a\rangle| \text{ (a unitaire)}
\end{aligned}$$

Exercice 6

D'après le cours :

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 &\to \mathbb{R}\\
(A,B) &\mapsto \mathrm{tr}({}^t AB)
\end{aligned}$$

définit un produit scalaire dont N est la norme associée.
Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

$$\begin{aligned}
N(AB)^2 &= \mathrm{tr}({}^t ABAB)\\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (AB)_{ji}^2\\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n A_{jk}B_{ki}\right]^2\\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n A_{jk}^2\right] \times \left[\sum_{p=1}^n B_{pi}^2\right] \text{ (Cauchy-Schwarz)}\\
&= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n B_{pi}^2\right) \times \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk}^2\right)\\
&= N(A)^2 N(B)^2
\end{aligned}$$

Exercice 7

1. (a) RAF d'après la définition d'un produit scalaire.

(b) Pour $u \in E$, on note $f_u : E \to \mathbb{R}; x \mapsto \langle u, x\rangle$ et on note $f : E \to E^*; u \mapsto f_u$.
On a $\dim(E^*) = \dim(E)$ donc f est surjective.
Soit $u \in \ker f$. Donc :

$$\forall x \in E, \langle u, x\rangle = 0$$

Donc $u = 0_E$.
Donc f est injective.
Donc f est bijective.

2. (a) On munit $\mathbb{R}_n[X]$ (de dimension finie) du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$$

On note $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}; P \mapsto P(0)$.
Ainsi, $\varphi \in \mathbb{R}_n[X]^*$.
D'après (1.b), il existe un unique $A \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] : \varphi(P) = \langle A, P\rangle$$

(b) Par l'absurde, supposons qu'il existe $A \neq 0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P(t)A(t)\, dt = P(0)$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 t^k A(t)\, dt = 0$.
En particulier, $\int_0^1 tA(t)\, dt = 0$.
Donc $t \mapsto tA(t)$ doit s'annuler sur $]0, 1[$.
Donc A possède au moins une racine sur $]0, 1[$.
Notons $r_1, \ldots, r_k$ les racines de A sur $]0, 1]$. ($k \leqslant n$)
On pose $P = X \prod_{i\in[\![1,k]\!]}(X - r_i) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.
On a $\int_0^1 \underbrace{P(t)A(t)}_{\text{de signe constant}}\, dt = P(0) = 0$.
Donc $PA = 0$. Absurde.

Exercice 10

— Soit $e = (e_1, \ldots, e_n), \mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ deux bases orthonormales de E.
On pose $P = P_b^e$. Simplifions ${}^tPP$.
On note $E_1, \ldots, E_n$ les colonnes de P.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$\begin{aligned}[{}^tPP]_{ij} &= {}^tE_iE_j \\ &= \langle e_i, b_j\rangle \text{ (b orthonormée)} \\ &= \delta_{ij} \text{ (e orthonormale)}\end{aligned}$$

Ainsi :

$${}^tPP = I_n$$

— Réciproquement si b est toujours orthonormée, si ${}^tPP = I_n$ alors e est une base orhtonormée.
— Si ${}^tPP = I_n$, alors $\det P = \pm 1$.
— Retour à l'exercice. Soit B une base orthonormée.
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.
  — Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, l'inégalité est vérifiée ($\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = 0$)
  — On suppose donc que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre, donc une base de E.
  On orthonormalise cette pas par le procédé de Gram-Schmidt. On noté e la base obtenue.
  On a :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{B}}^e P_e^{\mathcal{F}} \text{ (changement de bases)}$$

avec $\det(P_{\mathcal{B}}^{e}) = \pm 1$, $P_{e}^{\mathcal{F}}$ triangulaire supérieure (avec une diagonale strictaire positive si on choisit avec un plus dans Gram-Schmidt).

$$\begin{aligned}
|\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})| &= |\det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}})| \\
&= |\det(P_{\mathcal{B}}^{e})| \times |\det(P_{e}^{\mathcal{F}})| \\
&= |\det(P_{e}^{\mathcal{F}})| \\
&= \left|\prod_{k=1}^{n} \langle x_k, e_k \rangle\right| \\
&\leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\| \|e_k\| \text{ (Cauchy-Schwarz)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|
\end{aligned}$$