Maths - MP2I

Axel Montlahuc

2024/2025

Chapitre 1

Calculs Algébriques

1.20 Somme des carrés et des cubes

— Somme des carrés :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note la proposition :

$$P(n) : « \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} »$$

Démontrons-la par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{0} k^2 = 0$$

et :

$$\frac{0 \times (0+1) \times (2 \times 0 + 1)}{6} = 0$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour un n fixé dans $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6}(n(2n+1) + 6(n+1)) \\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie aussi.

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

— Somme des cubes :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note la proposition :

$$P(n) : « \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} »$$

Démontrons-la par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{0} k^3 = 0$$

et :

$$\frac{0 \times (0+1)^2}{4} = 0$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour un n fixé dans $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4(n+1)) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4) \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie aussi.

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

1.39 Formule de Pascal

Démontrons pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ la relation :

$$\text{« } \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \text{ »}$$

La relation est vraie si $p > n$ (on a $0 = 0 + 0$) et si $p = n$ (qui donne $1 = 0 + 1$).

Soit $1 \leq p \leq n$:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p)!}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p}\right) \\ &= \frac{(n-1)! \times n}{(p-1)!(n-1-p)! \times p(n-p)} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{p}\end{aligned}$$

1.41 Formule du capitaine

Démontrons pour n et p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$ la relation :

$$\text{« } n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p} \text{ »}$$

On a :

$$n\binom{n-1}{p-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = p \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = p\binom{n}{p}$$

1.42 Formule du binôme de Newton

Soit $(x,y) \in \mathbb{C}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note la proposition :

$$P(n) : \text{« } (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} \text{ »}$$

Démontrons-la par récurrence.

<u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$, on a :

$$(x+y)^0 = 1$$

et

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$$

Donc $P(0)$ est vraie.

<u>Hérédité :</u> On suppose $P(n)$ vraie pour un n fixé dans $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} && \textit{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^{k+1} y^{n-k} + x^k y^{n+1-k}) && \textit{(linéarité)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} && \textit{(translation)} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x^k y^{n+1-k} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} && \textit{(formule de Pascal)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie aussi.

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Chapitre 2

Logique

2.17 Equivalence logiques

2.17.1 Double négation

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

On remarque que la première et la deuxième colonne sont identiques, on a donc :

$$p \iff \neg(\neg p)$$

2.17.2 Commutativité

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

On remarque que la troisième et la quatrième colonne sont identiques, on a donc :

$$p \wedge q \iff q \wedge p$$

Raisonnement analogue pour la disjonction $\vee$.

2.17.3 Associativité

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

On remarque que la cinquième et la septième colonne sont identiques, on a donc :

$$(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$$

Raisonnement analogue pour la disjonction $\vee$.

2.17.4 Loi de Morgan

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

On remarque que la quatrième et la septième colonne sont identiques, on a donc :

$$\neg(p \wedge q) \iff (\neg p) \vee (\neg q)$$

Raisonnement analogue pour $\neg(p \vee q) \iff (\neg p) \wedge (\neg q)$

2.17.5 Double implication

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

On remarque que la troisième et la sixième colonne sont identiques, on a donc :

$$(p \Leftrightarrow q) \iff ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$$

2.17.6 Distributivité

p	q	r	$p \wedge q$	$r \vee (p \wedge q)$	$r \vee p$	$r \vee q$	$(r \vee p) \wedge (r \vee q)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

On remarque que la cinquième et la huitième colonne sont identiques, on a donc :

$$r \vee (p \wedge q) \iff (r \vee p) \wedge (r \vee q)$$

Chapitre 3

Ensembles et applications

3.12 Propriétés du produit cartésien

Soit x et y. On a :

1.

$$\begin{aligned} (x,y) \in E \times F &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } y \in F \\ \text{Donc } (x,y) \notin E \times F &\Leftrightarrow x \notin E \text{ ou } y \notin F \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} E \times F \neq \emptyset &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in E \times F \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E \text{ et } \exists y \in F \\ &\Leftrightarrow E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \text{non } (E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} E \times F = F \times E &\Leftrightarrow \begin{cases} E \times F = F \times E \text{ et } E = \emptyset \\ E \times F = F \times E \text{ et } F = \emptyset \\ E \times F = F \times E \text{ et } E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset \\ E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset \text{ et } \forall (x,y) \in E \times F, (x,y) \in F \times E \text{ et } \forall (a,b) \in F \times E, (a,b) \in E \times F \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset \\ E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset \text{ et } \forall x \in E, x \in F \text{ et } \forall y \in F, y \in E \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset \\ E = F \end{cases} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (x,y) \in (E \times F) \cup (F \times G) &\Leftrightarrow (x,y) \in E \times F \text{ ou } (x,y) \in F \times G \\ &\Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in F) \text{ ou } (x \in F \text{ et } y \in G) \\ &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } y \in F \cup G \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} (x,y) \in (E \times F) \cap (G \times H) &\Leftrightarrow (x,y) \in E \times F \text{ et } (x,y) \in G \times H \\ &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } y \in F \text{ et } x \in G \text{ et } y \in H \\ &\Leftrightarrow x \in E \cap G \text{ et } y \in F \cap H \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (E \cap G) \times (F \cap H) \end{aligned}$$

3.18 Associativité des relations

Les ensembles de départ et d'arrivée sont bien égaux (à E et H respectivement). Soit $(x,y) \in E \times H$

$$\begin{aligned} x(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} y &\Leftrightarrow \exists z \in F, x(\mathcal{T} \circ \mathcal{S})z \text{ et } z\mathcal{R}y \\ &\Leftrightarrow \exists z \in F, \exists v \in G, (x\mathcal{T}v \text{ et } v\mathcal{S}z) \text{ et } z\mathcal{R}y \\ &\Leftrightarrow \exists z \in F, \exists v \in G, x\mathcal{T}v \text{ et } (v\mathcal{S}z \text{ et } z\mathcal{R}y) \\ &\Leftrightarrow \exists v \in G, x\mathcal{T}v \text{ et } v(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})y \\ &\Leftrightarrow x\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})y \end{aligned}$$

3.20 Propriétés des relations réciproques

— RAF

— Les ensembles de départ sont égaux respectivement à E et à G.
Soit $(x,y) \in G \times E$. On a :

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} y &\Leftrightarrow \exists \alpha \in F, x\mathcal{S}^{-1}\alpha \text{ et } \alpha\mathcal{R}^{-1}y \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in F, \alpha\mathcal{S}x \text{ et } y\mathcal{R}\alpha \\ &\Leftrightarrow y\mathcal{S} \circ \mathcal{R}x \\ &\Leftrightarrow x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1}y \end{aligned}$$

3.23 Composition de fonctions

Soit f une fonction de E vers F.
Soit g une fonction de E vers G.

$$g \circ f \text{ est une relation de } E \text{ vers } G$$

Soit $(x,y,y') \in E \times G \times G$. On suppose

$$\begin{cases} x(g \circ f)y \\ x(g \circ f)y' \end{cases}$$

Donc on choisit α dans F tel que :

$$xf\alpha \text{ et } \alpha gy$$

et β dans F tel que :

$$xf\beta \text{ et } \beta gy'$$

Or f est une fonction, donc $\alpha = \beta$.
Donc αgy et $\alpha gy'$, or g est une fonction, donc $y = y'$. Par définition, $g \circ f$ est une fonction.

3.30 Schémas de raisonnement : montrer l'injectivité/surjectivité/bijectivité

Injectivité :
Soit $(x,x') \in E^2$.
On suppose que $f(x) = f(x')$.
$\vdots$
Donc $x = x'$.

Surjectivité :
Soit $y \in F$.
$\vdots$
On choisit ... tel que :
$\vdots$
Donc$f(x) = y$

Bijectivité :
Pour la bijectivité, on montre l'injectivité et la surjectivité séparément.

3.35 Composée d'injections/surjections

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

— On suppose que f et g sont injectives.
Soit $(x, x') \in E^2$.

$$\begin{aligned}
\text{On suppose que } g \circ f(x) &= g \circ f(x') \\
\text{Donc } g(f(x)) &= g(f(x')) \\
\text{Donc } f(x) &= f(x') && \text{(g est injective)} \\
\text{Donc } x &= x' && \text{(f est injective)}
\end{aligned}$$

— On suppose que f et g sont surjectives.
Soit $y \in G$.
Par surjectivité de g, on choisit $\alpha \in F$ tel que $g(\alpha) = y$.
Par surjectivité de f, on choisit $x \in E$ tel que $f(x) = \alpha$.
Donc $g \circ f(x) = y$.
Donc $g \circ f$ est surjective.

3.36 Condition nécessaire pour une composition injective/surjective

— Soit $(x, x') \in E^2$ tels que :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x') \\
\text{Donc } g(f(x)) &= g(f(x')) \\
\text{Donc } x &= x'
\end{aligned}$$

Donc f est injective.

— On suppose $g \circ f$ surjective.
Soit $y \in G$. Soit $\alpha \in E$ tel que $g \circ f(\alpha) = y$.
On pose $x = f(\alpha) \in F$.
Donc $g(x) = y$ Donc g est surjective.

3.37 Réciproque et bijection

Soit $f : E \to F$ et f^{-1} la relation réciproque de f
— f^{-1} est une fonction si et seulement si f est injective.
— Si f^{-1} est une fonction, c'est une application.
ssi. $Def(f^{-1}) = F$
ssi. f est surjective.

3.38 Inverse d'une composée de bijections

Propositions (3.35), (3.27) et (3.20)

3.39 Condition nécessaire et suffisante de bijectivité

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que f est bijective.
On pose $g = f^{-1}$ sa bijection réciproque.
On a bien $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Soit $g : F \to E$ vérifiant $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$.
En particulier, $g \circ f$ est injective, donc f est injective.
En particulier, $f \circ g$ est surjective, donc f est surjective.
Donc f est bijective.
Or $f \circ g = id_F$.
Donc $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ id_F$.
Soit $g = f^{-1}$.

Chapitre 4

Généralités sur les fonctions

4.21 Exemple

On suppose que $f \geq g$. Ainsi :

$$|f-g| = f-g \Leftrightarrow \frac{f+g+|f-g|}{2} = f$$

4.23 Remarque

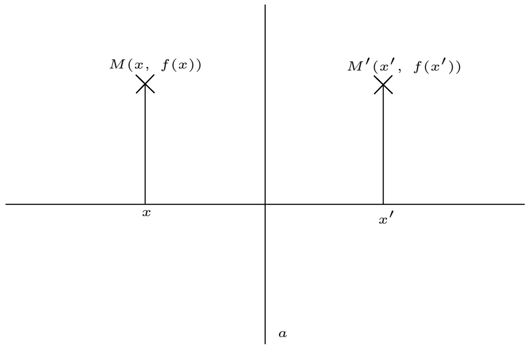
Soit $a \in \mathbb{Q}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
— Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x+a \in \mathbb{Q}$, donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x+a) = 1 = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.
— Si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $x+a \notin \mathbb{Q}$, donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x+a) = 0 = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

4.27 Axe de symétrie

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Soit $(x, x') \in I^2$.
M et M' sont symétriques par rapport $x = a$

ssi. $\begin{cases} a = \frac{x+x'}{2} \\ f(x) = f(x') \end{cases}$

ssi. $\begin{cases} x' = 2a - x \\ f(x) = f(x') \end{cases}$



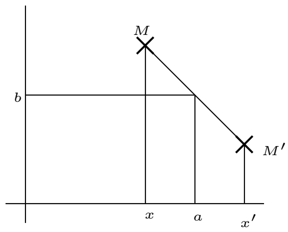
4.28 Centre de symétrie

On reprend les mêmes notations qu'à la (4.27).

M et M' sont symétriques par rapport à $A(a, b)$

ssi. $\begin{cases} a = \frac{x+x'}{2} \\ b = \frac{f(x)+f(x')}{2} \end{cases}$

ssi. $\begin{cases} x' = 2a - x \\ f(x') = 2b - f(x) \end{cases}$



4.51 Exemple

1. $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x+x^2)^2}$
2. $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$
3. $f'(x) = -3\frac{e^x(x-1)}{x^2} \sin\left(\frac{e^x}{x}\right) \cos^2\left(\frac{e^x}{x}\right)$

4.52 Théorème de la bijection dérivable

On suppose la dérivabilité de f^{-1}. Par définition :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_I$$

D'après la proposition (4.48.4), on a :

$$\begin{aligned} (f^{-1})' \circ f' \times f^{-1} &= (f \circ f^{-1})' \\ &= \mathrm{Id}_I' \\ &= 1 \end{aligned}$$

Comme f ne s'annule pas sur I, on a :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

4.61 Primitives d'une fonction sur un intervalle

— Si F et G sont deux primitives de f sur l'intervalle I, alors :

$$\begin{aligned}\forall n \in I, (F-G)'(x) &= F'(x) - G'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

Comme I est un intervalle, $F - G$ est constante (4.53).
Réciproquement, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $F + a$ est aussi une primitive de f sur I.

— Soit G une primitive de f sur I. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Or pour $F = G + a - G(x_0)$, F est une primitve de f sur I et $F(x) = a$.
L'unicité est donnée par le point précédent.

4.62 Exemple

1. Sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
   Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= -\frac{-\sin x}{\cos x}\end{aligned}$$

   La primitive de tan sur I est : $x \mapsto -\ln|\cos x| = \ln \cos x$.

2. Sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\forall x \in I, \tan^2 x = \tan^2 x + 1 - 1$$

   Une primitive de $\tan^2$ sur I est : $x \mapsto \tan x - x$.

3. Sur $I = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, x\sqrt{1+x^2} &= x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \times 2x \times (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

   Une primitive de $x \mapsto x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \mapsto \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$.
4. Sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x > 0, \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \ln x$$

   Une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est : $x \mapsto \frac{1}{2} \ln^2 x$.

4.65 Remarque

$G : y \mapsto yg(y) - F(g(y)) + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}G'(y) &= g(y) + yg'(y) - g'(y)f(g(y)) \\ &= g(y) + \cancel{yg'(y)} - \cancel{g'(y)y} \\ &= g(y)\end{aligned}$$

4.66 Exemple

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-1}^{1} \frac{t^n}{1+t^2}\,dt \right| &\leq \int_{-1}^{1} \frac{|t^n|}{1+t^2}\,dt && \text{(Inégalité triangulaire)} \\
&\leq \int_{-1}^{1} |t|^n\,dt && (\forall t, \frac{|t|^n}{1+t^2} \leq |t|^n) \\
&= (-1)^n \int_{-1}^{0} t^n\,dt + \int_{0}^{1} t^n\,dt && \text{(Relation de Chasles)} \\
&= (-1)^n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{0}^{1} \\
&= -\frac{(-1)^n(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{2}{n+1}
\end{aligned}$$

4.69 Intégration par partie

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt &= \int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))\,dt \\
&= \int_a^b (fg)'(t)\,dt \\
&= [f(t)g(t)]_a^b
\end{aligned}$$

4.70 Changement de variable

Comme f est une fonction continue sur $[a, b]$, on choisit une primitive F de f sur $[a, b]$. (Théorème fondamental du calcul in
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt &= [F(t)]_{u(a)}^{u(b)} \\
&= F \circ u(b) - F \circ u(a)
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt &= \int_a^b F'(u(t)) \times u'(t)\,du(t) \\
&= [F \circ u(t)]_a^b
\end{aligned}$$

4.72 Exemple

Si $x = \sin t$, alors $dx = \cos t\,dt$.
Pour $t = 0$, $x = \sin 0 = 0$.
Pour $t = \frac{\pi}{2}$, $x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.
Or $t \mapsto \sin t \in \mathcal{C}^1(\left[0; \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R})$.

D'après le théorème de changement de variable :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \\
&= \left[\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

4.74 Méthode

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{a;b\}$, trouver c et d tel que $\frac{\alpha x+\beta}{(x-a)(x-b)} = \frac{c}{x-a} + \frac{d}{x-b}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha x+\beta}{(x-b)} &= c + \frac{d(x-a)}{(x-b)} && \text{(On multiplie par } (x-a)\text{)} \\
c &= \frac{\alpha a+\beta}{a-b} && (x=a) \\
d &= \frac{\alpha b+\beta}{b-a} && (x=b)
\end{aligned}$$

4.75 Exemple

$$f : x \mapsto \frac{2x-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{4}{3(x+1)} + \frac{4}{5(x-3)}$$

Une primitive de f sur $]-1;3[$ est : $x \mapsto \frac{3}{4}\ln|x+1| + \frac{5}{4}\ln|x-3| = \frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{5}{4}\ln(x-3)$

Chapitre 5

Fonctions usuelles

5.2 Propriétés du logarithme

Par définition, ln est définie et dérvable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

On montre par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$\text{"ln est dérivable } n \text{ fois et } \forall n > 0, \ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\text{"}$$

<u>Initialisation :</u>
La propriété est vraie pour $n = 1$.

<u>Hérédité :</u>
Si elle est vraie pour $n \geq 1$, par théorème d'opérations, $\ln^{(n)}$ est encore dérivable et :

$$\begin{aligned}\forall x > 0, ln^{(n+1)}(x) &= \left[\ln^{(x)}\right](x) \\ &= (-1)^n n! x^{-n-1}\end{aligned}$$

Comme $\ln' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, alors ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

5.3 Propriété fondamentale du logarithme

On montre seulement la propriété pour $a > 0$ et $b > 0$.
On fixe $b > 0$ et on considère :

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; x \mapsto \ln(xb)$$

Par composition, $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et :

$$\forall x > 0, f'(x) = b \times \frac{1}{xb} = \frac{1}{x}$$

Donc f est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On choisit $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f = \ln + c$$

En particulier :

$$f(1) = \ln 1 + c$$

Soit :

$$\ln b = c$$

Ainsi :

$$\forall x > 0, \ln(xb) = \ln x + \ln b$$

On a par conséquent :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 &= \ln 1 \\ &= \ln(x \times \frac{1}{x}) \\ &= \ln x + \ln \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Donc pour $a > 0$ et $b > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right)\\ &= \ln a + \ln\frac{1}{b}\\ &= \ln a - \ln b\end{aligned}$$

5.4 Limites usuelles de la fonction logarithme

On commence par montrer que :

$$\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On sait que ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc d'après le théorème de la limite monotone :

$$\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{ou} \qquad \ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$$

Soit $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned}\ln n &= \int_1^n \frac{dt}{t}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dt}{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right) - 1\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Par théorème de comparaison :

$$\ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc :

$$\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Enfin :

$$\forall x > 0, \ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc par composition :

$$\ln x \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty$$

Par taux d'accroissement, en introduisant :

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}; x \mapsto \ln(1+x)\\ f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})\\ \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}\underset{x\to0}{f'(0)} = 1\end{aligned}$$

5.8 Propriétés de la fonction exponentielle

D'après les résultas précédents (5.2), (5.4), on applique le théorème de la bijection dérivable. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \exp' x &= \frac{1}{\ln' \circ \exp x}\\ &= \exp x\end{aligned}$$

On obtient directement que $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ et que $\exp^{(n)} = \exp n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.9 Propriété fondamentale de l'exponentielle

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On choisit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

$$x = \ln a \text{ et } y = \ln b$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \exp(\ln a + \ln b)\\ &= \exp(\ln(ab))\\ &= ab\\ &= \exp x \times \exp y\end{aligned}$$

Ainsi, $\exp 0 = \exp(0+0) = \exp^2 0$.
Donc $\exp 0 \in \{0; 1\}$
Or exp est à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$, donc $\exp 0 = 1$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp 0 = \exp(x - x) = \exp x \times \exp(-x) = 1$$

5.15 Dérivée d'une fonction puissance

Soit $y > 0$. On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto y^x = \exp(x \ln y)$.
$f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc par composition :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \ln y \times \exp(x \ln y)\\ &= \ln y \times y^x\end{aligned}$$

5.21 Croissances comparées en $+\infty$

1. On commence par montrer que $\frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Soit $x \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned}0 \leq \frac{\ln x}{x} &= \frac{1}{x}\int_1^x \frac{dt}{t}\\ &\leq \frac{1}{x}\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}\\ &= \frac{1}{x}\left[2\sqrt{t}\right]_1^x\\ &= \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}\\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

   D'après le théorème d'encadrement, $\frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Soit $a > 0$ et $x > 0$:

$$\frac{\ln x}{x^a} = \frac{1}{a} \times \frac{\ln x^a}{x^a} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{(composition et théorème d'opérations)}$$

2. On utilise le changement de variable :

$$x = (\ln y)^{\frac{1}{a}}, \text{ soit } y = e^{ax}$$

Ainsi :

$$\frac{x^a}{e^x} = \frac{\ln y}{y^{\frac{1}{a}}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 \text{ par composition si } a > 0 \\ 0 \text{ par théorème d'opérations si } a \leq 0 \end{cases}$$

5.22 Croissances comparées en 0

On utilise la proposition (5.21.1) avec $y = \frac{1}{x}$.

5.43.2 Formule de trigonométrie hyperbolique

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b) &= \frac{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b})}{4} + \frac{(e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})}{4} \\ &= \frac{2e^{a+b} + 2e^{-(a+b)}}{4} \\ &= ch(a+b) \end{aligned}$$

Chapitre 10

Structures algébriques

10.3 Exemple

Exemple

Soit $E =]-1;1[$. Pour $(x,y) \in E^2$, on pose : $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$. Montrer que l'on définit ainsi une lci dans E.

On fixe $y \in E$. On note $\varphi : [-1;1] \to \mathbb{R}; x \mapsto x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$.
$\varphi \in \mathcal{D}^1([-1;1], \mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in E, \varphi'(x) &= \frac{1+xy-y(x+y)}{(1+xy)^2}\\ &= \frac{1-y^2}{(1+xy)^2}\\ &> 0\end{aligned}$$

Comme E est un intervalle : φ est strictement croissante sur E et :

$$\forall x \in E, -1 = \varphi(-1) < \varphi(x) < \varphi(1) = 1$$

Donc :

$$\forall (x,y) \in E^2, x \star y \in E$$

10.6 Exemple

Exemple

Soit $E =]-1;1[$. Pour $(x,y) \in E^2$, on pose $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$. Montrer que $\star$ est associative et commutative.

— Commutativité : RAF
— Associativité :
Soit $(x,y,z) \in E^3$. On a :

$$\begin{aligned}x \star (y \star z) &= x \star \left(\frac{y+z}{1+yz}\right)\\ &= \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}}\\ &= \frac{x(1+yz)+y+z}{1+yz+xy+xz}\\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+yz+xy+xz}\end{aligned}$$

C'est une expression symétrique en x, y et z donc :

$$x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$$

Chapitre 11

Matrices

11.11 Produit matriciel

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 6 & -10 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

11.12 Produit matriciel, lignes par colonnes

— $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ et $C_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} (AC_i)_{k,1} &= \sum_{l=1}^{p} a_{kl}(C_i)_{l,1} \\ &= \sum_{l=1}^{p} a_{kl}\delta_{il} \\ &= a_{ki} \end{aligned}$$

— $L_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (\delta_{ji})_{1\leq i\leq n}$

$$\begin{aligned} (L_jA)_{1k} &= \sum_{l=1}^{n} (L_j)_{1,e} \times a_{ek} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \delta_{je}a_{lk} \\ &= a_{jk} \end{aligned}$$

— On note $A = \begin{pmatrix} C_1 & | \dots | & C_p \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} x_k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$AX = \sum_{k=1}^{p} x_k A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} x_{kC_k}$$

11.16 Produit de deux matrices élémentaires

Soit $1 \leq k \leq n; 1 \leq l \leq m$

$$\begin{aligned} (E_{ij} \times E_{rs})_{k,l} &= \sum_{p=1}^{t} (E_{ij})_{kp} \times (E_{rs})_{pl} \\ &= \sum_{p=1}^{t} \delta_{ik}\delta_{pj}\delta_{rp}\delta_{sl} \\ &= \delta_{rj}\delta_{ik}\delta_{sl} \\ &= \delta_{rj}(E_{is})_{kl} \end{aligned}$$

Donc $E_{ij} \times E_{rs} = \delta_{jr}E_{is}$

11.17 Propriétés du produit matriciel, matrice identité

— Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{i,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned}
(AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj} \\
[(AB)C]_{il} &= \sum_{t=1}^{q} (AB)_{it} C_{tl} \\
&= \sum_{t=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kt} C_{tl} \\
&= \sum_{k=1}^{p} A_{ik} \sum_{t=1}^{q} B_{kt} C_{tl} \\
&= \sum_{k=1}^{p} A_{ik} (BC)_{kl} \\
&= (A(BC))_{il}
\end{aligned}$$

— RAF

— RAF

11.24 Exemple

On écrit $A = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme I_3 et N commutent,

$$\begin{aligned}
A^k &= (I_3 + N)^k \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} N^i && \text{(Binôme de Newton)} \\
&= I_3 + \binom{k}{1} N && (N^2 = 0) \\
&= I_3 + kN \\
&= \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

11.25 Produit par bloc

On le fait pour un bloc. Soit $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq s$.

$$\begin{aligned}
\left[\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}\right]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p+q} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}_{ik} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}_{ik} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}_{kj} + \sum_{k=p+1}^{p+q} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}_{ik} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} A_{ik} A'_{kj} + \sum_{k=1}^{q} C_{ik} B_{kj} \\
&= (AA' + CB')_{ij}
\end{aligned}$$

11.27 Propriétés de la transposition

— RAF
— RAF
— Soit $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned}[{}^t(AB)]_{ij} &= (AB)_{ji} \\ &= \sum_{k=1}^{p} A_{jk}B_{ki} \\ &= \sum_{k=i}^{p} [{}^tB]_{ik}[{}^tA]_{kj} \\ &= [{}^tB{}^tA]_{ij}\end{aligned}$$

11.31 Forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
— Trace d'une somme de matrices :

$$\begin{aligned}tr(A + B) &= \sum_{i=1}^{n} (A + B)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + B_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii} \\ &= tr(A) + tr(B)\end{aligned}$$

— Trace d'un produit par un scalaire :

$$\begin{aligned}tr(\lambda A) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda A)_{ii} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \\ &= \lambda tr(A)\end{aligned}$$

— Trace d'un produit de matrices :

$$\begin{aligned}tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ki}A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} \\ &= tr(BA)\end{aligned}$$

11.33 Exemple

On suppose A et B solutions.
Donc $AB - BA = I_n$
Donc $tr(AB - BA) = tr(I_n) = n$
Or $tr(AB - BA) = 0$
Absurde.

11.37 Stabilité des matrices diagonales ou triangulaires

On montre le résultat pour les matrices triangulaires supérieures (ensemble noté $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$).
Soit $(A, B) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2$. On a bien $A + B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et aussi $\lambda A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$
Soit $i > j$, on a :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

- Si $i > j$, $A_{ik} = 0$.
- Si $i = j$, $B_{kj} = 0$.

Donc $(AB)_{ij} = 0$.
Donc $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

Si $(AB) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2$, alors ${}^t(AB) = \underbrace{{}^tB}_{\in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \times \underbrace{{}^tA}_{\in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$
Donc $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$

Le résultat est vrai pour les matrices diagonales, à la fois triangulaires supérieures et inférieures.

11.41 Nilpotence des matrices triangulaires

Soit $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$.
On va montrer par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ que :

$$" \ T^k = \begin{pmatrix} O & - & O & - & \triangle \\ & & & & | \\ & & & & O \\ & & & & | \\ & & & & O \end{pmatrix} \ "$$

C'est-à-dire que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i + k - 1 \geq j \Rightarrow T_{ij}^k = 0$.
On suppose le résultat vrai pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Soit $i + k \geq j$.

$$\begin{aligned} (T^{k+1})_{ij} &= (T^k T)_{ij} \\ &= \sum_{p=1}^{n} T_{ip}^k T_{pj} \end{aligned}$$

- Si $p \leq i + k - 1$, $T_{ip}^k = 0$
- Si $p \geq i + k$, $T_{pj} = 0$

Donc $(T^{k+1})_{ij} = 0$.
Par réccurence, $P(k)$ est vrai pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. En particulier, pour $k = n$, on obtient $T^n = 0$.

11.44 Opérations

- ${}^tA \times^t (A^{-1}) =^t (A^{-1}A) =^t I_n = I_n$
- ${}^t(A^{-1}) \times^t A =^t (AA^{-1}) =^t I_n = I_n$

Donc$({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1})$

11.48 Caractérisation de $GL_2(\mathbb{K})$

On note $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M.N &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= det(M)I_2 \end{aligned}$$

— Si $det(M) \neq 0$, alors $M \times \left(\frac{1}{det(M)}N\right) = I_2$. Donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{det(M)}N$.
— Si $det(M) = 0$, alors $M.N = 0$ donc M n'est pas inversible.

11.49 Matrices diagonales inversibles

Soit $D = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$\boxed{\Leftarrow}$
On suppose que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \neq 0$$

$$\begin{aligned} D \times Diag(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) &= Diag(\lambda_1 \times \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n \times \lambda_n^{-1}) \\ &= Diag(1, \dots, 1) \\ &= I_n \end{aligned}$$

Donc D est inversible et

$$D^{-1} = Diag(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$$

$\boxed{\Rightarrow}$
Par contraposée, soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i = 0$.

$$D \times Diag(0, \dots, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}} \text{ place}}, \dots, 0) = 0$$

Donc D est un diviseur de 0, donc D n'est pas inversible.

11.50 Exemple

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & & & -a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

11.51 Matrices triangulaires inversibles

On raisonne par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$ RAF.

Pour $n = 2$, RAS (11.48).
On suppose le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Soi $T \in \mathcal{T}_{n+1}^+(\mathbb{K})$. Donc T est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \mathcal{U} & X \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \mathcal{U} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}),\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ et } a \in \mathbb{K}$$

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que la diagonale de T ne contient aucun 0.
Donc $\mathcal{U}$ est inversible d'après l'hypothèse de réccurence.
On choisit $V \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ tel que (Hypothèse de récurrence).

$$\mathcal{U}V = I_n$$

On a :

$$\begin{aligned} T \times \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & \underbrace{a^{-1}}_{a\neq 0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{U} & X \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_n & a^{-1}X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc (11.50) :

$$T \times \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -a^{-1}X \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Donc T est inversible d'inverse dans $\mathcal{T}_{n+1}^+(\mathbb{K})$.

$\boxed{\Leftarrow}$
On suppose que la diagonale de T contient un 0.

— Si $T_{11} = 0$, alors $T = \begin{pmatrix} 0 & L \\ & W \end{pmatrix}$
Et $T \times \underbrace{E_{11}}_{\neq 0} = 0$
Donc $T \notin GL_{n+1}(\mathbb{K})$

— On suppose que le premier 0 apparait à T_{kk} avec $k \geq 2$.
Donc
$$T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} F & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ F \in \mathcal{T}_{k-1}^+(\mathbb{K})$$
La diagonale de F ne contient aucun 0 donc $F \in GL_{k-1}(\mathbb{K})$ et :
$$\begin{aligned} A \times \begin{pmatrix} 0 & -F^{-1}G \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -F^{-1}G \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Alors :
$$T \times \underbrace{\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = 0$$
Donc $T \notin GL_{n+1}(\mathbb{K})$.

11.54 Exemple

Soit $X \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned}
X \in \ker A &\Leftrightarrow AX = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X = 0
\end{aligned}$$

Donc $\ker A = \{0\}$.

$$\begin{aligned}
X \in \ker B &\Leftrightarrow BX = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x + y = 0 \\
&\Leftrightarrow X \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{K} \right\} \\
&\Leftrightarrow X \in \mathbb{K}. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $\ker B = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

11.61 Exemple

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 5y + z = 2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 7y = 3 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x - a = 1 - 2y \\ 3x = 3 - 7y \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} -3z = y \\ x = 1 - \frac{7}{3}y \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x = 1 - \frac{7}{3}y \\ z = -\frac{1}{3}y \end{cases} \\
\Leftrightarrow X = &\begin{pmatrix} 1 - \frac{7}{3}y \\ y \\ -\frac{1}{3}y \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K} \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11.65 Caractérisation des matrices inversibles par les sytèmes linaires

$\boxed{\Rightarrow}$
RAF : (11.63)

$\boxed{\Leftarrow}$
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par :

$$Y_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par hypothèse, on choisit $X_i \in \mathbb{K}^n$ tel que :
$$AX_i = Y_i$$

On pose $B = \begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_n \end{pmatrix}$ et on remarque que :

$$\begin{pmatrix} Y_1 & \dots & Y_n \end{pmatrix} = I_n$$

Par construction :
$$AB = I_n$$

11.74 Système équivalents et opérations élémentaires

Soit Σ un système et Σ' un système obtenu après avoir effectué une opération élémentaire.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice du système Σ et $B \in \mathbb{K}^n$ son second membre.
Soit $X \in \mathbb{K}^p$. Effectuer une opération élémentaire revient à choisir une matrice P de la forme P_{ij}, $Q_i(\lambda)$, $R_{ij}(\lambda)$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{S}(\Sigma) &\Leftrightarrow AX = B \\ &\underset{P \in GL_n(\mathbb{K})}{\Leftrightarrow} PAX = PB \\ &\Leftrightarrow X \in \mathcal{S}(\Sigma') \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{S}(\Sigma) = \mathcal{S}(\Sigma')}$.

Chapitre 12

Arithmétique

12.1 Propriété fondamentale de $\mathbb{Z}$

Théorème 12.1

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$.
On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des minorants de A.
Par hypothèse, $\mathcal{M} \neq \emptyset$.
Supposons par l'absurde que :

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a \in \mathcal{M} \Rightarrow a+1 \in \mathcal{M}$$

D'après le principe de récurrence, si $a_0 \in \mathcal{M}$ est fixé :

$$\forall n \geq a_0, n \in \mathcal{M}$$

En particulier, pour $n \in A$ ($A \neq \emptyset$) on a :

$$n \geq a_0 \text{ (} a_0 \text{ est un minorant)}$$

Donc $n \in \mathcal{M}$.
Donc $n+1 \in \mathcal{M}$.
Donc $n+1$ est un minorant de A.
Donc $n+1 \leq n$.
Absurde.
Ainsi, on choisit $a \in \mathbb{Z}$ avec $a \in \mathcal{M}$ et $a+1 \notin \mathcal{M}$.
On choisit donc $n \in A$ tel que :

$$a \leq n < a+1$$

Donc $n = a \in A$.
Donc $a = \min(A)$.

12.4 Division euclidienne

Théorème 12.4

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique coupe $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que :

$$a = bq + r$$

avec $0 \leq r < |b|$. Cette égalité est appelée **division euclidienne de** a **par** b, l'entier q est alors appelé **quotient** et l'entier r le **reste**, tandis que a porte le nom de dividende et b celui de diviseur.

<u>Existence :</u>
On suppose dans un premier temps que $b > 0$.
Soit $a \in \mathbb{Z}$.
On note $A = \{n \in \mathbb{Z}, bn \leq a\}$.
A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{Z}$ et majoré.
Il admet donc un plus grand élément, noté q. On a donc $q \in A$ et $q+1 \notin A$.

$$bq \leq a < b(q+1)$$
$$\text{donc } 0 \leq a - bq < b$$

On pose alors $r = a - bq$. L'exsitence est alors prouvée pour $b > 0$.
Si $b < 0$, alors $-b > 0$ et on choisit $(q,r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$a = -b \times q + r \text{ avec } 0 \leq r < -b$$

Le couple $(-q, r)$ convient.

<u>Unicité :</u>
On suppose $a = bq + r = bq' + r'$ avec $0 \leq r,' < |b|$.

Donc $b(q-q')=r'-r$.
Donc $\underbrace{|b|}_{>0} \times |q-q'| = |r'-r| < \underbrace{|b|}_{>0}$.
Donc $|q-q'|<1$.
Donc $q=q'$.
Puis $r=r'$.

12.9 Divisibilité et multiple

Propostion 12.9

Soit a et b deux entiers. Alors a est divisble par b si et seulement si a est un multiple de b.

$\boxed{\Rightarrow}$
Si $b|a$, alors :

$$\begin{aligned} a &= bq+0 \\ &= bq \\ &\in b\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$
Si $a\in b\mathbb{Z}$, $a=b\times n=b\times n+0$.
Par unicité de la division euclidienne, $b|a$.

12.10 Divisibilité et normes

Propostion 12.10

Soit a et b deux entiers avec $a\neq 0$ et $b|a$. Alors $|b|\leq |a|$.

Si $b|a$, alors $a=b\times n$ avec $n\neq 0$ var $a\neq 0$. Donc :

$$\begin{aligned} |a| &= |b|\times|n| \\ &\geq |b|\times 1 \end{aligned}$$

12.11 Entiers associés

Propostion 12.11

Soit a et b deux entiers. Alors
$$a\mathbb{Z}=b\mathbb{Z} \Leftrightarrow a=\pm b$$
On dit alors que a et b sont associés.

$\boxed{\Leftarrow}$
Si $a=\pm b$, alors $a\mathbb{Z}=b\mathbb{Z}$.

$\boxed{\Rightarrow}$
Si $a=0$ et $a\mathbb{Z}=b\mathbb{Z}$, alors $b=0$.
Si $a\neq 0$ et $a\mathbb{Z}=b\mathbb{Z}$, alors $b\neq 0$ et d'après (12.0) :

$$|a|\leq|b| \text{ et } |b|\leq|a|$$

Donc $|a|=|b|$

12.14 Intégrité de la divisibilité

Propostion 12.14

Soit a, b et c trois entiers, avec $c \neq 0$. Si $nb|na$, alors $n|a$.

Si $cb|ca$, alors $ca = ncb$.
Or c est régulier dans $\mathbb{Z}$ donc :

$$a = nb$$

Donc $b|a$.

12.20 Cas d'une divisibilité

Lemme 12.20

Si $a|b$, alors

$$\mathcal{D}_{a,b} = \mathcal{D}_a$$

Si $a|b$, si $c|a$, alors $c|b$.
Donc $\mathcal{D}_b \supset \mathcal{D}_a$.
Ainsi, $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b = \mathcal{D}_a$

12.21 Préparation à l'algorithme d'Euclide

Lemme 12.21

Soit a, b et q trois entiers, alors

$$\mathcal{D}_{a,b} = \mathcal{D}_{a-bq,b}$$

$\boxed{\subset}$
Soit $n \in \mathcal{D}_{a,b}$, alors :

$$\begin{aligned} n|a &\text{ et } n|b \\ \text{donc } n|a &- bq \\ \text{donc } n &\in \mathcal{D}_{a-bq,b} \end{aligned}$$

$\boxed{\supset}$
Soit $n \in \mathcal{D}_{a-bq,b}$

$$\begin{aligned} n|a - bq &\text{ et } n|b \\ \text{donc } n|a - bq &+ bq \\ \text{soit n|a} \\ \text{donc } n &\in \mathcal{D}_{a,b} \end{aligned}$$

12.23 Algorithme d'Euclide étendu ou théorème de Bézout

Lemme 12.23

Soit a et b deux entiers. Soit r le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide appliqué à a et b. Il existe deux entiers u et v tels que

$$au + bv = r$$

On utilise les notations du lemme (12.22).
On démontre par récurrence double que :

$$\forall n, \text{"}\exists (u_n, v_n) \in \mathbb{Z}^2, au_n + bv_n = r_n\text{"}$$

Initialisation :
Pour $n=0$ il s'agit de la division euxlidienne de a par b ($u_0 =$ et $v_0 = -q$).
Pour $n=1$:

$$\begin{aligned} a &= bq + r \\ b &= r \times q_1 + r_1 \\ \text{donc } r &= b - rq_1 \\ &= b - q_1(a - bq) \\ &= -q_1 a + b(1 + q_1 q) \end{aligned}$$

Hérédité :
On suppose le résultat vrai aux rangs n et $n+1$.

$$\begin{aligned} a_n &= b_n q_n + r_n \\ b_n &= r_n q_{n+1} + r_{n+1} \\ r_n &= r_{n+1} q_{n+2} + r_{n+2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} r_{n+2} &= r_n - r_{n+1} q_{n+2} \\ &= a u_n + b v_n - (a u_{n+1} + b v_{n+1}) q_{n+2} \\ &= a \underbrace{(u_n - u_{n+1} q_{n+2})}_{\in \mathbb{Z}} + b \underbrace{(v_n - v_{n+1} q_{n+2})}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

On utilise le principe de récurrence avec la dernière étape de l'algorithme.

12.24 Application basique

Exemple 12.24

Appliquer l'algorithme d'Euclide aux entiers 121 et 26.

$$\begin{aligned} 121 &= 26 \times 4 + 17 \\ 26 &= 17 \times 1 + 9 \\ 17 &= 9 \times 1 + 8 \\ 9 &= 8 \times 1 + 1 \\ 8 &= 1 \times 8 + 0 \end{aligned}$$

On remonte l'algorithme :

$$\begin{aligned} 1 &= 9 - 8 \\ &= 9 - (17 - 9) \\ &= 2 \times 9 - 17 \\ &= 2 \times (26 - 17) - 17 \\ &= 2 \times 26 - 3 \times 17 \\ &= 2 \times 26 - 3 \times (121 - 4 \times 26) \\ &= 14 \times 26 - 3 \times 121 \end{aligned}$$

12.26 Théorème de Bézout

Théorème 12.26

Soit a et b deux entiers. Alors a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$au + bv = 1$$

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose a et b premiers entre eux.
Donc $\mathcal{D}_{a,b} = \{\pm 1\}$.
Soit r le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide,

$$\mathcal{D}_r = \mathcal{D}_{a,b} = \{\pm 1\}$$

Donc $r = \pm 1$.
D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que :

$$au + bv = 1$$

$\boxed{\Leftarrow}$
Réciproquement, si $au + bv = 1$, alors pour tout $d \in \mathcal{D}_{a,b}$ $d | au + bv$ donc $d | 1$ donc $d = \pm 1$.
Donc $\mathcal{D}_{a,b} = \{\pm 1\}$.

12.28 Proposition

Propostion 12.28

Si a est premier avec b et c, alors a est premier avec bc.

D'après le théorème de Bézout, on écrit :

$$\begin{aligned} au_1 + bv_1 &= 1 \\ au_2 + cv_2 &= 1 \end{aligned}$$

avec $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^4$.
Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= (au_1 + bv_1)(au_2 + cv_2) \\ &= a \underbrace{(au_1 u_2 + bv_1 u_2 + cu_1 v_2)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{v_1 v_2}_{\in \mathbb{Z}} bc \end{aligned}$$

Donc a et bc sont premiers entre eux d'après le théorème de Bézout.

12.29 Proposition

Propostion 12.29

Si a est premier avec b, que $a|c$ et $b|c$, alors $ab|c$.

D'après le théorème de Bézout :

$$au + bv = 1,\ (u, v) \in \mathbb{Z}^2$$

Donc :

$$auc + bvc = c$$

Or $a|c$ et $b|c$, donc :

$$c = ka \text{ et } c = pb$$

Donc :

$$ab \underbrace{[pu + vk]}_{\in \mathbb{Z}} = c$$

Donc $ab|c$.

12.30 Théorème de Gauss

Théorème 12.30

Si $a|bc$ et que a est premier avec b, alors $a|c$.

D'après le théorème de Bézout :

$$au + bv = 1 \text{ avec } (u, v) \in \mathbb{Z}^2$$

Donc $auc + bvc = c$.
Or $a|bc$ donc $a|auc + bvc$.
Soit $a|c$.

12.31 Equation de Bézout

Exemple 12.31

Résoudre l'équation d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2, 3x - 2y = 7$.

On remarque que 3 et 2 sont premiers entre eux.

$$\begin{aligned} 3 - 2 &= 1 \\ \text{donc } 3 \times 7 - 2 \times 7 &= 7 \\ \text{donc } (7, 7) &\in \mathcal{S} \end{aligned}$$

On note (x_0, y_0) cette solution.
Soit $(x, y) \in \mathcal{S}$.
Donc :

$$\begin{aligned} 7 &= 3x - 2y \\ 7 &= 3x_0 - 2y_0 \\ \text{donc } 3(x - x_0) &= 2(y - y_0) \end{aligned}$$

Or $3|3(x - x_0)$ et 3 premier avec 2.
Donc $3|y - y_0$.
Donc $y - y_0 = 3k$, avec $k \in \mathbb{Z}$. (Théorème de Gauss)
De la même manière, $x - x_0 = 2l$, avec $l \in \mathbb{Z}$. (Théorème de Gauss)

Réciproquement, soit $x = x_0 + 2l$ et $y = y_0 + 3k$.

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow 7 = 3x - 2y = 3x_0 - 2y_0 + 6l - 6k \\ &\Leftrightarrow 6l - 6k = 0 \\ &\Leftrightarrow k = l \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{(x_0 + 2k, y_0 + 3k), k \in \mathbb{Z}\}$

12.32 Proposition

Propostion 12.32

Si $ar \equiv br \mod n$ et si r et n sont premiers entre eux, alors $a \equiv b \mod n$.

Si $ar \equiv br \mod n$, alors $n|r(a - b)$.
Donc $n|a - b$ (n premier avec r et théorème de Gauss).
Donc $a \equiv b \mod n$.

12.37 Lien avec les idéaux

Propostion 12.37

Soit a et b deux entiers, alors d est le *pgcd* de a et b si et seulement si $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. $a\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z}$ dont des idéaux de $\mathbb{Z}$.
Donc $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$, donc en particulier un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
On choisit donc $d \geq 0$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$.
Montrons que $d = pgcd(a, b) = a \wedge b$.
D'une part :

$$\begin{aligned} d &\in d\mathbb{Z} && \text{donc } d = au + bv \text{ (avec } (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \\ &\in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} && \\ \text{or } a \wedge b | a \text{ et } a \wedge b | b & && \text{donc } a \wedge b | au + bv \\ & && \text{soit } a \wedge b | d \end{aligned}$$

D'autre part, $a \wedge b$ est le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide, donc (12.23) :

$$\begin{aligned} a \wedge b &= au + bv \text{ (avec } (u, v) \in \mathbb{Z}^2) \\ &\in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \\ &\in d\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc $d | a \wedge b$.
Ainsi, d et $a \wedge b$ sont positifs et associés, donc égaux.

12.38 Préparation au calcul pratique d'un *pgcd*

Lemme 12.38

Si a et b sont tous les deux non nuls, alors pour tout $q \in \mathbb{Z}, pgcd(a, b) = pgcd(a - bq, b)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{pgcd(a,b)} &= \mathcal{D}_{a,b} \\ &\underset{(12.21)}{=} \mathcal{D}_{a-bq,b} \\ &= \mathcal{D}_{pgcd(a-bq,b)} \end{aligned}$$

Les deux *pgcd* sont associés, donc égaux car positifs.

12.39 Caractérisation du *pgcd*

Propostion 12.39

Soit a et b deux entiers et $d \in \mathbb{N}$. Alors $d = pgcd(a, b)$ si et seulement si il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ avec u et v premiers entre eux, tels que $a = du$ et $b = dv$.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que $d = a \wedge b$.
Donc $d | a$ et $d | b$.
On écrit donc $a = du$ et $b = dv$ avec $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$.
Notons $n = u \wedge v$. On écrit $u = n \times u'$ et $v = n \times v'$ avec $(u', v') \in \mathbb{Z}^2$.
Donc $a = d \times n \times u'$ et $b = d \times n \times v'$.
Donc $dn \in \mathcal{D}_{a,b} = \mathcal{D}_d$.
Donc $dn | d$.
Donc $n = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$
On suppose que $a = du$ et $b = dv$ avec $u \wedge v = 1$.
D'après le théorème de Bézout :

$$uu' + vv' = 1 \text{ (avec } (u', v') \in \mathbb{Z}^2)$$

Donc $duu' + dvv' = d$.
Soit $au' + bv' = d$.
Donc $d \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$.
Donc $a \wedge b | d$.
Par ailleurs, $d \in \mathcal{D}_{a,b} = \mathcal{D}_{a \wedge b}$.
Donc $d | a \wedge b$.
Ainsi, $a \wedge b$ et d sont associés (et positifs) donc égaux.

12.40 Propriétés du *pgcd*

Propostion 12.40

Soit a et b deux entiers tous deux non nuls.

1. pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si $n|a$ et $n|b$, alors $n|pgcd(a, b)$;
2. pour tout $k \in \mathbb{N}^*, pgcd(ka, kb) = kpgcd(a, b)$;
3. pour tout $n \in \mathbb{N}, pgcd(a^n, b^n) = pgcd(a, b)^n$;
4. si a et c sont premiers entre eux, alors $pgcd(a, bc) = pgcd(a, b)$.

1. RAF (définition)
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On écrit (12.39) :

$$a = (a \wedge b)u$$
$$b = (a \wedge b)v \text{ (avec } u \wedge v = 1)$$

Donc :

$$ka = [k(a \wedge b)]\, u$$
$$kb = [k(a \wedge b)]\, v$$

Donc (12.39) :

$$pgcd(ka, kb) = k(a \wedge b)$$

3. Avec une partie des notations de 2. :

$$a^n = (a \wedge b)^n u^n$$
$$b^n = (a \wedge b)^n v^n$$

Avec $(u^n) \wedge (v^n) = 1$.
Donc (12.39) :

$$pgcd(a^n, b^n) = (a \wedge b)^n$$

4.

$$a = (a \wedge b)u$$
$$b = (a \wedge b)v \text{ (avec } u \wedge v = 1)$$

Donc

$$bc = (a \wedge b) \times vc$$

Or, puisque $a \wedge c = 1$ et que $u|a$, alors :

$$u \wedge c = 1$$

Donc (12.28) :

$$u \wedge (vc) = 1$$

Donc (12.39) :

$$pgcd(a, bc) = a \wedge b$$

12.44 Définition du PPCM

Propostion 12.44

Soit a et b deux entiers non nuls. On appelle **PPCM** (plus petit commun multiple) l'unique entier $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$(a\mathbb{Z}) \cap (b\mathbb{Z}) = m\mathbb{Z}.$$

Cet entier est noté $ppcm(a, b)$ ou encore $a \vee b$.

$a\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z}$ ont des idéaux de $\mathbb{Z}$.
Donc $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$, donc un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
Donc il existe un unique entier $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$$

Comme $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $m \neq 0$.

12.45 Caractérisation du *ppcm*

Propostion 12.45

Soit a et b deux entiers, et $m \in \mathbb{N}$. Alors $m = ppcm(a, b)$ si et seulement si il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, premiers entre eux tels que $m = au = bv$.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que $m = a \vee b$.
Donc $m \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.
Donc $m = au = bv$.
On note $d = pgcd(u, v)$.
On écrit donc :

$$u = da'$$
$$v = db'$$

Donc :

$$ada' = bdb'$$

Donc :

$$aa' = bb' = m'$$

Donc :

$$\begin{aligned} m' &\in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \\ &\in m\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc :

$$dm' = m | m'$$

Donc :

$$d = 1$$

$\boxed{\Leftarrow}$
On suppose que $m = au = bv$ avec $pgcd(u, v) = 1$.
D'une part :

$$m \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = ppcm(a, b)\mathbb{Z}$$

Donc :

$$ppcm(a, b) | m$$

D'autre part, d'après le théorème de Bézout :

$$uu' + vv' = 1 \text{ avec } (u', v') \in \mathbb{Z}^2$$

Donc :

$$uu'\underbrace{ppcm(a,b)}_{ka}+vv'\underbrace{ppcm(a,b)}_{qb}=ppcm(a,b)$$

Donc :

$$m(u'k+vq')=ppcm(a,b)$$

Donc $m|ppcm(a,b)$.

12.46 Propriétés du *ppcm*

Propostion 12.46

Soit a et b deux entier non nuls, alors :

1. pour tout $n\in\mathbb{Z}$, si $a|n$ et $b|n$, alors $ppcm(a,b)|n$;
2. si a et b sont premiers entre eux, alors $ppcm(a,b)=|ab|$;
3. pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $ppcm(ka,kb)=kppcm(a,b)$;
4. $ppcm(a,b)\times pgcd(a,b)=|ab|$;
5. pour tout $n\in\mathbb{N}$, $ppcm(a^n,b^n)=ppcm(a,b)^n$.

1. RAF (12.44)
2. On suppose que $a>0$ et $b>0$.

$$ab=ba$$

avec $a\wedge b=1$.
D'après (12.45) :

$$ppcm(a,b)=ab$$

3. On écrit (12.45) :

$$ppcm(a,b)=au=bv \text{ (avec } u\wedge v=1)$$

Alors :

$$\begin{aligned}b\wedge ppcm(a,b)&=(ak)u\\&=(bk)v\end{aligned}$$

Donc (12.45) :

$$ppcm(ak,bk)=kppcm(a,b)$$

5. Avec les mêmes notations :

$$\begin{aligned}ppcm(a,b)^n&=a^nu^n\\&=b^nv^n \text{ (avec } u^n\wedge v^n=1)\end{aligned}$$

Donc (12.45) :

$$ppcm(a^n,b^n)=ppcm(a,b)^n$$

4. D'après (12.39) (avec $a>0$ et $b>0$) :

$$\begin{aligned}a&=pgcd(a,b)u\\b&=pgcd(a,b)v \text{ (avec } u\wedge v=1)\\pgcd(a,b)\times ppcm(a,b)&=pgcd(a,b)ppcm(pgcd(a,b)u,pgcd(a,b)v)\\&\underset{(3.)}{=}pgcd(a,b)^2ppcm(u,v)\\&\underset{(2.)}{=}pgcd(a,b)^2uv\\&=ab\end{aligned}$$

12.50 Propriétés

Propostion 12.50

1. Si $p \in \mathbb{P}$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $p|n$ soit $pgcd(n,p) = 1$.
2. Si $n \geq 2$, alors n possède au moins un diviseur premier.
3. L'ensemble $\mathbb{P}$ est infini.
4. Si $n > 1$ n'as pas de diviseur dans $[2; \sqrt{n}]$, alors n est premier.
5. Si $p \in \mathbb{P}$, alors pour tout a et b entiers, on a $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

1. On suppose que $p \not| n$.
   Soit $d \in \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_n$.
   $d > 0$ et $d \neq p$.
   Donc $d = 1$.
   Donc $p \wedge n = 1$.
2. On raisonne par récurrence forte → cf. (2.41).
3. On suppose par l'absurde que :
   $$\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$
   On pose :
   $$m = \prod_{i=1}^{n}(p_i) + 1$$
   Soit $p_i \in \mathbb{P}$ tel que $p_i | m$ (12.50.2).
   Donc $p_i | 1$.
   Absurde.
4. On suppose $n \notin \mathbb{P}$.
   Soit $n = ab$ avec $a \geq 2$ et $b \geq 2$.
   Si $a > \sqrt{n}$ et $b > \sqrt{n}$, alors $ab = n > \sqrt{n}^2 = n$.
   Absurde.
5. D'après le binôme de Newton :
   $$\begin{aligned}(a+b)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \\ &= a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}\end{aligned}$$
   Or, pour $k \in [\![1; p-1]\!], p\binom{p-1}{k-1} = k\binom{p}{k}$ (formule du capitaine).
   Or $k \wedge p = 1$ et $p \left| p\binom{p-1}{k-1} \right.$ soit $p \left| \binom{p}{k} \right.$.
   Donc :
   $$p \left| \binom{p}{k} \right.$$
   Donc :
   $$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

12.51 Petit théorème de Fermat

Théorème 12.51

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{P}$, on a $n^p \equiv n \pmod{p}$. En outre, si $pgcd(n,p) = 1$, alors $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Soit $p \in \mathbb{P}$. On montre le résultat pour $n \geq 0$ par récurrence.
On a bien $0^p = 0 \equiv 0 \pmod{p}$. Si $n^p \equiv n \pmod{p}$, alors :

$$\begin{aligned}(n+1)^p &\equiv n^p + 1^p \pmod{p} \text{ (12.50.5).} \\ &\equiv n + 1 \pmod{p} \text{ (Hypothèse de récurrnce)}\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

— Si $p \geq 3$ (donc p est impair), alors :

$$\begin{aligned} n^p &\equiv n \pmod p \\ (-n)^p &\underset{p \text{ impair}}{\equiv} -n^p \pmod p \\ &\equiv -n \pmod p \end{aligned}$$

— Si $p = 2$, $-1 \equiv 1 \pmod 2$.
Donc :

$$\begin{aligned} (-n)^2 &\equiv n^2 \pmod 2 \\ &\equiv n \pmod 2 \\ &\equiv -n \pmod 2 \end{aligned}$$

12.52 Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème 12.52

Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1, 0, 1\}$, alors il existe des nombres premiers $p_1, \ldots, p_r$ tous distincts, et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ et $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tels que

$$n = \epsilon p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$$

Cette décomposition est unique à l'ordre près.

Existence :
On montre l'existence par récurrence forte sur $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$.

— RAF si $n = 2$.
— On suppose le résultat vrai pour tout $k \in [\![2; n]\!]$.

  — Si $n + 1 \in \mathbb{P}$: RAF
  — Si $n + 1 \notin \mathbb{P}$, on écrit :

$$n + 1 = k \times q \text{ avec } (k, q) \in [\![2, n]\!]^2$$

  Donc k et q sont des produits de facteurs premiers.
  Donc $n + 1 = kq$ est aussi un produit de facteurs premiers.
  Le résultat est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par extension pour $-n$ ($\epsilon = -1$).

Unicité :
On suppose que :

$$n = \epsilon p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r} = \epsilon' q_1^{\beta_1} \times \cdots \times q_s^{\beta_s}$$

Nécessairement, $\epsilon = \epsilon'$.
Soit $p_i \in \{p_1, \ldots, m_r\}$.
On a $p_i | n$ donc $p_i \left| q_1^{\beta_1} \times \cdots \times q_s^{\beta_s} \right.$.
Il existe $p_i \in \mathbb{P}$ donc $j \in [\![1; s]\!]$ tel que $p_i | q_j$.
Donc $p_i = \underbrace{q_j}_{\in \mathbb{P}}$.
Ainsi :

$$\{p_1, \ldots, p_r\} \subset \{q_1, \ldots, q_s\}$$

Par symétrie :

$$\{p_1, \ldots, p_r\} = \{q_1, \ldots, q_s\}$$

Donc $r = s$ et quitte à renommer q_j, on peut supposer que :

$$\forall i \in [\![1; r]\!], p_i = q_i$$

$$p_i^{\alpha_i} | n \text{ donc } p_i^{\alpha_i} \left| \prod_{j=1}^{r} p_j^{\beta_j} \right.$$

$$\text{donc } \alpha_i \leq \beta_i$$

Par symétrie, $\alpha_i = \beta_i$.
L'unicité est prouvée.

12.54 Caractérisation de la valuation

Théorème 12.54

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$ et $p \in \mathbb{P}$ et $d \in \mathbb{N}$. Alors $d = v_p(n)$ si et seulement si $n = p^d u$, avec $u \wedge p = 1$.

On a :

$$\begin{aligned} d = v_p(n) &\Leftrightarrow (p^d | n \text{ et } p^{d+1} \not| n) \\ &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z}, n = p^d u \text{ et } p^{d+1} \not| u \\ &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z}, n = p^d u \text{ et } p \not| u \\ &\underset{(p \in \mathbb{P})}{\Leftrightarrow} \exists u \in \mathbb{Z}, n = p^d u \text{ et } u \wedge p = 1 \end{aligned}$$

12.55 Valuation et décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème 12.55

Si $p|n$, alors $v_p(n)$ est la puissance de p intervenant dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

On écrit la décomposition :

$$n = \epsilon \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$$

Soit $k \in [\![1, r]\!]$.

$$n = \epsilon \times p_k^{\alpha_k} \times \underbrace{\prod_{i \neq k} p_i^{\alpha_i}}_{:=u \text{ (avec } u \wedge p_k = 1)}$$

Donc (12.54) :

$$\boxed{v_{p_k}(n) = \alpha_k}$$

12.56 Propriétés de la valuation

Propostion 12.56

Pout tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ et $p \in \mathbb{P}$, on a

1. $p|n$ si et seulement si $v_p(n) > 0$;
2. $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$;
3. $v_p(n + m) \geq \min(v_p(n), v_p(m))$ avec égalité si les valuations sont distinctes ;
4. $n|m \Leftrightarrow (\forall q \in \mathbb{P}, v_q(n) \leq v_q(m))$;
5. si de plus n et m sont non nuls alors

$$v_p(n \wedge m) = \min(v_p(n), v_p(m)) \text{ et } v_p(n \vee m) = \max(v_p(n), v_p(m)).$$

1. RAF
2. On écrit $m = p^{v_p(m)} \times u$ et $n = p^{v_p(n)} \times v$ avec $u \wedge p = 1 = v \wedge p$ (12.54).
   Donc $mn = p^{v_p(m)+v_p(n)} \times uv$.
   Or $p \wedge (uv) = 1$.
   Donc (12.54) :

$$\boxed{v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)}$$

3. On suppose que $v_p(m) \leq v_p(n)$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} n + m &= p^{v_p(n)} \times v + p^{v_p(m)} \times u \\ &= p^{v_p(m)} \left[u + v_p^{v_p(n) - v_p(m)} \right] \end{aligned}$$

   Ainsi, $p^{v_p(m)} | n + m$.
   Par définition :

$$\boxed{v_p(m + n) \geq v_p(m) = \min(v_p(m), v_p(n))}$$

   .
   Si on suppose de plus que $v_p(m) \neq v_p(n)$, alors

$$p \wedge (u + v \times p^{v_p(n) - v_p(m)}) = p \wedge u = 1$$

   Donc (12.54) :

$$\boxed{v_p(n + m) = v_p(m) = \min(v_p(m), v_p(n))}$$

4. On a :

$$\begin{aligned} & n|m \text{ ssi la décomposition en produit de facteurs premiers de } n \text{ se retrouve dans celle de } m. \\ & \underset{(12.55)}{\text{ssi}} \text{ pour tout } p \in \mathbb{P} \text{ tel que } p|n, \text{ alors } v_p(n) \leq v_p(m). \\ & \underset{(\text{si } p \nmid n,\, v_p(n) = 0 \leq v_p(m))}{\text{ssi}} \text{ pour tout } \boxed{p \in \mathbb{P}, v_p(n) \leq v_p(m)}. \end{aligned}$$

5. On a $(n \wedge m) | n$ et $(n \wedge m) | m$.
   Donc (12.56.4) $\boxed{v_p(n \wedge m) \leq \min(v_p(n), v_p(m))}$.
   On suppose par exemple que $v_p(n) \leq v_p(m)$.
   Donc $p^{v_p(n)} | n$ et $p^{v_p(n)} | m$.
   Donc $p^{v_p(n)} | n \wedge m$.
   Par définition $\boxed{v_p(n \wedge m) \geq v_p(n)}$.
   Donc :

$$\boxed{v_p(n \wedge m) = \min(v_p(n), v_p(m))}$$

   On rappelle que $(n \wedge m) \times (n \vee m) = |nm|$.
   Donc $v_p((n \wedge m) \times (n \vee m)) = v_p(nm)$.
   Donc (12.56.2) :

$$\begin{aligned} v_p(n \vee m) &= v_p(n) + v_p(m) - v_p(n \wedge m) \\ &= v_p(n) + v_p(m) - \min(v_p(n), v_p(m)) \\ &= \boxed{\max(v_p(n), v_p(m))} \end{aligned}$$

Les preuves ont été rédigées avec les hypothèses $n \neq 0$ et $m \neq 0$. Si l'un des entiers est nul, on vérifie les assertions avec la convention $v_p(0) = +\infty$.

Chapitre 13

Polynômes

13.6 Produit de deux polynômes

Définition 13.6

Soit $P=(a_n)$ et $Q=(b_n)$ deux polynômes de $\mathbb{A}[X]$. Soit pour tout $n\in\mathbb{N}, c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme. On définit alors $PQ=(c_n)$. La suite $c=(c_n)$ est appelée **produit de convolution** (ou **produit de Cauchy**) des suites $a=(a_n)$ et $b=(b_n)$ et est parfois noté $c=a\star b$.

Montrons que (c_n) est un polynôme.
Soit N te M dans $\mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N, a_n=0\\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq M, b_n=0\end{cases}$$

Soit $n\geq M+N$, on a :

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

— Si $k\geq N$, $a_k=0$.
— Si $k\leq N$, $n-k\geq M$, donc $b_{n-k}=0$.
Donc $c_n=0$.

13.7 Structure d'anneau de $\mathbb{A}[X]$

Théorème 13.7

La somme et le produit définis ci-dessus munissent $\mathbb{A}[X]$ d'une structure d'anneau commutatif.

— $(\mathbb{A}[X],+)$ est un sous-groupe de $(\overbrace{\mathbb{A}^{\mathbb{N}}}^{\text{suites d'éléments de }\mathbb{A}},+)$ abélien donc est bien un sous-groupe abélien.
— Montrons que $\times$ est associative. Soit $(P,R,Q)\in\mathbb{A}[X]$.
On note $P=(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $R=(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $Q=(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(P\times(RQ))_n &= \sum_{k=0}^{n} p_k(RQ)_{n-k}\\ &= \sum_{i+j=n} p_i(RQ)_j\\ &= \sum_{i+j=n}\left(p_i\sum_{k+l=j} r_k q_l\right)\\ &= \sum_{i+k+l=n} p_i r_k q_l\\ &= ((PR)\times Q)_n\end{aligned}$$

— Notons $E=(1,0,\ldots)=(\delta_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$.
On a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(E\times P)_n &= \sum_{i+j=n} E_i\times P_j\\ &= \sum_{i+j=n}\delta_{0i}\times P_j\\ &= P_n\ (i=0,\ j=n)\\ &= (P\times E)_n\end{aligned}$$

Donc E est l'élément neutre de $\mathbb{A}[X]$.

—

$$\begin{aligned}[P\times(R+Q)]_n &= \sum_{i+j=n} p_i(R+q)_j \\ &= \sum_{i+j=n} p_i(r_j+a_j) \\ &= \sum_{i+j=n} p_ir_j + \sum_{i+j=n} p_iq_j \\ &= (PR)_n + (PQ)_n \\ &= [PR+PQ]_n\end{aligned}$$

Donc $\times$ est distributive sur $+$.

— Comme $\mathbb{A}$ est commutatif :

$$\sum_{i+j=n} p_iq_j = \sum_{i+j=n} q_jp_i$$

Donc $\times$ est commutatif.

13.11 Monômes

Propostion 13.11

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X^n = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n \text{ zéros}}, 1, 0, \ldots)$, le 1 est donc à l'indice n (soit $X^n = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$)

Pour $n = 0$, on a bien $X^0 = (1, 0, \ldots)$
Pour $n = 1$, RAF
On suppose le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left[X^{n+1}\right]_k &= [X^n\times X] \\ &= \sum_{i+j=k} [X^n]_i X_j \\ &= \sum_{i+j=k} \delta_{n,i}\times\delta_{j,1} \\ &= \delta_{k,n+1}\end{aligned}$$

13.12 Expression d'un polynôme à l'aide de l'indéterminée formelle

Corollaire 13.12

Soit $P = (a_n)$ un polynôme de $\mathbb{A}[X]$. Alors $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_kX^k$, cette somme ayant un sens puisqu'elle est en fait finie, les a_k étant nuls à partir d'un certain rang.

$$\begin{aligned}P &= (a_n)_{n\geq 0} \\ &= (a_0, a_1, a_2, \ldots \\ &= a_0(1,0,0,\ldots) + a_1(0,1,0,\ldots) + a_2(0,0,1,\ldots) + \ldots \\ &= a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \ldots\end{aligned}$$

13.26 Dérivée de produits

Propostion 13.26

— Soit P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{A}$. Alors
$$(PQ)' = P'Q + Q'P.$$

— Soit $P_1, \dots, P_n$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{A}$, alors
$$(P_1 \dots P_n)' = \sum_{i=1}^{n} P_1 \dots P_{i-1} P_i' P_{i+1} \dots P_n.$$

— **Formule de Leibniz** : Soit P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

Soit $P = \sum\limits_{k\geq 0} a_k X^k, P' = \sum\limits_{k\geq 1} k a_k X^{k-1}$ et $Q = \sum\limits_{k\geq 0} b_k X^k, Q' = \sum\limits_{k\geq 1} k b_k X^{k-1}$.
On a :
$$PQ = \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) X^n$$

Donc :
$$\begin{aligned}
(PQ)' &= \sum_{n\{geq1} \left[n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right] X^{n-1} \\
\text{et } P'Q &= \sum_{n\geq 0} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} b_{n-k} \right] X^n \\
\text{et } PQ' &= \sum_{n\geq 0} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k (n-k+1) b_{n-k+1} \right] X^n \\
\text{donc } P'Q + Q'P &= \sum_{n\geq 0} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} b_{n-k} \right] X^n + \sum_{n\geq 0} \left[\sum_{k=0}^{n} (n-k+1) a_k b_{n-k+1} \right] X^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \left[\sum_{k=1}^{n+1} k a_k b_{n-k+1} \right] X^n + \sum_{n\geq 0} \left[\sum_{k=0}^{n} (n-k+1) a_k b_{n-k+1} \right] X^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \left[(n+1) a_{n+1} b_0 + \sum_{k=1}^{n} (n+1) a_k b_{n-k+1} + (n+1) a_0 b_{n+1} \right] X^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \left[(n+1) \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n-k+1} \right] X^n
\end{aligned}$$

13.28 Dérivée d'une composition

Propostion 13.28

Soit P et Q dans $\mathbb{A}[X]$, alors
$$(Q \circ P)' = P' \times (Q' \circ P)$$

Soit $Q = \sum\limits_{k\geq 0} a_k X^k$.
Ainsi $Q \circ P = \sum\limits_{k\geq 0} a_k p^k$.

Donc :

$$\begin{aligned}(Q \circ P)' &= \sum_{k\geq 0} a_k (p_k)' \text{ (13.24)}\\ &= \sum_{k\geq 1} k a_k p' p^{k-1} \text{ (13.27)}\\ &= P' \times \sum_{k\geq 1} k a_k p^{k-1}\\ &= P' \times Q' \circ P\end{aligned}$$

13.34 Degré d'une somme, d'un produit, d'une dérivée

Propostion 13.34

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{A}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{A}$.

1. On a $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
2. Si $\mathbb{A}$ est intègre et si $\lambda \neq 0$, alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.
3. Si $\mathbb{A}$ est intègre alors $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
4. On a $\deg(P') \leq \deg(P) - 1$.
5. Si $\mathbb{A}$ est intègre alors $\deg(Q \circ P) = \deg(Q) + \deg(P)$, sauf si $P = 0$ ou si $Q = 0$ et $P \in \mathbb{A}_0[X]$.

1. On note $p = \deg(P), q = \deg(Q)$.

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

   Supposons $p \geq q$.
   On écrit alors :

$$\begin{aligned}Q &= \sum_{k=0}^{p} b_k X^k\\ \text{et ainsi } P+Q &= \sum_{k=0}^{p} (a_k + b_k) X^k\\ \text{et donc } \deg(P+Q) &\leq p\end{aligned}$$

   Si de plus $p > q$, alors :

$$\begin{aligned}P+Q &= a_p X^p + \sum_{k=0}^{p-1} (a_k + b_k) X^k \text{ } (b_p = 0)\\ \text{donc } (a_p \neq 0), \text{ } \deg(P+Q) &= p\end{aligned}$$

2.

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k X^k$$

   Or $\lambda a_p \neq 0$ car $a_p \neq 0$ et $\mathbb{A}$ intègre.

3.

$$P.Q = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) X^n$$

   Si $n > p + q$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k bn - k = 0 \text{ (preuve (13.6))}$$

Or :

$$\begin{aligned}(PQ)_{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} a_k b_{p+q-k} \\ &= \underbrace{a_p}_{\neq 0}\underbrace{b_q}_{\neq 0} \\ &\neq 0 \text{ car } \mathbb{A} \text{ intègre}\end{aligned}$$

4. Si $P \in \mathbb{A}_0[X]$, l'inégalité est vérifiée.
   Sinon :

$$p' = \sum_{k=0}^{p-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$
$$\text{et } \deg(P') \leq d - 1 = \deg(P) - 1$$

5. On a :

$$Q \circ P = \sum_{k=0}^{q} b_k p_k$$

   Or, pour $k \in [\![0, q-1]\!]$, $\deg(b_k p^k) < \deg(\underbrace{b_q}_{\neq 0} p^q)$ ((13.34.2) et (13.34.3) avec $\mathbb{A}$ intègre)

   Donc :

$$\begin{aligned}deg(Q \circ P) &= \deg(b_q p^q) \\ &= q \times \deg(P) \\ &= \deg(Q) \times \deg(P)\end{aligned}$$

13.36 Théorème de permanence de l'intégrité

Corollaire 13.36

Si $\mathbb{A}$ est intègre, alors $\mathbb{A}[X]$ est intègre.

Si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$

$$\begin{aligned}\deg(P \times Q) &= \deg(P) + \deg(Q) \ (\mathbb{A} \text{ est intègre}) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

13.39 Propriété de stabilité

Corollaire 13.39

— $\mathbb{A}_n[X]$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{A}[X]$.
— La dérivation $D : \mathbb{A}[X] \to \mathbb{A}[X]$ induit un homomorphisme de groupe $D_n : \mathbb{A}_n[X] \to \mathbb{A}_{n-1}[X]$.
— Si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle, D_n est une surjection. Autrement dit, tout polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est primitivable formellement dans $\mathbb{K}_n[X]$.

— RAF
— RAF
— carac$(\mathbb{K}) = 0$. Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
Pour $k \in [\![1, n]\!], k = k \times 1 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$ car $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle.
Donc k^{-1} est bien défini dans $\mathbb{K}$. On pose :

$$Q = \sum_{k=1}^{n} k^{-1} q_{k-1} X^k$$

Alors :

$$Q' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(k+1)^{-1} a_k X^k = P.$$

13.42 Corollaire du degré d'une dérivée dans $\mathbb{K}[X]$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Corollaire 13.42

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors $P' = Q'$ si et seulement si P et Q diffèrent d'une constante.

Soit $P \in \ker(D)$, où $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$.
Donc $P' = 0$.
Si $\deg(P) > 0$, alors $\deg(P') \geq 0$ (13.41).
Donc nécessairement, $\mathbb{K}_0[X] \subset \ker(D)$.
Donc $\ker(D) = \mathbb{K}_0[X]$.

Chapitre 14

Suites numériques

14.18 Premier théorème de comparaison

Théorème 14.18

Si à partir d'un certain rang on a
$$|u_n - l| \leq v_n$$
avec $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Soit $u_n \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geq N_1, |u_n - l| \leq v_n$$
Comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout $\epsilon > 0$, on choisit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geq N_2, |v_n - 0| = |v_n| < \epsilon$$
On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Ainsi :
$$\forall n \geq \mathbb{N}, |u_n - l| \leq v_n = |v_n| < \epsilon$$
Donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l}$

14.22 Unicité de la limite

Propostion 14.22

Si u admet une limite $l \in \mathbb{R}$, alors celle-ci est unique.

On suppose que u admet comme limite l et l' dans $\mathbb{R}$.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit N et N' dans $\mathbb{N}$ tels que :
$$\forall n \geq N, |u_n - l| < \epsilon$$
$$\forall n \geq N', |u_n - l'| < \epsilon$$
Pour tout $n \geq \max(N, N')$:
$$\begin{aligned}|l - l'| &= |l - u_n + u_n - l'| \\ &\leq |l - u_n| + |u_n - l'| \text{ (Inégalité triangulaire)} \\ &< l\epsilon\end{aligned}$$
Nécessairement :
$$|l - l'| = 0$$

14.23 Limite et inégalité

Propostion 14.23

Si u converge vers l et si $\alpha < l$, alors à partir d'un certain rang, $\alpha < u_n$. De la même manière, si $\beta > l$, alors à partir d'un certain rang, $u_n < \beta$.

On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Soit $\alpha < l$. On pose $\epsilon = \frac{|l-\alpha|}{2}$.
D'après la définition, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geq N, |u_n - l| < \epsilon$$
Soit :
$$\forall n \geq N, \underbrace{u_n}_{>\alpha} \in]\underbrace{l-\epsilon}_{>\alpha}, l+\epsilon[$$

14.24 Convergence et bornitude

Propostion 14.24

Une suite convergente est bornée.

Soit u une suite convergente. Notons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
On pose $\epsilon =$.
Par définition, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in]l-1, l+1[$$

Donc $\{u_n, n \geq N\}$ est borné. Donc $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \underbrace{\{u_n, n \in [\![0, N-1]\!]\}}_{\text{ensemble fini}} \cup \underbrace{\{u_n, n \geq N\}}_{\text{borné}}$ est borné.

14.29 Minoration d'une extraction

Lemme 14.29

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq \sigma(n).$$

Par récurrence.
Comme $\sigma(0) \in \mathbb{N}$, on a bien $\sigma(0) \geq 0$.
Si $\sigma(n) \geq n$, alors $\sigma(n+1) > \sigma(n) \geq n$.
Donc $\sigma(n+1) \geq n+1$.

14.30 Extraction d'une suite convergente

Propostion 14.30

Toute suite extraite d'une suite qui tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ est une suite convergente vers l.

On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$ (à adapter pour $l = \pm\infty$)
Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
On note $v = u \circ \sigma$.
Soit $\epsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq \mathbb{N}, |u_n - l| < \epsilon$$

Pour $n \geq N$, on a :

$$\begin{aligned}
\sigma(n) &\underset{(14.29)}{\geq} n \geq N \\
\text{donc } &|u_{\sigma(n)} - l| < \epsilon \\
\text{soit } &|v_n - l| < \epsilon \\
\text{donc } &\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l}
\end{aligned}$$

14.32 Pair, impair et convergence

Propostion 14.32

Si $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim u_n = l$

Soit $\epsilon > 0$. Soit N_1 et N_2 dans $\mathbb{N}$ telq que :

$$\forall n \geq N_1, |u_{2n} - l| \leq \epsilon$$
$$\forall n \geq N_2, |u_{2n+1} - l| \leq \epsilon$$

Or pour $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$.
Soit $n \geq N$.

— Si $n = 2p$, alors $p \geq N_1$

$$|u_n - l| = |u_{2p} - l| \leq \epsilon$$

— Si $n = 2p + 1$, alors $p \geq N_2$

$$|u_n - l| = |u_{2p+1} - l| \leq \epsilon$$

Dans tous les cas, $\boxed{|u_n - l| \leq \epsilon}$.

14.34 Opérations usuelles sur les limites

Théorème 14.34

Soit u et v deux suites qui convergent respectivement vers l et l' et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
— $u + v$ converge ver $l + l'$
— λu converge vers λl
— uv converge vers ll'
— Si $l \neq 0$, alors à partir d'un certain rang, la suite des termes u_n sont tous nuls et la suite $\frac{1}{u}$ converge vers $\frac{1}{l}$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq \epsilon \text{ et } |v_n - l'| \leq \epsilon$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n + v_n - (l + l')| &\leq |u_n - l| + |v_n - l'| \text{ (Inégalité triangulaire)} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

— RAS ($\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$)
— Comme u converge, u est bornée. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in N, |u_n| \leq M$$

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |u_n v_n - ll'| &= |u_n v_n - u_n l' + u_n l' - ll'| \\ &\leq |M||v_n - l'| + |l'| \times |u_n - l| \\ &\leq M \times \epsilon + |l'| \times \epsilon \\ &= (M + |l'|) \times \epsilon \end{aligned}$$

Donc $\boxed{u_n v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} ll'}$.
— On suppose $l \neq 0$. D'après (14.23), à partir d'un certain rang $u_n > 0$ (ou $u_n < 0$). Il existe en outre $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$0 < \frac{l}{2} < u_n \text{ et } |u_n - l| < \epsilon$$

Pour $n \geq N$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| &= \frac{|l - u_n|}{|u_n l|} \\ &\leq 2\frac{|l - u_n|}{l^2} \\ &< \frac{2\epsilon}{l^2} \end{aligned}$$

14.35 Conservation des inégalités larges par passage à la limite

Théorème 14.35

Soit u et v deux suites réelles. Si u converge vers l et v converge vers l' et si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ alors $l \leq l'$.

On raisonne par l'absurde : $l > l'$.
On pose $\epsilon = \frac{|l'-l|}{2}$.
On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in]l-\epsilon, l+\epsilon[\text{ et } v_n \in]l'-\epsilon, l'+\epsilon[$$

En particulier :

$$\forall n \geq N, u_n > v_n$$

Absurde.

14.37 Théorème d'encadrement

Théorème 14.37

Soit u, v et w trois suites réelles. Si u et v convergent vers l et si à partir d'un certain rang, $u_n \leq w_n \leq v_n$, alors w converge vers l.

Soit $\epsilon > 0$, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in]l-\epsilon[\text{ et } v_n \in]l-\epsilon, l+\epsilon[$$

A partir d'un certain rang M, par connexité de l'intervalle $]l-\epsilon, l+\epsilon[$:

$$\forall n \geq M, w_n \in]l-\epsilon, l+\epsilon[$$

14.38 Produit d'une suite bornée par une limite nulle

Théorème 14.38

Soit u et v deux suites réelles. Si u converge vers 0 et si v est bornée, alors w converge vers 0.

Soit $M \in \mathbb{R}_+$ telq ue :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n| \leq M \times |u_n| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$|u_n v_n| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Soit :

$$u_n v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

14.39 Exemple

Exemple 14.39

Soit (u_n) une suite strictement positive et $\eta \in]0;1[$. On suppose qu'à partir d'un certain rang, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \eta$. Alors $\lim u_n = 0$.

On suppose que :

$$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 2$$

Donc ($u_n > 0$) :

$$\forall n \geq n_0, 0 < u_n < \underbrace{\eta^{n-n_0}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \times u_{n_0}$$

Par encadrement :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

14.40 Comparaison puissance factorielle

Théorème 14.40

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, non nul.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{|x|^n}{n!} > 0$$

Or :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

A partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$$

Donc (14.39) :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

14.41 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Théorème 14.41

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $M \in \mathbb{R}$. Alors M est la borne supérieure (resp. inférieure) de A si et seulement si M majore (resp. minore) A et s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers M.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que $M = \sup A$. Donc M majore A.
On rappelle que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in A, M - \epsilon < a$$

Donc :

$$\forall n \in N, \exists a \in A, M - \frac{1}{n+1} < a_n \leq M \text{ (M est un majorant)}$$

D'après la suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ étant ainsi définie, d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M}$$

$\boxed{\Leftarrow}$
On choisit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M \text{ (majorant de } A)$$

Soit $\epsilon > 0$. On choisit $a_n \in A$ tel que :

$$a_n \in]M - \epsilon, M + \epsilon[$$

Donc $M - \epsilon$ ne majore pas A.
Donc :

$$\boxed{M = \sup A}$$

14.42 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Théorème 14.42

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que A est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in A, a \in]x - \epsilon, x + \epsilon[$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A, x - \frac{1}{n+1} < a_n < x + \frac{1}{n+1}$$

La suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ étant fixée ainsi :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \text{ (théorème d'encadrement)}$$

$\boxed{\Leftarrow}$
Soit $]x, y[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.
On pose $z = \frac{x+y}{2}$. On pose $\epsilon = \frac{|y-x|}{2}$.
On choisit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z$$

On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$a_n \in]z - \epsilon, z + \epsilon[=]x, y[$$

Donc :

$$\boxed{A \cap]x, y[\neq \emptyset}$$

14.48 Théorème de comparaison

Théorème 14.48

Soit u et v deux suites réelles.

1. Si $\lim u = +\infty$ et si à partir d'un certain rang on a $u_n \leq v_n$, alors $\lim v = +\infty$;
2. Si $\lim v = -\infty$ et si à partir d'un certain rang on a $u_n \leq v_n$, alors $\lim u = -\infty$;
3. Si $\lim u = +\infty$ (resp. $-\infty$) et si v est minorée (resp. majorée), alors $\lim u + v = +\infty$ (resp. $-\infty$).

1. Soit $A \geq 0$. On choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, A \leq u_n \text{ et } u_n \leq v_n$$

Donc :

$$\boxed{v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

2. RAS
3. Si (v_n) est minorée, alors à partir d'un certain rang :

$$m + u_n \leq u_n + v_n$$

En adaptant le premier point ($A' = A - m$), on a :

$$\boxed{u_n + v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

14.49 Limites infinies et opérations

Théorème 14.49

Soit u et v deux suites réelles de limites respectives l et l' dans $\overline{\mathbb{R}}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
- $\lim u + v = l + l'$ (sauf si $l = +\infty$ et $l' = -\infty$ ou inversement)
- $\lim \lambda u = \lambda l$ sauf si $\lambda = 0$ auquel cas la suite λu est la suite nulle.
- $\lim u \times v = l \times l'$ sauf si $\lambda = 0$ et $l' = \pm\infty$ ou inversement
- Si à partir d'un certain rang, la suite u ne s'annule pas, alors la suite $\frac{1}{u}$:
  - si $l \in \mathbb{R}^*$, tend vers $\frac{1}{l}$;
  - si $l = \pm\infty$, tend vers 0 ;
  - si $l = 0$ et $u_n > 0$, tend vers $+\infty$;
  - si $l = 0$ et $u_n < 0$, tend vers $-\infty$;
  - n'a pas de limite dans les autre cas.

- On suppose $l' \in \mathbb{R}$ et $l = +\infty$. Donc v est bornée.
  Donc (14.48) :

$$u_n + v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

- $\lambda \neq 0, \lambda > 0$ et $l = +\infty$. Pour $A \in \mathbb{R}$, on choisit un rang à partir duquel $u_n > \frac{A}{\lambda}$.
- On suppose $l > 0$ et $l' = +\infty$.

  Comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$, alors à partir d'un certain rang, $u_n > m$ avec $m = \begin{cases} 1 \text{ si } l = +\infty \\ \frac{l}{2} \text{ sinon} \end{cases}$

$$u_n v_n > m v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  Donc :

$$u_n v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ (14.48)}$$

- $l = +\infty$.
  Soit $\epsilon > 0$, à partir d'un certain rang :

$$u_n > \frac{1}{\epsilon} > 0$$

  Donc :

$$0 < \frac{1}{u_n} < \epsilon$$
$$\frac{1}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si $l=0$ et $u_n>0$ à partir d'un certain rang.
Pour $A \in \mathbb{R}_+^*$, à partir d'un certain rang :

$$u_n > 0 \text{ et } u_n < \frac{1}{A}$$
$$\text{donc } \frac{1}{u_n} > A$$
$$\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

14.50 Théorème de la limite monotone

Théorème 14.50

Si u est une suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée), alors u converge vers $\sup_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$ (resp. vers $\inf_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$).
Si u est une suite croissante et non majorée (resp. décroissante et non minorée) alors u tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$).

— On suppose u croissante et majorée.
L'ensemble $A=\{u_n | n\in\mathbb{N}\}$ est non vide et majoré. Cet ensemble possède une borne supérieure notée l (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$).
Soit $\epsilon >$. Comme $l-\epsilon<u_n$ ne majore pas A, on choisit $N\in\mathbb{N}$ tel que $l-\epsilon<u_n$.
Or (u_n) est croissante donc :

$$\forall n \geq N, l-\epsilon < u_N \leq u_n \leq l$$

Donc :

$$\forall n \geq N, u_n \in]l-\epsilon, l+\epsilon[$$

Soit :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l}$$

— On suppose u croissante et non majorée.
Soit $A\in\mathbb{R}_+$. Soit $N\in\mathbb{N}$ tel que :

$$u_N \geq A \text{ (} u \text{ non majorée)}$$

Donc :

$$\forall n \geq N, A \leq u_N \leq u_n \text{ (} u \text{ croissante)}$$

Soit :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

14.54 Exemple

Exemple 14.54

Soit u et v les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$$

Ces deux suites sont adjacentes.

—

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

Donc (u_n) est croissante.

—

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n!(n+1)^2 n}[(n+1)n + n - (n+1)^2] \\ &= -\frac{1}{n!(n+1)^2 n} \\ &\leq 0\end{aligned}$$

—

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!}$$

Donc :

$$v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc u et v sont adjacentes et convergent alors vers une limite commune. (TCSA)

14.55 Convergence des suites adjacentes

Théorème 14.55

Deux suites adjacentes convergent vers une limite commune.

Soit u et v deux suites adjacentes avec u croissante et v décroissante.
Soit $w = v - u$. Par opération, w est décroissante.
Par hypothèse :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $w \leq 0$, soit $u \leq v$.
La suite u est donc majorée par v_0, et croissante donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.
Pour les mêmes raisons, v converge.
Or, par théorème d'opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$$

14.56 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 14.56

On peut extraire de toute suite réelle bornée une suite convergente.

Soit u une suite bornée. On note a et b un minorant et majorant de u. On construit deux suites (a_n) et (b_n) par récurrence de la manière suivante :

— On initialise $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

— Si l'intervalle $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ contient une infinité de valeurs de la suite (u_n), alors $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$.
Sinon, l'intervalle $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$ contient une infinité de valeurs, alors $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.
On note $\sigma(0) = 0$ et comme $[a_1, b_1]$ contient une infinité de valeurs, on dixe $u_{n_1} \in [a_1, b_1]$ avec $n_1 > 0$.
On pose alors $\sigma(1) = n_1$.

— Supposons construits (a_n), (b_n) et σ avec le principe précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ \text{ou} \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

Selon que $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ contient une infinité de valeurs ou $\left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$ et $v(n+1) > v(n)$ et $u_{\sigma(n+1)} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq u_{\sigma(n)} \leq b_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, |b_{n+1} - a_{n+1}| = \frac{|b_n - a_n|}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, |b_n - a_n| = \frac{|b_0 - a_0|}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes donc convergent vers la même limite (TCSA) donc $(u_{\sigma(n)})$ converge (TE).

14.63 Exemple

Exemple 14.63

La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$ diverge vers $+\infty$.

R_+ est stable par $f : x \mapsto x + e^x$.
Comme $0 \in \mathbb{R}_+$, la suite (u_n) est bien définie.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{u_n} \geq u_n$$

Donc (u_n) est croissant.
Supposeons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}_+$.
Par théorème d'opération, $l = l + e^l$.
Absurde.
Donc d'après le TLM :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

14.64 Exemple

Exemple 14.64

La suite (u_n) défine par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$ converge vers 0.

$[0, 1]$ est stable par $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ et $1 \in [0, 1]$.
Donc (u_n) est bien définie et est minorée.
Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1})f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2 + 1} \leq u_n$$

Donc (u_n) est décroissante donc converge vers $l \in [0, 1]$ d'après le TLM.
Par théorème d'opération :

$$\begin{aligned} l = \frac{l}{l^2+1} \\ \text{donc } l^2 = 0 \\ \text{donc } l = 0 \end{aligned}$$

14.66 Monotonie d'une suite récurrente définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème 14.66

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $u_0 \in D$ et $f : D \to D$ une fonction (autrement dit, D est stable par f). On note (u_n) l'unique suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Si pour tout $x \in D, f(x) \geq x$, alors (u_n) est croissante. Si pour tout $x \in D, f(x) \leq x$, alors (u_n) est décroissante. Le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ renseigne donc sur la monotonie de la suite (u_n).
2. Si f est croissante, alors (u_n) est monotone. Son sens de variation dépend alors du signe de $u_1 - u_0$.
3. Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens contraires. Leur sens de variation est entièrement déterminé par le signe de $u_2 - u_0$.

1. Si :

$$\forall n \in D, f(x) \geq x$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = u_{n+1} > u_n$$

Donc (u_n) est croissante.

2. On suppose f croissate et $u_0 \leq u_1$. Alors :

$$u_1 = f(u_0) \leq f(u_1) = u_2$$

On termine par récurrence.

3. Si f est décroissante, alors $f^2 = f \circ f$ est croissante. Or :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} &= f^2(u_{2n}) \\ u_{2n+1} &= f^2(u_{2n-1}) \end{aligned}$$

Donc (14.66.2) (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
Or, si $u_2 \leq u_0$, alors $u_3 = f(u_2) \leq f(u_0) = u_1$

14.68 Exemple

Exemple 14.68

On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ et notons $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$.
Etudier la convergence de la suite (u_n).

$\mathbb{R}_+$ est stable par $f : x \mapsto x^2 + x$ et $1 \in \mathbb{R}_+$.
Donc (u_n) est bien définie.
Comme :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) - x \geq 0$$

(u_n) est croissante.
On suppose que :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \geq 1 = u_0$$

Comme $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.
On a $f(l) = l$ donc $l^2 = 0$.
Absurde.
Donc, d'après le TLM :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

14.69 Exemple

Exemple 14.69

On note (u_n) la suite définie apr $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$, et notons $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$. Etudier la convergence de la suite (u_n).

$[1, 2]$ est stable par $f : x \mapsto 1 +\ frac1x$ et $1 \in [1, 2]$.
Donc (u_n) est bien définie et est bornée.
Comme f est décroissante sur $[1, 2]$, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monoties contraires.
Comme$u_0 = 1 = \min([1, 2])$, (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) décroissante, puis convergentes (TLM) vers des points fixes de f^2 (car f^2 est continue sur $[1, 2]$)
Soit $x \in [1, 2]$.

$$\begin{aligned}
f^2(x) = x &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = x \\
&\Leftrightarrow x + 1 + x = x(x + 1) \\
&\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x - \underbrace{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}_{\in[1,2]}\right)\left(x - \underbrace{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}_{\notin[1,2]}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent nécessairement vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Donc :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

14.72 Convergence et parties réelles et imaginaires

Théorème 14.72

Soit u une suite complexe et $l \in \mathcal{C}$. Alors la suite u converge vers l si et seulement si la suite $(Re(u_n))$ converge vers $Re(l)$ et $(Im(u_n))$ converge vers $Im(l)$.

$\boxed{\Rightarrow}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|Re(u_n) - Re(l)| \leq |u_n - l| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$|Im(u_n) - Im(l)| \leq |u_n - l| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, $Im(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} Im(l)$ et $Re(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} Re(l)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On a :

$$\begin{aligned}
|u_n - l| &= \sqrt{(Im(u_n) - Im(l))^2 + (Re(u_n) - Re(l))^2} \\
&\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (théorème d'opérations)}
\end{aligned}$$

14.73 Théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes

Remarque 14.73

Si u est bornée , on peut en extraire une suite convergente (Bolzano-Weierstrass).

$u_n = a_n + b_n$ bornée.
(a_n) et (b_n) sont bornés.
(a_n) borneé donc $(a_{\sigma(n)})$ converge.
$(b_{\sigma(n)})$ bornée donc $(b_{\sigma\circ\varphi(n)})$ converge.
$(a_{\sigma\circ\varphi(n)})$ extraite de $(a_{\sigma(n)})$ donc converge.
$(u_{\sigma\circ\varphi(n)})$ converge.

Chapitre 15

Limites et continuité

15.6 Limite en un point du domaine

Propostion 15.6

Si $a \in X$ et si $f(x)$ admet une limite finie en a, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

Comme $f(x)$ admet une limite finie b quand $x \to a$:

$$\forall \epsilon, \exists \nu > 0, \forall x \in X, |x-a| \leq \nu \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon$$

Or pour tout $\epsilon > 0$:

$$|a-a| \leq \nu \text{ (quelque soit } \nu)$$

Donc :

$$\forall \epsilon, |f(a) - b| \leq \epsilon$$

Donc $\boxed{f(a) = b}$.

15.15 Comparaison des limites de deux fonctions coincidant au voisinage de a

Propostion 15.15

Soit f et g deux fonctions coincidant au voisinage d'un point a. Alors, si f admet une limite (finie ou infinie) en a, alors g aussi et

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

On choisit $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que $W \cap X = W \cap Y$ et $f|_{W \cap X} = g|_{W \cap Y}$.
Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $f(x)$ tend vers b quand $x \to a$.
Soit $V \in \mathcal{V}(b)$. On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(U \cap X) \subset V$$

Or

$$W \cap U \in \mathcal{V}(a) \text{ et } \subset f(W \cap U \cap X)_{g(W \cap U \cap Y)} \subset V$$

Donc g admet une limite en a égale à b

15.17 Unicité de la limite, cas réel

Théorème 15.17

Soit $a \in \overline{X}$ et f une fonction réelle. Sous réserve d'existence, la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a est unique.

Par l'absurde. On suppose que f possède deux limites $l \neq l'$ en a.
On choisit $u \in \mathcal{V}(l)$ et $u' \in \mathcal{V}(l')$ tels que $u \cap u' = \emptyset$.
Par définition, on choisit $(W, W') \in \mathcal{V}(a)^2$ tels que $f(W \cap X) \subset U$ et $f(W' \cap X) \subset U'$.
Or $\underbrace{W \cap W'}_{\neq \emptyset} \notin \mathcal{V}(a)$ et $f(\underbrace{W \cap W' \cap X}_{\neq \emptyset}) \subset U \cap U' = \emptyset$.
Absurde.

15.23 Propostion

Propostion 15.23

Soit $a \in \overline{X}$. Soit $(Z_i)_{i \in I}$ une famille **finie** de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $X \in \bigcup_{i \in I} Z_i$ (on dit que (Z_i) est un **recouvrement** de X). La fonction f admet au point a une limite ℓ (finie ou infinie) si et seulement si pour tout i tel que la limite de f en a sur Z_i est envisageable, cette limite existe et vaut ℓ.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que $\lim\limits_a f = \ell$.
Soit $i \in I$ tel que $a \in \overline{X \cap Z}$.
Soit $V \in \mathcal{V}(\ell)$. On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U \cap X) \subset V$.
EN particulier $f(\underbrace{U \cap X \cap Z_i}_{\subset U \cap X}) \subset V = f|_{X \cap Z_i}(U \cap X \cap Z_i)$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Notons $J \subset I$ l'ensemble des indices pour lesquels la limite est envisageable en Z_i.
Soit $V \in \mathcal{V}(\ell)$. Pour tout $i \in J$, comme $\lim\limits_{x \to a x \in Z_i} = \ell$ on choisit $U_i \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f|_{Z_i \cap X}(U_i \cap Z_i \cap X) \subset V$.
On pose $U = \bigcap\limits_{i \in J} U_i \in \mathcal{V}(a)$ car J est fini.
On choisit $U' \in \mathcal{V}(a)$ tel que $U' \cap \left(\bigcup\limits_{i \in I \setminus J} Z_i \right) = \emptyset$.
$f(U \cap U' \cap X) \subset V$
Donc $\boxed{\lim\limits_a f = \ell}$.

15.30 Composition de limites

Propostion 15.30

Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions avec $f(X) \subset Y$. Soit $a \in \overline{X}$, $b \in \overline{Y}$ et $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_a f = b$ et si $\lim\limits_b g = c$, alors $\lim\limits_a g \circ f = c$.

Soit $W \in \mathcal{V}(c)$. On choisit $V \in \mathcal{V}(b)$ tel que :

$$g(V \cap Y) \subset W$$

On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(U \cap X) \subset V \cap Y \ (\lim_a f = b)$$

On a alors :

$$\boxed{g \circ f(U \cap X) \subset W}$$

15.32 Limites et inégalités strictes

Propostion 15.32

Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{X}$, $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

1. Si $\lim\limits_a f < M$ alors $f(x) < M$ au voisinage de a
2. Si $\lim\limits_a f > m$ alors $f(x) > m$ au voisinage de a.

1. Notons $b = \lim\limits_a f \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $b < M$, on choisit $U \in \mathcal{V}(b)$ et $U' \in \mathcal{V}(M)$ avec $U < U'$.
   Comme $\lim\limits_a f = b$, on choisit $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(W \cap X) \subset U$$

15.33 Limite et inégalités larges

Propostion 15.33

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{X}$. On suppose que f et g possède des limites finies en a.
Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $\lim_a f \leq \lim_a g$.
Ce résultat est le plus souvent utilisé lorsqu'une des deux fonctions est constante.

RAF : absurde + (15.32)

15.34 Caractérisations séquentielle de la limite d'une fonction

Théorème 15.34

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{X}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Sont équivalentes :

1. $\lim_a f = \ell \Leftrightarrow \forall u_n \to a, \lim f(u_n) = \ell \; (= f(\lim u_n))$
2. Pour toute suite (u_n) de limite a à valeurs dans X, la suite $(f(u_n))$ a pour limite ℓ.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$
On suppose que $\lim_a f = \ell$.
Soit $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ avec $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
Soit $V \in \mathcal{V}(\ell)$. On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(U \cap X) \subset V \; (\lim_a f = \ell)$$

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in U \cap X$$

Donc :

$$\forall n \geq N, f(u_n) \in V$$

Donc :

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$
Par contraposée. On suppose que f n'admet pas ℓ comme limite en a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$V_n = \begin{cases}]a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}[\text{ si } a \in \mathbb{R} \\ [n, +\infty[\text{ si } a = +\infty \\ ]-\infty, -n] \text{ si } a = -\infty \end{cases}$$

Par définition, il existe $W \in \mathcal{V}(\ell)$ tel que pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, il existe $x \in V \cap X$ et $f(x) \neq W$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $x_n \in V_n \cap X$ tel que $f(x_n) \neq W$.
Par construction :

$$(x_n) \in X^{\mathbb{N}}, x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \text{ et } f(x_n) \cancel{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} \ell$$

15.39 Théorème de la limite monotone

Théorème 15.39

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. La limite $\lim\limits_{a^+} f$ existe et est finie. Plus précisément, on a $f(a) \leq \lim\limits_{a^+} f$.
2. Pour tout $c \in]a, b[$, $\lim\limits_{c^-} f$ et $\lim\limits_{c^+} f$ existent et sont finies. Plus précisément : $\lim\limits_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim\limits_{c^+} f$.
3. La limite $\lim\limits_{b} f$ existe et est soit finie, soit égale à $+\infty$.

1. On note $F = f(]a, b[)$. Comme f est définie au voisinage de a, $]a, b[\neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$.
   Par ailleurs, comme f est croissante sur $]a, b[$, F est minorée par $f(a)$.
   D'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, F possède une borne inférieure notée α, avec $f(a) \leq \alpha$.
   Montrons par définition que $\lim\limits_{a^+} f = \alpha$.
   Soit $\epsilon > 0$, $\alpha + \epsilon$ n'est pas un minorant de F par définition de α. On choisit :
   $$\alpha \leq f(x_0) < \alpha + \epsilon$$
   Par croissance de f sur $]a, b[$:
   $$\forall x \in]a, x_0[, \alpha \leq f(x) \leq f(x_0) < \alpha + \epsilon$$
   On pose $\eta = x_0 - a > 0$, on a montré que :
   $$\boxed{\forall x \in]a - \eta[\cap]a, b[, |f(x) - \alpha| < \epsilon}$$
2. Pour $c \in]a, b[$, en appliquant (15.39.1) à $f|_{[a,b[}$, on montre que $\lim\limits_{c^+} f$ existe et $f(x) \leq \lim\limits_{x^+} f$.
   On adapte ensuite la preuve de (15.39.1) :
   $$F = f(]a, c[), \alpha = \sup(F)$$
   pour montrer que $\lim\limits_{c^-} f$ existe et
3. Par disjonction de cas.
   - Si f est majorée : on adapte la 2ème partie de (15.39.2).
   - Si f n'est pas majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme f n'est pas majorée, on choisit $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > A$.
     Comme f est croissante :
     $$\forall x \geq x_0, f(x) > A$$
   Donc $\lim\limits_{b} f = +\infty$.

15.59 Théorème des valeurs intermédiaires : version 1

Théorème 15.59

Soit f une fonction continue sur un intervalle I d'extrémité a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$ (avec existence des limites dans le cas des bornes infinies). Alors si $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ (ou l'inverse), il exsite $c \in]a, b[$, tel que $f(c) = 0$.

On note $A = \{x \in I, f(x) > 0\}$.

- $A \neq \emptyset$ car f est définie et strictement positive au voisinage de a (15.32).
- A est majoré car f est strictement négative au voisinage de b (et tout élément dans ce voisinage est un majorant).

D'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, A possède une borne supérieure notée $c \in]a, b[$.

- On a $c \notin A$. En effet, si $f(x) > 0$, alors f est strictement postivie sur un voisinage de c, et comme f est définie à droite de c, cela contredirait que c'est un majorant de A.
  Donc $f(c) \leq 0$.
- Si $f(c) < 0$, alors f est strictement négative au voisinage à gauche de c.
  Absurde car c est le plus petit des majorants.
  Conclusion, $\boxed{f(c) = 0}$.

15.60 Théorème des valeurs intermédiaires : version 2

Théorème 15.60

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $M = \sup_I f(x)$ et $m = \inf_I f(x)$ (éventuellement infinies).
Alors f prend toutes les valeurs de l'intervalle $]m; M[$:

$$\forall x_0 \in]m; M[, \exists c \in I, f(c) = x_0.$$

RAF : (15.59) à $f - x_0$.

15.61 Théorème des valeurs intermédiaires : version 3

Théorème 15.61

L'image d'un intervalle quelconque par une fonction continue est un intervalle.

Définition d'un intervalle par connexité.

15.65 Théorème de Heine

Théorème 15.65

Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Rappel :

$$C^0(I) : \forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$
$$Cu(I) : \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On raisonne par l'absurde. Soit f continue sur $[a, b]$ mais non uniformément continue sur $[a, b]$.
On choisit ϵ tel que :

$$\forall \eta > 0, \exists (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon$$

Ainsi, pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, on choisit un couple $(x_n, y_n) \in [a, b]^2$ tel que :

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } \underbrace{|f(x_n) - f(y_n)|}_{(*)} \geq \epsilon$$

En particulier (x_n) est bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on en extrait $(x_{\varphi(n)})$ suite convergente vers ℓ.
D'après le TCILPPL, $\ell \in [a, b]$.
Comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Alors :

$$y_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Par continuité :

$$f(x_{\varphi(n)}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(\ell) \text{ et } f(y_{\varphi(n)}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$$

Donc par opération :

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Absurde d'après $(*)$.

15.67 Caractérisation des intervalles compacts

Lemme 15.67

Les intervalles compacts de $\mathbb{R}$ sont exactement les segments, c'est-à-dire les intervalles fermés bornés $[a, b]$.

Les segments sont bien compacts (BW et TCILPPL).

— Si $I =]-\infty, a[$,

$$u_n = a - n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \notin I$$
$$u_n = a - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \notin I$$

15.68 Image d'un compact par une fonction continue

Lemme 15.68

L'image continue d'un compact est compact.

Soit I un segment, donc un intervalle.
Comme f est continue sur I, $f(I)$ est un intervalle (TVI v3).
Montrons que $f(I)$ est compact.
Soit $(y_n) \in f(I)^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in I$ tel que :

$$y_n = f(x_n)$$

Or I est compact (15.67), on choisit :

$$x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in I$$

$y_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ car f est continue sur I.

15.69 Image d'un segment par une fonction continue

Corollaire 15.69

Soit f continue sur un segment I, alors $f(I)$ est un segment.

(15.68) + TVI v3 + (15.67)

15.72 Théorème 15.72

Théorème 15.72

Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I. Alors f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

$\boxed{\Leftarrow}$
RAS

$\boxed{\Rightarrow}$
Supposons f non strictement monotone.
On peut supposer qu'il existe alors :

$$x < y < z$$

tels que $f(x) < f(y)$ et $f(z) < f(y)$.
Soit :

$$\lambda = \frac{f(y) + \max(f(y), f(z))}{2} \begin{array}{l} \in]f(x), f(y)[\\ \in]f(z), f(y)[\end{array}$$

Par continuité de f sur les intervalles $]x, y[$ et $]y, z[$, il existe $\alpha \in]x, y[$ et $\beta \in]y, z[$ tels que :

$$f(\alpha) = \lambda = f(\beta)$$

Donc f n'est pas injective.

15.73 Théorème 15.73

Théorème 15.73

Soit I un intervalle et f monotone sur I. Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur I.

On suppose f croissante sur I.
On suppose que f n'est pas continue sur I.
On applique le TLM :

$$\forall a \in I, \lim_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim_{a^+} f \text{ (quand tout existe)}$$

Comme f n'est pas continue sur I, on choisit $a \in I$ tel que :

$$\lim_{a^-} f < f(a) \text{ ou } f(a) < \lim_{a^+} f$$

On pose :

$$\lambda = \frac{f(a) + \lim_{a^-} f}{2} \text{ ou } \lambda = \frac{f(a) + \lim_{a^+} f}{2}$$

$f(a) \neq \lambda$ et par croissance :

$$\forall x < a, f(x) < \lambda$$
$$\forall x > a, f(x) > \lambda$$

Donc $\lambda \notin f(I)$.
Donc $f(I)$ n'est pas connexe, donc $f(I)$ n'est pas un intervalle.

15.76 Théorème de la bijection

Théorème 15.76

Soit I un intervalle d'extrémités a et b. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone et continue. Soit

$$\alpha = \lim_{x \to a} f(x) \text{ et } \beta = \lim_{x \to b} f(x).$$

(ces limites existent car f et monotone). Alors $f(I)$ est un intervalle d'extrémité α et β, et f est un homémorphisme de I sur $f(I)$.
Plus précisément, la borne α de $f(I)$ est ouverte si et seulement si la borne a de I est ouverte (et de même pour β).

- $f(I)$ est un intervalle : (15.61).
- f induit une bijection de I sur $f(I)$ (15.72 $\boxed{\Leftarrow}$).
- f^{-1} est strictement monotone et définie sur $f(I)$ intervalle, d'image I intervalle donc f^{-1} est continue sur $f(I)$ (15.73 $\boxed{\Rightarrow}$).

Ainsi, f induit un homéomorphisme de I sur $f(I)$.
La nature des bornes (fermées ou ouvertes) provient de la monotonie de f.

Chapitre 16

Arithmétique des polynômes

16.1 Division euclidienne

Théorème 16.1

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ non nul, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$. Le polynôme Q est appelé **quotient** et R le **reste**.

Existence :
On raisonne par récurrence sur le degré de A.

- Pour $n = \deg A = 0$. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$.
  - Si $\deg B > 0$, alors $(0, A)$ convient.
  - Si $\deg B = 0$, le couple $(B^{-1} \times A, 0)$ convient (comme B est constant et non nul), alors $B \in \mathbb{K}^*$ donc inversible).
- On suppose le résultat vrai pour tout $A \in \mathbb{K}_n[X]$.
  Soit $A \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ avec $\deg A = n + 1$.
  On écrit $A = \underbrace{a}_{\neq 0} X^{n+1} + A_1$ avec $A_1 \in \mathbb{K}_n[X]$.
  - Si $\deg A < \deg B$, le couple $(0, A)$ convient.
  - Si $\deg A \geq \deg B$ et on note b le coefficient dominant de B :
$$A - ab^{-1}B \times X^{n+1-\deg B} \in \mathbb{K}_n[X]$$
    D'après l'hypothèse de récurrence, on choisit $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $\deg R < \deg B$ et $A - ab^{-1}B \times X^{n+1-\deg B} = QB + R$.
    Donc :
$$A = \left[Q + ab^{-1}X^{n+1-\deg A}\right] \times B + R$$

Unicité :
On suppose que $A = BQ + R = BQ_1 + R_1$.
Donc :

$$\begin{aligned}
B(Q - Q_1) &= R_1 - R \\
\text{donc } \underbrace{\deg\left(B(Q - Q_1)\right)}_{\deg B + \deg Q - Q_1} &= \deg\left(R_1 - R\right) \\
&\leq \max(\deg R_1, \deg R) \\
&< \deg B \\
\text{donc } \deg\left(Q - Q_1\right) &< 0 \\
\text{donc } Q - Q_1 &= 0 \\
\text{puis } R_1 - R &= 0
\end{aligned}$$

16.7 Proposition 16.7

Propostion 16.7

On a :

1. Soit A et P deux polynômes non nuls. Si $A|P$ et si $P|A$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \alpha A$. (La relation de divisibilité n'est pas antisymétrique)
2. Si $A|B$ et si $B|C$, alors $A|C$. La relation de divisibilité est transitive.
3. Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ non nul, $A|A$. La relation de divisibilité est réflexive.

1. $P \neq 0$, $A \neq 0$. Si $A|P$ et $P|A$, alors (16.6.2) :
$$\deg A \leq \deg P \text{ et } \deg P \leq \deg A$$
   Donc :
$$\deg P = \deg A$$

Or $A|P$, alors :

$$P = A \times Q$$

Puis :

$$\deg P = \deg(AQ) = \deg A + \deg Q \text{ } (\mathbb{K} \text{ est intègre})$$

Donc :

$$\deg Q = 0$$

Donc :

$$Q = \alpha \in \mathbb{K}^*$$

2. RAS
3. RAS

16.15 Principalité de $\mathbb{K}[X]$

Théorème 16.15

Soit I un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0\}$. Il existe un unique polynôme unitaire D tel que

$$I = D\mathbb{K}[X]$$

Existence :
Soit $I \neq \{0\}$ un idéal.
On note $A = \{\deg P, P \in I \backslash \{0\}\} \subset \mathbb{N}$.
$A \neq \emptyset$ ($I \neq \{0\}$), d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, A possède un plus petit élément noté $n \geq 0$.
Comme $n \in A$, on choisit $D \in I$ tel que $\deg D = n$.
Comme I est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et que $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}[X]$, on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha D \in I$$

On peut donc supposer D unitaire. Comme I est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, on a :

$$D \times \mathbb{K}[X] \subset I$$

Soit $P \in I$. On effectue la division euclidienne de P par D ($\neq 0$) :

$$P = BD + R$$

avec $\deg R \subset \deg D$.
Or :

$$R = \underbrace{P}_{\in I} - \underbrace{BD}_{\in I}$$
$$\in I$$

Par définition de $\deg D = n$, $R = 0$.

Unicité :

$$I = D\mathbb{K}[X] = J\mathbb{K}[X]$$

avec D et J unitaires.
Or ils sont associés, donc égaux.

16.17 Existence de *pgcd*

Propostion 16.17

Si A et B sont deux polynômes non nuls, de tels PGCD existent.

Soit A, B dans $\mathbb{K}[X]$, $(A, B) \neq (0, 0)$.
On note $\mathcal{C} = \{\deg P, P|A \text{ et } P|B \text{ et } P \neq 0\} \subset \mathbb{N}$.
$\mathcal{C} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est majoré par $\deg B$ $(\max(\deg A, \deg B))$.
L'existence est assurée par la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$.

16.18 Principalité de $\mathbb{K}[X]$

Propostion 16.18

Soit A et B deux polynômes non tous deux nuls. Soit $D \in \mathbb{K}[X]$. Alors Δ est un PGCD de A et B si et seulement si

$$A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X].$$

D'après (16.15), on choisit $F \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = F\mathbb{K}[X]$$

Soit $D \in \mathbb{K}[X]$.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que D est un PGCD.
Donc $D|A$ et $D|B$.
Donc $D|F$ (combinaison $F \in A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X]$).
Or $F|A$ et $F|B$ $(A \in F\mathbb{K}[X],\ B \in F\mathbb{K}[X])$.
Par maximalité de $\deg D$, on a F et D associés.

$\boxed{\Leftarrow}$

$$D\mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = F\mathbb{K}[X]$$

Donc $D|A$ et $D|B$.
Pour tout diviseur commun P de A et B, $P|A$ et $P|B$.
Donc $P|D$ $(D \in A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X])$.
Donc $\deg D$ est maximal pour la divisibilité.

16.24 Lemme de préparation au calcul pratique du PGCD unitaire

Lemme 16.24

Soit A et B deux polynômes tels que $B \neq 0$. Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $A \wedge B = (A - BQ) \wedge B$.
En particulier, si Q et R sont le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B Alors $A \wedge B = B \wedge R$.

$$\begin{aligned}(A \wedge B)\mathbb{K}[X] &= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\ &= (A - BQ)\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\ &= ((A - BQ) \wedge B)\mathbb{K}[X]\end{aligned}$$

Donc $A \wedge B$ et $(A - BQ) \wedge B$ sont associés, unitaires par définition, donc égaux.

16.26 Exemple

Exemple alternatif 16.26

Trouver les PGCD de $A = X^5 + 2X$ et de $B = X^4 + 2X^3 + 4$ et une relation de Bézout.

$$\begin{aligned}
X^5 + 2X &= (X^4 + 2X^3 + 4)(X - 2) + 4X^3 - 2X + 8 \\
X^4 + 2X^3 + 4 &= (4X^3 - 2X + 8)(\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}X^2 - X \\
4X^3 - 2X + 8 &= (\frac{1}{2}X^2 - X)(8X + 16) + 14X + 8 \\
\frac{1}{2}X^2 - X &= (14X + 8)(\frac{1}{28}X - \frac{9}{14 \times 7}) + \frac{9 \times 4}{7^2} \\
A \wedge B = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{9 \times 4}{7^2} &= \frac{1}{2}X^2 - X - (14X + 8)(\frac{1}{28}X - \frac{9}{2 \times 7^2}) \\
&= \frac{1}{2}X^2 - X - (4X^3 - 2X + 8 - (\frac{1}{2}X^2 - X)(8X + 16))(\frac{1}{28}X - \frac{9}{2 \times 7^2})
\end{aligned}$$

16.27 Propriétés du PGCD

Propostion 16.27

L'opération $\wedge$ est commutative et associative. Par ailleurs, si C est unitaire, alors $(A \wedge B)C = (AC) \wedge (BC)$.

Soit $(A, B, C) \in \mathbb{K}[X]^3$ non tous nuls.

$$\begin{aligned}
(A \wedge B)\mathbb{K}[X] &= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\
&= B\mathbb{K}[X] + A\mathbb{K}[X] \\
&= (B \wedge A)\mathbb{K}[X]
\end{aligned}$$

Donc $A \wedge B$ et $B \wedge A$ sont associés et unitaires donc égaux.

$$\begin{aligned}
((A \wedge B) \wedge C)\mathbb{K}[X] &= (A \wedge B)\mathbb{K}[X] + C\mathbb{K}[X] \\
&= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] + C\mathbb{K}[X] \\
&= (A \wedge (B \wedge C))\mathbb{K}[X]
\end{aligned}$$

Donc $A \wedge (B \wedge C)$ et $(A \wedge B) \wedge C$ sont associés et unitaires donc égaux.
On suppose C unitaire.
On a :

$$\begin{aligned}
(A \wedge B)\mathbb{K}[X] &= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\
\text{donc } (A \wedge B)C\mathbb{K}[X] &= AC\mathbb{K}[X] + BC\mathbb{K}[X] \\
&= ((AC) \wedge (BC))\mathbb{K}[X]
\end{aligned}$$

Ainsi $C(A \wedge B)$ et $(AC) \wedge (BC)$ sont associés et unitaires donc égaux.

16.29 Existence de PPCM

Propostion 16.29

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. Alors A et B admettent des PPCM.

On note $\mathcal{D} = \{\deg P, A|P, B|P, P \neq 0\} \subset \mathbb{N}$.

$$\deg AB \in \mathcal{D} \neq \emptyset$$

On conclut avec la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$.

16.30 Caractérisation des PPCM par les idéaux

Propostion 16.30

Soit A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors P est un PPCM de A et B si et seulement si

$$A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X].$$

$A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, donc de la forme $M\mathbb{K}[X]$ (16.15).
Montrons que P est un PPCM de A et B si et seulement si P et M sont associés.

$\boxed{\Rightarrow}$
On a donc :

$$\begin{aligned} P &\in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] \\ &\in M\mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

Donc $M|P$.
Or M est un multiple commun à A et B, donc par définition de P, on a :

$$\boxed{\deg P \leq \deg M}$$

Donc P et M sont associés.

$\boxed{\Leftarrow}$
On suppose P et M associés, donc :

$$\begin{aligned} P\mathbb{K}[X] &= M\mathbb{K}[X] \\ &= A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

En particulier, P est un multiple commun à A et B et pour tout $Q \in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$, donc $P|Q$.
Donc :

$$\boxed{degP \leq \deg Q}$$

16.42 Cas d'unicité d'une relation de Bézout

Propostion 16.42

Soit A et B non constants et premiers entre eux. Il existe un unique couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$AU + BV = 1 \text{ et } \deg U < \deg B \text{ et } \deg V < \deg A.$$

<u>Existence :</u>
Soit $(C, D) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que (16.37 - Bézout) :

$$AC + BD = 1$$

On effectue la dviision euclidienne de C par B :

$$\begin{aligned} C &= BE + U \text{ avec } \deg U < \deg B \\ \text{donc } AU + B(\underbrace{D + AE}_{V}) &= 1 \\ \text{donc } \deg(AU + BV) &= 0 \end{aligned}$$

Si $\deg V \geq \deg A$, alors :

$$\begin{aligned} \deg B + \deg V &\geq \deg B + \deg A \\ &> \deg U + \deg B \\ &= \deg AU \end{aligned}$$

Donc $\deg(AU + BV) = \deg BV > 0$.
Absurde.
L'exsitence est prouvée.

<u>Unicité :</u>
Avec es hypothèses correspondantes :

$$\begin{aligned} AU_1 + BV_1 &= 1 = AU_2 + BV_2 \\ \text{donc } A(U_1 - U_2) &= B(V_2 - V_1) \\ \text{donc } A &| B(V_2 - V_1) \end{aligned}$$

Or $A \wedge B = 1$, donc $A|(V_2 - V_1)$.
Or $\deg(V_2 - V_1) < \deg A$.
Donc $V_2 - V_1 = 0$.
Puis $A(U_1 - U_2) = 0$, donc $U_1 - U_2 = 0$ car $\mathbb{K}[X]$ est intègre avec $A \neq 0$.

16.43 Corollaire

Corollaire 16.43

Soit A, B et C trois polynômes avec A et B premiers entre eux. Alors $A \wedge (BC) = A \wedge C$.

— $A \wedge C | A$ donc $A \wedge C | A \wedge (BC)$. Donc $A \wedge C | BC$.
— $A \wedge (BC) | A$. Or $A \wedge B = 1$ donc on peut écrire $AU + BV = 1$. Donc $ACU + BCV = C$.
Or $A \wedge (BC) | ACU + BCV$ soit $A \wedge (BC) | C$. Donc $A \wedge (BC) | A \wedge C$.

Ainsi, $A \wedge C$ et $A \wedge (BC)$ sont associés et unitaires donc égaux.

16.44 Caractérisation des PGCD et PPCM

Propostion 16.44

Soit A et B deux polynômes non nuls, M et D deux polynômes. Alors

$$M = A \vee B \Leftrightarrow (M \text{ unitaire et } \exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, M = AU = BV \text{ et } U \wedge V = 1).$$

$$D = A \wedge B \Leftrightarrow (D \text{ unitaire et } \exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, A = DU \text{ et } B = DV \text{ et } U \wedge V = 1).$$

— $\boxed{\Rightarrow}$
$M = A \vee B$. On écrit $M = AU + BV$ avec $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$.
On note $R = U \wedge V$. On écrit $U = RU_1$ et $V = RV_1$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} M &= RAU_1 = RBV_1 \\ \text{donc } R(AU_1 - BV_1) &= 0 \\ \text{donc } AU_1 &= BV_1 \ (\mathbb{K}[X] \text{ est intègre}) \end{aligned}$$

Donc $M_1 = AU_1 = BV_1$ est un multiple commun et par minimalité des degrés :

$$RM_1 = M|M_1 \text{ donc } R = 1$$

$\boxed{\Leftarrow}$
Par hypothèse, M est un multiple commun, donc :

$$M \in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = (A \vee B)\mathbb{K}[X]$$

Donc $A \vee B|M$.
Donc $M = D \times A \vee B$.
Or $A \vee B = AU_1 = BV_1$.
Donc $M = DAU_1 = DBV_1 = AU = BV$.
Donc :

$$A(DU_1 - U) = 0$$
$$B(DV_1 - V) = 0$$

Or $\mathbb{K}[X]$ est intègre donc $DU_1 = U$ et $DV_1 = V$.
Donc $D|U \wedge V = 1$.

— $\boxed{\Rightarrow}$
$D = A \wedge B$. On écrit $A = DU$ et $B = DV$.
Or pour $R = U \wedge V$, on écrit $U = RU_1$ et $V = RV_1$.
Donc $A = DRU_1$ et $B = DRV_1$.
Donc $DR|A$ et $DR|B$.
Donc $DR|D$.
Nécessairement, $R = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Par hypothèse, $D|A$ et $D|B$, donc $D|A \wedge B$.
Comme $U \wedge V = 1$, d'après le théorème de Bézout :

$$\begin{aligned} UU_1 + VV_1 &= 1 \\ \text{donc } DUU_1 + DVV_1 &= D \\ \text{soit } AU_1 + BV_1 &= D \\ \text{donc } A \wedge B&|D \end{aligned}$$

Ainsi, $A \wedge B$ et D sont associés. Or ils sont unitaires, donc égaux.

16.53 Caractérisation des racines par la divisibilité

Théorème 16.53

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $r \in \mathbb{K}$. Alors r est racine de P si et seulement si $X - r$ divise P. Donc s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - r)Q$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Si $P = (X - r)Q$, alors :

$$\begin{aligned} \tilde{P}(r) &= (X - r)\tilde{Q}(r) \\ &= 0 \times \tilde{Q}(r) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose r racine de P.
On effectue la division euclidienne de P par $X - r$:

$$P = (X - r)Q + R, R \in \mathbb{K}_0[X]$$

Donc $0 = \tilde{P}(r) = \tilde{R}(r)$.
Donc $R = 0$.
Donc $X - r|P$.

16.56 Formule de Taylor pour les polynômes

Théorème 16.56

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré d et $a \in \mathbb{K}$, alors

$$P = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

On note $E_k = X^k$, pour $k \in \mathbb{N}$.
On a, pour $i \in \mathbb{N}$:

$$E_k^{(i)} = \begin{cases} \frac{k!}{(k-i)!}X^{k-i} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E_k(X+a) &= (X+a)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} X^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} a^{k-i} X^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{E_k^{(i)}(a)}{i!} X^i \end{aligned}$$

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k = \sum_{k=0}^{d} a_k E_k$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} P(x+a) &= \sum_{k=0}^{d} a_k E_k(X+a) \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{i=0}^{k} \frac{E_k^{(i)}(a)}{i!} X^i \\ &= \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{i!} \left(\sum_{k=i}^{d} a_k E_k^{(i)}(a) \right) X_i \\ &= \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{i!} \left(\sum_{k=0}^{d} a_k E_k^{(i)}(a) \right) X_i \\ &= \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{i!} P^{(i)}(a) X^i \end{aligned}$$

16.57 Caractérisation de la multiplicité par les dérivées

Théorème 16.57

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Le réel a est racine d'ordre multiplicité k de P si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(k)}(a) \neq 0.$$

⇐

D'après la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0}^{d} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i \\ &= \sum_{i=k}^{d} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i \\ &= (X-a)^k \underbrace{\sum_{i=k}^{d} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^{i-k}}_{=Q} \end{aligned}$$

$$Q(a) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$$

$\boxed{\Rightarrow}$
$P = (\underbrace{X-a}_{B})^k Q$ avec $Q(a) \neq 0$.
Pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$:

$$\begin{aligned} P^{(i)} &= (BQ)^{(i)} \\ &= \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} B^{(l)} Q^{(i-l)} \\ P^{(i)}(a) &= 0 \\ P^{(k)} &= \binom{k}{k} B^{(k)}(a) \times Q^{(k-k)}(a) \\ &= k! \times Q(a) \neq 0 \end{aligned}$$

16.59 Caractérisation de la multiplicité des racines par la divisibilité

Théorème 16.59

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $r_1, \ldots, r_k$ des racines deux à deux distinctes de P, de multiplicités respectives $a_1, \ldots, a_k$. Alors $(X-r_1)^{a_1} \ldots (X-r_k)^{a_k}$ divise P et $r_1, \ldots, r_k$ ne sont pas racines du quotient.

RAF :

$$(X-r_i)^{\alpha_1} \wedge (X-r_k)^{\alpha_k} = 1 \text{ si } i \neq k$$

16.63 Polynômes formels et fonctions polynomiales

Théorème 16.63

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini. Alors l'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[x]$ qui à un polynôme formel associe sa fonction polynomiale est un isomorphisme d'anneaux.

RAF : $\varphi(P) = \varphi(Q)$ donc $\varphi(P-Q) = 0$
$\tilde{P} - \tilde{Q}$ s'annule sur $\mathbb{K}$ infini et on applique (16.62).

16.66 Caractérisation des polynômes interpolateurs

Lemme 16.66

Le polynôme L_i est l'unique polynôme de degré au plus n tel que pour tout $j \in [\![0, n]\!], L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Existence : RAF
Unicité : (16.61.3)

16.69 Corollaire

Corollaire 16.69

Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la famille $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ et aux valeurs $(y_i)_{0\leq i\leq n}$
Soit $P_0 = (X-x_0)\dots(X-x_n)$. L'ensemble E des polynômes Q (sans restriction de degré) tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!], Q(x_i) = y_i$ est décrit par

$$E = P + (P_0) = \{P + (X-x_0)\dots(X-x_n)R, R \in \mathbb{K}[X]\}$$

$\boxed{\supset}$
Si $Q = P + (X-x_0)\dots(X-x_n)R$, alors :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], Q(x_i) = P(x_i) = y_i$$

Donc $Q \in E$.

$\boxed{\subset}$
Soit $Q \in E$, alors $x_0,\dots,x_n$ sont racines de $Q-P$.
Donc $(X-x_0)\dots(X-x_n)|Q-P$.

16.74 Proposition

Propostion 16.74 (HP)

Soit P un polynôme scindé non constant de $\mathbb{R}[X]$ à racines simples. Alors P' est scindé, et ses racines séparent celles de P.

Soit $P = \prod\limits_{k=1}^{n}(x-x_k)$ avec $x_1 < \dots < x_n$.
D'après le théroème de Rolle, comme $P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_n)$ pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, on choisit $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $P'(y_k) = 0$.
On a donc :

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < y_{n-1} < x_n$$

et $y_1,\dots,y_{n-1}$ sont $n-1$ racines distinctes de P' de degré $n-1$ ($\mathbb{R}$ de caractéristique nulle).
Donc P' est scindé (à racines simples).

16.76 Relation de Viète

Théorème 16.76

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n, scindé, de racines (éventuellement non distinctes, apparaissant dans la liste autant de fois que sa multiplicité) $r_1,\dots,r_n$ alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} r_{i_1}\dots r_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ &= a_n \prod_{k=1}^{n}(X-r_k) \end{aligned}$$

Les relations de Viète consistent simplement à développer l'expression de droite et à identifier les mnômes de degré $n-k$.

$$a_{n-k} = (-1)^k a_n \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} r_{i_1} \ldots r_{i_k}$$

16.88 Lemme

Lemme 16.88

Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ et A un polynôme non multiple de P. Alors A et P ont premiers entre eux.

Soit D unitaire $\in \mathcal{D}_{A,P}$.
Si $P \not| A$, alors $D \neq U(P)$.
Donc $D = 1$.
Donc $P \wedge A = 1$.

16.98 Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ par les racines

Théorème 16.98

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Alors P divise Q si et seulement si toute racine de P est aussi une racine de Q, et que sa multiplicité dans Q est supérieure ou égale à sa multiplicité dans P.

$\boxed{\Rightarrow}$
Supposons $P|Q$.
Soit r une racine de P de multiplicité α. Donc :

$$\begin{aligned} (X-r)^\alpha &| P \\ \text{donc } (X-r)^\alpha &| Q \end{aligned}$$

Donc r est racine de Q de multiplicité supérieure à α.

$\boxed{\Leftarrow}$
On décompose $P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X-r_i)^{\alpha_i}$ (P est scindé sur $\mathbb{C}$).
Par hypothèse, $\prod_{i=1}^{n} (X-r_i)^{\alpha_i} | Q$.
Donc $P|Q$.

16.99 Caractérisation des polynômes à coefficients réels

Théorème 16.99

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Les propositions sont équivalents :

1. P est à coefficients réels ;
2. $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$;
3. pour tout $z \in \mathbb{C}, \overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$
RAF

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$
On suppose que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

$$\overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}(\overline{z})^k$$

Par hypothèse, pour $z \in \mathbb{R}$, $P(z) \in \mathbb{R}$, soit $\overline{P(z)} = P(z)$.
Ainsi, pour $z \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} z^k = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

Les deux polynômes $\sum\limits_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ coincident sur une infinité de valeurs, donc (théorème de rigidité) ils sont égaux.
Donc :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], a_k = \overline{a_k}$$

Donc $P \in \mathbb{R}[X]$.

$\boxed{1 \Rightarrow 3}$
RAF

$\boxed{3 \Rightarrow 2}$
Si $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors en particulier pour $z \in \mathbb{R}$, $\overline{P(z)} = P(z)$ soit $P(z) \in \mathbb{R}$.

16.100 Racine complexe d'un polynôme réel

Corollaire 16.100

Soit P un polynôme à coefficients réels et r une racine de P dans $\mathbb{C}$. Si $r \notin \mathbb{R}$, alors $\overline{r}$ est aussi une racine de P et elles ont la même multiplicité.

Soit r une racine complexe de P.
Donc $P(r) = 0$.
Donc $\overline{P(r)} = 0$.
Donc (16.99.3) $P(\overline{r}) = 0$.
Donc $\overline{r}$ est aussi une racine de P.
Donc $(X - \overline{r})(X - r)|P$.
Donc $P = (X - \overline{r})(X - r)Q$ et si r est une racine de Q, $\overline{r}$ également, ce qui justifie que $\overline{r}$ ala même multiplicité que r.

16.101 Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Théorème 16.101

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.
2. Ainsi, tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ peut être factorisé en produit de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1 ou de degré 2, de discriminant strictement négatif.

1. Les polynômes annoncés sont bien les seuls irréductibles dans $\mathbb{R}_2[X]$.
   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, avec $\deg P \geq 3$. Dans $\mathbb{C}[X]$, P est scindé.
   Si P admet une racine dans $\mathbb{R}$, P est réductible.
   Supposons maintenant que toutes les racines de P sont complexes. Soit r l'une d'entre elles.
   Alors $\overline{r} \neq r$ est aussi une racine de P.
   Donc $(X - r)(X - \overline{r})|P$.
   Donc :
   $$\begin{aligned} P &= (X - r)(X - \overline{r})Q \text{ avec } Q \in \mathbb{C}[X] \\ &= \underbrace{(x^2 - 2Re(r)X + |r|^2)}_{:=R\in\mathbb{R}[X]}Q \end{aligned}$$
   Donc $P = RQ$ est la division euclidienne de P par R dans $\mathbb{C}[X]$ et aussi dans $\mathbb{R}[X]$.
   Par unicité, on a donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ et P est réductible dans $\mathbb{R}[X]$.
2. RAF

Chapitre 17

Fractions rationnelles

17.2 Addition, multiplication et produit par un scalaire

Définition 17.2

Soit $\frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ deux fractions rationnelles et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose

$$\frac{P}{Q}+\frac{R}{S}=\frac{PS+QR}{QS},\ \frac{P}{Q}\times\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS} \text{ et } \lambda\times\frac{P}{Q}=\frac{\lambda P}{Q}.$$

Montrons que l'addition est bien définie.
Soit $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ dans $\mathbb{K}(X)$.
Montrons que :

$$\frac{PS+QR}{QS}=\frac{P_1S+Q_1R}{Q_1S}$$

On a :

$$\begin{aligned}(PS+QR)Q_1S-(P_1S+Q_1R)QS &= S^2(\underbrace{PQ_1-P_1Q}_{=0})+RS(\underbrace{QQ_1-Q_1Q}_{=0})\\ &=0\end{aligned}$$

On raisonne de la même manière pour $\frac{R}{S}=\frac{R_1}{S_1}$ et ainsi, l'opération est bien définie.

17.10 Degré d'une fraction

Définition 17.10

Soit $F=\frac{P}{Q}$ une fraction. On pose $\deg(F)=-\infty$ si $F=0$ et $\deg(F)=\deg(P)-\deg(Q)$ sinon. Le degré d'une fraction est donc un élément de $\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$.

Si $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{P}{Q}$, alors :

$$\begin{aligned}P_1Q&=PQ_1\\ \text{donc } \deg(P_1Q)&=\deg(PQ_1)\\ \text{donc } \deg(P_1)+\deg(Q)&=\deg(P)+\deg(Q_1) \text{ } (\mathbb{K} \text{ intègre})\\ \text{donc } \deg(P_1)-\deg Q_1&=\deg(P)-\deg(Q)\end{aligned}$$

17.13 Propriété du degré

Théorème 17.13

Soit F et G deux fractions rationnelles. On a

$$\deg(F+G)\leq\max(\deg(F),\deg(G)) \text{ et } \deg(F\times G)=\deg(F)+\deg(G).$$

On retrouve les mêmes propriétés que pour les polynômes.

Soit $F=\frac{P}{Q}$ et $G=\frac{R}{S}$.

—
$$\begin{aligned}\deg(F+G)&=\deg(\frac{PS+QR}{QS})\\ &=\deg(PS+QR)-\deg(QS)\\ &\leq\max(\deg(PS),\deg(QR))-\deg(QS)\\ &=\max(\deg(PS)-\deg(QS),\deg(QR)-\deg(QS))\\ &=\max\left(\deg\left(\frac{P}{Q}\right),\deg\left(\frac{R}{Q}\right)\right)\\ &=\max(\deg(F),\deg(G))\end{aligned}$$

— RAS

17.19 Théorème

Théorème 17.19

Soit F et G deux fractions rationnelles. Si les fonctions rationnelles $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$ sont égales sur une partie infinie $\mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}_G$ alors les fractions rationnelles sont égales, i.e. $F = G$.

On note $F = \frac{P}{Q}$ et $G = \frac{R}{S}$ avec $P \wedge Q = 1$ et $R \wedge S = 1$.
On a :

$$\forall x \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}_G, \tilde{F}(x) = \tilde{G}(x)$$

Soit :

$$\forall x \in \mathcal{D}, P\tilde{(x)} \times S\tilde{(x)} = R\tilde{(x)} \times Q\tilde{(x)}$$

Comme $\mathcal{D}$ est infini, d'après le théorème de rigidité, $PS = RQ$, donc $F = G$.

17.20 Fraction dérivée

Définition 17.20

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On appelle **fraction dérivée** de F la fraction notée F' (ou $\frac{dF}{dX}$) définie par

$$F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

Le résultat ne dépend pas du représentant de F choisi. On définit également les dérivées successives de F en posant $F^(0) = F$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, F^{(n+1)} = (F^{(n)})'$.

On écrit $F = \frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$.
Montrons que $\frac{P'Q - Q'P}{Q^2} = \frac{R'S - RS'}{S^2}$.
Comme $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$, on a $PS = RQ$.
Donc $P'S + S'P = R'Q + Q'R$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
[P'Q - PQ']S^2 - [R'S - RS']Q^2 &= P'SQ^2 + S'PQ^2 - R'QS^2 - Q'RS^2 \\
&= QS(P'S - R'Q) + Q^2RS' - S^2Q'P \\
&= QS(Q'R - S'P) + PSQS' - SQRQ' \\
&= 0
\end{aligned}$$

17.24 Dérivée logarithmique d'un produit

Théorème 17.24

Si F est une fraction non nulle qui se facotorise en $F = F_1 \times \ldots \times F_n$ dans $\mathbb{K}(X)$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\frac{F'}{F} = \frac{F_1'}{F_1} + \ldots + \frac{F_n'}{F_n}.$$

Pour $n = 2$ seulement.

$$F = F_1 \times F_2 \neq 0$$

Donc :

$$F' = F_1'F_2 + F_1F_2'$$

Donc :

$$\frac{F'}{F} = \frac{F_1'F_2}{F_1F_2} + \frac{F_1F_2'}{F_1F_2} = \frac{F_1'}{F_1} + \frac{F_2'}{F_2}$$

17.25 Partie entière

Théorème 17.25

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme Q tel que $\deg(F-Q) < 0$. Celui-ci est appelé **partie entière** de F, c'est le quotient dans la division euclidienne du numérateur de F par le dénominateur.

Existence :
Soit $F = \frac{A}{B}$ avec $A \wedge B = 1$.
Soit la division euclidiene de A par B :

$$A = BQ + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(B)$$

Donc :

$$F = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

Donc :

$$\deg(F-Q) = \deg\left(\frac{R}{B}\right) = \deg(R) - \deg(B) < 0$$

Unicité :
On suppose que :

$$F = Q + G = Q_1 + G_1 \text{ avec } (Q_1, G_1) \in \mathbb{K}[X]^2 \text{ et } \deg(G), \deg(G_1) < 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} Q - Q_1 &= G_1 - G \\ \text{donc } \deg(Q-Q_1) &= \deg(G_1 - G) \\ &\leq \max(\deg(G_1), \deg(G)) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Or $Q - Q_1 \in \mathbb{K}[X]$, donc $Q = Q_1$.

17.31 Existence d'une décomposition

Théorème 17.31

Si T et S sont deux polynômes premiers entre eux et si $\deg\left(\frac{A}{TS}\right) < 0$, alors il existe deux polynômes U et V tels que

$$\frac{A}{TS} = \frac{U}{T} + \frac{V}{S}, \text{ avec } \deg(U) < \deg(T) \text{ et } \deg(V) < \deg(S).$$

Comme $T \wedge S = 1$, d'après le théormème de Bézout, on écrit :

$$CT + DS = 1$$

Donc :

$$ACT + DSA = A$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{A}{TS} &= \frac{ACT + DSA}{TS} \\ &= \frac{DA}{T} + \frac{AC}{S} \end{aligned}$$

On écrit la division euclidienne de DA par T et de AC par S :

$$\begin{aligned} DA &= TQ + U \text{ avec } \deg(U) < \deg(T) \\ AC &= SH + V \text{ avec } \deg(V) < \deg(S) \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{A}{TS} = \frac{U}{T} + \frac{V}{S} + Q + H$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\deg(Q+H) &= \deg\left(\frac{A}{TS} - \frac{U}{T} - \frac{V}{S}\right)\\ &\leq \max(\ldots,\ldots,\ldots)\\ &< 0\end{aligned}$$

Donc $Q + H = 0$.

17.32 Théorème

Théorème 17.33

Si T est un polynôme irréductible unitaire et si $\deg\left(\frac{A}{T^n}\right) < 0$ (avec $n \geq 1$), alors il existe des polynômes $V_1, \ldots, V_n$ tels que

$$\frac{A}{T^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{T^k}, \text{ avec } \deg(V_k) < \deg(T).$$

C'est une **décomposition en éléments simples**.

Par récurrence sur n.

- Pour $n = 1$, RAF.
- On suppose le résultat vrai pour $n \geq 1$ fixé.
  On écrit la division euclidienne de A par T :

  $$A = BT + V_{n+1} \text{ avec } \deg(V_{n+1}) < \deg(T)$$

  Ainsi :

  $$\begin{aligned}\frac{A}{T^{n+1}} &= \frac{BT + V_{n+1}}{T^{n+1}}\\ &= \frac{B}{T^n} + \frac{V_{n+1}}{T^{n+1}}\\ &= \sum_{k=1} \frac{V_k}{T^k} + \frac{V_{n+1}}{T^{n+1}} \text{ (Hypothèse de récurrence)}\end{aligned}$$

17.38 Cas d'un pôle simple

Propostion 17.38

Si a est un pôle simple de $F = \frac{A}{B}$, alors la partie polaire de F relative à a est

$$P_F(a) = \frac{c}{X-a} \text{ avec } c = \frac{A(a)}{B'(a)} = \frac{A(a)}{Q(a)} \text{ où } B = (X-a)Q.$$

D'après le théorème d'existence de la DES :

$$\frac{A}{B} = F = E + \frac{c}{X-a} + G$$

Donc :

$$\begin{aligned}c &= \frac{(X-a)A}{B} - (X-a)E - (X-a)G\\ &= \frac{A}{Q} - (X-a)E - (X-a)G\end{aligned}$$

Donc $c = \frac{A(a)}{Q(a)}$.
Si $B = (X-a)Q$, alors $B'(a) = Q(a)$.

17.39 Exemple

Exemple 17.39

Décomposer en éléments simples dan $\mathbb{C}(X)$ la fraction raitonnelle $F = \frac{1}{X^n - 1}$ avec $n \geq 1$.

- $\deg F = -n < 0$.
- F possède n pôles simples. $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \omega_k$.
- D'après le théorème de DES :

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{X - \omega_k}$$

Or, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $c_k = \frac{1}{nw_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n}$.

$$F = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k}$$

17.40 Cas d'un pôle double

Propostion 17.40

Si a est un pôle double de $F = \frac{A}{B}$, alors la partie polaire de F relative à a est

$$P_F(a) = \frac{\alpha}{X-a} + \frac{\beta}{(X-a)^2} \text{ avec } \beta = H(a) \text{ et } \alpha = H'(a) \text{ en posant } H = (X-a)^2 F.$$

On a (notations 17.38) :

$$F = E + \frac{\alpha}{X-a} + \frac{\beta}{(X-a)^2} + G$$
$$\beta + (X-a)\alpha = \underbrace{(X-a)^2 F}_{:=H} - (X-a)^2 E - (X-a)^2 G$$

En évaluant en a : $\beta = H(a)$.
On dérive et on évalue en a : $\alpha = H'(a)$.

17.42 Exemple

Exemple 17.42

Décomposer $F = \frac{X^6}{(X-1)^2(X^3+1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

- $\deg F = 1 \geq 0$
-

$$X^6 = (X-1)^2(X^3+1)(X+2) + R \text{ avec } \deg R < 5$$

— D'après le théorème DES :

$$\begin{aligned}
F &= \frac{X^6}{(X-1)^2(X+1)(X+j)(X+j^2)} \\
&= X+2+\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X+1}+\frac{d}{X+j}+\frac{e}{x+j^2} \\
c &= (x+1)\tilde{F}(-1) = \frac{1}{4} \\
d &= (x+j)\tilde{F}(-j) \\
&= \frac{1}{(j+1)^2(1-j)(-j+j^2)} \\
&= \frac{1}{(1+j)(1-j^2)(j-1)j} \\
&= \frac{-1}{(1-j^2)^2 j} \\
&= \frac{-1}{j(-3j^2)} \\
&= \frac{1}{3} \\
e &= (x+j^2)\tilde{F}(-j^2) = \frac{1}{3} \\
H &= (X-1)^2 F = \frac{X^6}{X^3+1} \\
b &= H(1) = \frac{1}{2} \\
a = H'(1) &= \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

17.44 Parties polaires conjuguées d'une fraction réelle

Propostion 17.44

Si F est à coefficients réels, alors les parties polaires relatives aux pôles conjugués sont conjuguées.

Soit $F \in \mathbb{R}(X) \subset \mathbb{C}(X)$.
On écrit $F = \frac{A}{B}$ avec $A, B \in \mathbb{R}(X)^2$.
Soit r un pôle de multiplicité m.
Comme $F \in \mathbb{R}(X)$, $\overline{r}$ est un pôle de multiplicité m. On suppose que $r \neq \overline{r}$
D'après le théorème de DES, on écrit :

$$F = E + P_F(r) + G \text{ avec } (E, r) \in \mathbb{R}(X)^2, G \in \mathbb{C}(X)$$

r n'est pas un pôle de G ($\overline{r}$ oui).
Ainsi :

$$\begin{aligned}
F &= \overline{F} \\
&= \overline{E + P_F(r) + G} \\
&= \overline{E} + P_F(\overline{r}) + \overline{G} \\
&= E + \overline{P_F(r)} + \overline{G}
\end{aligned}$$

Or r n'est pas un pôle de $\overline{P_F(r)}$ mais $\overline{r}$ est un pôle de $\overline{P_F(r)}$.
De la même manière, comme r n'est pas un pôle de G, $\overline{r}$ n'est pas un pôle de $\overline{G}$.
Donc $P_F(\overline{r}) = \overline{P_F(r)}$.

17.45 Exemple

Exemple 17.45

Décomposer en éléments simples $F = \frac{1}{(X^2+X+1)^2}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

$F = \overline{(x^2+x+1)^2}, \deg(F) = -4 < 0$.
Les pôles de F sont j et j^2 (de multiplicité 2).
D'après le théorème de DES :

$$F = \frac{a}{X-j} + \frac{b}{(X-j)^2} + \frac{c}{X-j^2} + \frac{d}{(X-j^2)^2} \text{ car } F \in \mathbb{R}(X)$$

On pose $H = (X-j)^2 F = \frac{1}{(x-j^2)^2}$.
On trouve $b = H(j) = \frac{j}{(1-j)}$ et $a = H'(j) = \frac{-2}{(1-j)^3} = \frac{-2j^2}{3(1-j)j}$.

17.46 Exemple

Exemple 17.47

Décomposer en éléments simples $F = \frac{X^4+1}{X(X^2-1)^2}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

$F = \frac{X^4+1}{X(X^2-1)^2}, \deg F = -1 < 0$. Donc :

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{X+1} + \frac{e}{(X+1)^2}$$

F est impaire donc :

$$\begin{aligned}
F(-X) &= -\frac{a}{X} + \frac{b}{-X-1} + \frac{c}{(-X-1)^2} + \frac{d}{-X+1} + \frac{e}{(-X+1)^2} \\
&= -\frac{a}{X} - \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2} - \frac{d}{X-1} + \frac{e}{(X-1)^2} \\
&= -F \\
&= -\frac{a}{X} - \frac{b}{X-1} - \frac{c}{(X-1)^2} - \frac{d}{X+1} - \frac{e}{(X+1)^2}
\end{aligned}$$

Par unicité :

$$\begin{cases} a = a \\ -b = -d \\ -c = e \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} b = d \\ e = -c \end{cases}$$

On a : $a = \tilde{XF}(0) = 1$.
On pose :

$$\begin{aligned}
H &= (X-1)^2 F = \frac{X^4+1}{X(X+1)^2} \\
c &= H(1) = \frac{1}{2} \\
b &= H'(1) \\
&= \frac{4 \times 4 - 2 \times (3+4+1)}{4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

17.51 Exemple - Calcul de la dérivée n-ième d'une fraction

Exemple 17.51

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Calculer $f^{(n)}(x)$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x^2+1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On définit :

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{X^2+1} &\in \mathbb{R}(X) \\ &\in \mathbb{C}(X) \end{aligned}$$

D'après le théorème de DES, car les pôles de F sont simples, égaux à i et $-i$:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\frac{1}{-2i}}{X+i} + \frac{\frac{1}{2i}}{X-i} \\ F^{(n)} &= \frac{\frac{i}{2}(-1)^n n!}{(X+i)^{n+1}} + \frac{\frac{-i}{2}(-1)^n n!}{(X-i)^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(X^2+i)^{n+1}} \frac{i}{2} \left[(X-i)^{n+i} - (X+i)^{n+i}\right] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(X^2+1)^{n+1}} \frac{i}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} [(-i)^k - i^k] X^{n+1-k} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(X^2+1)^{n+1}} \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2k+1} (-i)^{k+1} X^{n-2k} \end{aligned}$$

Donc :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}} \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2k+1} (-i)^{k+1} x^{n-2k}$$

Chapitre 18

Dérivabilité

18.13 Condition nécessaire du premier ordre pour l'existence d'un extremum

Théorème 18.13

Soit f une fonction définie sur I un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

On suppose que f atteint un maximum local en x_0.
On choisit $U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que :

$$\forall x \in U \cap I, f(x) \leq f(x_0)$$

En particulier :

$$\forall x \in U, x > x_0, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$
$$\forall x \in U, x < x_0, \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0$$

D'après le TCILPPL :

$$f'_{\text{droite}}(x_0) \leq 0 \text{ et } f'_{\text{gauche}}(x_0) \geq 0$$

Donc f est dérivable en x_0.
Donc $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = 0$.

18.17 Théorème de Rolle

Théorème 18.17

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$. Alors si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Soit f continue sur $[a, b]$.
D'après le théorème de compacité, elle possède un maximum et un minimum.
Si ils sont tous les deux égaux à $f(a)$, alors f est constante et $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a, b[$.
Sinon, l'un des deux est différent de $f(a) = f(b)$ et est atteint dans $]a, b[$.
D'après (18.13), $f'(c) = 0$.

18.21 Théorème des accroissements finis

Théorème 18.21

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) - \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x - a)$.
$g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b[, \mathbb{R})$.
$g(a) = f(a) = g(b)$, donc d'après le théorème de Rolle, on choisit $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

18.37 Caractérisation par la dérivée de la variation des fonctions

Théorème 18.37

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \backslash X$, où X est un ensemble fini. Alors :

1. f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I \backslash X$, $f'(x) \geq 0$. Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.
2. f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I \backslash X$, $f'(x) \leq 0$. Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante.

1. $\boxed{\Rightarrow}$
   On suppose f croissante. Soit $a \in I \backslash X$. Soit $x \in I \backslash \{a\}$. On a :
   $$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$
   D'après le TCILPPL, on a $f'(x) \geq 0$.
   $\boxed{\Leftarrow}$
   On suppose $X \neq 0$. Soit $x < y$ et $f \in \mathcal{C}^0([x, y], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]x, y[, \mathbb{R})$.
   D'après le TAF, on choisit $c \in]x, y[$ tel que :
   $$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$$
   Supposons $X = \{\alpha\}$ avec $x < \alpha < y$.
   On applique les TAF deux fois sur $[x, \alpha]$ et $[\alpha, y]$.
   et on choisit $c_1 \in]x, \alpha[$ et $c_2 \in]\alpha, y[$ tel que :
   $$f(\alpha) - f(x) = f'(c_1)(\alpha - x) \leq 0$$
   $$f(y) - f(\alpha) = f'(c_2)(y - \alpha) \leq 0$$
   On généralise sans difficulté quand X est fini.
   Si $\varphi = \{x \in I | f'(x) = 0\}$ est fini, on utilise la même méthode, $X \equiv X \cup \varphi$.

2. RAS

18.43 Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^n$ - HP

Théorème 18.43 - HP

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \backslash \{x_0\}$. Si $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0, alors f est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

— On prouve le théorème pour $n = 1$. On suppose $f \in \mathcal{C}^1(I \backslash \{x_0\}, \mathbb{R})$ et que f' admet une limite finie en x_0.
  On prolonge f' en une fonction g par continuité en x_0. Ainsi, $g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
  On remarque que pour tout $x \neq x_0$:
  $$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$$
  où $a \in I \backslash \{x_0\}$ quelconque.
  $$f(x) = \underbrace{f(a) + \int_a^x g(t)\, dt}_{\text{Admet une limite finie quand } x \to x_0}$$
  Donc $f(x)$ admet également une limite finie quand $x \to x_0$.
  On prolonge alors f par continuité en $\tilde{f}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

— On raisonne par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$P(n)$: "Pour tout $f \in \mathcal{C}^n(I \backslash \{x_0\}, \mathbb{R})$, si $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0, alors f se prolonge en $\tilde{f} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$".

Pour $n = 0$, c'est le prolongement par continuité.
Pour $n = 1$, c'est fait.
On suppose $P(n)$ vraie pour $n \geq 1$.
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I \backslash \{x_0\}, \mathbb{R})$, etc...
Donc $f' \in \mathcal{C}^n(I \backslash \{x_0\}, \mathbb{R})$ et $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0.
D'après $P(n)$, on prolonge f' en $g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
En particulier, g est continue sur I.
Donc f' admet une limite finie en x_0.
On applique $P(1)$. On prolonge f en $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.
Or $\tilde{f}' = g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
Donc $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.

18.45 IAF pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Théorème 18.45

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{C})$ et M un réel tel que $|f'| \leq M$ sur $]a,b[$. Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$$

Si $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt$$

D'après l'inégalité triangulaire intégrale :

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \left| \int_a^b f'(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f'(t)|\, dt \\ &\leq \int_a^b M\, dt \\ &= M|b-a| \end{aligned}$$

Chapitre 19

Convexité

19.7 Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes

Propostion 19.7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$.
Le graphe de f est situé en-dessous de sa sécante sur l'intervalle $[x, y]$ et au-dessus à l'extérieur, soit sur $I \cap]-\infty, x] \cup [y, +\infty[$.

On pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(t-x) + f(x)$.
g paramètre la sécante passant par les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

— Sur $[x, y]$, RAF car f est convexe.
— Soit $t > y$. On pose $\lambda = \frac{y-x}{t-x} \neq 0 \in [0, 1]$. On a :

$$\begin{aligned}\lambda t + (1-\lambda)x &= \frac{y-x}{t-x}t + \left(1 - \frac{y-x}{t-x}\right)x \\ &= \frac{t(y-x) + x(t-y))}{t-x} \\ &= y\end{aligned}$$

Par convexité de f :

$$\begin{aligned}f(y) &= f(\lambda t + (1-\lambda)x) \\ &\leq \lambda f(t) + (1-\lambda) f(x) \\ \text{donc } f(t) &\geq \frac{1}{y} f(y) - \left(\frac{1}{y} - 1\right) f(x) \\ &= \frac{t-x}{y-x} f(y) - \left(\frac{t-x}{y-x} - 1\right) f(x) \\ &= \frac{t-x}{y-x} \times (f(y) - f(x)) + f(x) \\ &= g(t)\end{aligned}$$

— On raisonne de la même manière si $t \leq x < y$.

19.8 Inégalités des pentes

Propostion 19.8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

1. f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \backslash \{a\}$.
2. Si f est convexe, alors pour tout $(a, b, c) \in I^3$ avec $a < b < c$,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

1. $\boxed{\Rightarrow}$
On suppose f convexe. Soit $a \in I$ et $x < y$ dans $I \backslash \{a\}$.
— On suppose $x < a < y$. D'après (19.7) :

$$f(y) \leq \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \times (y-a)) + f(a)$$

Donc :

$$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \geq \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$$

— Si $x < a < y$, d'après (19.7) :

$$f(y) \geq \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \times (y - a) + f(a)$$

Donc :

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \geq \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

— Les autres cas s'y ramènent.

$\boxed{\Leftarrow}$

On suppose que pour tout $a \in I$, $g_a : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante.
Soit $x < y$ et $\lambda \in]0, 1[$. On pose $a = \lambda y + (1 - \lambda)x$.
g_a est croissante sur $I \backslash \{a\}$, donc :

$$g_a(x) \leq g_a(y)$$

Donc :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Donc :

$$\begin{aligned} x - a < 0 \text{ et } y - a > 0 \\ (f(x) - f(a))(y - a) &\leq (f(y) - f(a))(x - a) \\ \text{donc } f(a)(y - x) &\leq f(x)(y - a) - f(y)(x - a) \\ \text{soit } f(a) &\leq f(x)\frac{y - a}{y - x} + f(y)\frac{a - x}{y - x} \\ &= (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \end{aligned}$$

2. Soit $a < b < c$.

$$g_a(b) \leq g_a(c) = g_c(a) \leq g_c(b)$$

19.9 Continuité et dérivabilité des fonctions convexes

Théorème 19.9

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I ouvert. La fonction f est alors continue et possède des dérivées à gauche et à droite en tout point (où les limites osnt envisageables). Pour tout $a \in I$, on a

$$f'_g(a) \leq f'_d(a)$$

Pour $a \in I$, on note encore $g_a : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
Comme g est définie à gauche et à droite de a (I est ouvert) et que g est croissante sur $I \backslash \{a\}$, d'après le TLM g admet des limites finies à gauche et à droite de a et :

$$\begin{aligned} \lim_{a^+} g = f'_d(a) \geq f'_g(a) &= \lim_{a^-} g \\ \forall x \neq a, f(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a) \\ &\xrightarrow[x \to a^+]{} f(a) \\ &\xrightarrow[x \to a^-]{} f(a) \end{aligned}$$

19.11 Caractérisation des fonctions convexes par les variations de la dérivée

Théorème 19.11

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

$\boxed{\Rightarrow}$

On suppose f convexe. Soit $x < y$. Soit a tel que $x < a < y$.
D'après l'inégalité des pentes (f est convexe), on a :

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

En considérant les limiets $a \to x^+$ et $a \to y^-$ et par TCILPPL :

$$f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$$

Donc f' est croissante.

$\boxed{\Leftarrow}$

On suppose f' croissante sur I. Soit $x < y$. Soit $a \in]x, y[$.
On applique deux fois le TAF : on choisit $\alpha \in]x, a[$ et $\beta \in]a, y[$ tels que :

$$\frac{f(a)-f(x)}{-x+a} = f'(\alpha) \text{ et } \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(\beta)$$

Comme f' est croissante, on a $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$, soit :

$$\begin{aligned} \frac{f(a)-f(x)}{a-x} &\leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \\ \text{donc } f(a) &\leq \frac{a-x}{y-x}f(y) + \frac{y-a}{y-x}f(x) \end{aligned}$$

Comme $a \in]x, y[$, $a = \lambda y + (1-\lambda)x$ et aussi :

$$f(a) = f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x)$$

Donc f est convexe (sur I).

19.13 Caractérisation des fonctions convexes par les tangentes

Propostion 19.13

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors f est convexe sur I si et seulement si le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.

$\boxed{\Rightarrow}$

On suppose f convexe. Soit $a \in I$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto f'(a)(t-a) + f(a)$.
On pose $h = f - \varphi \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $h' = f' - f'(a)$.
Or f est convexe donc f' est croissante sur I. Donc :

a	
h'	$-$ 0 $+$
h	$\searrow$ 0 $\nearrow$
h	$+$

$\boxed{\Leftarrow}$

Soit $x < y$ et $a = \lambda y + (1-\lambda)x \in]x, y[$.
Par hypothèse, le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente en a.

$$\forall t \in I, f(t) \geq f'(a)(t-a) + f(a)$$

En particulier :

$$f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$$
$$f(y) \geq f'(a)(y-a) + f(a)$$

Donc :

$$\begin{aligned}(y-a)f(x) + (a-x)f(y) &\geq (y-a)f(a) \\ \text{donc } f(a) &\leq \frac{y-a}{y-x}f(x) + \frac{a-x}{y-x}f(y) \\ &= (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)\end{aligned}$$

19.17 Somme de fonctions convexes

Propostion 19.17

La somme de deux fonctions convexes et convexe.

Soit f et g convexes. Soit $x < y$ et $a = \lambda x + (1-\lambda)y \in]x, y[$.
On a :

$$f(a) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$
$$g(a) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

Donc :

$$(f+g)(a) \leq \lambda(f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y)$$

Donc $f+g$ est convexe.

19.18 Composition de fonctions convexes

Propostion 19.18

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes avec g croissante. Alors $g \circ f$ est convexe sur I.

Soit $x < y$ et $a = \lambda x + (1-\lambda)y \in]x, y[$.
On a :

$$\begin{aligned}f(a) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\ \text{donc } g \circ f(a) &\leq g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \\ &\leq \lambda(g \circ f(x)) + (1-\lambda)(g \circ f(y))\end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est convexe.

19.19 Réciproque de fonctions convexes

Propostion 19.19

Soit $f : I \to J$ une fonction convexe bijective avec I ouvert. Alors $g = f^{-1}$ est soit concave, soit convexe sur J.

Comme f est convexe sur I ouvert, f est continue sur I (19.9).
Or f est bijective, donc f est strictement monotone sur I (15.72).

— Supposons f strictement croissante sur I. Soit $x < y$ dans $J = f(I)$. Soit $\lambda \in]0, 1[$. Alors g est strictement croissante.
On pose $x = f(a)$ et $y = f(b)$. On a :

$$\begin{aligned}f(\lambda a + (1-\lambda)b) &\leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \\ &\leq \lambda x + (1-\lambda)y\end{aligned}$$

Or g est strictement croissante, donc :

$$\begin{aligned}\lambda g(x) + (1-y)g(y) &= \lambda a + (1-\lambda)b \\ &\leq g(\lambda x + (1-\lambda)y)\end{aligned}$$

Donc g est concave sur J.

— Si f est strictement décroissante (et donc g strictement décroissante), alors g est concave sur J.

19.20 Extrema des fonctions convexes

Propostion 19.20

Soit f une fonction convexe définie par un intervalle I ouvert. Alors f admet un minimum global en un point a si et seulement si a est un point critique.

$\boxed{\Rightarrow}$

RAF

$\boxed{\Leftarrow}$

On suppose que a est un point critique. Donc $f'(a) = 0$.
Or le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente en a, soit :

$$\forall x \in I, f(x) \geq \underbrace{f'(a)}_{0}(x-a) + f(a) = f(a)$$

Donc $f(a)$ est un minimum global de f.

19.24 Inégalité de Jensen

Théorème 19.24

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $n \geq 2$. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0;1]^n$ avec $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, alors

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Par récurrence.

— Pour $n = 2$, RAF (cf. définition)

— On suppose la propriété vraie au rang n.

Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}, (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$ avec $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.
Si $\lambda_{n+1} = 0$, on applique directement l'hypothèse au rang n (RAF).
On suppose $\lambda_{n+1} \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned}f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \times \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_{n+1}\right)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i) + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \times f\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_{n+1}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i) + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \times \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_n) + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_{n+1})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\end{aligned}$$

19.25 Exemple - Inégalité arithmético-géométrique

Exemple 19.25

Soit $n \geq 1$. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

La fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.
On remarque que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$. D'après l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) &\geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) \\
&= \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \\
&= \ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}\right)
\end{aligned}$$

On compose alors par exp (strictement croissante).
D'après le résultat précédent appliqué à $\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)$:

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} x_k}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

Donc ($x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$$

19.26 Inégalités de Holder et Minkowski

Théorème 19.26

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, p et q deux nombres réels strictement positifs vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} a_k^p} \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} b_k^q} \quad \textbf{Inégalité de Holder}$$

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} a_k^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} b_k^p} \quad \textbf{Inégalité de Minkowski}$$

— On rappelle que le logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $u > 0$ et $v > 0$, on a :

$$\ln\left(\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln(u^p) + \frac{1}{q}\ln(v^q) = \ln(uv)$$

Donc :

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Et en particulier :

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q}$$

En particulier, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\underbrace{\left[\frac{a_k^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}\right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\frac{b_k^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}\right]^{\frac{1}{q}}}_{\frac{a_k b_k}{\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n a_i^p} \times \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n b_i^q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{a_k^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q}\frac{b_k^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{\sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}\sqrt[q]{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}} &\leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^n \frac{a_k^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^n \frac{b_k^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^n a_k b_k}{\sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^n a_k^p}\sqrt[q]{\sum\limits_{k=1}^n b_k^q}} \leq 1$$

—

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p &= \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)(a_k + b_k)^{p-1} \ (p \neq 1) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k(a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n b_k(a_k + b_k)^{p-1}\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Holder $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p &\leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p}\sqrt[q]{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{(p-1)q}} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n b_k^p}\sqrt[q]{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{(p-1)q}} \\ &= \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p}\sqrt[q]{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n b_k^p}\sqrt[q]{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p}\end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)\right]^{\overbrace{(1 - \frac{1}{q})}^{\frac{1}{p}}} = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n b_k^p}$$

Pour $p = 1$, RAF.

Chapitre 20

Espace Vectoriels

20.2 Propriétés du 0, régularité

Propostion 20.2

Soit E un $\mathbb{K}-ev$. Pour tout $x \in E$:

1. $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.0_E = 0_E$
3. (-1).x = -x
4. si $x \neq 0_E$,
$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$$
5. si $x \neq 0_{\mathbb{K}}$,
$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow x = 0_E$$

1. $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x$. Donc $0_E = 0_{\mathbb{K}}.x$.
2. RAS.
3. $x + (-1).x = (1-1).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
4. Par l'absurde, si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, de $\lambda x = 0_E$ on tire $\lambda^{-1}\lambda x = \lambda^{-1} x 0_E$, soit $x = 0_E$. Absurde.
5. Idem.

20.10 Espace vectoriel de référence

Propostion 20.10

1. $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même.
2. Plus généralement, soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un ensemble quelconque. Alors l'ensemble des fonctions E^F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. RAF.
2. Soit E un $\mathbb{K}-ev$ et F un ensemble quelconque.
E^F est un groupe abélien (cf. chap 10).
Le produit externe est défini par :
$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E^F &\longrightarrow E^F \\ (\lambda, f) &\longmapsto (\lambda.f, x \mapsto \lambda.f(x)) \end{aligned}$$
Vérification facile.

20.11 Transfert de structure

Lemme 20.11

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, G un ensemble quelconque et $\varphi : E \to G$ une bijection. Alors en définissant sur G une loi interne et un loi externe par

$$\forall (x, y, \lambda) \in G \times G \times \mathbb{K}, x + y = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)) \text{et} \lambda.x = \varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)),$$

on munit G d'une structure d'espace vectoriel.

Vérifions les axiomes.

— LCI :

$$\begin{aligned}
(x+y)+ &= \varphi(\varphi^{-1}(x+y)+\varphi(z)) \\
&= \varphi(\underbrace{\varphi^{-1}(x)+\varphi^{-1}(y)+\varphi^{-1}(z)}_{\text{associativité dans } E}) \\
&= x+(y+z) \\
x+\varphi(0) &= \varphi(\varphi^{-1}(x)+0) = x \ (\varphi \text{ neutre}) \\
x+\varphi(-\varphi^{-1}(x)) &= \varphi(\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(x)) = \varphi(0) \\
x+y=y+x &
\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}
\lambda.(\mu.x) &= \varphi(\lambda\varphi^{-1}(\mu x)) \\
&= \varphi(\lambda\mu\varphi^{-1}(x)) \\
&= (\lambda\mu).x \\
1.x &= \varphi(1.\varphi^{-1}(x)) \\
&= \varphi\circ\varphi^{-1}(x) \\
&= x \\
(\mu+\lambda).x &= \varphi((\mu+\lambda).\varphi^{-1}(x)) \\
&= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x)+\lambda\varphi^{-1}(x)) \\
&= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x))+\varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)) \\
&= \mu.x+\lambda.x
\end{aligned}$$

De même pour la dernière.

20.16 Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Théorème 20.16

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1. $F \subset E$;
2. $0 \in F$;
3. F est stable par combinaisons linéaire, ce qui équivaut à

$$\forall (x,y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F.$$

$\boxed{\Rightarrow}$

1. Oui.
2. F est un sous-groupe de E donc $0_E \in F$.
3. Pour tout $(x,y) \in F^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.x \in F$ et $y \in F$. Donc $\lambda x + y \in F$.

$\boxed{\Leftarrow}$

D'après (3) avec :

— $y = 0$: $\times$ est LCE.

— $\lambda = 1$: $+$ est LCI.

$0 \in F$ et $\lambda = -1$, F est un sous-groupe, donc un groupe abélien. RAF pour les 4 dernières propriétés.

20.22 Propostion 20.22

Propostion 20.22

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, D_1 et D_2 deux droites vectorielles. Alors soit $D_1 \cap D_2 = \{0_E\}$, soit $D_1 = D_2$.

Par définition, $0_E \in D_1 \cap D_2$.
Supposons $D_1 \cap D_2 \neq \{0_E\}$ et fixons $x \in D_1 \cap D_2$ avec $x \neq 0_E$.

Soit $v \in D_1$. Par définition, on écrit $D_1 = \mathbb{K}x_1$ et $D_2 = \mathbb{K}x_2$.
On a donc $v = \alpha x_1$, $x = \lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2$ avec $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.
Ainsi :

$$v = \alpha\lambda_1^{-1}\lambda_1 x_1 = \alpha\lambda_1^{-1}x = \alpha\lambda_1^{-1}\lambda_2 x_2 \in D_2$$

Donc $D_1 \subset D_2$ et par symétrie, $\boxed{D_1 = D_2}$.

20.27 Intersection de sous-espaces vectoriels

Propostion 20.27

Soit E une espace vectoriel et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

— $\bigcap_{i\in I} E_i \subset E$.
— $\forall i \in I, 0 \in E_i$ donc $0 \in \bigcap_{i\in I} E_i$.
— Soit $(x, y) \in \left[\bigcap_{i\in I} E_i\right]^2, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\forall x \in I, \lambda x + y \in E_i$$

Donc $\lambda x + y \in \bigcap_{i\in I} E_i$.

20.34 Description de $Vect(X)$

Propostion 20.34

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et X un sous-ensemble de E. Alors $Vect(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.

On note F l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de X.
F est un sous-espace vectoriel de E qui contient X.
Par définition, $Vect(X) \subset F$.
Or $Vect(X)$ est un sous-espace vectoriel qui contient X. Il doit donc contenir les combinaisons linéaiers de X soit F.
Donc $\boxed{F = Vect(X)}$.

20.36 Opérations sur les sous-espaces vectoriels engendrés

Propostion 20.36

Soit A et B deux ensembles. On a

1. $A \subset Vect(A)$
2. Si $A \subset B$ alors $Vect(A) \subset Vect(B)$.
3. $A = Vect(A)$ si et seulement si A est un espace vectoriel.
4. $Vect(Vect(A)) = Vect(A)$.
5. $Vect(A \cup \{x\}) = Vect(A)$ si et seulement si $x \in Vect(A)$.

1. RAF
2. RAF (20.24)
3. Si $A = \underbrace{Vect(A)}_{\text{sous-espace vectoriel}}$, alors A est un sous-espace vectoriel.
   Si A est un espace vectoriel, par minimalité, $A = Vect(A)$.

4. RAF (20.36.3)
5. On a toujours $Vect(A \cup \{x\}) \supset Vect(A)$(2 0.36.2) si $Vect(A \cup \{x\}) \subset Vect(A)$.
   Or $x \in Vect(A \cup \{x\})$.
   Donc $x \in Vect(A)$.
   Réciproquement, si $x \in Vect(A)$, d'après (20.34) :
$$Vect(A \cup \{x\}) \subset Vect(A)$$
   Si $u \in Vect(A \cup \{x\})$, alors :
$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} x \\ &= \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1}(\mu_1 a'_1 + \ldots + \mu_p a'_p) \\ &\in Vect(A) \end{aligned}$$

20.41 Somme de sous-espaces vectoriels engendrés

Propostion 20.41

Soit X et Y deux sous-ensembles de E. Alors
$$Vect(X \cup Y) = Vect(X) + Vect(Y)$$

On a :
$$\begin{aligned} Vect(X) &\subset Vect(X \cup Y) \\ Vect(Y) &\subset Vect(X \cup Y) \\ \text{donc } Vect(X) + Vect(Y) &\subset Vect(X \cup Y) \end{aligned}$$

Par minimalité :
$$\boxed{Vect(X \cup Y) = Vect(X) + Vect(Y)}$$

20.43 Description d'une somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Propostion 20.43

Soit $E_1, \ldots, E_n$ et F des sous-espaces vectoriels de E. Sont équivalentes :
1. $F = E_1 + \ldots + E_n$;
2. $F = (\ldots((E_1 + E_2) + E_3) + \ldots + E_{n-1}) + E_n$;
3. $F = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n | (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n\}$.

2. Associativité fournie par la définition.
3. (20.39) + (20.43.2)

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, $E = Vect((1,0,0))$ et $F = Vect((0,1,0),(0,0,1))$.
Soit $u \in E \cap F$.
$u = \alpha(1,0,0) = \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$.
Donc $(-\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$.
Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Dans $\mathbb{R}^4$ avec $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$.
$E = Vect(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$

$F = Vect(e_1 + e_3, 2e_2 + e_1 - e_4)$
Soit $u \in E \cap F$.

$$\begin{aligned} u &= \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta, \beta) \\ &= \gamma(e_1 + e_3) + \delta(2e_2 + e_1 - e_4) = (\gamma + \delta, 2\delta, \gamma, -\delta) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma - \delta = 0 \\ \alpha + \beta - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \beta + \delta = 0 \end{cases}$$
$$\text{donc } \begin{cases} \delta = 0 \ (L_1 - L_3) \\ \beta = 0 \ (L_4) \\ \alpha = 0 \ (L_2) \\ \gamma = 0 \ (L_2) \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{E \cap F = \{0\}}$$

20.47 Unicité de l'écriture de la somme directe

Remarque 20.47

En d'autres termes, la somme est directe si et seulement si tout élément x de $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_n$.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que la somme est directe.
Soit $x \in E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$.
On écrit :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \ldots + x_n \\ &= x'_1 + \ldots + x'_n \\ \text{donc } \underbrace{x'_n - x_n}_{\in E_n} &= \underbrace{(x_1 - x'_1)}_{\in E_1} + \ldots + \underbrace{(x_{n-1} - x'_{n-1})}_{\in E_{n-1}} \in E_n \cap (E_1 + \ldots + E_{n-1}) = \{0\} \\ \text{donc } x'_n &= x_n \end{aligned}$$

On poursuit par récurrence.

$\boxed{\Leftarrow}$
On remarque que $0 = 0 + \ldots 0$.
Soit $u \in E_n \cap (E_1 + \ldots + E_{n-1})$.
Donc :

$$\begin{aligned} u = e_n &= e_1 + \ldots + e_{n-1} \\ \text{donc } e_1 + \ldots + e_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Par unicité :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, n-1]\!], e_i &= 0 \\ \text{donc } u &= 0 \end{aligned}$$

On termine le travail par récurrence.

20.51 Famille libre

Propostion 20.51

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est **libre** si une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires de $\mathbb{K}$, à support fini, $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$.
2. Pour tout $x \in Vect((x_i)_{i\in I})$ il existe une **unique** famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires de $\mathbb{K}$, à support fini, telle que $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$.

   Si de plus, $I = [\![1, n]\!]$, les points précédents sont équivalents aux points suivants :
3. Les x_i sont non nuls et la somme $\mathbb{K}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}x_n$ est directe.
4. La fonction $\varphi : \mathbb{K}^n \to E; (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ est injective.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

On écrit, pour tout $x \in Vect((x_i)_{i\in I})$:

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \sum_{i\in I} \mu_i x_i$$
$$\text{donc } \sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$$

Comme (λ_i) et (μ_i) sont des familles de sclaires à support fini, $(\lambda_i - \mu_i)$ aussi et d'après (20.51.1) :

$$\forall i \in I, \lambda_i - \mu_i = 0$$

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$

Soit $\sum\limits_{i\in I} = 0$ avec (λ_i) une famille de scalaires à support fini.
Comme :

$$0 = \sum_{i\in I} 0 x_i$$

Par unicité :

$$\forall i \in I, \lambda_i = 0$$

$\boxed{1, 2 \Rightarrow 3}$

Nécessairement, les x_i sont tous non nuls (sinon, on écrit $1 \times x_1 = 0$).
Soit $x \in (\mathbb{K} + \ldots + \mathbb{K}x_{n-1}) \cap \mathbb{K}x_n$.
On écrit :

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1} = \alpha_n x_n$$
$$\text{donc } \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1} - \alpha_n x_n = 0$$

Par hypothèse :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \alpha_i = 0$$

On poursuit le travail par récurrence pour montrer que la somme est directe.

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$

RAF : (20.47)

$\boxed{4 \Rightarrow 1, 2}$

RAF : définition de l'injectivité pour 2.

20.52 Exemple

Exemple 20.54

1. Montrer que la famille $((1,1),(0,1))$ est libre.
2. Montrer que la famille $((1,2,1),(1,0,1),(0,1,-1))$ est libre.
3. Montrer que la famille $((1,2,1),(1,0,1),(1,6,1))$ est liée.

1. On suppose $\alpha(1,1)+\beta(0,1)=0$.
   Donc :
   $$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \end{cases}$$
   $$\text{donc } \alpha=\beta=0$$
   La famille est libre.
2. Par équivalence. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On a :
   $$\begin{aligned} & a(1,2,1)+b(1,0,1)+c(0,1,-1)=(0,0,0) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a+b & =0 \\ 2a+c & =0 \\ a+b-c & =0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} b+a & =0 \\ 2a+c & =0 \\ c & =0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \; a=b=c=0 \end{aligned}$$
   La famille est libre.
3. Avec les mêmes notations :
   $$\begin{aligned} & a(1,2,1)+b(1,0,1)+c(1,6,1)=(0,0,0) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a+b+c & =0 \\ 2a+6c & =0 \\ a+b+c & =0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a+b+c & =0 \\ a+3c & =0 \end{cases} \end{aligned}$$
   Le système admet des solutions non nulles (par exemple $(-3,2,1)$), donc la famille est liée.

20.58 Caractérisation de la liberté pour des familles infinies

Propostion 20.58

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

$\boxed{\Rightarrow}$
RAF : (20.57)

$\boxed{\Leftarrow}$
Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille à support fini telle que :

$$\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = 0 \tag{20.1}$$

On choisit $J \subset I$, fini, tel que :

$$\forall i \in I \backslash J, \lambda_i = 0$$
$$\text{donc } \sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0$$

Or $(x_i)_{i \in J}$ est libre (finie), donc :

$$\forall i \in J, \lambda_i = 0$$
$$\text{donc } \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

20.60 Caractérisation de la liberté pour les familles infinies indexées par $\mathbb{N}$

Propostion 20.60

Une famille $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x_0, \ldots, x_n)$ est libre.

$\boxed{\Rightarrow}$

Si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre, alors (20.58) ses sous-familles finies sont libres, en particulier celles sous la forme $(x_0, \ldots, x_n)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Soit $(x_i)_{i \in J}$ avec J un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$.
Or pose $n = \max J$, donc $J \subset [\![0, n]\!]$.
Par hypothèse, $(x_0, \ldots, x_n)$ est libre.
Donc (20.57), $(x_i)_{i \in J}$ est libre.
D'après (20.58), $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre.

20.61 Ajout d'un élément à une famille libre

Propostion 20.61

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille libre de E et $x_j \in E$ avec $j \notin I$. La famille $(x_i)_{i \in I \cup \{j\}}$ est libre si et seulement si $x_j \notin Vect((x_i)_{i \in I})$.

$\boxed{\Rightarrow}$

Si $x_j \in Vect(x_i)_{i \in I}$, alors $(x_i)_{i \in I \cup \{j\}}$ est liée.
En effet, $x_j = \sum_{i \in J} \lambda_i x_i$ avec J fini.
Donc $\sum_{i \in J \cup \{j\}} \lambda_i x_i = 0$ avec $\lambda_j = -1$.
La famille $(x_i)_{i \in J \cup \{j\}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

On suppose que $(x_i)_{i \in J \cup \{j\}}$ est liée.
On choisit une famille de scalaires à support fini $(\lambda_i)_{i \in I \cup \{j\}}$ telle que :

$$\sum_{i \in I \cup \{j\}} \lambda_i x_i = 0 \text{ et } (\lambda_i) \neq (0)$$

Donc :

$$\lambda_j + x_j + \sum_{i \in I} = 0$$

Comme $(x_i)_{i \in I}$ est libre, $\lambda_j \neq 0$ et $x_j = -\sum_{i \in I} \lambda_i \lambda_j^{-1} x_i \in Vect((x_i)_{i \in I})$.

20.63 Généricité d'une famille libre maximale

Propostion 20.63

Une famille libre maximale est génératrice dans le sens de la définition ci après : tout élément de E est combinaison linéaire de vecteurs de la famille.

Soit $\mathcal{F}$ une famille libre maximale.
Soit $x \in E$. Alors $\mathcal{F} \cup \{x\}$ est liée.
Donc (20.61) :

$$x \in Vect(\mathcal{F})$$

20.64 Caractérisation des sommes directes par la liberté

Propostion 20.64

Soit $E_1, \ldots, E_n$ des espaces sous-espaces vectoriels non triviaux de E. Alors la somme $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ est directe si et seulement si tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments tous non nuls de $E_1 \times \ldots \times E_n$ est une famille libre dans E.

$\boxed{\Rightarrow}$

On suppose $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n, x_i \neq 0$.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

En particulier, $\lambda_i x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i \in E_n \cap \sum_{i=1}^{n-1} E_i = \{0\}$. Donc $\lambda_n = 0$. On réitère le procédé pour trouver $\lambda_n = \ldots = \lambda_1 = 0$.
Donc $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

$\boxed{\Leftarrow}$

Soit $x \in E_n \cap \sum E_i$. On écrit $x = x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i$.
Donc :

$$x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n = 0$$

Par hypotèse, on doit avoir :

$$x_n = x_{n-1} = \ldots = x_1 = 0$$

Donc $x = 0$ et $E_n \cap \left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i\right) = \{0\}$.
On réitère le procédé pour montrer que $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

20.65 Somme directes et caractérisation de familles libres

Propostion 20.65

1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tel que $F + G$ soit directe. Alors la concaténation d'une famille libre de F et d'une famille libre d G est une famille libre de E.
2. Réciproquement, si $(b_1, \ldots, b_n)$ est une famille libre de E, alors $Vect(b_1, \ldots, b_k) \oplus Vect(b_{k+1}, \ldots, b_n)$ est directe.

1. $(x_1, \ldots, x_k)$ famille libre de F.
   $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ famille libre de G.
   Soit $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ telle que :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \\ \text{donc } &\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = -\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i x_i \in F \cap G = \{0\} \\ \text{donc } &\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0 = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i x_i \\ &\text{donc } \lambda_i = 0 \text{ pour } i \in [\![1,k]\!] \cup [\![k+1,n]\!] \end{aligned}$$

2. RAS

20.66 Familles génératrices

Propostion 20.66

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est une famille **génératrice de** E si l'une des propriétés équivalentes est satisfaite :

1. Tout $x \in E$ est une combinaison linéaire des $x_i, i \in I$.
2. $Vect((x_i)_{i \in I}) = E$.
   Si de plus $I = [\![1,n]\!]$, les points précédents sont équivalents à :
3. $E = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{K} x_i$.
4. La fonction $\varphi : \mathbb{K}^n \to E; (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ est surjective.

$\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$
RAF, il s'agit des définitions.

$\boxed{2 \Leftrightarrow 3}$
Lorsque $I = [\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned} Vect((x_i)_{i \in I}) &= Vect(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \mathbb{K}x_1 + \ldots + \mathbb{K}x_n \text{ (20.44)} \end{aligned}$$

Donc $2 \Leftrightarrow 3$.

$\boxed{3 \Leftrightarrow 4}$
RAF, il s'agit des définitions.

20.68 Stabilité des familles génératrices par ajout

Propostion 20.68

Toute famille contenant une famille génératrice de E est une famille génératrice de E.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille quelconque et on suppose qu'il existe $J \subset I$ tel que $(x_i)_{i \in J}$ est génératrice.

$$E \supset Vect((x_i)_{i \in I}) \supset Vect((x_i)_{i \in J}) = E$$

20.69 Restriction d'une famille génératrice

Propostion 20.69

La famille obtenue en retirant un élément x d'une famille génératrice de E est encore génératrice si et seulement si x est une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

RAF : (20.36.5)

20.71 Liberté d'une famille génératrice minimale

Propostion 20.71

Une famille génératrice minimale est libre.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice minimale.
On suppose $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ avec $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires à support fini.
Soit $k \in I$, on a :

$$\lambda_k x_k = -\sum_{i\in i\neq k} \lambda_i x_i \in Vect((x_i)_{i\in I\setminus\{k\}})$$

Or $x_k \notin Vect((x_i)_{i\neq k})$ car la famille est minimale (20.69).
Donc $\lambda_k = 0$.

20.78 Famille échelonnée en degrés

Propostion 20.78

Si $(P_0,\dots,P_n)$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que pour tout $k \in [\![0,n]\!], \deg(P_k) = k$, alors $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Soit $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. On a :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = P$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_n c_n + \dots & = a_n \\ \vdots & \\ \lambda_0 c_0 & = a_0 \end{cases}$$

où $c_0,\dots,c_n$ sont les coefficients dominants de $P_0,\dots,P_n$ et $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Le système est triangulaire supérieur avec une diagonale ne contenant aucun 0 il est inversible.
Il existe bien une unique famille $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$ telle que $P = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_k P_i$.

Chapitre 21

Applications linéaires

21.4 Exemple

Exemple 21.4.1

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x + 3y$.

Soit $((x, y), (x', y'), \lambda) \in (\mathbb{R}^2)^2 \times \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f((x,y) + \lambda(x', y')) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y') \\ &= 2(x + \lambda x') + 3(y + \lambda y') \\ &= 2x + 3y + \lambda(2x' + 3y') \\ &= f(x, y) + \lambda f(x', y'). \end{aligned}$$

21.8 Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Propostion 21.8

$\mathcal{L}(E, F)$ est un estpace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

— $\mathcal{L}(E, F) \subset F^E$
— $\overline{0}\mathcal{L}(E, F)$
— Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $(x, y) \in E^2, \lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} (f + \alpha g)(x + \lambda y) &= f(x + \lambda y) + \alpha g(x + \lambda y) \\ &= f(x) + \lambda f(y) + \alpha g(x) + \alpha \lambda g(y) \\ &= f(x) + \alpha g(x) + \lambda(f(y) + \alpha g(y)) \\ &= (f + \alpha g)(x) + \lambda(f + \alpha g)(y). \end{aligned}$$

Donc $f + \alpha g \in \mathcal{L}(E, F)$.

21.10 Composition de deux AL

Propostion 21.10

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Soit (x, y) $\in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} g \circ f(x + \lambda y) &= g(f(x + \lambda y)) \\ &= g(f(x) + \lambda f(y)) \\ &= g(f(x)) + \lambda g(f(y)) \\ &= g \circ f(x) + \lambda g \circ f(y). \end{aligned}$$

Donc $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

21.13 Bilinéarité de la composition

Propostion 21.13

La composition d'application linéaire est bilinéaire. En termes plus précis, E, F et G étant des $\mathbb{K}$-ev, l'application

$$\Psi : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G); (u, v) \mapsto v \circ u$$

est une application bilinéaire.

D'après la remarque (21.11), Ψ est linéaire à droite.

$$\forall u \in \mathcal{L}(E,F), \forall (v,v') \in \mathcal{L}(F,G)^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \Psi(u, v+\lambda v') = \Psi(u,v) + \lambda \Psi(u,v')$$

Soit $(u,u') \in \mathcal{L}(E,F)^2, v \in \mathcal{L}(F,G), \lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{E}, \Psi(u+\lambda u', v)(x) &= v \circ (u+\lambda u')(x) \\ &= v(u(x) + \lambda u'(x)) \\ &= v(u(x)) + \lambda v(u'(x)) \\ &= \Psi(u,v)(x) + \lambda \Psi(u',v)(x)\end{aligned}$$

Donc $\Psi(u+\lambda u', v) = \Psi(u,v) + \lambda \Psi(u',v)$.

21.16 Structure des images directes et réciproques

Propostion 21.16

1. Soit E' un sev de E. Alors $f(E')$ est un sev de F.
2. Soit F' un sev de F. Alors $f^{-1}(F')$ est un sev de E.

1. — $f(E') \subset F$
   — $0 = f(0) \in f(E')$
   — Soit $(x,y) \in f(E')^2, \lambda \in \mathbb{K}$. On écrit $x = f(\alpha), y = f(\beta)$ avec $(\alpha,\beta) \in E'^2$.

$$\begin{aligned}x + \lambda y &= f(\alpha) + \lambda f(\beta) \\ &= f(\alpha + \lambda\beta) \\ &\in f(E')\end{aligned}$$

2. — $f^{-1}(F') \subset E$
   — $0 = f(0) \in f^{-1}(F')$
   — Soit $(x,y) \in f^{-1}(F')^2, \lambda \in \mathbb{K}$.

$$f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \in F'$$
$$\text{donc } x + \lambda y \in f^{-1}(F')$$

21.21 Famille génératrice de $Im(f)$

Propostion 21.21

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E. Alors $(f(e_i)_{i\in I})$ est une famille génératrice de $Im(f)$.
Soit

$$Im(f) = Vect(f(e_i)_{i\in I})$$

— Pour tout $i \in I, f(e_i) \in Im(f)$.
Comme $Im(f)$ est un sev :

$$Vect(f(e_i)_{i\in I}) \subset Im(f)$$

— Soit $a \in Im(f)$. On choisit $x \in E$ tel que $a = f(x)$.
Comme $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, on peut écrit $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est à spport fini.

$$\begin{aligned}a &= f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) \\ &\in Vect(f(e_i)_{i\in I})\end{aligned}$$

21.23 Réciproque d'un isomophisme

Théorème 12.23

Soit f un isomorphisme de E vers F. Alors f^{-1} est une application linéaire, donc un isomophisme de F vers E.

On pose $g = f^{-1}$. Soit $(x, y) \in F^2, \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} g(x + \lambda y) &= g(f(g(x)) + \lambda f(g(y))) \\ &= g(f(g(x)) + \lambda f(g(y))) \\ &= g(x) + \lambda g(y) \end{aligned}$$

Donc $g \in \mathcal{L}(F, E)$.

21.41 Structure de l'ensemble des polynômes annulateurs - Hors Programme

Propostion 21.41 - HP

L'ensemble des polynômes annulateurs de f est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Si P et Q annulent u, alors :

$$(P - Q)(u) = P(u) - Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Si $B \in \mathbb{K}[X]$:

$$(PB)(u) = P(u) \circ B(u) = B(u) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

21.52 Caractérisation de l'image d'un projecteur

Propostion 21.52

Soit p un projecteur de E. Alors $x \in Im(p)$ si et seulement si $p(x) = x$. Soit :

$$Im(p) = \ker(p - id_E)$$

Soit p un projecteur. Soit $x \in E$.
- Si $x \in Im(p)$, on choisit $y \in E$ tel que $x = p(y)$.
  Donc $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$.
- Si $p(x) = x$, alors $x \in Im(p)$.
-

$$\begin{aligned} x \in Im(p) &\Leftrightarrow p(x) = x \\ &\Leftrightarrow p(x) - x = 0 \\ &\Leftrightarrow (p - id)(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker(p - id) \end{aligned}$$

21.53 Diagonalisation d'un projecteur

Théorème 21.53

Soit p un projecteur de E. Alors :

$$E = \ker(p) \oplus \ker(p - id_E)$$

Soit $x \in \ker(p) \cap \ker(p - id_E)$.
Donc $p(x) = 0$ et $p(x) - x = 0$.

Donc $x = 0$.

Soit $x \in E$, on écrit $x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \ker(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in Im(p)=\ker(p-id)}$.
Donc $E = \ker(p) \oplus \ker(p - id)$.

21.57 Caractérisation géométrique des projecteurs

Théorème 21.57

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.
- p est un projecteur si, et seulement si, il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $E = F \oplus G$ et
$$\forall f \in F, \forall g \in G, p(f + g) = f.$$
- Dans ce cas, $F = Im(p)$ et $G = \ker(p)$.
- Ainsi, un projecteur est une projection géométrique sur $Im(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

$\boxed{\Rightarrow}$
Existence justifiée avec $F = Im(p)$ et $G = \ker(p)$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Soit $x = f + g \in E$.

$$\begin{aligned} p^2(x) &= p \circ p(f + g) \\ &= p(f) \\ &= f \\ &= p(f + g) \\ &= p(x) \end{aligned}$$

Donc $p^2 = p$, donc p est un projecteur.

21.59 Diagonalisation d'une symétrie

Théorème 21.59

On suppose que $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2. Soit s une symétrie de E. Alors :
$$E = \ker(s + id_E) \oplus \ker(s - id_E)$$

- Soit $x \in \ker(s - id) \cap \ker(s + id)$. Donc :
$$\begin{aligned} s(x) - x &= 0 \\ s(x) + x &= 0 \\ \text{donc } 2x &= 0 \\ \text{donc } x &= 0 \end{aligned}$$
- Pour $x \in E$, $x = \frac{1}{2}(\underbrace{x - s(x)}_{\in \ker(s+id)}) + \frac{1}{2}(\underbrace{x + s(x)}_{\in \ker(s-id)})$.

21.63 Détermination d'une AL par l'image d'une base, ou rigidité

Propostion 21.63

Etant donné une base $(b_i)_{i\in I}$ de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de F, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in I, u(b_i) = f_i$.

Soit $(b_i)_{i\in I}$ une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de F.
Soit $x \in E$. On écrit $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i b_i$ avec $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires à support fini.
On pose $u(x) = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i f_i$. On définit bien une application ca les λ_i sont uniques.
Montrons que $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $(x,y) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On écrit $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i b_i$ et $y = \sum\limits_{i\in I} \mu_i b_i$. Ainsi :

$$x + \alpha y = \sum_{i\in I} (\lambda_i + \alpha\mu_i) b_i$$

Par définition :

$$\begin{aligned} u(x+\alpha y) &= \sum_{i\in I} (\lambda_i + \alpha\mu_i) f_i \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i f_i + \alpha \sum_{i\in I} \mu_i f_i \\ &= u(x) + \alpha u(y) \end{aligned}$$

L'existence est prouvée, et si $v \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que :

$$\forall i \in I, v(b_i) = f_i$$

Le raisonnement précédent impose que :

$$\forall x \in E, u(x) = v(x)$$

Soit :

$$u = v$$

21.64 Exemple

Exemple 21.64

1. Déterminer l'expression générale de l'application lin de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0) = (3,2) \quad \text{et} \quad f(0,1) = (2,1)$$

2. Montrer que toute application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est de la forme $X \mapsto MX$ et décrire M à partir d'une base de $\mathbb{R}^p$.
3. Soit $(b_i)_{i\in I}$ de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de F, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in I, u(b_i) = f_i$.

1. Pour tout (x,y).

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x(1,0) + y(0,1)) \\ &= xf(1,0) + yf(0,1) \\ &= x(3,2) + y(2,1) \\ &= (3x+2y, 2x+y) \end{aligned}$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
   Soit $(b_1, \dots, b_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$\forall j \in [\![1,n]\!], f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned}
f(X) &= f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j b_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{p} x_j f(b_j) \\
&= \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} m_{ij} x_j\right) e_i \\
&= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{p} m_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{p} m_{nj} x_j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

21.68 Caractérisation de l'injectivité par l'image d'une base

Propostion 21.68

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective
2. l'image de la famille libre de E par f est une famille libre de F
   Si de plus E admet au moins une base, elles sont aussi équivalentes à :
3. l'image de toute base de E par f est une famille libre de F
4. il existe une base de E dont l'image par f est une famille libre de F

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre de E.
On suppose $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i f(x_i) = 0$ avec $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires à support fini.
Donc :

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right) &= 0 \\
\text{donc } \sum_{i\in I} \lambda_i x_i &= 0 \\
\text{donc } \forall i \in I, \lambda_i &= 0
\end{aligned}$$

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$

On suppose f non injective. Donc $\ker(f) \neq \{0\}$.
Soit $x \neq 0$ tel que $f(x) = 0$.
Or (x) est libre ($x \neq 0$) et $(f(x))$ est liée.

On suppose que E admet une base.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ RAF

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ RAF

$\boxed{4 \Rightarrow 1}$
Soit $(b_i)_{i \in I}$ une base de E telle que $(f(b_i))_{i \in I}$ est libre.
Soit $x \in \ker f$. Donc $f(x) = 0$ et $x = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i b_i$ avec $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires à support fini.

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i f(b_i) \end{aligned}$$

Donc, car $(f(b_i))_{i \in I}$ est libre, on a :

$$\forall i \in I, \lambda_i = 0$$

Donc $x = 0$.
Donc f est injective.

21.69 Caractérisation de la surjectivité par l'image d'une base

Propostion 21.69

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Sont équivalentes :

1. f est surjective
2. l'image de toute famille génératrice de E par f est une famille génératrice de F
   Si de plus F admet au moins une base, les propriétés précédentes sont équivalentes à :
3. l'image de toute base de E par f est une famille génératrice de F
4. il existe une base de E dont l'image par f est une famille génératrice de F

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$
On suppose f surjective. Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E.

$$\mathcal{F} = Im(f) = Vect(f(\mathcal{F}))$$

Donc $f(\mathcal{F})$ est génératrice.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ $\mathcal{F} = (x)_{x \in E}$

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ RAF

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ RAF

$\boxed{4 \Rightarrow 1}$
Soit B la base considérée.

$$Im(f) = Vect(f(B)) = F$$

Chapitre 22

Espaces de dimension finie

22.3 Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants

Propostion 22.3

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie engendré par n éléments. Alors toute partie libre de E possède au plus n éléments.

Soit G une famille génératrice de E avec $G = (g_1, \dots, g_n)$. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E.
Supposons par l'absurde que $|\mathcal{L}| > n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note :

$$P(k) : \text{"}E \text{ est engendré par } n-k \text{ vecteurs de } G \text{ et } k \text{ vecteurs de } \mathcal{L}\text{"}$$

Pour $k = 0$, la famille convient.
On suppose que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $E = Vect(\underbrace{g_1, \dots, g_{n-k}}_{\in G}, \underbrace{l_1, \dots, l_k}_{\in L})$

Comme $l_{k+1} \in E$, on écrit $l_{k+1} = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i g_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i l_j$.
Comme $\mathcal{L}$ est libre, $l_{k+1} \notin Vect(l1, \dots, l_k)$.
Donc il existe $i \in [\![1, n-k]\!], \alpha_i \neq 0$ et quitte à renommer les g_i, on peut supposer $\alpha_{n-k} \neq 0$ et ainsi :

$$g_{n-k} \in Vect(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_n + 1)$$

Ainsi :

$$E = Vect(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_{k+1})$$

Par récurrence, $P(k)$ est vraie pour $k \in [\![0, n]\!]$, en particulier, $P(n)$ est vraie.
$(l1, \dots, l_n)$ est une base de E. Or $l_{n+1} \in E$ et $(l_1, \dots, l_{n+1})$ libre. Absurde.

22.5 Algroithme de la base incomplète

Théorème 22.5

Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une partie génératrice de E dont les p premiers vecteurs sont linéairement indépendants. Dans ces conditions, E possède une base constituée des vecteurs $x_1, \dots, x_p$ et de certains vecteurs $x_{p+1}, \dots, x_n$.

On utilise l'algorithme suivant :
On initialise $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$. Pour tout $k \in [\![p+1, n]\!]$:
- Si $x_k \in Vect(\mathcal{F})$, on laisse $\mathcal{F}$ invariant.
- Si $x_k \notin Vect(\mathcal{F})$, on remplace $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F} \cup \{x_k\}$.

L'algorithme s'arrête en temps fini.
La famille $\mathcal{F}$ obtenue est libre, elle est également génératrice car :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in \mathcal{F} \text{ ou } x_i \in Vect(\mathcal{F})$$

Donc $E = Vect(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \subset Vect(\mathcal{F}) \subset E$. Donc $\mathcal{F}$ est une base.

22.8 Théorème de la base incomplète

Théorème 22.8

Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
1. Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E.
2. De toute famille génératrice de E on peut extraire une base finie de E.

En particulier, E possède une base finie.

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie.
1. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre. On applique l'algorithme de la base incomplète à $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ qui fournit une base B de E contenant $\mathcal{L}$.

2. Comme $\mathcal{G}$ est génératrice, on fixe $x \neq 0 \in \mathcal{G}$ comme premier vecteur de $\mathcal{G}$ et on lui applique l'algorithme de la base incomplète.
   La base obtenue est bien constituée de vecteurs de $\mathcal{G}$.

Remarque

Remarque

Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice, elle contient nécessairement une famille génératrice finie.

22.11 Caractérisation de la dimension finie par le cardinal des familles libres

Corollaire 22.11

Soit E un espace vectoriel. Alors E est de dimension finie si et seulement si toute famille libre de E est de cardinal fini.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose E de dimension finie. Donc E possède une famille génératrice à n vecteurs.
Donc les familles libres de E ont un cardinal inférieur à n.
Elles sont finies.

$\boxed{\Leftarrow}$
Par contraposée, on suppose E de dimension infinie.
Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$.
On pose $x_1 = x$. Comme E est de dimension infinie, on choisit $x_2 \in E \backslash Vect(x_1)$.
On poursuit les raisonnement par récurrence pour obtenir une famille libre $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

22.12 Théorème de la dimension

Théorème 22.12

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E sont finies et sont de même cardinal.

Soit B et B' deux bases. On a :

$$|B| \leq |B'| \text{ et } |B'| \leq |B|$$

Donc :

$$|B| = |B'|$$

22.18 Caractérisation des bases en dimension finie

Théorème 22.18

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \neq 0$. Une famille de n vecteurs est une base si, et seulement si, elle est libre, si, et seulement si, elle est génératrice.

Soit $\mathcal{F}$ une famille avec $|\mathcal{F}| = \dim E = n$.

— On suppose que $\mathcal{F}$ est libre.
  On applique sur $\mathcal{F}$ le théorème de la base incomplète.
  On obtient alors une base B de E avec :

$$\mathcal{F} \subset E$$

Or $|B| = \dim E = |\mathcal{F}|$.
Donc $\mathcal{F} = B$.

— On suppose $\mathcal{F}$ génératrice. On procède de la même manière en utilisant le théorème de la base extraite.

22.20 Majoration du rang et cas d'égalité

Propostion 22.20

On a

$$rg(x_1, \dots, x_k) \leq k$$

avec égalité si et seulement si la famille est libre.

Soit $Vect((x_i)_{i \leq k})$ possède un système fini de k vecteurs générateurs.

$$\dim(Vect(x_1, \dots, x_k)) \leq k$$

— Si $\dim(Vect(x_1, \dots, x_k)) = k$, alors (22.18), $(x_1, \dots, x_k)$ est une base, donc est libre.
— Si la famille est libre, c'est une base de $Vect(x_1, \dots, x_k)$, donc $\dim(Vect(x_1, \dots, x_k)) = k$.

22.22 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Propostion 22.22

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, avec E de dimension finie.
Ainsi, F est lui-même de dimension finie (22.11).
Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de F :

$$|\mathcal{L}| \leq \dim E$$

Donc (il suffit de prendre pour $\mathcal{L}$ une base de F) :

$$\dim F \leq \dim E$$

Si $\dim F = \dim E$, alors une base de F est aussi une base de E (22.18).
Ainsi :

$$F = Vect(B) = E$$

22.23 Formule de Grassmann

Théorème 22.23

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors $F + G$ est de dimension finie et :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

$F \cap G \subset F$, donc $F \cap G$ est de dimension finie.
On note $n = \dim F \cap G$.
On choisit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $F \cap G$.
On complète cette famille libre en :

— une base $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ de F
— une base $(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q)$ de G

Montrons que $(E_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de $F+G$.

$$\begin{aligned} F+G &= Vect(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p) + Vect(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q) \\ &= Vect(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q) \end{aligned}$$

La famille génératrice. On suppose :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i f_i + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i g_i = 0$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{q} \gamma_i g_i = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{p} \beta_i f_i \in F \cap G$$

Donc (liberté de $(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q)$) :

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = (0, \dots, 0)$$

Puis :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i f_i = 0$$

Donc (liberté de $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$) :

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= (0, \dots, 0) \\ (\beta_1, \dots, \beta_p) &= (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \dim(F+G) &= n+p+q \\ &= n+p+n+q-n \\ &= \dim F + \dim G - \dim F \cap G \end{aligned}$$

22.27 Caractérisation des couples de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Propostion 22.27

Soit E un espace de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de F. Alors F et G sont supplémentaires si et seulement si :

$$F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E$$

si et seulement si :

$$F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E$$

$$\begin{aligned} F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires } &\text{ssi } F \oplus G = E \\ &\text{ssi } F \cap G = \{0\} \text{ et } F+G = E \\ (\boxed{\Rightarrow}\ 22.26\ \boxed{\Leftarrow}\ 22.26,\ 22.22)\ &\text{ssi } F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E \\ (\boxed{\Rightarrow}\ 22.26\ \boxed{\Leftarrow}\ 22.23)\ &\text{ssi } F+G = E \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E \end{aligned}$$

22.28 Existence et dimension d'un supplémentaire en dimension finie

Théorème 22.28

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E. Alors il existe un supplémentaire S de F et :

$$\dim S = \dim E - \dim F$$

- Si $F = \{0\}$, E convient.
- Si $F \neq \{0\}$, on choisit une base de F $(f_1, \ldots, f_p)$ que l'on complète en une base $(f_1, \ldots, f_p, s_1, \ldots, s_q)$ de E $(\dim E = p + q)$.
  $S = Vect(s_1, \ldots, s_q)$ convient.

22.30 Base de $\mathcal{L}(E, F)$

Propostion 22.30

Si E et F sont de dimension finie, la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ décrite dans l'exemple précédent est une base de $\mathcal{L}(E, F)$.

- Montrons que $(u_{i,j})$ est libre.
  On suppose $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{i,j} u_{i,j} = 0$.

$$\begin{aligned} \forall k \in I, \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{i,j} u_{i,j}(b_k) &= 0 \\ \text{donc} \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{i,j} \delta_{i,k} c_j &= 0 \\ \text{donc} \sum_{j\in J} \lambda_{k,j} c_j &= 0 \end{aligned}$$

  Par liberté des (c_j), on a :

$$\forall k \in I, \forall j \in J, \lambda_{k,j} = 0$$

- Montrons que $(u_{i,j})$ est génératrice.
  Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
  Pour tout $k \in I$, $f(b_k) = \sum\limits_{j\in J} \lambda_{k,j} c_j$ ((c_j) est une base de F).
  Alors :

$$f = \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{i,j} u_{i,j} \text{ (théorème de rigidité)}$$

22.32 Dimension d'espaces isomorphes

Propostion 22.32

Soit E et F deux espaces isomorphes. Si l'un des deux est de dimension finie, alors les deux le sont et :

$$\dim E = \dim F$$

Réciproquement, si E et F sont de dimension finie avec $\dim E = \dim F$, alors E et F sont isomorphes.

- Si $\dim E = n$, on choisit B une base de E.
  Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors $f(B)$ est une base de F.
  Donc F est de dimension finie et $\dim F = |f(B)| = |B| = n = \dim E$.

— On suppose que $\dim E = n = \dim F$.
  Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F.
  On définit (théorème de rigidité) $u \in \mathcal{L}(E, F)$ par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], u(e_i) = f_i$$

  D'après (21.70), u est un isomorphisme.

22.35 Rang d'une famille génératrice

Propostion 22.35

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E. Le rang de u, s'il existe est égal au rang de la famille $(u(x_i))_{i\in I}$.

$$\begin{aligned} rg(u) &= \dim(Im(u)) \\ &= \dim(Vect(u(x_i))_{i\in I}) \text{ (21.21)} \\ &= rg(u(x_i))_{i\in I} \end{aligned}$$

22.36 Existence et majoration du rang en dimension finie

Propostion 22.36

— Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E ou F sont de dimension finie, alors $Im(u)$ est également de dimension finie et (avec les conditions adéquates) :

$$rg(u) \leq \dim E \text{ ou } rg(u) \leq \dim F$$

— Avec les conditions appropriées :
  — $rg(u) = \dim E$ si et seulement si u est injective
  — $rg(u) = \dim F$ si et seulement si u est surjective

On suppose E et F de dimension finie.
— $Im(u) \subset F$ et $\dim(Im(u)) \leq \dim F$ et $rg(u) = \dim F$ si et seulement si (22.22) $Im(u) = F$ si et seulement si u est surjective.
— Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
  Comme $(e_1, \dots, e_n)$ engendre E :

$$\begin{aligned} rg(u) &= rg(u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ (22.35)} \\ &\leq n = \dim E \text{ (22.20)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rg(u(e_1), \dots, u(e_n)) = n &\text{ ssi } (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est libre} \\ \text{(21.68)} &\text{ ssi } u \text{ est injective} \end{aligned}$$

22.39 Effet d'une composition sur le rang

Théorème 22.39

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

1. $rg(v \circ u) \leq \min(rg(u), rg(v))$
2. si v est injective, alors $rg(v \circ u) = rg(u)$
3. si u est surjective, alors $rg(v \circ u) = rg(v)$

1. $Im(v \circ u) \subset Im(v)$ donc $rg(v \circ u) \leq rg(v)$ et $Im(v \circ u) = Im(v|_{Im(u)})$ donc :

$$rg(v \circ u) = rg(v|_{Im(u)}) \leq \dim(Im(u)) = rg(u)$$

2. Si v est injective, alors (22.36), $rg(v|_{Im(u)}) = \dim(Im(u)) = rg(u)$
3. Si u est surjective, alors $Im(u) = F$, et d'aprè (22.39.1) :

$$rg(v \circ u) = rg(v|_F) = rg(v)$$

22.40 Noyau et image d'une restriction

Lemme 22.40

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et E' un sous-espace vectoriel de E. Soit $v \in \mathcal{L}(E', F)$ la restriction de u à E'. Alors :
- $\ker v = \ker u \cap E'$
- Si $\ker u + E' = E$, alors $Im(v) = Im(u)$

Soit $x \in E$.
-
$$\begin{aligned} x \in \ker v &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in E' \\ v(x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in E' \\ u(x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in \ker u \cap E' \end{aligned}$$
- Supposons que $\ker u + E' = E$. On a toujours $Im(v) \subset Im(u)$.
  Soit $y \in Im(u)$. On choisit $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
  On écrit $x = \alpha + \beta$ avec $\alpha \in \ker u$ et $\beta \in E'$.
  Ainsi :
  $$y = u(x) = u(\alpha + \beta) = u(\alpha) + u(\beta) = 0 + v(\beta) \in Im(v)$$

22.41 Restriction de u à un supplémentaire de $\ker u$

Corollaire 22.41

Soit S un supplémentaire de $\ker u$ dans E. Alors u induit un isomorphisme de S sur $Im(u)$.

Soit $v : S \to Im(u); x \mapsto u(x)$.
D'après (22.40), v est injective et surjective, donc fournit bien un isomorphisme de S sur $Im(u)$.

22.43 Théorème du rang

Théorème 22.43

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim \ker f + rg(f) = \dim E$$

Comme E est de dimension finie, $\ker f$ et $Im(f)$ sont de dimension finie.
D'après (22.28), on choisit S un supplémentaire de $\ker f$ dans E.
D'après (22.41), S et $Im(f)$ sont isomorphes.
Donc $rg(f) = \dim S = \dim E - \dim \ker f$ (22.28).

22.53 Caractérisation par les supplémentaires

Théorème 22.53

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors H est un hyperplan de E si et seulement si H admet une droite de E comme supplémentaire.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que H est un hyperplan de E.
Soit $\varphi \in E^*, \varphi \neq 0$ tel que :

$$H = \ker \varphi$$

Comme $\varphi \neq 0$, on choisit $x \in E \backslash \ker \varphi$.
On a clairement $H \cap Vect(x) = \{0\}$.
On rappelle que $\varphi(x) \in \mathbb{K}^*$. Soit $v \in E$.
On a :

$$\varphi(v) = \frac{1}{\varphi(x)} \varphi(\varphi(x)v)$$

On écrit $v = \underbrace{v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(x)}x}_{\in \ker \varphi} + \underbrace{\frac{\varphi(v)}{\varphi(x)}x}_{\in Vect(x)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$
On suppose que $E = H \oplus Vect(x)$.
Soit $v \in E$. On écrit $v = h + \lambda x$.
On lui associe $\varphi(v) = \lambda$. L'application φ est bien définie car la décomposition est unique.
Cette application est bien linéaire, dont le noyau est H.
Par définition, H est un hyperplan.

22.54 Comparaison de deux équations de H

Propostion 22.54

Soit H un hyperplan de E d'équation $\varphi \in E^*$. Alors pour tout $\psi \in E^*, \psi(x) \neq 0$ est une équation de H si et seulement si $\psi \neq 0$ et $\psi \in Vect(\varphi)$.

On note $H = \ker \varphi$ avec $\varphi \in E^*$ non nulle.
$\boxed{\Rightarrow}$
Soit $\psi \in E^*$ non nulle. On suppose $H = \ker \psi$.
Comme ψ est non nulle, on choisit $\alpha \in E$ tel que :

$$\psi(\alpha) = 0 \text{ dans } \mathbb{K}$$

Comme $\alpha \notin \ker \psi$, $\varphi(\alpha) \neq 0$.
On écrit :

$$\psi(\alpha) = \lambda\psi(x) \text{ avec } \lambda = \frac{\psi(\alpha)}{\varphi(x)} \neq 0$$

D'après (22.53) :

$$E = H \oplus Vect(\alpha)$$

Soit $x \in E, x = h + \mu\alpha$ $(h \in H, \mu \in \mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(h) + \mu\psi(\alpha) \\ &= \mu\lambda\varphi(x) \\ &= \lambda\varphi(h + \mu\alpha) \\ &= \lambda\varphi(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\psi = \lambda\varphi \in Vect(\varphi)$$

$\boxed{\Leftarrow}$
si $\psi \in Vect(\varphi)$, on écrit $\psi = \lambda\varphi, \lambda \neq 0$.
Pour $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in H &\Leftrightarrow x \in \ker \varphi \\ &\Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda\varphi(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker \psi \end{aligned}$$

22.55 Intersection d'hyperplans

Théorème 22.55

Soit E un espace de dimension finie n.

1. L'intersection de m hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de dimension au moins $n - m$.
2. Réciproquement, tout sous-espace vectoriel F de E de dimension $n - m$ peut s'écrire comme l'intersection de m hyperplans.

1. Le résulat est vrai pour $m = 1$ (avec égalité).
   Soit H_1 et H_2 deux hyperplans.
   On a :

   $$\dim H_1 = \dim H_2 = n - 1$$

   D'après la formule de Grassmann :

   $$\begin{aligned} \dim(H_1 \cap H_2) &= \underbrace{-\dim(H_1 + H_2)}_{\in\{n-1,n\}} + \dim H_1 + \dim H_2 \\ &\geq 2n - 2 - n \\ &= n - 2 \end{aligned}$$

   On poursuit le résultat par récurrence.
2. Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$.
   On fixe une base $(f_1, \ldots, f_{n-m})$ de F. On la complète en $(f_1, \ldots, f_{n-m}, f_{n-m+1}, \ldots, f_n)$ une base de E.
   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note p_k la projection canonique sur la k-ième coordonnée.

   $$p_k\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right) = \alpha_k$$

   Par construction, p_k est une forme linéaire, non nulle.

   $$F = \bigcap_{i=n-m+1}^{n} \ker p_i$$

Chapitre 23

Sous-espaces affines

23.1 Sous-espace affine

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- On appelle **sous-espace affine de** E toute partie $\mathcal{F}$ de E de la forme :

$$\mathcal{F} = x + F = \{f + x \mid f \in F\}$$

  où F est un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E.

- Le sous-espace vectoriel F associé au sous-espace affine $\mathcal{F}$ est unique. On l'appelle **direction de** $\mathcal{F}$ et ses éléments sont appelés les **vecteurs directeurs de** $\mathcal{F}$.

On suppose que $\mathcal{F} = x_1 + F_1 = x_2 + F_2$.
Soit $y \in F_1$.
On a $y + x_1 \in \mathcal{F}$ donc $y + x_1 = x_2 + y_2$ avec $y_2 \in F_2$.
Or $x_1 \in \mathcal{F}$ donc $x_1 = x_2 + g_2$ avec $g_2 \in F_2$.
Donc :

$$\begin{aligned} y &= x_2 - x_1 + y_2 \\ &= y_2 - g_2 \\ &\in F_2 \end{aligned}$$

avec $F_1 \subset F_2$.
Par symétrie :

$$F_1 = F_2$$

23.8 Caractérisation des sous-espaces affines par leur direction et leur point

Théorème 23.8

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction F et $A \in \mathcal{F}$, alors :

$$\mathcal{F} = A + F$$

$\mathcal{F} = x + F$. Soit $A \in \mathcal{F}$.
Donc $A = x + f, f \in F$.
Donc $A - x \in F$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= x + F \\ &= (x - A) + A + F \\ &= A + F \end{aligned}$$

23.11 Fibre d'une application linéaire

Théorème 23.11

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$. Alors $u^{-1}(\{y\})$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E et de direction $\ker u$.

On suppose que $u^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Fixons $x_0 \in u^{-1}(\{y\})$.

Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} x \in u^{-1}(\{y\}) &\Leftrightarrow u(x) = y \\ &\Leftrightarrow u(x) = u(x_0) \\ &\Leftrightarrow x - x_0 \in \ker u \\ &\Leftrightarrow x \in x_0 + \ker u \end{aligned}$$

Donc :

$$u^{-1}(\{y\}) = x_0 + \ker u$$

23.13 Exemple

Exemple 23.13

- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire non homogène de degré 1 ou 2.
- L'ensemble des polynômes interpolateurs en un certain nombre de points.
- Equations arithmético-géométrique.

- $\{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), ay' + b = f\} = u^{-1}(\{f\})$ où $u : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}); y \mapsto ay' + by$.
- Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ deux à deux distincts et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ quelconques deux à deux distincts. $\{P \in \mathbb{R}[X], \forall i \in [\![1, n]\!], P(a_i) = b_i\} = u^{-1}(\{(b_1, \dots, b_n)\})$ où $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^n; P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$.
- $\{(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}, \forall n \geq 0, u_{n+1} = au_n + b\} = u^{-1}(\{(b)_{n \geq 0}\})$ où $u : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}; (u_n) \mapsto (u_{n+1} - au_n)_{n \geq 0}$.

Chapitre 24

Comparaison locale des suites

24.18 Caractérisation de l'équivalence par la négligabilité

Propostion 24.18

On a :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$$

$\boxed{\Rightarrow}$
Si $u_n \sim v_n$ à partir d'un certain rang :

$$u_n = a_n v_n \text{ avec } a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{(a_n - 1)}_{=o(1)} v_n + v_n \\ &\underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n) \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$
Si $u_n = v_n + o(v_n)$, alors à partir d'un certain rang :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \epsilon_n v_n \text{ avec } \epsilon_n = o(1) \\ &= \underbrace{(1 + \epsilon_n)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} v_n \end{aligned}$$

Donc :

$$u_n \sim v_n$$

24.20 Equivalent d'un polynôme

Propostion 24.20

Soit P un polynôme de monôme dominant $a_d X^d$. Alors $P(n) \sim a_d n^d$.

On note $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.
Pour $k \in [\![0, d-1]\!]$:

$$n^k \underset{n\to+\infty}{=} o(n^d) \text{ et } a_k n^k \underset{n\to+\infty}{=} o(a_d n^d)$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{d-1} a_k n^k \underset{n\to+\infty}{=} o(a_d n^d)$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(n) &= a_d n^d + o(a_d n^d) \\ &\sim a_d n^d \end{aligned}$$

24.31 Exemple

Exemple 24.31

Déterminons :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^3\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right)\sqrt{3n+1}}$$

On note u_n l'expression de l'exemple.
But : trouver un équivalent (simple) de u_n.

—
$$e^{\frac{1}{n}}-1 \sim \frac{1}{n}$$

Donc :

$$(e^{\frac{1}{n}}-1)^3 \sim \frac{1}{n^3}$$

—
$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1 &= (1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}-1\\ &\sim \frac{1}{2n}\end{aligned}$$

—
$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

—
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) &= \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\\ &\sim \frac{3}{n^2}\end{aligned}$$

Donc :

$$\ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) \sim \frac{9}{n^4}$$

—
$$\sqrt{3n+1} \sim \sqrt{3n}$$

Donc :

$$\begin{aligned}u_n &\sim \frac{\frac{1}{n^3}\times\frac{1}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{9}{n^4}\times\sqrt{3n}}\\ &= \frac{1}{18\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Donc :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{18\sqrt{3}}$$

24.36 Exemple

Exemple 24.36

Déterminer un équivalent de $\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{2}{n}\right) &= \frac{2}{n} + o\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
\sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{2}{n} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\sim \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

24.43 Exemple

Exemple 24.43

Trouver un équivalent de $\ln \sin \frac{1}{n}$.

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= \ln\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + o\left(1\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + o(1) + o(o(1)) \\
&= \underbrace{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to -\infty} + o(1) \\
&= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\sim \ln\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

24.46 Exemple

Exemple 24.46

Soit (u_n) une suite non nulle de limite nulle. On admet que $\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$, montrer que :

$$\exp\left(5n + n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}}$$

(au voisinage de 0).

$$\begin{aligned}
\exp\left(5n + n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(5n + n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(6n - \frac{1}{2} + o(1)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}} \times e^{o(1)} \\
&\sim_{n\to+\infty} \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}}
\end{aligned}$$

Exercice 24.9

Exercice 24.9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}$. Donner un équivalent simple de u_n.

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} \\
&= e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}) \\
&= e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}}) \\
&= e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{\frac{1}{n}\left[(1+\frac{1}{n})^{-1} - 1\right]}) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)) \\
&\sim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \\
&\sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Exercice 24.10

Exercice 24.10

Soit u la suite définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin u_n$$

1. Montrer que la suite u est strictement positive, décroissante et de limite nulle.
2. On admet que si u est une suite de limite nulle, alors quand n tend vers $+\infty$, $\sin u_n = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$. Déterminer le réel α tel que la suite $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite réelle non nulle. En appliquant le lemme de Césaro à la suite (v_n), en déduire un équivalent simple de (u_n), quand $n \to +\infty$.

1. L'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ est stable par la fonction sinus.
   Comme sin est croissante, la suite (u_n) est monotone. On a $u_1 < u_0$ donc (u_n) est décroissante.
   Par stabilité, (u_n) est positive.
   D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers $\ell \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
   D'après le théorème du point fixe, car sin est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin \ell = \ell$.
   En étudiant les variations de $x \mapsto \sin x - x$, on trouve un unique point fixe : 0.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \\ &= \sin^\alpha u_n - u_n^\alpha \\ &\underset{n\to+\infty}{=} u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3) - u_n^\alpha \\ &\underset{n\to+\infty}{=} u_n^\alpha \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^\alpha - u_n^\alpha \\ &\underset{n\to+\infty}{=} u_n^\alpha \left[1 + \alpha\left(-\frac{u_n^2}{6}\right) + o(u_n^2)\right] - u_n^\alpha \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\alpha\frac{u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha}) \end{aligned}$$

Pour $\alpha = -2$, on a :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{3} + o(1)$$

D'après le lemme de Césaro :

$$\frac{u_n^{-2} - u_0^{-2}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{u_n^{-2}}{n} &= \frac{u_0^{-2}}{n} + \frac{1}{3} + o(1) \\ &\sim \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc :

$$u_n^2 \sim \frac{3}{n}$$

Donc :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Chapitre 25

Comparaison locale des fonctions

25.6 Caractérisation séquentielle

Théorème 25.6

Soit f et g deux fonctions sur X et $a \in \overline{X}$. Alors :

1. $f \underset{a}{=} O(g)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ à valeurs dans X, alors $f(u_n) = O(g(u_n))$.
2. $f \underset{a}{=} o(g)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ à valeurs dans X, alors $f(u_n) = o(g(u_n))$.

1.

$$\begin{aligned} f \underset{a}{=} O(g) &\text{ ssi il existe } h \text{ bornée au voisinage de } a \text{ tel que } f = g \cdot h \\ &\text{ ssi Pour toute suite } (u_n) \in X^{\mathbb{N}} \text{ avec } u_n \to a,\ f(u_n) = g(u_n) \times w_n \text{ où } (w_n) \text{ est une suite bornée.} \\ &\boxed{\Rightarrow} \quad w_n = h(u_n) \text{ ssi bornée} \quad \boxed{\Leftarrow} \quad \text{Par l'absurde avec (25.5).} \\ &\text{ ssi Pour toute suite } (u_n) \in X^{\mathbb{N}} \text{ avec } u_n \to a,\ f(u_n) = O(g(u_n)). \end{aligned}$$

2. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite (nulle).

25.14 Existence, unicité et expression du développement de Taylor de f

Théorème 25.14

Soit f une fonction n fois dérivable en x_0. Alors le développement de Taylor de f en x_0 à l'ordre n existe et est unique. Il est donné explicitement par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

RAS, cf. (16.56)

25.20 Formule de Taylor avec reste intégral de l'ordre n au point a

Théorème 25.20

Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ Alors :

$$\forall x \in [a,b], f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— On suppose $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a,b], \sum_{k=0}^{0} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)\, dt &= f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt \\ &= f(x) \end{aligned}$$

— On suppose le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a,b],\mathbb{R})$. En particulier, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [a,b], f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt \\
\text{(IPP)} \quad &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt
\end{aligned}$$

25.22 Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n au point a évaluée en b - Hors Programme

Théorème 25.22

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et $n+1$ dérivable sur $]a,b[$. Alors :

$$\exists c \in]a,b[, f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

On introduit :

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

On remarque que $g(b) = f(b)$.
On choisit A de telle sorte que $g(a) = f(b)$.
On pose :

$$A = \frac{-(n+1!)}{(b-a)^{n+1}} \left[-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + f(b)\right]$$

Par hypothèse, $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a,b[,\mathbb{R})$.
D'après le théorème de Rolle, on choisit $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Or :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]a,b[, g'(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} - A\frac{(b-x)^n}{n!} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - A\frac{(b-x)^n}{n!}
\end{aligned}$$

En particulier :

$$\frac{A(b-c)^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n$$

Or $c \neq b$ donc $A = f^{(n+1)}(c)$.
On conclut avec $f(b) = g(a)$.

25.27 Formule de Taylor-Young à l'ordre n au point x_0

Théorème 25.27

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0. Alors au voisinage de x_0, on a :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

On a $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) = \mathcal{C}^{(n-n+1)}(I,\mathbb{R})$.
D'après la formule de Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

Montrons que :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \underset{x\to x_0}{=} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

On a :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt - \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} &= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0)\,dt \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)]\,dt\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $v \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que :

$$\forall x \in v, |f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)| \leq \varepsilon$$

car $f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
Soit $x \in \mathcal{V}, x > x_0$. On a :

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)]\,dt\right| &\leq \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)|\,dt \\ &\leq \varepsilon \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1}\,dt \\ &= \frac{\varepsilon(x-x_0)^n}{n!}\end{aligned}$$

Le résultat reste vrai (au signe près) pour $x \leq x_0$.
Par définition (avec les ε), on a le résultat souhaité.

25.28 Développement limité de l'exponentielle

Propostion 25.28

La formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0 de l'exponentielle donne l'égalité suivante au voisinage de 0 :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$f = \exp \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

25.29 Développement limité du logarithme

Propostion 25.29

La formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ donne l'égalité suivante au voisinage de 1 :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n)$$

$f : x \mapsto \ln(1+x) \in \mathcal{C}^n(]-1, \infty[, \mathbb{R})$.

$$\forall x > -1, f'(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > -1, f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$$
$$f^{(k+1)}(0) = (-1)^k k!$$

Donc, d'après Taylor-Young :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

25.30 Développement limité de cosinus et sinus

Propostion 25.30

La formule de Taylor-Young à l'ordre $2n+2$ pour le sinus et à l'ordre $2n+1$ pour le cosinus en 0 donne les égalités suivantes au voisinage de 0 :

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{et} \quad \cos x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$\sin \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\begin{cases} \sin^{(2k)}(0) = 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) = 1 \\ \sin^{(4k+3)}(0) = -1 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sin x &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^{2n+2}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}x^{2i+1} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

Idem pour cos.

25.40 Unicité du DL

Théorème 25.40

Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, alors ce développement est unique.

On suppose que :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \\ &\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \end{aligned}$$

On suppose par l'absurde que les développements sont différents.
On note $p = \min(k \mid a_k \neq b_k)$.
Or :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n} a_k(x-x_0)^k &\underset{x \to x_0}{=} +o((x-x_0)^n) \\
\text{donc } a_p(x-x_0)^p + \sum_{k=p+1}^{n} a_k(x-x_0)^k &\underset{x \to x_0}{=} b_p(x-x_0)^p + \sum_{k=p+1}^{n} b_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \\
\text{donc } a_p(x-x_0)^p &\underset{x \to x_0}{=} b_p(x-x_0)^p + o((x-x_0)^n) \\
\text{donc } a_p &= b_p + o(1)
\end{aligned}$$

Absurde car $a_p \neq b_p$.

25.41 DL de fonctions paires ou impaires

Propostion 25.41

Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre n au voisinage de 0. Alors :
- si f est paire, son DL n'est constitué que de monômes de degré pair.
- si f est impaire, son DL n'est constitué que de monômes de degré impair.

- On suppose f paire et :

  $$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

  Donc :

  $$f(-x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k x^k + o(x^n)$$

  Par unicité du DL :

  $$\forall k \in [\![0, n]\!], a_k = (-1)^k a_k$$

  Donc pour k impair :

  $$a_k = 0$$

- Même raisonnement pour f impaire.

25.42 Remarque

Remarque 25.42

3. L'existence d'un DL à l'ordre n en x_0 n'implique pas l'existence de la dérivée n-ième de f en x_0. Ainsi, tous les DL ne sont pas obtenus par la formule de Taylor-Young.

3. Si f admet un DL_0 en x_0, on a :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a + o(1)$$

Donc :

$$f(x) - a \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a$$

Néecssairement, $a = f(x_0)$ et f est continue en x_0.
Si f admet un DL_1 en x_0, on a :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Donc :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{=} a + o(1) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a$$

25.43 Exemple

Exemple 25.43.2

2. La fonction $f : t \mapsto \cos t + t^3 \sin \frac{1}{t}$ prolongée en 0 par $f(0) = 1$ admet un DL d'ordre 2 en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

2.

$$\begin{aligned} f(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) &= \cos t - 1 + \frac{t^2}{2} + t^3 \sin \frac{1}{t} \\ &\underset{t \to 0}{=} o(t^2) + t^2 \times t \sin \frac{1}{t} \\ &\underset{t \to 0}{=} o(t^2) \end{aligned}$$

Donc f admet bien un DL_2 en 0, donc un DL_1 en 0, donc est dérivable en 0 (et donc sur $\mathbb{R}$ par théorème d'opérations).

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\sin x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$$
$$\frac{f'(x)}{x} = -\frac{\sin x}{x} + 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

25.50 Forme normalisée d'un DL au voisinage de 0

Propostion 25.50

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0, admettant à l'ordre n un DL non nul. Alors il existe un unique entier $m \leq n$ tel que pour h au voisinage de 0 on ait :

$$f(x_0 + h) \underset{x \to x_0}{=} h^m (a_0 + a_1 h + \ldots + a_{n-m} h^{n-m}) + o(h^{n-m})$$

avec $a_0 \neq 0$. Il s'agit de la **forme normalisée** du DL à l'ordre n de f au voisinage de x_0.

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ &\underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=m}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^k) \\ &\underset{x \to x_0}{=} (x - x_0)^m \left(\sum_{k=0}^{n-m} a_{k+m} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n-m}) \right) \end{aligned}$$

Puis on effectue un changment de variable : $x = x_0 + h$.

25.56 Produit de DL

Propostion 25.56

Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de 0 et P et Q deux polynômes de degré au plus n. Si au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n)$$

Alors :

$$(fg)(x) \underset{x\to 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n)$$

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &\underset{x\to 0}{=} (P(x) + o(x^n))(Q(x) + o(x^n)) \\
&\underset{x\to 0}{=} P(x)Q(x) + P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n) \\
&\underset{x\to 0}{=} P(x)Q(x) + o(x^n) \\
&\underset{x\to 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n)
\end{aligned}$$

25.57 Exemple

Exemple 25.57

1. $\frac{\cos x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$
2. $(e^x)^2 \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$

1.

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x}{1+x} &= \cos x \times (1+x)^{-1} \\
&\underset{x\to 0}{=} (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(e^x)^2 &\underset{x\to 0}{=} (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}$$

25.58 Exemple

Exemple 25.58

1. $(\sin x - x)(\cos x - 1) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{12} - \frac{x^7}{90} + o(x^8)$

1.
$$\begin{aligned}
(\sin x - x)(\cos x - 1) &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{12}+\left(\frac{-1}{2\times 5!}-\frac{1}{3!4!}\right)x^7+o(x^8)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{12}-\frac{1}{5\times 3\times 3!}x^7+o(x^8)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{12}-\frac{x^7}{90}+o(x^8)
\end{aligned}$$

25.59 Composition de DL

Propostion 25.59

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0 avec $f(0) = 0$. Si P et Q sont des développements limités de f et g en 0 à l'ordre n, alors $T_n(Q \circ P)$ est un DL en 0 de $g \circ f$ à l'ordre n :

$$g \circ f(x) \underset{x\to 0}{=} T_n(Q\circ P)(x) + o(x^n)$$

On suppose que :

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)\\
g(x) &\underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n)
\end{aligned}$$

Comme $f(0) = 0$, on a $P(0) = 0$.

$$g \circ f(x) \underset{x\to 0}{=} Q(f(x)) + o(x^n)$$

Avec la notation $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$, on a :

$$\begin{aligned}
g\circ f(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k f(x)^k + o(f(x)^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (P(x)+o(x^n))^k + o((P(x)+o(x^n))^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} [b_k(P(x))^k + \underbrace{o(x^n)}_{P(x)\underset{x\to 0}{=}O(1)}] + o(\underbrace{P(x)^k}_{P(x)\underset{x\to 0}{=}=O(x)})\\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k P(x)^k + o(x^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} Q\circ P(x) + o(x^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} T_n(Q\circ P)(x) + o(x^n)
\end{aligned}$$

25.60 Exemple

Exemple 25.59

1. $e^{\sin x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
2. $e^{\cos x - 1} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$

1.

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &\underset{x\to 0}{=} e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)^3\right)^3+o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}(x+O(x^3))^2+\frac{1}{6}(x+O(x^3))^3+o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
e^{\cos x-1} &\underset{x\to 0}{=} 1+\left(-\frac{X^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)^2+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

25.61 Exemple

Exemple 25.61

1. $\ln\cos x \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$
3. $\sin\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)-\frac{x^2}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{2}+o(x^9)$

1.

$$\begin{aligned}
\ln\cos x &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)^2+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{0}-\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)-\frac{x^2}{1+x^2} &\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3+o(x^{10}) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6}x^6\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^3+O(x^{10}) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6}x^6(1-x^2+O(x^4))^3+O(x^{10}) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6}x^6(1-3x^2+O(x^4))+O(x^{10}) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{2}x^8+o(x^9)
\end{aligned}$$

25.63 Exemple

Exemple 25.63

Montrer que $f : x \mapsto x\cos x$ est injective sur un voisinage de 0 et trouver un DL à l'ordre 3 d'une réciproque locale (on doit trouver $f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$).

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

En particulier, $f'(0) = 1$, donc $f' > 0$ sur un voisinage de 0 car $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc f est strictement croissante sur un voisinage de 0, où elle est surjective.
f induit une bijection $\tilde{f} : u \to f(u)$. On note $f^{-1} : f(u) \to u$ la bijection réciproque induite par $\tilde{f}$.
Comme $\tilde{f}$ ne s'annule pas sur u, d'après le théorème de la bijection dérivable, $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(f(u), u)$.
Donc en particulier f^{-1} possède un $\mathrm{DL}_3(f(0))$.
On a :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$$

Comme $f^{-1}(f(0)) = 0$, $a_0 = 0$.
Enfin :

$$\begin{aligned} x &= f^{-1} \circ f(x) \\ &\underset{x\to 0}{=} f^{-1} \circ f(x) + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} a_1\left(x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) + a_2(x + O(x^3))^2 + a_3(x + O(x^3))^3 + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} a_1 x + a_2 x^2 + \left(-\frac{a_1}{2} + a_3\right) x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Par unicité des DL :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ -\frac{a_1}{2} + a_3 = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

25.65 DL d'un inverse

Propostion 25.65

Soit g une fonction définie sur un voisinage de 0 et ne s'annulant pas en 0. Si g admet un DL donné par le polynôme P en 0 à l'ordre n, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{1}{P}$ aussi et les DL à l'ordre n en 0 de $\frac{1}{g}$ et $\frac{1}{P}$ sont identiques.
Autrement dit, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ avec $g(0) \neq 0$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)$, alors :

$$\frac{1}{g(x)} \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n) \Leftrightarrow \frac{A}{P(x)} \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{P(x)} &= \frac{P(x) - g(x)}{P(x)g(x)} \\ &\underset{x\to 0}{=} o(x^n) \times O(1) \\ &\underset{x\to 0}{=} o(x^n) \end{aligned}$$

25.67 Exemple

Exemple 25.67

1. (archi classique) : $\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + o(x^7)$
2. (archi classique) : $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + o(x^{10})$

1.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + O(x^8)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8)\right] + \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right]^2 - \left[-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right]^3 + O(x^8) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \left[-\frac{1}{4!} + \frac{1}{4}\right]x^4 + \left[\frac{1}{6!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{8}\right]x^6 + O(x^8) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + O(x^8)
\end{aligned}$$

2. A l'ordre 5 :

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \left(\frac{5}{4!} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5!}\right)x^5 + o(x^5) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)
\end{aligned}$$

25.70 Primitiver un DL

Propostion 25.70

Soit f une fonction dérivable au voisinage de 0, dont la dérivée admet un DL à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0, donné par :

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

Alors f admet au voisinage de 0 un DL à l'ordre n donné par :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + o(x^n)$$

On pose $g : x \mapsto f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} \in \mathcal{D}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ avec $\mathcal{U} \in \mathcal{V}(0)$.
on remarque que $g(0) = 0$ et en appliquant le TAF sur $\mathcal{U}$:

Pour $x \in \mathcal{U}$, il existe c_x tel que : $\begin{cases} 0 < c_x < x \\ \text{OU} \\ x < c_x < 0 \end{cases}$ vérifiant :

$$g(x) = g(x) - g(0) = x \times g'(c_x)$$

Par théorème d'encadrement :

$$c_x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Or par construction :

$$\begin{aligned} g'(x) &\underset{x\to 0}{=} o(x^{n-1}) \\ \text{donc } g'(c_x) &\underset{x\to 0}{=} o(c_x^{n-1}) \\ &= o(x^{n-1}) \text{ car } c_x \underset{x\to 0}{=} O(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} g(x) &\underset{x\to 0}{=} x \times o(x^{n-1}) \\ &\underset{x\to 0}{=} o(x^n) \end{aligned}$$

25.72 Exemple

Exemple 25.72

1. Donner le DL de $\arctan x$ et $\arccos x$ à tout ordre.
2. On peut faire la même chose avec $Argth(x)$, $Argsh(x)$ et $Argch(x)$.
3. Montrer que $\arctan\left(\frac{x^2+1}{x-2}\right) \underset{x\to 0}{=} -\arctan\frac{1}{2} - \frac{1}{5}x - \frac{12}{25}x^2 - \frac{56}{375}x^3 + o(x^3)$.
4. Voir l'exercice E-2 pour arcsin.

1. On pose $f = \arctan$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{donc } f'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$$

Donc :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

On pose $f = \arccos \in \mathcal{D}^1(]-1,1[,\mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1,1[, f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{donc } f(x) &\underset{x\to 0}{=} -1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \\ &\underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k! 2^k k!}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \\ &\underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} + o(x^{2n}) \\ &\underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} x^{2k} + o(x^{2n}) \end{aligned}$$

Donc :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{f(0)}_{\frac{\pi}{2}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)2^{2k}} \binom{2k}{k} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

25.74 Dérivation d'un DL

Propostion 25.74

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0, admettant (donc) un DL à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors f' admet un DL à l'ordre $n-1$ en 0, égal à :

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

On applique la formule de Taylor-Young à f et f' :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^k) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n-1}) \end{aligned}$$

En posant $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, on obtient le résultat souhaité.

25.75 Exemple

Exemple 25.75

On a :

$$\frac{x^2-1}{x^2+x+1} \underset{x\to +\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x^2+x+1} &= \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \\ &\underset{x\to +\infty}{=} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left[1 - \left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right] + \left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]^2 - \left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] \\ &\underset{x\to +\infty}{=} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &\underset{x\to +\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

25.78 Exemple

Exemple 25.78

1. $\frac{e^x-1}{\cos x - 1} \underset{x\to 0}{=} \frac{-2}{x} - 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$

1.

$$\begin{aligned}
\frac{e^x-1}{\cos x-1} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)} \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{2}{x}\times\frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{12}+o(x^2)} \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{2}{x}\times\left[1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right]\left[1+\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right] \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{2}{x}\left[1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right] \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{2}{x}-1-\frac{1}{2}x+o(x)
\end{aligned}$$

25.85 Exemple

Exemple 25.85

Montrer que la parabole d'équation $y = ex^2+\frac{e}{2}x+\frac{e}{24}$ est asymptote à la courbe de $f : x \mapsto x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ et que la courbe de f est située au-dessus de sa courbe asymptote (le terme d'ordre 1 est $\frac{e}{48}$).

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \\
&= x^2\exp\left((x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x^2\exp\left((x+1)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x^2\exp\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{12x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} ex^2\left[1+\left[\frac{1}{2x}-\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{12x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2x}-\frac{1}{6x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]^2+\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^3+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] \\
&\underset{x\to+\infty}{=} ex^2+\frac{e}{2}x-\frac{e}{24}+\frac{e}{48x}+o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 11

Exercice 25.11

On note f la fonction $x \mapsto x+\ln(1+x)$ sur $]-1,+\infty[$.

1. Montrer que f est bijective de $]-1,+\infty[$ sur son image (que l'on précisera).

1. f est strictement croissante et continue donc d'après le théorème de la bijection continue, f induit une bijection de $]-1,+\infty[$ sur $]\lim_{x\to-1} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= \mathbb{R}$.

2. $f \in \mathcal{C}^\infty(]-1,+\infty[,\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, f'(x) = 1+\frac{1}{1+x}$$

D'après le TBD, $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},]-1,+\infty[)$ donc possède un DL_3 en 0.
Or :

$$f(0)=0 \text{ et } f(x) \underset{x\to 0}{=} 2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

On note $f^{-1}(x) \underset{x \to 0}{=} a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$.
Or :

$$\begin{aligned}
x &= f^{-1} \circ f(x) \\
&\underset{x \to 0}{=} a_1 \left(2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) + a_2 \left(2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2 + a_3 \left(2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\
&\underset{x \to 0}{=} 2a_1 x + \left(-\frac{a_1}{2} + 4a_2\right) x^2 + \left(\frac{a_1}{3} - 2a_2 + 8a_3\right) x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Par unicité du $\mathrm{DL}_3(0)$:

$$\begin{cases} 2a_1 & = 1 \\ -\frac{a_1}{2} + 4a_2 & = 0 \\ \frac{a_1}{3} - 2a_2 + 8a_3 & = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a_1 & = \frac{1}{2} \\ a_2 & = \frac{1}{16} \\ a_3 & = -\frac{1}{192} \end{cases}$$

Donc :

$$f^{-1}(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{192} + o(x^3)$$

Chapitre 26

Intégration sur un segment

26.12 Image d'une fonction en escalier

Propostion 26.12

L'image d'une fonction en escalier est un ensemble fini. En particulier, une fonction en escalier est bornée.

Si $v = \{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$ est une subdivision associée à f, alors :

$$|Im(f)| \leq \underbrace{n}_{\text{valeurs sur chaque intervalle ouvert}} + \underbrace{n+1}_{\text{valeurs de } f(v_i)} = 2n+1$$

26.14 Subdivision commune

Lemme 26.14

Soit f et g deux fonctions en escalier. Il existe une subdivision commune associée à f et g.

Si σ est une subdivision associée à f et τ est une subdivision associée à g :

$$\begin{aligned} \sigma \cup \tau &\leq \sigma \\ &\leq \tau \end{aligned}$$

Donc $\sigma \cup \tau$ est une subdivision commune associée à f et g.

26.15 Structure de l'ensemble des fonctions en escalier

Théorème 26.15

L'ensemble $Esc([a,b])$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^[a,b]$ (c'est même une sous-algèbre).

PRAS (26.14)

26.17 Théorème

Théorème 26.17

Pour toutes subdivisions σ et τ associées à f, on a :

$$I(f,\sigma) = I(f,\tau)$$

Autrement dit, la quantité $I(f,\sigma)$ est indépendante du choix de la subdivision associée.

Dans un premier temps, on suppose $\tau \subset \sigma$.
Notons :

$$\begin{aligned} \tau &= \{\tau_0, \dots, \tau_n\} \\ &= \{v_{i_0}, \dots, v_{i_n}\} \end{aligned}$$

On note f_k la valeur constante de f sur $]\tau_k, \tau_{k+1}[$ et ainsi :

$$\begin{aligned}
I(f,\tau) &= \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_{i_{k+1}} - \sigma_{i_k}) f_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{p=i_k}^{i_{k+1}-1} (\sigma_{p+1} - \sigma_p) \right] f_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=i_k}^{i_{k+1}-1} (\sigma_{p+1} - \sigma_p) f_p \\
&= \sum_{p=0}^{i_n-1} (\sigma_{p+1} - \sigma_p) f_p \\
&= I(f,\sigma)
\end{aligned}$$

Dans le cas général :

$$I(f,\tau) = I(f,\tau \cup \sigma) = I(f,\sigma)$$

Propostion 26.21

Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et soit $c \in]a,b[$, alors f est en escalier sur $[a,c]$ et $[c,b]$ et :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Soit σ associée à f, $\sigma \cup \{c\}$ est toujours associée à f, alors $\sigma \cup \{c\} \cap [a,c]$ est associée à $f_{[a,c]}$.
RAS pour la suite.

26.23 Intégrale de deux fonctions en escalier égales presque partout

Propostion 26.23

Si deux fonctions en escalier ne différent qu'en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales.

Dans ce cas, $f - g$ est nulle presque partout et on utilise la linéarité et (26.20).

26.24 Positivité ou croissance de l'intégrale

Propostion 26.24

Soit f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ (avec $a \leq b$) telles que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

En particulier, si f est en escalier sur $[a,b]$ et positive, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

En reprenant la notation du (20.18), pour tout i, $f_i \geq 0$. Donc :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

On obtient la croissance par linéarité.

26.26 Inéglité triangulaire intégrale

Propostion 26.26

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ (avec toujours $a \leq b$) à valeurs réelles. Alors $|f|$ est aussi en escalier sur $[a, b]$ et :

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Si σ est associée à f, elle reste associée à $|f|$ et ensuite on utilise l'inégalité triangulaire classique avec (26.20).

26.36 Théorème

Théorème 26.36

f est intégrable si et seulement si $I_-(f)$ et $I_+(f)$ existent et si $I_-(f) = I_+(f)$.

$\boxed{\Rightarrow}$

On suppose f intégrable. Donc $Esc_+(f)$ et $Esc_-(f)$ ne sont pas vides.
En particulier $A_+(f) \neq \emptyset$ est minoré et $A_-(f) \neq \emptyset$ est majoré.
D'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, $I_-(f)$ et $I_+(f)$ sont bien définis.
Soit $\epsilon > 0$, on choisit $(h, g) \in Esc_-(f) \times Esc_+(f)$ tel que :

$$\int_a^b (g - h)(x)\, dx < \epsilon$$

Donc :

$$I_+ \leq \int_a^b g(x)\, dx < \int_a^b h(x)\, dx + \epsilon \leq I_- + \epsilon$$

Donc :

$$I_+ \leq I_- + \epsilon$$

Donc :

$$I_+ \leq I_-$$

Donc :

$$I_+ = I_-$$

$\boxed{\Leftarrow}$

On suppose $I_+ = I_-$.
Soit $\epsilon > 0$.
$I_+ + \frac{\epsilon}{2}$ ne minore pas A_+.
$I_- - \frac{\epsilon}{2}$ ne majore pas A_-.
On choisit donc $h \in Esc_-$ et $g \in Esc_+$ telles que :

$$\int_a^b g(x)\, dx < I_+ + \frac{\epsilon}{2}$$
$$\int_a^b h(x)\, dx > I_- - \frac{\epsilon}{2}$$

Donc :

$$\int_a^b (g(x) - h(x))\, dx < I_+ - I_- + \epsilon = \epsilon$$

26.42 Intégrabilité des fonctions monotones

Théorème 26.42

Soit f une fonction monotone sur $[a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,b]$.

On suppose f croissante. Alors f est bornée (minorée par $f(a)$, majorée par $f(b)$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note σ_n la subdivision régulière de $[a,b]$ à n pas.

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \sigma_k^{(n)} = a + \frac{(b-a)}{n}k$$

On définit $h_n \in Esc_-(f)$ et $g_n \in Esc_+(f)$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}], g_n(x) & = f(\sigma_{k+1}^{(n)}) \\ g_n(a) = f(a) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \forall x \in [\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}[, h_n(x) & = f(\sigma_k^{(n)}) \\ h_n(b) = f(b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b (g_n - h_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times (f(\sigma_{k+1}^{(n)}) - f(\sigma_k^{(n)})) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

D'après (26.41), f est intégrable.

26.43 Intégrabilité des fonctions continues

Théorème 26.43

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,b]$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
Comme $[a,b]$ est un segment, f est uniformément continue sur $[a,b]$ d'après le theorème de Heine.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Soit $\sigma^{(n)}$ la subsdivision régulière de $[a,b]$ à n pas ($n \geq 1$).
On choisit n tel que $\frac{b-a}{n} < \eta$.
Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est continue sur $[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$ donc y atteint ses bornes ($[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$ est compact/théorème des bornes atteintes).
On note alors m_k et M_k respesctivement les minimum et maximum sur $[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$.
On pose alors h_n et g_n.

— Pour $x \in [\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}[, h_n(x) = m_k$ et $g_n(x) = M_k$.

— $h_n(b) = g_n(b) = f(b)$

Par construction, $h_n \in Esc_-(f)$ et $g_n \in Esc_+(f)$, et :

$$\int_a^b (g_n - h_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_{k+1}^{(n)} - \sigma_k^{(n)})(M_k - m_k) < \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_{k+1}^{(n)} - \sigma_k^{(n)}) \times \epsilon = \epsilon \times (b-a)$$

Par définition :

$$\int_a^b (g_n - h_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

26.46 Relation de Chasles

Propostion 26.46

Soit une fonction f définie sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ si et suelement si f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$ et dans ce cas :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

cf. annexe

26.49 Croissance et positivité de l'intégrale

Propostion 20.49

Soit f et g deux fonction intégrables sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$) telles que pour tout $x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

En particulier, si f est intégrable sur $[a, b]$ et positive, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Si $f \geq 0$, alors $0 \in Esc_-(f)$.

$$\int_a^b 0 = 0 \in A_-(f)$$

Donc :

$$I_-(f) = \int_a^b f \geq 0$$

26.51 Inégalité triangulaire intégrale

Propostion 26.51

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$ et :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

On suppose f intégrable sur $[a, b]$.
On choisit (φ_n, θ_n) associé à f (26.39).
Comme :

$$\forall x \in [a, b], ||f(x)| - |\varphi_n(x)|| \leq |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x)$$

Alors $(|\varphi_n|, \theta_n)$ est associée à $|f|$. Par conséquent, $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$. On a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx$$

Or, d'après (26.26) :

$$\left| \int_a^b \varphi_n(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx$$

Donc, d'arpès le TCILPPL :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

26.56 Bornitude des fonctions continues par morceaux

Propostion 26.56

Les fonctions continues par morceaux sur un segment $[a, b]$ sont bornées.

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$.
Soit σ une subdivision associée.
Comme f est continue sur $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$ et que f possède des limites finies en σ_i^+ et σ_{i+1}^-, f se prolonge par continuité en f_i sur $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$.
D'après le théorème des bornes atteintes, f_i est bornée.
Donc $f|_{]\sigma_i, \sigma_{i+1}[}$ est également bornée.
Donc $f|_{[a,b]\setminus\{\sigma_0,\ldots,\sigma_n\}}$ est bornée.
Donc f est bornée sur $[a, b]$ car f est définie sur chaque σ_i.

26.58 Intégrabilité des fonctions continues par morceaux

Théorème 26.58

Toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ est intégrable.

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.
Soit σ une subdivision associée à f.
Sur chaque intervalle $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$, f se prolonge par continuité en f_i sur $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$.
Donc f_i est intégrable sur $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ et f_i et $f|_{[\sigma_i,\sigma_{i+1}]}$ sont égales presque partout, donc $f|_{[\sigma_i,\sigma_{i+1}]}$ est intégrable sur $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$.
D'après la relation de Chasles, f est intégrable sur $[a, b]$.

26.61 Norme

Propostion 26.61

Pour toute fonction f et g bornées sur un même segment $[a, b]$, on a :

$$||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$||\lambda f||_\infty = |\lambda| \times ||f||_\infty$$

Enfin :

$$||f||_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

— D'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\forall x[a, b], |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq ||f||_\infty + ||g||_\infty\end{aligned}$$

Par définition :

$$||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

— RAF
— Si $f = 0$, $||f||_\infty = 0$.
Si $||f||_\infty = 0$, alors $\forall x \in [a,b], |f(x)| = 0$.
Donc $f = 0$.

26.63 Densité

Théorème 26.63

— Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors il existe une suite de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$||f - \varphi_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

— Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ alors il existe une suite de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$||f - \varphi_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

— Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, donc f est uniformément continue sur $[a,b]$.
Soit $\epsilon > 0$, on choisit $\eta > 0$ module de continuité uniforme associé à ϵ.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la subdivision régulière $\sigma^{(n)}$ de $[a,b]$.
On choisit n tel que $\frac{b-a}{n} < \eta$.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est continue sur $[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$ donc y atteint ses bornes (max) M_k. On définit $\varphi_n \in Esc([a,b],\mathbb{R})$ par :
— si $x \in [\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}[$, alors $\varphi_n(x) = M_k$

— $\varphi_n(b) = f(b)$
Par construction, pour tout $x \in [a,b]$:

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \epsilon$$

Donc :

$$||f - \varphi_n||_\infty \leq \epsilon$$

Par définition :

$$||f - \varphi_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

— Si $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, et σ une subdivision associée à f, on applique le résultat précédent sur chaque intervalle $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$.

26.64 Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème 26.64

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$. Alors l'application :

$$x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

Notons $F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, bien définie car f est continue sur I.
$F(x_0) = 0$.
Montrons que F est une primitive de f sur I.
Soit $a \in I$ et soit $x \neq a$.

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}-f(a) &= \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt - \frac{1}{x-a}\int_a^x f(a)\,dt \\ &= \frac{1}{x-a}\int_a^x (f(t)-f(a))\,dt\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, par continuité de f en a, on choisit $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon$$

On suppose $x > a$ et $x - a < \eta$, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(a)}{x-a}-f(a)\right| &\leq \frac{1}{x-a}\int_a^x |f(t)-f(a)|\,dt \\ &\leq \frac{1}{x-a}\int_a^x \epsilon\,dt \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

Cela reste valable si $x < a$ et $|x-a| < \eta$.
Donc :

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$$

26.66 Limite

Propostion 26.66

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt$$

On fixe a et on pose $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.
Donc $F \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
Donc $F(b) = \lim\limits_{x\to b} F(x)$.

26.68 Exemple

Exemple 26.68

La fonction $\varphi : x \mapsto \int_0^x \exp(xt^2)\,dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée :

$$x \mapsto \frac{3ex^3}{2} - \frac{1}{2x}\int_0^x \exp(xt^2)\,dt$$

Pour $x > 0$:

$$\varphi(x) = \int_0^x \exp(xt^2)\,dt = \int_0^1 \exp(xt^2)\,dt + \int_1^x e^{xt^2}\,dt$$

On effectue le changement de variable $u^2 = xt^2$, soit $u = \sqrt{x}t$ donc $du = \sqrt{x}\,dt$.
Si $t = 0$, $u = 0$.
Si $t = x$, $u = x^{\frac{3}{2}}$.

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{x^{\frac{3}{2}}} e^{u^2}\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}F(x^{\frac{3}{2}})\end{aligned}$$

avec d'après le TFCI $F : x \mapsto \int_0^x e^{u^2}\,du \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Par opération, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\frac{1}{2x\sqrt{x}}F(x^{\frac{3}{2}}) + \frac{3}{2}F'(x^{\frac{3}{2}}) \\ &= -\frac{1}{2x}\int_0^x e^{xt^2}\,dt + \frac{3}{2}e^{x^3}\end{aligned}$$

Pour $x < 0$, on effectue le changement de variable $u^2 = -xt^2$, soit $u = \sqrt{-x}t$ et on suit la méthode principale.

26.69 Intégrale nulle d'une fonction positive et continue

Propostion 26.69

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive, avec $a < b$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$\boxed{\Rightarrow}$

f est continue et positive, donc d'après le TFCI :
$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a,b]$ avec $F' = f \geq 0$ donc F est croissante sur $[a,b]$.
Or $F(a) = 0 = F(b)$.
Donc $F = 0$, puis $f = F' = 0$.

26.70 Somme de Riemann

Théorème 26.70

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right)$$

Plus généralement, soit pour tout $n \in \mathbb{N}, \sigma^{(n)} = (\sigma_k^{(n)})_{k\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision et supposons que la suite des pas vérifie :

$$p(\sigma^{(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, \ell_n - 1]\!]$, $x_{n,k}$ un élément de $[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(\sigma_{k+1}^{(n)} - \sigma_k^{(n)})f(x_{n,k})$$

Soit $\epsilon > 0$, on choisit η un module de continuité uniforme pour f d'après le théorème de Heine.
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \varphi_n \in Esc([a,b],\mathbb{R})$ par :

- pour $x \in [\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}[$, $\varphi_n(x) = f(x_{n,k})$
- $\varphi_n(b) = f(b)$

Or $p(\sigma^{(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, p(\sigma^{(n)}) < \eta$$

Pour $n \geq N$:

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \epsilon$$

Par définition :

$$||f - \varphi_n||_\infty \longrightarrow 0$$

Donc :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

Puis (26.18).

26.72 Exemple

Exemple 26.72

On montre que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{4}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$$

avec $f : x \mapsto \frac{1}{1+x} \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Donc TSR :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

26.75 Inégalité triangulaire intégrale dans $\mathbb{C}$

Théorème 26.75

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ intégrable, avec $a < b$. Alors $|f|$ est aussi intégrable et :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

On décompose $\int_a^b f(t)\,dt = re^{i\theta}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Par opération, $|f|$ est intégrable.
On pose $g = e^{-i\theta} \times f$.
Par linéarité :

$$\int_a^b g(t)\,dt = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,dt = r$$

On décompose $g = g_r + ig_i$.
Par définition :

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b g_r(t)\,dt + i\int_a^b g_i(t)\,dt$$

Donc :

$$\int_a^b g_r(t)\,dt = r \quad \text{et} \quad \int_a^b g_i(t)\,dt = 0$$

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = r = \int_a^b g_r(t)\,dt = \left|\int_a^b g_r(t)\right| \underbrace{\leq}_{\text{IT sur } \mathbb{R}} \int_a^b |g_r(t)|\,dt \underbrace{\leq}_{\text{croissance de l'I}} \int_a^b |g(t)| = \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Exercice 17

Exercice 26.17

Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Montrer que $f = g = 0$.

D'après le TFCI, $(f, g) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$f'' = f \quad \text{et} \quad g'' = g$$

D'après le chapitre 7, on choisit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\begin{cases} f : x \mapsto ae^x + be^{-x} \\ g : x \mapsto ce^x + de^{-x} \end{cases}$$

Or $f' = g$ donc $a = c$ et $b = d$ par liberté de $(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x})$.

$$f(0) = 0 = g(0)$$
$$\text{donc } a = b = c = d = 0$$

Donc :

$$f = g = 0$$

26.76 Lemme de Riemann-Lesbegue

Lemme 26.7

Soit $f : [a, b] \to \mathcal{C}$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, alors :

$$\int_a^b f(x)e^{int}\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$.
Par IPP ($f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, $t \mapsto \frac{e^{int}}{in} \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$) :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)e^{int}\,dt &= \left[\frac{f(x)e^{int}}{in}\right]_a^b - \frac{1}{in}\int_a^b f'(x)e^{int}\,dt \\ &= \frac{f(b)e^{inb} - f(a)e^{ina}}{in} - \frac{1}{in}\int_a^b f'(x)e^{int}\,dt\end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$\frac{1}{in}\left|\int_a^b f'(x)e^{int}\,dt\right| \leq \frac{1}{in}\int_a^b |f'(x)|\,dt$$

Chapitre 27

Séries numériques

27.6 Série géométrique

Théorème 27.6

Soit $a \in \mathbb{C}$. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k &= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \ (a \neq 1) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-a} \ (|a| < 1) \end{aligned}$$

La série converge et $\sum\limits_{n\geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$.

27.11 Deux séries de termes généraux égaux presque partout

Propostion 27.11

Si (u_n) et (v_n) ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

On note $A = \{n \in \mathbb{N}, u_n \neq v_n\}$. Supposons $A \neq \emptyset$.
D'après les hypothèses, A est majoré donc possède un maximum N d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$.
On note (S_n) et (S'_n) les sommes partielles associée à $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
Pour $n \geq N$:

$$S_n = S'_n + K \text{ où } K = \sum_{k\in A} (u_k - v_k) \text{ (constant)}$$

Ainsi (S_n) converge si et seulement si (S'_n) converge.

27.12 CN de convergence portant sur le terme général

Théorème 27.12

Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0. De manière équivalente, si (u_n) ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge.

On suppose que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \ell - \ell = 0$$

27.16 Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Théorème 27.16

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

Alors :
- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge aussi.
- Si $\sum u_n$ diverge (vers $+\infty$ donc), alors $\sum v_n$ diverge aussi (vers $+\infty$ donc).

De plus, si la divergence est grossière pour $\sum u_n$, elle l'est aussi pour $\sum v_n$.

En utilisant les notations du (27.11), on peut supposer que :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq u_n \leq v_n$$

Puis :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq S_n \leq S'_n$$

On utilise alors le théroème de comparaison sur les suites.

27.20 Convergence absolue entraîne convergence

Théorème 27.20

Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.

— On suppose que $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, avec $\sum |u_n|$ convergente.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \geq 0 \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0) \geq 0$$

Ainsi, $u_n = u_n^+ - u_n^-$.
Or, pour tout n :

$$0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$$
$$0 \leq u_n^- \leq |u_n|$$

Par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent et par linéarité (27.16) $\sum u_n$ converge.

— On suppose que $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, avec $\sum |u_n|$ convergente.
Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |Re(u_n)| \leq |u_n|$$
$$|Im(u_n)| \leq |u_n|$$

Donc, $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$ sont absolument convergentes (27.15) donc convergent, puis par combinaison linéaire (27.16) $\sum u_n$ converge.

27.23 Comparaison des séries par domination ou négligabilité

Théorème 27.23

Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques et $\sum v_n$ une série à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ (ou $u_n = o(v_n)$). Alors :
— La convergence de $\sum v_n$ entraîne la convergence absolue de $\sum u_n$.
— La divergence de $\sum u_n$ (celle de $\sum |u_n|$ suffit) entraîne la divergence de $\sum v_n$.

On suppose $u_n = O(v_n)$ avec $v_n \geq 0$.

— On suppose que $\sum v_n$ converge. On a $|u_n| = O(v_n)$ donc à partir d'un certain rang :

$$0 \leq |u_n| \leq M v_n$$

D'après le théorème de comparaison par majoration des séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge donc $\sum u_n$ converge.

— Si $\sum |u_n|$ diverge, par comparaison par minoration des séries à termes positifs, $\sum v_n$ diverge.

27.24 Comparaison des séries à termes positifs par équivalence

Théorème 27.24

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.
On conclut avec (27.23).

27.25 Théorème de comparaison entre série et intégrale

Théorème 27.25

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : [a;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et positive. Alors $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge aussi (i.e. $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ existe et est finie).

D'après le TLM ($f \geq 0$), $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^n f(t)\,dt$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $n_0 \geq a$. $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.
Comme f est décroissante, pour tout $n \geq n_0$:

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n)$$

Donc par Chasles :

$$\underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} f(k+1)}_{\sum\limits_{k=n_0}^{n+1} f(k)-f(n_0)} \leq \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

D'après le TLM :

- Si $\sum(f_n)$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,dt \in \mathbb{R}_+$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,dt \in \mathbb{R}_+$, alors $\sum(f_n)$ converge.

Exercice 1

Exercice 27.1

En utilisant le théorème de comparaison, déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n}e^{o(1)} \\ &\geq \frac{1}{2n} \text{ à partir d'un certain rang} \end{aligned}$$

Par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Exercice 2

Exercice 27.2

En utilisant un théorème de comparaison par domination ou négligabilité, déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{\frac{3}{2}} - \lfloor n^{\frac{3}{2}} \rfloor + n}$$

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{\frac{3}{2}}-\lfloor n^{\frac{3}{2}}\rfloor+n} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{e-\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{O(1)+n} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{e-\exp\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n+o(n)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{e-e\times\exp\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n+o(n)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{e-e\left(1-\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n+o(n)}
\end{aligned}$$

Par comparaison par $\sim$, $\sum u_n$ est convergent.

27.29 Nature des séries de Riemann

Théorème 27.29

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

— Si $\alpha < 0$, la divergence est grossière.
— On a montré que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
— Si $\alpha \in]0,1]$:

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$$

Donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs.
— Soit $\alpha > 1$, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décoroissante et positive sur $[1,+\infty[$.
Pour $x \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt &= \left[\frac{1}{(-\alpha+1)t^{\alpha-1}}\right]_1^x \\
&= \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)} \\
&\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Par comparaison série intégrale, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

27.30 Nature des séries exponentielles

Théorème 27.30

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente et sa somme vaut e^x.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x^n}{n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison par domination à une série de Riemann de paramètre $2 > 1$, $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente.
— Soit $x \in \mathbb{R}, \exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on applique la formule de Taylor avec reste intégral :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt$$

On pose $M = \max(1, e^x)$.

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!}\,dt\right| &\leq \pm \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} M\,dt \\ &= M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

27.32 Nature des séries de Bertrand - Hors Programme

Propostion 27.32 - HP

La **série de Bertrand de paramètre** $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ est définie par $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$. Elle est convergente si et seulement si $(\alpha, \beta) > (1, 1)$ pour l'ordre lexicographique. Cela signifie :

- si $\alpha > 1$, la série converge
- si $\alpha < 1$, la série diverge
- pour $\alpha = 1$:
  - si $\beta > 1$, la série converge
  - si $\beta \leq 1$, la série diverge

- Si $\alpha > 1$, alors pour tout $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$$

  Comme $\frac{1+\alpha}{2} > 1$, par comparaison en 0, $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge.
- Si $\alpha < 1$, alors pour tout $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$$

  Comme $\frac{\alpha+1}{2} < 1$, par comparaison en 0, $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ diverge.
- Si $\alpha = 1$. Pour $\beta = 1$, $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge (comparaison série intégrale).
  Pour $\beta < 1$:

$$\frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{n \ln^\beta n}$$

  $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge donc par comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$ diverge.
  Pour $\beta > 1$, $t \mapsto \frac{1}{t \ln^\beta t}$ est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$.

$$\int_2^x \frac{dt}{t \ln^\beta t} = \int_2^x \frac{1}{t} \times (\ln t)^{-\beta}\,dt = \left[\frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_2^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(2)^{1-\beta}}{\beta - 1}$$

  Par comparaison série intégrale, $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$ converge.

27.35 Règle d'Alembert - Hors Programme

Théorème 27.35 - HP

Soit $\sum u_n$ à termes quelconques non nuls. On suppose que $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ admet une liite (finie) ℓ. Alors :

1. si $0 \leq \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument
2. si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement
3. si $\ell = 1$, on ne peut rien dire

—

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0, 1[$$

A partir d'un rang n_0 :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{\ell+1}{2}$$

On a directement :

$$0 \leq |u_n| \leq \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} \times |u_{n_0}|}_{\text{terme général d'une série géométrique de raison } \frac{\ell+1}{2}}$$

Par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
— Même raisonnement si $\ell > 1$.
— $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n}$ fournissent des contre-exemples.

27.39 Critère spécial des séries alternées

Théorème 27.39

Toute série alternée est convergente.

Soit $\sum(-1)^n a_n$ une série alternée. Ainsi, $a_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$. (a_n) est décroissante et $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On note (S_n) la suite des sommes partielles associée à cette série. Montrons que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

—
$$\begin{aligned}\forall n \geq 0, S_{2n+1} - S_{2n} &= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

— Pour $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}S_{2n+3} - S_{2n+1} &= (-1)^{2n+3} a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \\ &\geq 0\end{aligned}$$

—
$$\begin{aligned}S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\ &= a_{2n+1} - a_{2n+2} \\ &\leq 0\end{aligned}$$

Les suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont adjacentes, donc elles convergent vers une limite commune.
Donc (S_n) converge, donc $\sum(-1)^n a_n$ converge.

27.42 Majoration du reste d'une série alternée

Propostion 27.42

Soit $\sum u_n$ une série alternée. On note R_n le reste d'ordre n. Alors :

1. R_n est du signe de u_{n+1}
2. On a $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

On reprend les notations de (27.39).

$$\forall n \geq 0, u_n = (-1)^n a_n$$

1. D'après la démonstration de (27.39), on a :

$$\forall n \geq 0, S_{2n+1} \leq \sum_{k\geq 0} u_k \leq S_{2n}$$

Donc :

$$\forall n \geq 0, R_{2n} = \sum_{k\geq 0} u_k - S_{2n} \leq 0$$
$$R_{2n+1} = \sum_{k\geq 0} u_k - S_{2n+1} \geq 0$$

On obtient alors le résultat souhaité.

2. Soit $n \geq 0$:

$$|R_{2n}| = -R_{2n} = -\sum u_k + S_{2n} \leq S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n+1} = |u_{2n+1}|$$
$$|R_{2n+1}| = R_{2n+1} = \sum u_k - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2} = |u_{2n+2}|$$

27.44 Critère d'Abel - Hors Programme

Théorème 27.44 - HP

1. Soit $\sum a_n b_n$ une série telle que (a_n) soit une suite réelle positive décoroissante de limite nulle, et telle que la suite (B_n) des sommes partielles de $\sum b_n$ soit bornée ((b_n) est une suite complexe ou réelle). Alors $\sum a_n b_n$ converge.
2. Les suites (b_n) définies par $b_n = e^{ina}, \cos(an), \sin(an)$ remplissent les conditions requises, lorsque $a \neq 0 \pmod{2\pi}$.

1. On note (S_n) la suite des sommes partielles associées à $\sum a_n b_n$.
On convient que $B_{-1} = 0$. Pour $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n} a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \end{aligned}$$

— On a :

$$a_n b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ (a_n \to 0 \text{ et } (B_n) \text{ bornée})$$

—

$$\sum_{k=0}^{n-1} |(a_k - a_{k+1}) B_k| = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) |B_k| \ (a_n \text{ décroissante})$$
$$\leq M \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \ ((B_n) \text{ bornée})$$
$$= M(a_0 - a_n)$$
$$\leq M a_0$$

Donc $\sum (a_k - a_{k+1}) B_k$ est absolument convergente donc convergente.
Donc $(\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k)$ admet une limite finie.
Donc (S_n) converge.
Donc $\sum a_n b_n$ converge.

2. — Soit $a \neq 0 \pmod{2\pi}$, on note $(b_n) = (e^{ina})$.
   Pour $n \geq 0$:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} e^{ika} = \frac{1 - e^{i(n+1)a}}{1 - e^{ia}} \ (e^{ia} \neq 1)$$

   Donc :

$$|B_n| \leq \frac{2}{|1 - e^{ia}|}$$

   — Si $a = 0 \pmod{2\pi}$:

$$B_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \ (B_n = n + 1)$$

Chapitre 28

Matrice d'une application linéaire

28.5 Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs

Théorème 28.5

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \neq 0$, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E.
On note $M = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Ainsi :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], x_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} b_i$$

$\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre (car $|\mathcal{F}| = \dim E$), si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![1, n]\!], \lambda_j = 0$$

Or pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} m_{ij} b_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \lambda_j \right) b_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i b_i
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0 &\Leftrightarrow \left[\forall i \in [\![1, n]\!], \left[M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i = 0 \right] \\
&\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \ker M
\end{aligned}$$

En conclusion, $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si $\ker M = \{0\}$, si et seulement si M est inversible.

28.6 Exemple

Exemple 28.6

Montrer que la famille $(X^2 + 3X + 1, 2X^2 + X, x^2)$ de $\mathbb{R}[X]$ est libre.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
$Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure avec une diagonale ne contenant aucun 0 : elle est donc inversible. Donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, donc libre.

28.9 Caractérisation des matrices inversibles au moyeu de leur lignes et colonnes

Théorème 28.9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- A est inversible
- la famille des colonnes de A est une base de $\mathbb{K}^n$ (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)
- la famille des lignes de A est une base de $\mathbb{K}^n$ (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A, $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de A, $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
A est inersible si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}_n}(C_1, \ldots, C_n)$ est inversible (28.8).
Si et seulement si $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ (28.5).
Si et seulement si ${}^tA$ est inversible (11.42).
Si et seulement si $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

28.13 Exemple

Exemple 28.13

On note T l'endomorphisme $P \mapsto X^2P'' + P(1)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $Mat_{\mathcal{B}_3}(T)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= (1, X, X^2, X^3) \\
T(1) &= 1 \\
T(X) &= 1 \\
T(X^2) &= 2X^2 + 1 \\
T(X^3) &= 6X^2 + 1 \\
Mat_{\mathcal{B}}(T) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

28.15 Exemple

Exemple 28.15

Déterminer l'application canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\hat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; (x, y, z) \mapsto (x + z, 2x + y)$

28.18 Exemple

Exemple 28.18

On note φ l'application canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_2'$ la base $((0,1),(1,0))$ de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_3'$ la base $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Déterminer $Mat_{\mathcal{B}_2',\mathcal{B}_3'}(\varphi)$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, x + y, -x + y)$.
$\varphi(1, 0) = (1, 1, -1) = -(1, 1, 1) + 2(1, 1, .)$
$\varphi(0, 1) = (0, 1, 1) = (1, 1, 1) - (1, 1, 0)$

$$Mat_{\mathcal{B}'_2,\mathcal{B}'_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

28.19 Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Théorème 28.19

Soit $E \neq \{0\}$ et $F \neq \{0\}$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie p et n, e une base de E et f une base de F, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. Alors :

$$\underbrace{Mat_f(u(x))}_{(n,1)} = \underbrace{Mat_{e,f}(u)}_{(n,p)}\underbrace{Mat_e(x)}_{(p,1)}$$

On note $e = (e_1, \dots, e_p)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ et $Mat_{e,f}(u) = M = (m_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$
Soit $x \in E$. On écrit $m = \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j e_j$. Par conséquent :

$$Mat_e(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{aligned} u(x) &= u(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} m_{ij} f_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{p} m_{ij}\alpha_j \right] f_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} [M \times Mat_e(x)]_i f_i \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} Mat_f(u(x)) &= \begin{pmatrix} [M \times Mat_e(x)]_1 \\ \vdots \\ [M \times Mat_e(x)]_n \end{pmatrix} \\ &= M \times Mat_e(x) \end{aligned}$$

28.20 Exemple

Exemple 28.20

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Montrer que $Im(f) = Vect(3, 2X^2 + X)$ et $\ker f = Vect(X^2 - 2X)$.

On a :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]; aX^2 + bX + c \mapsto (4a + 2b)X^2 + (2a + b)X + (6a + 3b + 3c)$$
$$\hat{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (c, b, a) \mapsto (3c + 3b + 6a, b + 2a, 2b + 4a)$$

— Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} MX = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 3y + 6z \\ y + 2z \\ 2y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z & = 0 \\ y + 2z & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = -2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\ker M = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \ker f &= Vect(X^2 - 2X) \\ &= Vect(-2X + 1) \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} Im(M) &= Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\ &= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$Im(f) = Vect(1 + X + 2X^2)$$

28.21 Lien entre produit matriciel et composition d'applications linéaires

Théorème 28.21

1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies non nulles p et n respectivement. L'application $u : Mat_{e,f}(u)$ est un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions non nulles et de bases respectives e, f et g. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :
$$Mat_{e,g}(v \circ u) = Mat_{f,g}(v) \times Mat_{e,f}(u)$$
3. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimensions finies et non nulles. Soit e une base de E, f une base de F et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors u est un isomorphisme entre E et F si et seulement si $Mat_{e,f}(u)$ est inversible. Dans ce cas on a :
$$Mat_{f,e}(u^{-1}) = Mat_{e,f}(u)^{-1}$$

1. Le théorème de rigidité (21.63) justifie que l'application $u \mapsto Mat_{e,f}(u)$ est bijective.
Par construction, elle est bien linéaire.

2. Soit $x \in F$.
$$\begin{aligned} Mat_{e,g}(v \circ u)Mat_e(x) &= Mat_g(v \circ u(x)) \\ &= Mat_g(v(u(x))) \\ &= Mat_{f,g}(v)Mat_f(u(x)) \\ &= Mat_{f,g}(v)Mat_{e,f}(u)Mat_e(x) \end{aligned}$$
Nécessairement :
$$Mat_{e,g}(v \circ u) = Mat_{f,g}(v)Mat_{e,f}(u)$$

3.
$$\begin{aligned} Mat_{e,f}(u) \times Mat_{f,e}(u^{-1}) &= Mat_f(u \circ u^{-1}) \\ &= Mat_f(id) \end{aligned}$$
Donc :
$$Mat_{e,f}(u) \in GL_n(\mathbb{K})$$
On note $P = M^{-1}$. D'après le premier point, on note σ l'unique élément de $\mathcal{L}(F,E)$ tel que $Mat_{f,e}(\sigma) = P$.
On a :
$$Id = MP = Mat_{e,f}(u) \times Mat_{f,e}(v) = Mat_f(u \circ v)$$
Donc :
$$u \circ v = id$$
Donc (E est de dimension finie) :
$$u^{-1} = v$$

28.22 Exemple

Exemple 28.22

Montrer que l'endomorphisme ω de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est la symétrie par rapport à $Vect(X^3+X^2+X, X^2+1)$ parallèlement à $Vect(X^3+X+1, X^3+X^2)$.

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\Omega - I_4)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+c-d \\ -a+c-d \\ 2b-2d \\ -a+2b+c-3d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(\Omega - I_4)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a-c+d & = 0 \\ b-d & = 0 \\ -a+2b+c-3d & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a-c+d & = 0 \\ b-d & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a & = c-d \\ b & = d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc $\ker(\Omega - I_4) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Donc $\ker(\omega - id) = Vect(1+X^2, -1+X+X^3)$.

$$(\Omega + I_4)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c-d \\ -a+2b+c-d \\ 2b+2c-2d \\ -a+2b+c-d \end{pmatrix}$$

Donc :

$$(\Omega + I_4)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+c-d &= 0 \\ b+c-d &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = -c+d \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -c+d \\ -c+d \\ c \\ d \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc $\ker(\omega + id) = Vect(1 + X + X^3, X^2 + X^3)$.

28.23 CNS d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde

Théorème 28.23

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle **matrice de Vandermonde de** $x_1, \dots, x_n$ la matrice $(x_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n}$. Cette matrice est inversible si et seulement si les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont ditincts deux à deux.

$$M = (x_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On définit $\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n ; P \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n))$.
On suppose que tous les x_i sont distincts deux à deux.
Si $P \in \ker \varphi$, P possède (au moins) n racines distinctes, or $\deg P \leq n-1$ donc par rigidité, $P = 0$.
Donc φ est injective ($\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R}^n)$).
Donc φ est un isomorphisme ($\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n$).
Or, en notant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ les bases canoniques de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$:

$$Mat_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\varphi) = M$$

Donc M est inversible (28.21).
Si $x_1 = x_j$ avec $x \neq j$, M possède deux lignes identiques, donc $M \notin GL_n(\mathbb{K})$ (28.9).

28.28 Exemple

Exemple 28.28

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est donc nilpotent d'indice 2.

Montrer que dans une certaine base, u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

— D'après le théroème du rang :

$$\underbrace{\dim \ker u}_{\geq 1} + \underbrace{\operatorname{rg} u}_{\geq 1} = 3$$

Comme $u^2 = 0$, $\operatorname{Im} u \subset \ker u$.
On a nécessairement $\operatorname{rg} u = 1$ et $\dim \ker u = 2$.

— Soit $x \in E$ tel que $u(x) \neq 0$. Or $u(x) \in \ker u$ et $\dim \ker u = 2$, on complète donc $(u(x), y)$ en une base de $\ker u$.
— La famille $(y, x, u(x))$ est libre :

$$\begin{aligned} ay + bx + cu(x) &= 0 \\ \text{donc } bu(x) &= 0 \\ \text{donc } b &= 0 \\ \text{donc } ay + cu(x) &= 0 \\ \text{donc } a = c &= 0 \text{ car } (y, u(x)) \text{ est libre} \end{aligned}$$

$(y, x, u(x))$ est de cardinal $3 = \dim E$, donc est une base de E et :

$$\mathrm{Mat}_{(u(x),y,x)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

28.29 Exemple

Exemple 28.29

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies non nulles et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r.

Montrer qu'il existe une base e de E et une base f de F telles que $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = J_r$, où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme $\mathrm{rg}\, u = r$, $\dim \ker u = p - r$ ($p = \dim E$).
Soit S un supplémentaire de $\ker u$ dans E.
$\dim S = r$. Soit $e = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base adaptée à $E = S \oplus \ker u$.
$(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}\, u$, donc libre dans F, que l'on complète en une base f de F.
Par construction :

$$\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

28.33 Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice

Propostion 28.33

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, où E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. Soit e et f deux bases quelconques, respectivement de E et F. Alors :

$$\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$$

On note $e = (e_i)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg} \dim \mathrm{Vect}((u(e_i))) &= \dim \mathrm{Vect}((C_i)) \\ &= \mathrm{rg}\, \mathrm{Mat}_{e,f}(u) \end{aligned}$$

28.35 Invariance du rang par une matrice inversible

Propostion 28.35

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), R \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, alors :

$$\mathrm{rg}(PMR) = \mathrm{rg}\, M$$

Soit $\hat{M}, \hat{P}, \hat{R}$ les applications canoniquement associées à M, P, R.
$\hat{P}, \hat{R}$ sont des isomorphismes ($P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $R \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$). Ainsi :

$$\mathrm{rg}(PMR) = \mathrm{rg}(\hat{P} \circ \hat{M} \circ \hat{R}) = \mathrm{rg}(\hat{M}) = \mathrm{rg}\, M$$

28.37 Exemple

Exemple 28.37

Déterminer le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le rang de cette matrice est 2 donc $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$.

28.38 Matrice de changement d'une base à une autre

Théorème 28.38

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle, et e, f et g trois bases de E. On appelle **matrice de passage de e à f** la matrice :

$$\mathrm{Mat}_e(f) = \mathrm{Mat}_{f,e}(id_E$$

Cette matrice est souvent notée P_e^f (ou quelques fois $P_{e\to f}$). De plus :

1. P_e^f est inversible, d'inverse P_f^e.
2. $P_e^f \times P_f^g = P_e^g$.

1. On a $P_e^f = \mathrm{Mat}_{f,e}(\mathrm{id})$.
   Donc (id est inversible) :

$$(P_e^f)^{-1} = \mathrm{Mat}_{e,f}(\mathrm{id}^{-1}) = \mathrm{Mat}_{e,f}(\mathrm{id}) = P_f^e$$

2.

$$\begin{aligned} P_e^f \times P_f^g &= \mathrm{Mat}_{f,e}(\mathrm{id}) \times \mathrm{Mat}_{g,f}(\mathrm{id}) \\ &= \mathrm{Mat}_{g,e}(\mathrm{id} \circ \mathrm{id}) \ (28.21) \\ &= \mathrm{Mat}_{g,e}(\mathrm{id}) \\ &= P_e^g \end{aligned}$$

28.41 Exemple

Exemple 28.41

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Notons $e = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et posons

$$\begin{cases} u_\theta = \cos(\theta)i + \sin(\theta)j \\ v_\theta = -\sin(\theta)i + \cos(\theta)j \end{cases}$$

La matrice de la famille (u_θ, v_θ) dans la base (i, j) est :

$$\mathrm{Mat}_{(i,j)}(u_\theta, v_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Comme le déterminant de cette matrice vaut 1 (et donc non nul), alors $b_\theta = (u_\theta, v_\theta)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Si $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer les coordonnées de u dans la nouvelle base b_θ.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_e((x, y))$.
On note $X' = \mathrm{Mat}_{(u_\theta, v_\theta)}((x, y))$.
D'après la formule de changement de base :

$$\begin{aligned} X &= PX' \\ \text{donc } X' &= P^{-1}X \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta x & \sin\theta y \\ -\sin\theta x & \cos\theta y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $(x, y) = (\cos\theta x + \sin\theta y)u_\theta + (-\sin\theta x + \cos\theta y)v_\theta$.

28.42 Changement de bases pour une application linéaire

Théorème 28.42

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, e et e' deux bases de E, f et f' deux bases de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\mathrm{Mat_{e',f'}(u)} = P_{f'}^{f}\, \mathrm{Mat_{e,f}(u)}\, P_e^{e'}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{e',f'}(u) &= \mathrm{Mat}_{e',f'}(\mathrm{id}_F \circ u \circ \mathrm{id}_E) \\ &= \mathrm{Mat}_{f,f'}(\mathrm{id}) \times \mathrm{Mat}_{e,f}(u) \times \mathrm{Mat}_{e',e}(\mathrm{id}) \\ &= P_{f'}^{f}\, \mathrm{Mat}_{e,f}(u) P_e^{e'} \end{aligned}$$

28.47 Exemple fondamental

Propostion 28.47

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. Cela revient à dire que toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est équivalente à J_r.

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application canoniquement associée à M.

Donc $\operatorname{rg} u = r$.
D'après (28.29), on choisit une base e de $\mathbb{K}^p$ et f de $\mathbb{K}^n$ telles que :

$$\operatorname{Mat}_{e,f}(u) = J_r$$

D'après (28.44), M et $\operatorname{Mat}_{e,f}(u)$ sont équivalentes, soit :

$$M \sim J_r$$

28.48 Invariance du rang par transposition

Théorème 28.48

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{rg} {}^tA = \operatorname{rg} A$.

En effet car ${}^t(J_r) = J_r$.
Ainsi, $A \sim J_r$.
Alors $A = Q^{-1} J_r P$.
Et ${}^tA = tPJ_r{}^tQ^{-1}$.
Donc ${}^tA \sim J_r$.
Donc $\operatorname{rg} {}^tA = \operatorname{rg} A$.

28.52 Rang d'une matrice extraite

Propostion 28.52

Pour toute matrice B extraite de A, on a $\operatorname{rg} B \leq \operatorname{rg} A$. Le rang de A est la taille maximale des matrices inversibles que l'on peut extraire de A.

Extraire une matrice B de A revient à supprimer des colonnes et des lignes de A.
On note C la matrice intermédiaire en supprimant les colonnes de A.
Ainsi, B s'obtient à partir de C en supprimant les lignes de C.
Par définition (28.30), $\operatorname{rg} C \leq \operatorname{rg} A$.
Puis (28.49), $\operatorname{rg} B \leq \operatorname{rg} C$.
On note r le rang de A.
D'après (28.30), il existe r colonnes de A linéairement indépendantes.
Soit C la matrice extraite de A, constituée de ses vecteurs colonnes.
En particulier, $\operatorname{rg} C = r$.
D'après (28.49), il existe r vecteurs lignes de C, libres.
On note B la matrice (extraite de C) constituée de ces vecteurs lignes.
On a $\operatorname{rg} B = r$ et $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$.
Donc $B \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$ (28.9).

28.57 Invariance du rang et de la trace par similitude

Propostion 28.57

Deux matrices semblables ont même rang et même trace.

— Deux matrices semblables sont équivalentes (28.54) et ont le même rang (28.47).
— Si $B = P^{-1}AP$, alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} B &= \operatorname{tr}(P^{-1}AP)\\ &= \operatorname{tr}(APP^{-1})\\ &= \operatorname{tr}(A)\end{aligned}$$

La trace est et le rang sont des invariants de similitude.

28.60 Exemple

Exemple 28.60

Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A. En notant $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} u(e_1) &= 0 \\ u(e_2) &= e_1 \\ u(e_3) &= e_1 + e_3 \end{aligned}$$

En posant $f = (e_3, e_1, e_2)$ on obtient $B = \mathrm{Mat}_f(u)$.
En posant $g = (\frac{1}{2}e_1, 2e_2, e_3)$ on obtient $C = \mathrm{Mat}_g(u)$.
D'après l'exemple fondamental, A, B et C sont semblables.

28.63 Opération sur la trace

Propostion 28.63

La trace est linéaire. De plus, pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, on a $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.

— Linéarité : RAF
— Pseudo-commutativité : RAF

28.64 Exemple

Exemple 28.64

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, et p un projecteur de E. Alors $\mathrm{tr}\, p = \mathrm{rg}\, p$.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

$$E = \mathrm{Im}\, p \oplus \ker p$$

Dans une base adaptée à cette décomposition :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}(p) &= J_r \\ r &= \mathrm{rg}\, p \\ \text{or } \ \mathrm{tr}\, J_r &= \mathrm{tr}\, p = r \end{aligned}$$

Chapitre 29

Groupe symétrique

29.26 Lemme 26

Lemme 29.26

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On a :

$$\left| \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(i) - \sigma(j)) \right| = \prod_{X \in \mathcal{P}_2(\llbracket 1,n \rrbracket)} \delta_\sigma(X) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$$

— La première égalité est justifiée car on a une bijection entre $\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ et $\mathcal{P}_2(\llbracket 1,n \rrbracket)$.
— La seconde égalité est justifiée d'après (28.23).

29.29 Propriété fondamentale de la signature

Théorème 29.29

La signature est un morphisme de groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1,1\}, \times)$.

Montrons que $\epsilon(\sigma \circ \xi) = \epsilon(\sigma) \times \epsilon(\xi)$.
Pour $\sigma, \xi \in \mathcal{S}_n$:

$$\begin{aligned}
\epsilon(\sigma \circ \xi) &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma \circ \xi(j) - \sigma \circ \xi(i))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)} \times \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi(j) - \xi(i))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi(j) - \xi(i))} \\
&= \epsilon(\xi) \times \prod_{X \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \tau_\sigma(\xi(X)) \\
&= \epsilon(\xi) \times \prod_{X \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \tau_\sigma(X) \\
&= \epsilon(\xi) \times \epsilon(\sigma)
\end{aligned}$$

29.35 Décomposition d'une transposition à l'aide des τ_i

Propostion 29.35

soit $1 \leq i < j \leq n$ et $\tau = (i,j)$. Alors :

$$\tau = \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i \circ \tau_{i+1} \circ \cdots \circ \tau_{j-1}$$

— Si $k > j$, alors pour tout $p \in \llbracket i, j-1 \rrbracket$, $\tau_p(k) = k$.
  Donc $\sigma(k) = k$.
  Cela reste vrai si $k < i$.
— On a :

$$\begin{aligned}
\sigma(i) &= \tau_{j-1} \circ \tau_{j-2} \circ \cdots \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i \\
&= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_{i+1}(i+1) \\
&= \tau_{j-1}(j-1) \\
&= j \\
\sigma(j) &= \tau_{j-1} \circ \cdots \tau_i \circ \cdots \circ \tau_{j-1}(j) \\
&= \tau_{j-1} \circ \cdots \tau_i \circ \cdots \tau_{j-2}(j-1) \\
&= \tau_{j-1} \circ \cdots \tau_i(i+1) \\
&= \tau_{j-1} \circ \cdots \tau_{i+1}(i) \\
&= i
\end{aligned}$$

— Si $i < k < j$, alors :

$$\begin{aligned}\sigma(k) &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \tau_k(k) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \tau_{k-1}(k+1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_k(k+1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \tau_{k+1}(k) \\ &= k\end{aligned}$$

29.37 Caractère générateur des transpositions

Théorème 29.37

Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est un produit de transposition.

On prouve le résultat par récurrence sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

— pour $n = 2$, $\mathcal{S}_2 = \{id, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\}$ et $id = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^2$.

— On suppose le résultat vrai pour $n \geq 2$.
Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$.

  — Si $\sigma(n+1) = n+1$, σ induit naturellement une permutation $\tilde{\sigma}$ sur S_n, donc $\tilde{\sigma}$ est un produit de transpositions $\tilde{\tau}$, et chaque $\tilde{\tau}$ se relève en une transposition τ de $\mathcal{S}_{n+1}$.

  — Si $\sigma(n+1) = i \in [\![1, n]\!]$, alors :

$$\varphi = \begin{pmatrix}i & n+1\end{pmatrix} \circ \sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$$

  et $\varphi(n+1) = n+1$.
  D'après le point précédent, φ est un produit de transposition.
  Donc $\sigma = \begin{pmatrix}i & n+1\end{pmatrix} \circ \varphi$ est aussi un produit de transposition.

29.40 Effet de la conjugaison sur un cycle

Théorème 29.40

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $\begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_k\end{pmatrix}$ un cycle. Alors :

$$\sigma \circ \begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_k\end{pmatrix} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix}\sigma(a_1) & \cdots & \sigma(a_k)\end{pmatrix}$$

— Si $\sigma^{-1}(i) \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$ alors $\sigma \circ \begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_k\end{pmatrix} \circ \sigma^{-1}(i) = \sigma \circ \sigma^{-1}(i) = i$.

— Si $\sigma^{-1}(i) = a_j$, alors $\sigma \circ \begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_k\end{pmatrix} \circ \sigma^{-1}(i) = \sigma(a_{j+1})$.

29.41 Corollaire 29.41

Corollaire 29.41

Soit $\varphi : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ un morphisme. Soit $\alpha \in \{1-, 1\}$. S'il existe une transposition τ_0 telle que $\varphi(\tau_0) = \alpha$, alors pour toute transposition τ, on a $\varphi(\tau) = \alpha$.
Ainsi, φ prend une valeur constante sur les transpositions.

Par conjugaison. Soit $\tau_0 = \begin{pmatrix}i & j\end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix}k & l\end{pmatrix}$.
On a :

$$\tau = \sigma \circ \tau_0 \circ \sigma^{-1}$$

avec $\sigma = \begin{pmatrix}i & k & j & l\end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) &= \varphi(\sigma \circ \tau_0 \circ \sigma^{-1}) \\ &= \varphi(\sigma) \times \varphi(\tau_0) \times \varphi(\sigma^{-1}) \\ &= \varphi(\tau_0) \times \varphi(\sigma)^2 \\ &= \varphi(\tau_0)\end{aligned}$$

29.42 Unicité de la signature

Théorème 29.42

La signature est l'unique morphisme de groupe non trivial de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$.

Soit φ un morphismede groupes de $\mathcal{S}_n$ dans $\{\pm 1\}$.
Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. D'après (29.37), $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$.

— Si la valeur prise par φ sur les transpositions et 1 (29.40), alors :

$$\varphi(\sigma) = \prod_{i=1}^{k} \varphi(\tau_i) = 1$$

Donc φ est triviale.

— Si la valeur prise par φ sur les transpositions est -1 (29.41), alors :

$$\varphi(0) = \prod_{i=1}^{k} \varphi(\tau_i) = (-1)^k = \epsilon(\sigma)$$

Donc $\varphi = \epsilon$.

29.52 Décomposition en cycle d'une permutation

Théorème 29.52

Soit σ une permutation de $\mathcal{S}_n$. A permutation près des facteurs, il existe une unique décomposition de σ en produit de cycle à supports disjoints.

$$\sigma = C_1 \circ \cdots \circ C_k$$

telles que les supports des cycles forment un partition de $[\![1, n]\!]$. De plus, l'unique cycle de cette décomposition contenant x est égale à C_x.

— Existence : On note $\{\overline{C_1}, \ldots, \overline{C_k}\} = [\![1, n]\!]/\equiv_\sigma$.
On note (29.49) c_i la permutation induite par σ sur $\overline{C_i}$ ($C_i = \begin{pmatrix} p & \sigma(p) & \cdots & \sigma^j(p) \end{pmatrix}$).
On pose $\varphi = C_1 \circ \ldots \circ C_k$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$, alors $i \in \overline{C_q}$ avec $q \in [\![1, k]\!]$.
D'après (29.51), $\varphi(i) = C_q(i) = \sigma(i)$.
Donc $\varphi = \sigma$.

— Unicité : On suppose que $\sigma = C_1 \circ \ldots \circ C_k = U_1 \circ \ldots \circ U_q$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. $i \in supp(C_1) \in supp(U_1)$ (quitte à permuter les rôles).
On a donc $\sigma(i) = C_1(i) = U_1(i)$ et $\sigma^2(i) = C_1^2(i) = U_1^2(i)$ et ....
Donc $C_1 = U_1$.

29.62 Décomposition d'un cycle en transpositions

Lemme 29.62

Soit $(i_1, \ldots, i_k)$ des entiers deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$. Alors :

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i_1 & i_{k-1} \end{pmatrix} \circ \cdots \circ \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}$$

On note $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}$.
Soit $p \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$. On a bien $\sigma(p) = p$.
Soit $i_j \in \{i_1, \ldots, i_k\}$. $(j \neq k)$

—

$$\begin{aligned}\sigma(i_1) &= \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix} (i_1) \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_3 \end{pmatrix} (i_2) \\ &= i_2\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}\sigma(i_j) &= \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix} (i_j) \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_j \end{pmatrix} (i_j) \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_{j+1} \end{pmatrix} (i_1) \\ &= i_{j+1}\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}\sigma(i_k) &= \begin{pmatrix} i_1 & i_k \end{pmatrix} (i_k) \\ &= i_1\end{aligned}$$

29.63 Signature d'un cycle

Propostion 29.63

Soit C un cucle et $\ell(C)$ sa longueur. Alors :

$$\epsilon(C) = (-1)^{\ell(C)-1}$$

Avec ce qui précède :

$$\begin{aligned}\epsilon(\sigma) &= \prod_{j=2}^{k} \epsilon(\begin{pmatrix} i_1 & i_j \end{pmatrix}) \\ &= (-1)^{k-1} \\ &= (-1)^{\ell(C)-1}\end{aligned}$$

29.64 Détermination de ϵ par le type cyclique

Théorème 29.64

Soit σ une permutation de $\mathcal{S}_n$ et $c(\sigma)$ le nombre de parts dans son support cyclique (ou de façon équivalente dans son type cyclique). Alors :

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-c(\sigma)}$$

Soit $\sigma = C_1 \circ \cdots \circ C_{c(\sigma)}$. On a :

$$\begin{aligned}\epsilon(0) &= \prod_{i=1}^{c(\sigma)} \epsilon(C_i) \text{ (ϵ morphisme)} \\ &= \prod_{i=1}^{c(\sigma)} (-1)^{\ell(C_i)-1} \text{ (29.63)} \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^{c(\sigma)} [\ell(C_i)-1]} \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^{c(\sigma)} \ell(C_i) - c(\sigma)} \\ &= (-1)^{n-c(\sigma)}\end{aligned}$$

29.69 Exemple

Exemple 29.69

Calculer la signature de la permutation suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & 1 & 3 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, le couple $(i, k+n)$ donne une inversion avec $k \in [\![1, i]\!]$.
On dénombre donc :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc :

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Exercice 4

Soit $g \in G$. On note $\varphi_g : G \to G; h \mapsto gh$.
On a $\varphi_g \in S(G)$ car φ_g est bijective de réciproque φ_g^{-1}.
On note $\varphi : G \to S(G); g \mapsto \varphi_g$.
On a évidemment pour tout $(g, k) \in G^2$:

$$\varphi(g \times k) = \varphi_g \circ \varphi_k$$

Donc φ est un morphisme de groupe.
Si $g \in \ker \varphi$, $\varphi(g) = \mathrm{id}$, donc :

$$\begin{aligned} \forall h \in G, \varphi_g(h) = h \\ \text{donc } g = 1_G \end{aligned}$$

Donc G est isomorphe à $\operatorname{Im} \varphi$, qui est un sous-groupe de $S(G)$.

Chapitre 30

Déterminant

30.4 Exemple

Exemple 30.4

On considrèe l'application :

$$\delta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}; ((a,b),(c,d)) \mapsto ad - bc$$

Montrer que cette application est bien 2-linéaire.

$$\begin{aligned}
\delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}\right) &= \delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c + \lambda c' \\ d + \lambda d' \end{pmatrix}\right) \\
&= a(d + \lambda d') - b(c + \lambda c') \\
&= ad - bc + \lambda(ad' - bc') \\
&= \delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) + \lambda \delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

30.11 Détermination d'une application n-linéaire sur une base

Propostion 30.11

Soit pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d}$ une base de E_i et pour tout $(j_1,\dots,j_n) \in [\![1,d_1]\!] \times \cdots \times [\![1,d_n]\!]$, $f_{j_1,\dots,j_n} \in F$.
Alors il existe une unique application n-linéaire $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ telle que :

$$\forall (j_1,\dots,j_n) \in [\![1,d_1]\!] \times \cdots \times [\![1,d_n]\!], \varphi(e_{1,j_1},\dots,e_{n,j_n}) = f_{j_1,\dots,j_n}$$

Si $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d}$ est une base de E_i alors $((e_{1,2},0,\dots,0,\dots,e_{1,d},0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,e_{n,1},\dots,(0,\dots,0,e_{n,d})))$ est une base de $E_1 \times \cdots \times E_n$. (22.16), théorème de rigidité.

30.18 Caractérisation par les transpositions

Lemme 30.18

Pour qu'une forme f soit antisymétrique, il faut et il suffit que l'échange de deux variables quelconques provoque un changement de signe.

Par hypothèse, si τ est une transposition alors $\varphi(x_{\tau_1},\dots,x_{\tau_n}) = -\varepsilon(\tau)(x_1,\dots,x_n)$.
Soit $\sigma \in S_n$. On écrit $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$ avec τ_i des transpositions. Alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_{\sigma_1},\dots,x_{\sigma_n}) &= \varphi(x_{\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k(1)},\dots,x_{\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k(n)}) \\
&= \varepsilon(\tau_1)\varphi(x_{\tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k(1)},\dots,x_{\tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k(n)}) \\
&= \varepsilon(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k)\varphi(x_1,\dots,x_n) \\
&= \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1,\dots,x_n)
\end{aligned}$$

30.19 Une forme alternée change de signe par transposition

Lemme 30.19

Soit φ une forme alternée. Alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$:

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Cela revient à dire que pour toute transposition $\tau \in S_n$, on a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = -\varepsilon(\tau)\varphi(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n})$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite et si $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, alors φ est alternée.

Soit φ alternée.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_j + x_i, \dots, x_n) \\
&= \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&+ \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\
&+ \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&+ \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&= \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) + \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

On suppose que carac$(\mathbb{K}) \neq 2$.
On a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \text{ (antisymétrie)}$$

Donc :

$$2\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

Donc :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

30.21 Image d'une famille liée par une forme alternée

Propostion 30.21

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille liée et φ une forme alternée. Alors :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors on peut écrire par exemple :

$$x_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, \dots, x_n) &= \varphi\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i, x_2, \dots x_n\right) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \varphi(x_i, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

30.22 Forme n-linéaire d'un espace de dimension n

Théorème 30.22

Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Il existe une unique forme n-linéaire φ sur E telle que $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1$.
2. Cette forme n-linéaire est entièrement décrite sur les vecteurs de la base par :

$$\begin{cases} \varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = 0 & \text{s'il existe } j \neq k \text{ tel que } i_j = i_k \\ \varphi(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) & \text{où } \sigma \in \mathcal{S}_n \end{cases}$$

3. Toute autre forme n-linéaire alternée sur E est de la forme $\lambda\varphi$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\boxed{1, 2}$

On utilise le théorème de rigidité des applications n-linéaires (30.11) en fixant l'image de chaque $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$ avec $(i_1, \ldots, i_n) \in [\![1, n]\!]^n$.

— $\varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = 0$ s'il existe $i_j - i_k$ avec $j \neq k$.
— $\varphi(\underbrace{e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}}_{(i_1,\ldots,i_n) \text{ fournit alors une permutation } \sigma \in \mathcal{S}_n}) = \varepsilon(\sigma) \times \underbrace{1}_{\varphi(e_1,\ldots,e_n)}$.

Le théorème nous fournit l'existence de la forme alternée et l'unicité.

$\boxed{3}$

Soit ψ une forme n-linéaire alternée. On pose $\lambda = \psi(e_1, \ldots, e_n)$.

— si $\lambda = 0$, par alternance (et anitsymétrie) on a $\psi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = 0$ pour tout $i_1, \ldots, i_n$.
  Par rigidité, $\psi = 0 = 0 \times \varphi$.
— si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}\psi(_1, \ldots, e_n) = 1$.
  Par unicité (1), $\frac{1}{\lambda}\psi = \varphi$.
  Donc $\psi = \lambda\varphi$.

30.25 Exemple

Exemple 30.25

On considère $E = \mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2) = ((1, 0), (0, 1))$. Soit $((a, b), (c, d)) \in E^2$. Montrer que :

$$\det_e((a, b), (c, d)) = ad - bc$$

$e = ((1, 0), (0, 1))$.
$((a, b), (c, d)) \in (E)^2$.

$$\begin{aligned} \det_e((a, b), (c, d)) &= \det_e(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\ &= ac \times \cancel{\det_e(e_1, e_1)} + ad \times \det_e(e_1, e_2) + bc \times \det_e(e_2, e_1) + bd \times \cancel{\det_e(e_2, e_2)} \\ &= ad \times \det_e(e_1, e_2) - bc \times \det_e(e_1, e_2) \\ &= (ad - bc) \end{aligned}$$

30.26 Description du déterminant par les coordonnées

Théorème 30.26

Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille d'éléments de E, dont les coordonnées sont :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \quad \text{donc} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)}$$

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) &= \det_{\mathcal{B}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i_1,1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{i_n,n} e_{i_n} \right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \text{ (multilinéarité)} \\
&= \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} = [\![1,n]\!]} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \text{ (alternance)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})}_{=\varepsilon(\sigma)} \text{ (reformulation)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)}
\end{aligned}$$

30.28 Effet d'un changement de base sur le déterminant

Propostion 30.28

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors :

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}$$

D'après le corollaire (30.27), on écrit :

$$\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

En particulier :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda$$

30.30 Caractérisation des bases par le déterminant

Propostion 30.30

Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle, muni d'une base $\mathcal{B}$. Une famille $\mathcal{F}$ de cardinal n est une base si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

D'après (30.29), si $\mathcal{F}$ est une base alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.
Si $\mathcal{F}$ n'est pas une base, alors elle est liée ($|\mathcal{F}| = n$)
Donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$ (30.21).

30.36 Déterminant d'un produit

Théorème 30.36

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$$

Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_1, \dots, A_n$ les colonnes de A et $B_1, \dots, B_n$ les colonnes de B.
On considère l'application :

$$\varphi : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}; (X_1, \dots, X_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}_C}(AX_1, \dots, AX_n)$$

φ est une forme n-linéaire alternée.
On choisit donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}_C}$ On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathcal{B}_C) &= \lambda \det_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_C) \\
&= \lambda \\
&= \det_{\mathcal{B}_C}\left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \det_{\mathcal{B}_C}(A_1, \dots, A_n) \\
&= \det(A)
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi = \det(A)\det_{\mathcal{B}_C}$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\det(A)\det(B) &= \det(A)\det_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n) \\
&= \varphi(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n) \\
&= \det_{\mathcal{B}_C}(AB_1, \dots, AB_n) \\
&= \det(AB)
\end{aligned}$$

30.40 Expression des déterminants classiques

Propostion 30.40

1. On a :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Soit : diagonales descendantes moins les diagonales ascendantes.

2. $\mathcal{S}_3 = \{\mathrm{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\}$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
\end{aligned}$$

30.41 Invariance du déterminant par transposée

Théorème 30.41

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

RAF avec (30.34)

30.42 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 30.42

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est une espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Le scalaire $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépnd pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. On appelle ce scalaire **déterminant de** f et est noté $\det(f)$.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ sont semblables, donc elles ont le même déterminant (30.37).

30.44 Déterminant et conjugaison

Propostion 30.44

Soit $\psi : E \to F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension finie non nulles et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\det(\underbrace{\psi \circ u \circ \psi^{-1}}_{\in \mathcal{L}(F)}) = \det(u)$$

Soit e une base de E et f une base de F.

$$\begin{aligned}
\det(\psi \circ u \circ \psi^{-1}) &= \det(\text{Mat}_f(\psi \circ u \circ \psi^{-1})) \text{ (30.42)} \\
&= \det(\text{Mat}_{e,f}(\psi) \times \text{Mat}_e(u) \times \text{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})) \text{ (28.42)} \\
&= \det(\text{Mat}_{e,f}(\psi)) \times \det(\text{Mat}_e(u)) \times \det(\text{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})) \text{ (30.36)} \\
&= \det(\underbrace{\text{Mat}_{\psi} \times \text{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})}_{I_n}) \times \det(\text{Mat}_e(u)) \text{ (30.36)} \\
&= \det(\text{Mat}_e(u))
\end{aligned}$$

30.45 Déterminant d'une matrice triangulaire

Propostion 30.45

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Soit T une matrice triangulaire supérieure (on passe à la transposée sinon).
Ainsi :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i > j \Rightarrow t_{i,j} = 0$$

D'après la formule sur les coefficients (30.34) :

$$\begin{aligned}\det(T) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} t_{\sigma(i),i} \\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n, \sigma(i)\leq i \equiv \mathrm{id}} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} t_{\sigma(i),i} \\ &= \sigma(\mathrm{id})\prod_{i=1}^{n} t_{ii}\end{aligned}$$

30.47 Détrminant des matrices de codage des opérations

Lemme 30.47

On a :

$$\det(P_{ij}) = -1, \quad \det(Q_i(\lambda)) = \lambda \quad \text{et} \quad \det(R_{ij}(\lambda)) = 1$$

$Q_i(\lambda)$ et $R_{ij}(\lambda)$ sont triangulaires.
D'après (30.45) :

$$\begin{aligned}\det(Q_i(\lambda)) &= \lambda \\ \det(R_{ij}(\lambda)) &= 1 \\ \det(P_{ij}) &= \det_{\mathcal{B}_C}(C_1,\dots,C_j,\dots,C_i,\dots,C_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_C}(C_{\tau_{ij}(1)},\dots,C_{\tau_{ij}(n)}) \text{ où } \tau_{ij} = \begin{pmatrix} i & j\end{pmatrix} \\ &= \varepsilon(\tau_{ij})\det_{\mathcal{B}_C}(C_1,\dots,C_n) \\ &= -1\end{aligned}$$

30.50 Exemple

Exemple 30.50

Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

30.51 Exemple

Exemple 30.51

Calculer pour $a \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_n(a) &= \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1-a & 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix} \\
&= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} \\
&= (a+n-1)(a-1)^{n-1}
\end{aligned}
$$

30.52 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Propostion 30.52

Soit T une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} A_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

où les A_i sont des matrices carrées. Alors :

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{k} \det(A_i)$$

On montre le résultat dans le cas où $T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
On généralisera alors par récurrence et transposée.
Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ les colonnes de A et $(B_1, \ldots, B_p)$ les lignes de B.
On définit :

$$\begin{aligned} \varphi : &(\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K} \\ (X_1, \ldots, X_n) &\mapsto \begin{vmatrix} X_1 & \cdots & X_n & C \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{vmatrix} \end{aligned}$$

φ est une forme n-linéaire alternée.
Donc on choisit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}_n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{B}_n) &= \lambda \det_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{B}_n) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

On cherche donc :

$$\varphi(\mathcal{B}_n) = \begin{vmatrix} 1 & & C \\ & \ddots & \\ & & B \end{vmatrix}$$

On définit :

$$\begin{aligned} \psi : &(\mathbb{K}^p)^p \to \mathbb{K} \\ (Y_1, \ldots, Y_p) &\mapsto \begin{vmatrix} 1 & & & C \\ & \ddots & & \\ & & 1 & Y_1 \\ & & & \vdots \\ & & & Y_p \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ψ est une forme p-linéaire alternée donc on choisit $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\psi = \alpha \det_{\mathcal{B}_p}$$

On a :

$$\begin{aligned}\alpha &= \psi(\mathcal{B}_p)\\ &= \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ 0 & & & 1 & & \\ 0 & 0 & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \end{vmatrix}\\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\psi = \det_{\mathbb{B}_p}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\lambda &= \varphi(\mathcal{B}_n)\\ &= \psi(B_1, \dots, B_p)\\ &= \det(B)\end{aligned}$$

Donc :

$$\varphi = \det(B) \times \det_{\mathcal{B}_n}$$

Donc :

$$\varphi(A_1, \dots, A_n) = \det(B) \det_{\mathcal{B}_n}(A_1, \dots, A_n)$$

Soit :

$$\det(T) = \det(B) \det(A)$$

30.57 Exemple

Exemple 30.57

Déterminer la comatrice de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\Delta_{11}(M) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\\ \Delta_{12}(M) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1\\ \Delta_{13}(M) &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\\ \Delta_{21}(M) &= \cdots\\ \mathrm{Com}(M) &= \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

30.58 Développement suivant une colonne

Théorème 30.58

Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in [\![1, n]\!]$, alors :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \Delta_{ij}(M)$$

On note $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
On note $M_1, \dots, M_n$ les colonnes de M.
Par hypothèses :

$$M_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} E_i$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \det_{\mathcal{B}_C}(M_1, \dots, M_n) \\
&= \det_{\mathcal{B}_C}\left(M_1, \dots, \sum_{i=1}^{n} m_{ij} E_i, \dots, M_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \det_{\mathcal{B}_C}(M_1, \dots, E_i, \dots, M_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} m_{ij} \det_{\mathcal{B}_C}(E_i, \dots, M_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} m_{ij} \begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & M_1 & \cdots & M_n \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} m_{ij} \begin{vmatrix} 1 & m_{i1} & \cdots & m_{in} \\ 0 & m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & m_{i-1,1} & \cdots & m_{i-1,n} \\ 0 & m_{i+1,1} & \cdots & m_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+1} m_{ij} \Delta_{ij}
\end{aligned}$$

30.59 Développement selon une ligne

Théorème 30.59

Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in [\![1, n]\!]$, alors :

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \Delta_{ij}(M)$$

$\det(M) = \det({}^tM)$ et on utilise (30.58).

30.61 Expression de l'inverse de la comatrice, Cayley

Corollaire 30.61

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$M^t\,\mathrm{Com}(M) = {}^t\,\mathrm{Com}(M) M\,\det(M) I_n$$

En particulier, M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$ et dans ce cas :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}{}^t\,\mathrm{Com}(M)$$

On montre seulement $M^t\,\mathrm{Com}(M) = \det(M) I_n$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}
[M^t\,\mathrm{Com}(M)]_{ij} &= \sum_{j=1}^{n} M_{ik}[{}^t\mathrm{Com}(M)]_{ji} \\
&= \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\,\mathrm{Com}(M)_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}(M) \\
&= \det(M) \text{ (formule du développement)}
\end{aligned}$$

On suppose que $i \neq j$. En reprenant les étapes précédentes :

$$\begin{aligned}
[M^t\,\mathrm{Com}(M)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} M_{ik}\,\mathrm{Com}(M)_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} M_{ik}\Delta_{jk}(M)
\end{aligned}$$

On considère le déterminant suivant (on a remplacé la ligne j par i) :

$$\begin{vmatrix}
m_{11} & \cdots & m_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
m_{i1} & \cdots & m_{in} \\
\vdots & & \vdots \\
m_{i1} & \cdots & m_{in} \\
\vdots & & \vdots \\
m_{n1} & \cdots & m_{nn}
\end{vmatrix} \underset{\text{développement de la ligne } j}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} m_{ik}\Delta_{jk}(M)$$

30.63 Cramer

Corollaire 30.63

Le système $AX = B$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ admet une unique solution si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
Si $A_1, \ldots, A_n$ sont les colonnes de A, cette solution est donnée par :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], x_k = \frac{\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \ldots, A_n)}{\det(A)}$$

— Le système admet une unique solution si et seulement si A est inversible, c'est-à-dire $\det(A) \neq 0$.

— On suppose A inversible. Si $AX = B$, alors $X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)}{}^t\operatorname{Com}(A)B$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned} x_k &= X_{k,1} \\ &= \frac{1}{\det(A)}[{}^t\mathrm{Com}(A)B]_{k,1} \\ &= \frac{1}{\det(A)}\sum_{i=1}^{n}[{}^t\mathrm{Com}(A)]_{k,i}B_{i,1} \\ &= \frac{1}{\det(A)}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Com}(A)_{ik}b_i \\ &= \frac{1}{\det(A)}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}b_i\Delta_{ik}(A) \\ &= \frac{\det(A_1,\ldots,A_{k-1},B,A_{k+1},\ldots,A_n)}{\det(A)} \text{ (développement de la } k\text{-ième colonne)} \end{aligned}$$

30.64 Exemple

Exemple 30.64

Calculer le déterminant de la matrice suivante, avec $a \neq b$ dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

Convention : $\Delta_1 = a + b$.
On a $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2$.
Soit $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} \Delta_n &= (a+b)\begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}_{n-1} - b\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & a+b & a & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}_{n-1} \\ &= (a+b)\Delta_{n-1} - ba\Delta_{n-2} \end{aligned}$$

$(\Delta_n)_{n\geq 0}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 - (a+b)r + ab = 0$$

Cette équation admet a et b comme racines distinctes.
D'après le cours, on choisit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\forall n \geq 0, \Delta_n = \alpha a^n + \beta b^n$$

Les conditions initiales imposent $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha a + \beta b = a + b$.
Donc $\alpha = \frac{a}{a-b}$ et $\beta = \frac{b}{b-a}$.

30.71 Déterminant de Vandermonde

Propostion 30.71

Le déterminant de Vandermonde est donné par :

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (x_j - x_i)$$

Ainsi on retrouve qu'une matrice de Vandermonde est inversible si et seulement si tous les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts.

— S'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$:

$$V(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

— Supposons désormais que les x_i sont distincts deux à deux.
On considère :

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto V(x_1, \ldots, x_n)$$

D'après le caractère polynomial du déterminant, φ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$ et dont le coefficient de degré $n-1$ est $V(x_1, \ldots, x_{n-1}) \neq 0$ (28.23) (par développment par la dernière colonne).
Or :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \varphi(x_i) = 0$$

D'après le cours sur les polynômes, φ est scindé et :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \varphi(x) = V(x_1, \ldots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i)$$

Donc :

$$V(x_1, \ldots, x_n) = V(x_1, \ldots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$$

On termine par récurrence.
La formule reste vraie si les x_i ne sont pas tous distincts.

Notion d'orientation

Notons P l'ensemble des bases de E (ev de dimension n).

Définition

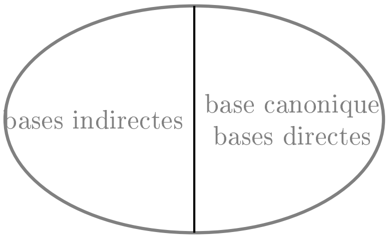
$$(B, B') \in P^2, B \sim B' \equiv \det_B(B') > 0$$

— $\det_B(B) = 1, B \sim B$
— Si $B \sim B'$, $\det_B(B') > 0$. Or $\det_{B'}(B) = \frac{1}{\det_B(B')}$.
Donc $B' \sim B$.

— Si $B \sim B'$ et $B' \sim B''$, alors : $\det_B(B') > 0$ et $\det_{B'}(B'') > 0$.
Donc $\det_B(B')\det_{B'}(B'') = \det_B(B'') > 0$.
Donc $B \sim B''$.

$\sim$ est une relation d'équivalence.

$\boxed{|P/\sim| = 2}$



Chapitre 31

Dénombrement

31.12 Exemple : parcours d'une fourmi

Exemple 31.12

La fourmi Donald se promène sur un grillage du plan de taille $2 \times p$ dont chaque arête est de longueur 1. Combien de chemins de longueur minimale peut-elle emprunter pour gagner le point d'arrivée depuis son point de départ ?

Compter ce nombre de chemins revient à dénombrer le nombre de mots de $p+2$ lettres contenant exactement p lettres D et 2 lettres B.
Pour constuire un tel mot, il suffit de choisir la place des deux B.
On a $p+1$ choix pour le premier B.
Pour chaque choix de position $k \in [\![1, p+1]\!]$, il reste $p+2-k$ choix pour le second B.
Le nombbre de choix possible final est donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p+1}(p+2-k) &= \sum_{k=1}^{p+1} k \\ &= \frac{(p+1)(p+2)}{2}\end{aligned}$$

31.19 Exemple

Exemple 31.19

Combien y-a-t-il de couples (x, y) dans $[\![1, n]\!]^2$ avec $x \neq y$?

<u>Etape 1 :</u> On choisit $x \in [\![1, n]\!]$, soit n choix.
<u>Etape 2 :</u> On choisit $y \in [\![1, n]\!] \setminus \{x\}$, soit $n-1$ choix.
Au total $n(n-1)$ choix (principe des bergers).

31.20 Exemple

Exemple 31.20

A partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

<u>Etape 1 :</u> On choisit la première lettre : p possibilités.
<u>Etape 2 :</u> On choisit la deuxième lettre : $p-1$ possibilités.
<u>Etape 3 :</u> On choisit la troisième lettre : $p-1$ possibilités.
...
Au total : $p(p-1)^{n-1}$ possibilités.

31.27 Exemple

Exemple 31.27

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-listes d'un ensemble de cardinal 52, soit 52^5 possibilités.

31.28 Exemple

Exemple 31.28

Combien y-a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot "OUPS" ?

Etape 1 : Choix de la place du mot "OUPS" : 4 choix possibles.
Etape 2 : On complète avec un mot de 3 lettres.
Cela revient à compter le nombre de 3-listes d'un ensemble à 26 éléments : 26^3 possibilités.
Aut total : 4×26^3 possibilités.

31.32 Exemple

Exemple 31.32

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement sans remise dans un jeu de 52 cartes ?

Cela revient à compter le nombre de 5-arrangements d'un ensemble de cardinal 52, soit $\frac{52!}{(52-5)!}$.

31.33 Exemple

Exemple 31.33

De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? Autour d'une table ronde ?

- Sur un banc rectiligne, cela revient à calculer le nombre de n-arrangements d'un ensemble de cardinal n, soit $n!$ choix.
- En choisissant arbitrairement la place d'une personne (par exemple Jack), il suffit de compléter par un $(n-1)$-arrangement d'un ensemble à $n-1$ éléments, soit $(n-1)!$ choix.

31.38 Nombre de combinaisons

Propostion 31.38

Soit $p \in \mathbb{N}$ et notons $n = |E|$. Il y a $\binom{n}{p}$ p-combinaisons de E.

Pour construire une p-combinaison :
- On choisit un p-arrangement de E : $\frac{n!}{(n-p)!}$ possiblités.
- On choisit l'ensemble des éléments qui constituent cet arrangement.
  Or toute permutation du p-arrangement conduit à la même combinaison. Il y a donc $|S_p| = p!$ arrangements qui donne la même combinaison (il n'y en a pas d'autres).
  On a donc $\frac{n!}{(n-p)!p!}$ p-combinaisons.

31.40 Exemple

Exemple 31.40

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-combinaisons d'un ensemble de cardinal 52. Il y en a $\binom{52}{5}$.

31.41 k-listes strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$

Théorème 31.41

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $\binom{n}{k}$ familles d'entiers $(i_1, \ldots, i_k)$ pour lesquelles $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Pour tout ensemble à k éléments de $[\![1, n]\!]$ distincts, il existe une unique manière de les ordonner. Réciproquement tout k-uplet $(i_1, \ldots, i_k)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ fournit un sous-ensemble à k eléments distincts de $[\![1, n]\!]$. Il y a donc en tout $\binom{n}{k}$ familles recherchées.

31.43 Exemple

Exemple 31.43

Combien le mot "BOROROS" a-t-il d'anagrammes ?

Construire un anagramme de "BOROROS" c'est construire un mot de 7 lettres composé de 1 B, 3 O, 2 R et 1 S.
Etape 1 : $\binom{7}{1}$ choix pour la place de B.
Etape 2 : $\binom{6}{3}$ choix pour la place des O.
Etape 3 : $\binom{3}{2}$ choix pour la place des R.
Etape 4 : $\binom{1}{1}$ choix pour la place de S.
Au total :

$$\begin{aligned}\binom{7}{1}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} &= 7 \times \frac{6!}{3!3!} \times \frac{3!}{2!}\\ &= 7 \times 5 \times 4 \times 3\end{aligned}$$

31.45 Exemple

Exemple 31.45

Un jeu de tarot contient 78 cartes :
- 21 atouts
- 1 excuse
- 14 cartes de chaque couleur (coeur, pique, trèfle, carreau)

Combien de tirages simultanés de 6 cartes d'un tel jeu peut-on obtenir contenant 2 atouts et 4 trèfles ?
Et ensuite, contenant exactement un atout et au moins 3 as ?

- Pour construire une telle main :
  Etape 1 : $\binom{21}{2}$ choix pour les atouts.
  Etape 2 : $\binom{14}{4}$ choix pour les trèfles.
  Au total $\binom{21}{2}\binom{14}{4}$ mains possibles.
- $\binom{21}{1}\binom{4}{3}\binom{78-21-4}{2} + \binom{21}{1}\binom{4}{4}\binom{78-21-4}{1}$.

31.48 Exemple

Exemple 31.48

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. De combien de façons peut-on extraire la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de A ?
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. De combien de façons peut-on extraire la matrice $\binom{1}{1}$ de A ?

1. Disjonctions de cas : Si on extrait par rapport à la deuxième ligne : $\binom{5}{3}$.
   Si on extrait par rapport à la troisième ligne : $\binom{4}{3}$.
   Au total : $\binom{5}{3} + \binom{4}{3}$ choix possibles.
2. Avec le même principe :

$$\binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2}$$

31.49 Nombre de parties d'un ensemble fini

Théorème 31.49

On a :

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$$

<u>Méthode 1 :</u>

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}(E)| &= \sum_{k=0}^{|E|} |\mathcal{P}_k(E)| \\ &= \sum_{k=0}^{|E|} \binom{|E|}{k} \\ &= 2^{|E|} \text{ (binôme)}\end{aligned}$$

<u>Méthode 2 :</u>
On liste les éléments de $E = \{e_1, \dots, e_n\}$.
Toute partie de E peut-être codée de mainère unique par un mot de n lettres à partir de l'alphabet $\{0, 1\}$ de manière suivante :

$$\underbrace{0}_{e_1 \notin A} \underbrace{1}_{e_2 \in A} \cdots \quad \underbrace{\_}_{1 \text{ si } e_i \in A, 0 \text{ sinon}} \quad \cdots$$

Donc $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.

31.51 Exemple : formule du capitaine

Exemple 31.51

Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq p$, on a :

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

Dans une classe de n élèves, on décide de composer des équipes de p élèbes dont un capitaine désigné.
<u>Méthode 1 :</u>

$$\underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{choix du capitaine}} \times \underbrace{\binom{n-1}{p-1}}_{\text{choix des autres élèves}}$$

<u>Méthode 2 :</u>

$$\underbrace{\binom{n}{p}}_{\text{choix de l'équipe}} \times \underbrace{\binom{p}{1}}_{\text{choix du capitaine}}$$

On a par double comptage :

$$\binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p}\binom{p}{1}$$

Soit :

$$n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}$$

31.53 Exemple : formule de Pascal

Exemple 31.53

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq n$, on a :

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

Pour construire une partie à p éléments, on peut commencer par fixer un élément quelconque $e \in E$. Puis :
- constuire une partie contenant e : $\binom{n}{p-1}$ possibilités.
- construrie une partie qui ne contient pas e : $\binom{n}{p}$ possibilités.

Par double comptage :

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

Exercice 1

$$\underbrace{2n}_{\text{choix de la première boule}} \times \underbrace{n}_{\text{choix d'une parité différente}} \times (n-1)(n-1)\cdots 1 = 2(n!)^2$$

Exercice 3

1. $$\binom{n}{n'}\binom{p}{p'}$$

2. $$\begin{aligned}\sum_{p'=1}^{p}\sum_{n'=1}^{n}\binom{n}{n'}\binom{p}{p'} &= \left(\sum_{p'=1}^{p}\binom{p}{p'}\right)\left(\sum_{n'=1}^{n}\binom{n}{n'}\right) \\ &= (2^p-1)(2^n-1)\end{aligned}$$

Exercice 6

Construire une tell permutation revient à construire une bijection de $[\![3, n]\!]$ sur $[\![4, n]\!] \cup \{1\}$.
Il y en a $(n-2)!$.

Exercice 9

On code toute configuration de la manière suivante : on associe à une boule la lettre 0 et à une urne la lettre $|$.
Réciproquement, à tout mot de $p+n-1$ lettres coumposées d'exactement $n-1$ lettres $|$ et p lettres 0.
Au total, il y a $\binom{n+p-1}{p}$ configurations.

Exercice 10

On dénombre le nombre d'équipes de n joueurs choisis parmi p attaquants et q défenseurs.
On distingue alors selon le nombre k d'attaquants choisis.

Exercice 14

1. $\binom{32}{5}$
2. (a) $\binom{4}{4}\binom{32-4}{1}$

(b) $\binom{8}{1}\binom{4}{4}\binom{32-4}{1}$
(c) $\binom{8}{1}\binom{4}{3}\binom{7}{1}\binom{4}{2}$
(d) $\frac{1}{2}\binom{8}{1}\binom{4}{3}\binom{7}{1}\binom{4}{1}\binom{6}{1}\binom{4}{1} = \binom{8}{1}\binom{4}{3}\binom{7}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$
(e) $\binom{4}{1}\binom{4}{1}$
(f) $\binom{4}{1}\binom{8}{5} - \binom{4}{1}\binom{4}{1}$
(g) $\binom{3}{2}\binom{7}{3}$ (sans roi de coeur)

Chapitre 32

Espaces probabilisés finis

32.19 Exemple

Exemple 32.19

Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On en tire simultanément 4 boules. Avec quelle probabilité n'a-t-on tiré que des boules noires ?

Sans perte de généralité, on peut numéroter les boules de 1 à 8, les 3 premières boules sont blanches et les 5 suivantes noires.
On note X la variable alétoire donnant la 4-combinaison des boules obtenues.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(P_4[\![1,8]\!])$$

En notant A "on ne tire que des boules noires", on a :

$$\begin{aligned} A &= (X \in P_4[\![4,8]\!]) \\ P(A) &= P(X \in P_4[\![4,8]\!]) \\ &= \frac{|P_4[\![4,8]\!]|}{|P_4[\![1,8]\!]|} \\ &= \frac{\binom{5}{4}}{\binom{8}{4}} \end{aligned}$$

32.25 Exemple

Exemple 32.25

On choisit un entier X au hasard entre -3 et 3. Quelle est la loi de la variable X^2+1 ?

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![-3,3]\!])$$

$$(X^2+1)(\omega) = \{1,2,5,10\}$$

Et :

$$\begin{aligned} P(X^2+1=1) &= P(X=0) \\ &= \frac{1}{7} \\ P(X^2+1=2) &= P(X=-1)+P(X=1) \\ &= \frac{2}{7} \\ P(X^2+1=5) &= P(X=-2)+P(X=2) \\ &= \frac{2}{7} \\ P(X^2+1=10) &= P(X=-3)+P(X=3) \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

32.26 Exemple

Exemple 32.26

On choisit un entier X au hasard entre 1 et $2n$. Quelle est la loi de $(-1)^X$?

$$\begin{aligned}
X &\hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2n \rrbracket) \\
(-1)^X &\hookrightarrow \{-1, 1\} \\
P((-1)^X = 1) &= P(X \text{ pair}) \\
&= \frac{n}{2n} \\
&= \frac{1}{2} \\
&= P((-1)^X = -1)
\end{aligned}$$

32.28 Définition implicite d'un espace probabilisé par la donnée d'une loi de variable aléatoire

Théorème 32.28

Soit $E = \{x_1, \ldots, x_r\}$ un ensemble et $p_1, \ldots, p_r \in [0, 1]$ des réels pour lesquels $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$. Il existe alors un espace probabilisé (Ω, P) et une variable aléatoire X sur Ω, d'image E, pour lesquels pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$:

$$P(X = x_i) = p_i$$

$$\omega = E \text{ et } X = \text{id}$$

On applique (32.12) pour avoir l'existence de P.

32.30 Probabilité conditionnelle

Théorème 32.30

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ pour lequel $P(B) > 0$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, le réel

$$P(A \mid B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

est appelé la probabilité conditionnelle de A sachant B. L'application P_B est alors une probabilité sur Ω, appelée sa probabilité conditionnelle sachant B.

—

$$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

—

$$\begin{aligned}
P_B(A \sqcup C) &= \frac{P(B \cap (A \sqcup C))}{P(B)} \\
&= \frac{P(B \cap A) \sqcup (B \cap C))}{P(B)} \\
&= \frac{P(B \cap A)}{P(B)} + \frac{P(B \cap C)}{P(B)} \\
&= P_B(A) + P_B(C)
\end{aligned}$$

32.31 Formule des probabilités totales

Théorème 32.31

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $\{A_1, \ldots, A_n\}$ un système complet d'événements de Ω de probabilités strictement positives. Alors, pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) P(A_i)$$

Soit $B \in P(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) \\ &= P(B \cap \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i) \\ &= P(\bigsqcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i) \end{aligned}$$

Avec $P(A_i) > 0$ pour définir les probabilités conditionnelles.

32.32 Exemple

Exemple 32.32

Dans une classe de 40 étudiants (25 filles et 15 garçons), le professeur principal se propose de désigner brutalement deux délégués provisoires. Il prend une liste de la classe, ferme les yeux et pointe au hasard un premier nom avec la pointe du stylo puis de même avec un deuxième. Avec quelle probabilité le deuxième nom tiré est celui d'un garçon ?

On note G_i : "le i-ème nom tiré est celui d'un garçon".
$\{G_1, \overline{G_1}\}$ forme un système complet d'évènements de probabilités strictement positives.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_2 \mid G_1) \times P(G_1) + P(G_2 \mid \overline{G_1}) \times P(\overline{G_1}) \\ &= \frac{14}{39} \times \frac{3}{8} + \frac{15}{39} \times \frac{5}{8} \end{aligned}$$

32.33 Formule de Bayes

Théorème 32.33

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ pour lequel $P(B) > 0$.

1. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, si $P(A) > 0$, alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) P(A)}{P(B)}$$

2. Soit $\{A_1, \ldots, A_n\}$ un système complet d'événements de Ω de probabilités strictement positives. Alors

$$\forall j \in [\![1, n]\!], P_B(A_j) = \frac{P_{A_j}(B) P(A_j)}{\sum\limits_{i=1} P_{A_i}(B) P(A_i)}$$

1.
$$P(A)P(B) = P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$$

2.
$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum\limits_{i=1} P(A_i)P(B \mid A_i)} \text{ (probas totales)}$$

32.35 Exemple

Exemple 32.35

Juge au tribunal, je dois juger de la culpabilité d'une compagnie de taxis bleus. Un soir de brouillard, un taxi a percuté un piéton qui traversait la rue dans son bon droit, puis a pris la fuite. Un témoin affirme que le taxi était bien bleu et c'est sur la base de ce témoignage que le procès a été instruit. Or dans la ville, deux compagnies de taxis se partagent le marché. La compagnie des taxis bleus et la compagnie des taxis verts. Toutefois, les taxis vert dominent le marché au sens où 90% des taxis dans la ville sont verts. On demande au témoin d'effectuer des tests de reconnaissance des couleurs pour mesurer la fiabilité de son témoignage. Il s'avère qu'il est fiable dans 90% des cas pour la couleur bleue et 80% des cas pour la couleur verte. Dois-je condamner ou non la compagnie des taxis bleus ?

— On note B : "le taxi coupable est bleu"
— On note T_B : "le témoin pense que le taxi coupable est bleu"

On souhaite calculer $P(B \mid T_B)$.

— $P(B) = 0.1$
— $P(T_B \mid B) = 0.9$
— $P(\overline{T_B} \mid \overline{B}) = 0.8$

On a :

$$\begin{aligned} P(B \mid T_B) &= \frac{P(T_B \mid B) \times P(B)}{P(T_B \mid B)P(B) + P(T_B \mid \overline{B})P(\overline{B})} \\ &= \frac{0.9 \times 0.1}{0.9 \times 0.1 + (1 - 0.8) \times 0.9} \\ &= \frac{9}{9 + 2 \times 9} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

32.37 Formule des probabilités composées

Théorème 32.37

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ pour lesquels $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, alors :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \dots \times P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} P(A_k \mid A_1 \dots A_{k-1}) &= \prod_{k=1}^{n} \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap A_k)}{p(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})} \\ &= P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

32.43 Indépendance et complémentarité

Théorème 32.43

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$. Si $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, les évènements $A_1^0, \dots, A_n^0$ le sont aussi, pour tout $A_1^0 \in \{A_1, \overline{A_1}\}, \dots, A_n^0 \in \{A_n, \overline{A_n}\}$.

- On s'occupe du cas $n = 2$.
  On généralise ensuite par récurrence.
- Soit A, B deux évènements indépendants.

$$\begin{aligned}P(A \cap \overline{B}) &= P(A \setminus B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(\overline{B})\end{aligned}$$

Donc A et $\overline{B}$ sont indépendants.

32.44 Exemple

Exemple 32.44

Le concept d'indépendance va maintenant nous permettre de définir une loi usuelle très importante en pratique : la loi binomiale. Intéressons-nous pour cela à la répétition n fois indépendamment d'une expérience aléatoire à deux issues, disons « favorable » et « défavorable » de probabilité p pour la première. Quelle est la loi du nombre X d'issues favorables ?

$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
Pour tout $i \in [\![1, n]\!], F_i$: "la i-ème issue est favorable".
Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned}(X = k) &= \bigsqcup_{I \in P_k([\![1,n]\!])} \left(\bigcap_{i \in I} F_i \bigcap_{i \notin I} \overline{F_i} \right) \\ P(X = k) &= \sum_{I \in P_k([\![1,n]\!])} P\left(\bigcap_{i \in I} F_i \cap \bigcap_{i \notin I} \overline{F_i} \right) \\ &= \sum_{I \in P_k([\![1,n]\!])} \prod_{i \in I} P(F_i) \prod_{i \notin I} P(\overline{F_i}) \text{ (indépendance)} \\ &= \sum_{I \in P_k([\![1,n]\!])} p^{|I|}(1-p)^{n-|I|} \\ &= p^k(1-p)^{n-k}|P_k([\![1,n]\!])| \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

32.48 Exemple

Exemple 32.48

On lance 5 fois un dé équilibré à 6 faces dont 2 blanches et 4 noires. Avec quelle probabilité obtient-on exactement 3 fois une face noire ?

Soit X le nombre de faces noires obtenues.
$X \hookrightarrow \mathcal{B}(5, \frac{4}{6})$.

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

32.50 Une propriété des couples de variables aléatoires indépendantes

Théorème 32.50

Soit (Ω, P) un espace probailisé fini et X et Y deux variables aléatoires sur Ω. Si X et Y sont indépendantes, alors pour toute parties A de $X(\Omega)$ et B de $Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendantes, i.e. :

$$P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}, B = \{b_1, \ldots, b_m\}$.

$$\begin{aligned} P(X \in A \text{ et } Y \in B) &= P\left(\bigsqcup_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p} (X = a_i) \text{ et } (Y = b_j)\right) \\ &= \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p} P(X = a_i \text{ et } Y = b_j) \\ &= \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p} P(X = a_i) P(Y = b_j) \\ &= \sum_{1 \le i \le n} P(X = a_i) \sum_{1 \le j \le p} P(Y = b_j) \\ &= P(X \in A) P(Y \in B) \end{aligned}$$

32.51 Exemple

Exemple 32.51

On lance un dé à 6 faces 2 fois et on note X_1 (resp. X_2) la face obtenue au premier (resp. au second) lancer. Avec quelle probabilité obtient-on els deux fois une face impaire ?

X_1 et X_2 sont indépendants.

$$\begin{aligned} P(X_1 \text{ et } X_2 \text{ impairs}) &= P(X_1 \text{ impair}) \times P(X_2 \text{ impair}) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

32.53 Exemple

Exemple

Soit $(p_1, \ldots, p_n) \in [0;1]^n$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(p_1), \ldots, \mathcal{B}(p_n)$, alors $X_1 \times \cdots \times X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p_1 \times \cdots \times p_n)$.

$X_i \hookrightarrow \mathbb{B}(p_i) : P(X_i = 1) = p_i$ $(P(X_i = 0) = 1 - p_i)$.
$(X_1 \times \cdots \times X_n)(\Omega) = P(X_1 = 1 \text{ et } \cdots \text{ et } X_n = 1)$.

$$\begin{aligned} P(X_1 \cdots X_n = 1) &= P(X_1 = 1 \text{ et } \cdots \text{ et } X_n = 1) \\ &= \prod_{k=1}^{n} (X_k = 1) \\ &= \prod_{k=1}^{n} p_k \end{aligned}$$

32.54 Exemple

Exemple 32.54

Un jeu de 32 cartes a été malicieusement truqué. On y a remplacé une autre carte que l'as de pique par un deuxième as de pique. On répète n fois avec remise l'expérience consistant à tirer 4 cartes. À partir de quelle valeur de n la probabilité de déceler la supercherie est-elle supérieure ou égale à 0.9 ?

Soit X la variable aléatoire donnant la 4-combinaison de cartes. On peut numéroter les cartes de 1 à 32, où 1 et 2 sont les as de pique.
$X \hookrightarrow \mathcal{U}(P_4[\![1, 32]\!])$.
On a :

$$\begin{aligned} P(\{1,2\} \subset X) &= \frac{\binom{32}{2}}{\binom{32}{4}} \\ &= \frac{29 \times 30}{2} \times \frac{4!28!}{32!} \\ &= \frac{3}{248} \end{aligned}$$

Sur n tirages successifs. La probabilité p de déceler la supercherie est :

$$p = 1 - \left(\frac{245}{248}\right)^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned} p \geq 0.9 &\Leftrightarrow \left(\frac{245}{248}\right)^n \leq 0.1 \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0.1}{\ln 245 - \ln 248} \end{aligned}$$

32.55 Indépendance des images de variables aléatoires indépendantes par des fonctions

Théorème 32.55

Soit $(\ \Omega, P\ )$ un espace probabilisé fini, E et F deux ensembles, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur Ω et $f : (X_1, \ldots, X_m)(\Omega) \to E$ et $g : (X_{m+1}, \ldots, X_n)(\Omega) \to F$ deux fonctions. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi.

On prouve le théorème dans le cas X, Y indépendantes.
Soit $f : X(\Omega) \to E$ et $g : Y(\Omega) \to F$.
Soit $a \in f \circ X(\Omega)$ et $b \in g \circ Y(\Omega)$.

$$\begin{aligned} P(f \circ X = a \text{ et } g \circ Y = b) &= P(X \in f^{-1}(\{a\})) \text{ et } Y \in g^{-1}(\{b\})) \\ &= P(X \in f^{-1}(\{a\})) \times P(Y \in g^{-1}(\{b\})) \\ &= P(f \circ X = a) \times P(g \circ Y = b) \end{aligned}$$

32.61 Calcul des lois marginales à partir de la loi conjointe

Théorème 32.61

Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω. La loi conjointe $P_{(X,Y)}$ du couple (X, Y) détermine entièrement ses lois marginales P_X et P_Y. Plus précisément, pour tout $x \in X(\Omega)$

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y)$$

et pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y)$$

Soit $x \in X(\Omega)$. On a :

$$(X = x) = \bigsqcup_{y \in Y(\Omega)} (X = x \text{ et } Y = y)$$

Donc :

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y)$$

32.63 Loi uniforme et produit cartésien

Théorème 32.63

Soit E et F deux ensembles finis et X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{U}(E \times F)$;
2. X et Y sont indépendantes et $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(F)$.

Cet énoncé se généralise sans difficulté au cas d'un nombre fini de variables aléatoires.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

On suppose que $(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{U}(E \times F)$.
Soit $x \in X(\Omega)$.

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y) \text{ (32.61)} \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \frac{1}{|E \times F|} \\ &= |F| \times \frac{1}{|E \times F|} \\ &= \frac{1}{|E|} \end{aligned}$$

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$.
De la même manière, $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(F)$.
Comme :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E \times F, P(X = x \text{ et } Y = y) &= \frac{1}{|E \times F|} \\ &= \frac{1}{|E|} \times \frac{1}{|F|} \\ &= P(X = x) \times P(Y = y) \end{aligned}$$

Donc X et Y sont indépendantes.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$
Soit $(x, y) \in E \times F$.

$$\begin{aligned} P(X = x \text{ et } Y = y) &= P(X = x) \times P(Y = y) \text{ (indépendance)} \\ &= \frac{1}{|E|} \times \frac{1}{|F|} \\ &= \frac{1}{|E \times F|} \end{aligned}$$

Donc $(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{U}(E \times F)$.

32.66 Exemple

Exemple 32.66

On lance deux fois un dé équilibré à 6 faces. La valeur obtenue au premier (resp. deuxième) lancer est notée X_1 (resp X_2). Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$, mais on pourrait dire de façon équivalente, comme nous l'avons vu plus haut, que le couple (X_1, X_2) suit la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]^2$. Déterminer la loi de la somme $S = X_1 + X_2$, la loi conditionnelle de X_1 sachant $(S = 4)$ et la loi de l'écart $E = |X_1 - X_2|$.

$S(\Omega) = [\![2, 12]\!]$.
Soit $i \in [\![2, 12]\!]$.

$$\begin{aligned} P(S = i) &= P(X_1 + X_2 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{i} P(X_1 = k \text{ et } X_2 = i - k) \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} P(X_1 = k) P(X_2 = i - k) \\ &= \sum_{k=\max(1, i-6)}^{\min(i-1, 6)} P(X_1 = k) P(X_2 = i - k) \\ &= \min(i - 1, 6) - \max(1, i - 6) \end{aligned}$$

Soit $j \in [\![1, 6]\!]$.

$$\begin{aligned} P(X_1 = 4 \mid S = 4) &= P(X_1 = 5 \mid S = 4) = P(X_1 = 6 \mid S = 4) = 0 \\ P(X_1 = j \mid S = 4) &= \frac{P(X_1 = j \text{ et } S = 4)}{P(S = 4)} \\ &= \frac{P(X_1 = j \text{ et } X_2 = 4 - j)}{P(S = 4)} \\ &= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3-1+1}{36}} \\ &= \frac{1}{3} \\ E(\Omega) &= [\![0, 5]\!] \\ P(E = 0) &= \sum_{k=1}^{n} P(X_1 = X_2 = k) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

etc.

32.67 Exemple

Exemple 32.67

Dans un centre d'appel, un employé effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts dont chacun décroche avec une probabilité p.

- On note N_1 le nombre de correspondants qui ont décroché. Quelle est donc la loi de N_1 ? Réponse sans calcul : $N_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ car les appels sont indépendants et la probabilité d'obtenir un correspondant ne dépend pas du correspondant choisi.
- L'employé rappelle un peu plus tard les $n - N_1$ correspondants qui n'ont pas décroché lors de sa première série d'appels. On note N_2 le nombre de ces correspondants qui décrochent cette fois et N le nombre total des correspondants qui ont décroché. Quelle est la loi de N ?

$N_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
$(N_2 \mid N_1 = k) \hookrightarrow \mathcal{B}(n - k, p)$.
$N(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
Soit $i \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
P(N = i) &= \sum_{k=0}^{n} P(N_2 = i \mid N_1 = k) P(N_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{i} P(N_2 = i - k \text{ et } N_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{i} P(N_2 = i - k \mid N_1 = k) P(N_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{i} \binom{n-k}{i-k} p^{i-k} (1-p)^{n-i} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{i} \binom{n-k}{i-k} \binom{n}{k} p^i (1-p)^{2n-i-k} \\
&= \sum_{k=0}^{i} \frac{(n-k)!}{(n-i)!(i-k)!} \frac{n!i!}{k!(n-k)!i!} p^i (1-p)^{2n-i-k} \\
&= \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{2n-i-k} \\
&= \binom{n}{i} p^i (1-p)^{2i} \sum_{k=0}^{n} \binom{i}{k} \left(\frac{1}{1-p} \right)^k \\
&= \binom{n}{i} p^i (1-p)^{2n-i} \left(1 + \frac{p}{1-p} \right)^i \\
&= \binom{n}{i} \frac{p^i (i-p)^{2n-1} (2-p)^i}{(1-p)^i} \\
&= \binom{n}{i} (p^2 + 2p)^i (1 - 2p + p^2)^{n-i}
\end{aligned}$$

$N \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 2p - p^2)$.

32.68 Somme de variables aléatoires indépendantes de lois binomiales

Théorème 32.68

Soit $p \in [0;1]$ et n et m deux entiers naturels non nuls et $X, Y, X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini.

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et si X et Y sont indépendantes alors
$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p)$$
2. Si pour tout $i \in [\![1,n]\!], X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$$

1. $(X+Y)(\Omega) = [\![0, n+m]\!]$.
   Soit $k \in [\![0, n+m]\!]$.
$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X=i \text{ et } Y=k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) \text{ (indépendance)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} \binom{n}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{n-k+i} \end{aligned}$$
   $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= p^k(1-p)^{m+n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} \\ &= p^k(1-p)^{m+n-k} \binom{m+n}{k} \text{ (Vandermonde)} \end{aligned}$$
   Donc $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p)$.
2. Si $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$ et on conclut avec $\boxed{1.}$.

32.69 Existence d'une famille finie de variables aléatoires de lois prescrites

Théorème 32.69

Soit $E = \{x_1, \ldots, x_r\}$ et $F = \{y_1, \ldots, y_s\}$ deux ensembles et $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s$ des réels de $[0;1]$ pour lesquels
$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{s} q_i = 1$$
Il existe alors un espace probabilisé (Ω, P) et des variables aléatoires indépendantes X et Y sur Ω pour lesquelles pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ et tout $j \in [\![1,s]\!], P(X = x_i) = p_i$ et $P(Y = y_j) = q_j$. Cet énoncé se généralise sans difficulté au cas d'un nombre fini de variables aléatoires.

On remarque que ($I = [\![1,r]\!], J = [\![1,s]\!]$).
$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)\in I\times J} p_i q_j &= \left(\sum_{i=1}^{r} p_i\right)\left(\sum_{j=1}^{s} q_j\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'après (32.28), il existe $z : \Omega \to E \times F$ tel que :

$$\forall (i, j) \in I \times J, P(z = x_i y_j) = p_i q_j$$

En notant $z = (X, Y)$, on vérifie :

$$\begin{aligned}
\forall i \in I, P(X = x_i) &= \sum_{j=1}^{s} P(X = X_i \text{ et } Y = y_j) \\
&= \sum_{j=1}^{s} P(z = (x_i, y_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{s} p_i q_j \\
&= p_i \sum_{j=1}^{s} q_j \\
&= p_i
\end{aligned}$$

Chapitre 33

Variables aléatoires réelles finies

33.3 Exemple

Exemple 33.3

Un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 a été truqué de telle sorte que les faces 1,2 et 3 tombent avec une probabilité $\frac{1}{6}$, les faces 4 et 5 avec une probabilité $\frac{1}{12}$ et 6 avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. Quelle numéro obtient-on en moyenne ?

$$\begin{aligned} E(X) &= 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{12}+5\times\frac{1}{12}+6\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{45}{12} \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

33.4 Espérance des lois usuelles

Théorème 33.4

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.

1. Variable aléatoire constante : si X est constante de valeur m, alors $\mathrm{E}(X) = m$.
2. Loi uniforme : si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$, alors $\mathrm{E}(X)$ est la moyenne naturelle des valeurs $x_1, \dots, x_n$ de X :
$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$
3. Loi de Bernoulli : soit $p \in [0;1]$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $\mathrm{E}(X) = p$.
4. Exemple fondamental : pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{E}(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
5. Loi binomiale : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathrm{E}(X) = np$.

1. Si $X(\Omega) = \{m\}, P(X=m) = 1$ et $E(X) = 1 \times m = m$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\}$ alors :
$$\forall i \in [\![1,n]\!], P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$
Donc :
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} P(X=x_k)x_k \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \end{aligned}$$
3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors :
$$\begin{aligned} E(X) &= 1\times p + 0 \times (1-p) \\ &= p \end{aligned}$$
4. Si $A \subset \Omega$, alors :
$$\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))\ (32.21)$$
Donc (3) $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
5. Par définition :
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)k \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Première méthode :
Soit $Q = (1-p+Y)^n \in \mathbb{R}[Y]$.

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}Y^k \text{donc } Q' = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}Y^{k-1}$$
$$\text{donc } YQ' = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}Y^k$$

Par ailleurs $YQ' = n(1-p+Y)^{n-1}$.
En évaluant les deux expressions en p, on obtient l'expression voulue :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np$$

Deuxième méthode :
On poursuit le calcul de $E(X)$ en utilisant la formule du capitaine.
Troisième méthode :
En utilisant la linéarité de l'espérance.

33.5 Propriétés de l'espérance

Propostion 33.5

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.

1. Reformulation : $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$.
2. Linéarité : pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\mathrm{E}(X) + \mu\mathrm{E}(Y)$.
3. Positivité : si $X \geq 0$, alors $\mathrm{E}(X) \geq 0$.
4. Croissance : si $X \leq Y$, alors $\mathrm{E}(X) \leq \mathrm{E}(Y)$.
5. Inégalité triangulaire : $|\mathrm{E}(X)| \leq \mathrm{E}(|X|)$.

1. On rappelle qe $\{(X=x)\}_{x\in X(\Omega)}$ est un SCE.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)x \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} \left[\sum_{\omega\in(X=x)} P(X=\omega)\right] x \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} E(\lambda X + \mu Y) &= \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})(\lambda X(\omega) + \mu Y(\omega)) \\ &= \lambda\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega) + \mu\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})Y(\omega) \\ &= \lambda E(X) + \mu E(Y) \end{aligned}$$

3. Si $X \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\omega\in\Omega} \underbrace{P(\{\omega\})}_{\geq 0}\underbrace{X(\omega)}_{\geq 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

4. RAS (2 + 3)

5.

$$\begin{aligned} |E(X)| &= \left| \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega) \right| \\ &\leq \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) |X(\omega)| \\ &= E(|X|) \end{aligned}$$

33.6 Exemple

Exemple 33.7

Qu'obtient-on en moyenne quand on lance deux fois un dé à 6 faces et qu'on additionne les résultats obtenus ?

$X_1, X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(P(\llbracket 1, 6 \rrbracket))$.

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2) &= E(X_1) + E(X_2) \\ &= 2 \times \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k \\ &= 7 \end{aligned}$$

33.7 Formule de transfert

Théorème 33.8

Soit X une variable aléatoire sur Ω et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction. L'espérance de $f(X)$ est entièrement déterminée par f et la loi de X :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x)$$

$\{(X = x)\}_{x \in X(\Omega)}$ est un SCE.

$$\begin{aligned} E(f(X)) &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(\{\omega\}) f(X(\omega)) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega \in (X = x)} P(\{w\}) f(X(\omega)) \right) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega \in (X = x)} P(\{w\}) \right) f(x) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x) \end{aligned}$$

33.10 Exemple

Exemple 33.10

Soit X une variable aléatoire suivant une loi unifore sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Donner un équivalent simple de $E(X)$ et de $E(X^2)$.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

—

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n+1}{2} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2} \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}k^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{3} \end{aligned}$$

33.11 Espérance du produit de deux variables aléatoires réelles indépendantes

Théorème 33.11

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Ce résultat s'étend naturellement à un nombre fini quelconque de variables aléatoires réelles indépendantes.

$$\begin{aligned} E(x)E(Y) &= \left(\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)x\right)\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y=y)y\right) \\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P(X=x)P(Y=y)xy \\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P(X=x \text{ et } Y=y)xy \text{ (indépendance)} \\ &= E(XY) \end{aligned}$$

33.13 Propriétés de la variance

Propostion 33.13

Soit X une variable aléatoire réelle.

1. $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$.
2. $\mathrm{V}(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = \mathrm{E}(X)) = 1$. On dit dans ce cas que X est presque sûrement constante.
3. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a
$$\mathrm{V}(ax+b) = a^2\ \mathrm{V}(X)$$

En particulier, si $\sigma(X) > 0$, la variable $\frac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

1.

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X-E(X))^2) \\ &= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} V(X)=0 &\Leftrightarrow E((X-E(X))^2)=0 \\ \text{(fonction de transfert)} \quad &\Leftrightarrow \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)(x-E(X))^2=0 \\ &\Leftrightarrow \forall x\in X(\Omega)\setminus\{E(X)\}, P(X=x)=0 \\ &= P(X=E(X))=1 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= E((aX+b-E(aX+b))^2) \\ &= E(a^2(X-E(X)))\ \text{(linéarité)} \\ &= a^2V(X)\ \text{(linéarité)} \end{aligned}$$

33.15 Propriétés de la covariance

Propostion 33.15

On a :

1. $\mathrm{V}(X)=\mathrm{cov}(X,X)$ et $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$.
2. $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$
3. $\mathrm{V}(X+Y)=\mathrm{V}(X)+2\cdot\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{V}(Y)$.
4. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ et $\mathrm{V}(X+Y)=\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)$.

Les assertions 3 et 4 se généralisent au cas de variables aléatoires réelles $X_1,\dots,X_n$ sur Ω. Dans ce cas :

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n \mathrm{V}\left(X_i\right)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{cov}\left(X_i,X_j\right)$$

Si $X_1,\dots,X_n$ sont (seulement) deux à deux indépendantes, alors

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n \mathrm{V}\left(X_i\right)$$

1. RAF
2.

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X,Y) &= E((X-E(X))(Y-E(Y))) \\ &= E(XY-E(X)Y-E(Y)X+E(X)E(Y)) \\ &= E(XY)-E(X)E(Y) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E((X+Y-E(X+Y))^2) \\ &= E((X-E(X))+(Y-E(Y)))^2 \\ &= V(X)+2\,\mathrm{cov}(X,Y)+V(Y) \end{aligned}$$

4. On suppose que X et Y sont indépendantes, donc :

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

Puis, par (2) :

$$\mathrm{cov}(X,Y)=0$$

33.16 Variance des lois usuelles

Théorème 33.16

Soit X une variable aléatoire réelle et $p \in [0;1]$.

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors $\mathrm{V}(X) = p(1-p)$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$.

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $X^2 \hookrightarrow B(p)$.
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$
2. Si $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $X_1, \dots, X_n$ indépendantes, alors :
$$\begin{aligned} V(X_1 + \cdots + X_n) &= \sum_{k=1}^{n} V(X_k) \text{ (indépendance)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} p(1-p) \text{ (1)} \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

33.17 Inégalité de Markov

Théorème 33.17

Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $a > 0$, on a
$$P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(|X|)}{a}$$

On remarque que :
$$\mathbb{1}_{(|X| \geq a)} a \leq \mathbb{1}_{(|X| \geq a)} |X| \leq |X|$$
Par croissance de l'espérance :
$$aP(|X| \geq a) = aE(\mathbb{1}_{(|X| \geq a)}) \leq E(|X|)$$

33.19 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 33.19

Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $a > 0$, on a
$$P(|X - \mathrm{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{a^2}$$

$$\begin{aligned} P(|X - E(X)|) = P((X - E(X))^2 \geq a^2) &\leq \frac{E((X - E(X))^2)}{a^2} \text{ (Markov)} \\ &= \frac{V(X)}{a^2} \end{aligned}$$

33.20 Exemple

Exemple 33.20

On dispose d'une pièce éventuellement truquée dont la probabilité d'obtention de pile est notée p. Pour connaître p, on lance cette pièce n fois et on note F la fréquence d'apparition de pile ainsi obtenue. À partir que quelle valeur de n la probabilité pour que F soit une approximation de p à 10^{-2} est-elle supérieure à 0.9 ?

On note X la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de piles obtenus.
Ainsi $F = \frac{X}{n}$.

$$\begin{aligned} P(|F-p| \geq 10^{-2}) \leq 0.9 &\Leftrightarrow 1 - P(|F-p| > 10^{-2}) \geq 0.9 \\ &\Leftrightarrow P(|F-p| > 10^{-2}) \leq 0.1 \\ &\Leftrightarrow P(|X-np| \geq 10^{-2}n) \leq 0.1 \end{aligned}$$

Or $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{aligned} P(|X-E(X)| > n \times 10^{-2}) &< \frac{V(X)}{n^2 \times 10^{-4}} \\ &= \frac{n(1-p)p}{n^2 \times 10^{-4}} \\ &\leq \frac{1}{4n \times 10^{-4}} \end{aligned}$$

Pour $n \geq \frac{10^5}{4}$, on a bien $P(|F-p| \leq 10^{-2}) \geq 0.9$.

Chapitre 34

Espaces préhilbertiens réels

34.4 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Théorème 34.4

L'application

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; (X,Y) \mapsto {}^tXY = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé produit scalaire canonique.

Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$:
- ${}^tXY \in \mathbb{R}$ donc ${}^tYX = {}^t({}^tXY) = {}^tXY$
- bilinéarité : RAF
- ${}^tXX = \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 0$ et $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$

34.5 Exemple

Exemple

Montrer que

$$(X,Y) \mapsto {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

est un exemple de produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ distinct du produit scalaire usuel.

- bilinéarité : RAF
- Pour $X, Y \in \mathbb{R}^2, {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \in \mathbb{R}$, donc :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y &= {}^t\left({}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y\right) \\ &= {}^tY {}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \\ &= {}^tY \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 \\ &= \underbrace{2(x^2+xy+y^2)}_{\geq 0 \text{ car } x^2+xy+y^2 \geq |xy|} \end{aligned}$$

En particulier, si ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = 0$ alors $|xy| = 0$, puis $x = y = 0$.
La forme est définie positive.

34.14 Identités remarquables

Propostion 34.14

Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

et

$$\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$$

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \text{ (bilinéarité)} \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \text{ (symétrie)}\end{aligned}$$

Idem pour la seconde identité.

34.15 Proposition 34.15 bis

Propostion 34.15 bis

Soit $\|.\|$ une norme euclidienne. Soit $x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.

- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|^2 &= \langle \lambda x, \lambda x\rangle \\ &= \lambda^2\|x\|^2\end{aligned}$$

34.16 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire

Théorème 34.16

Soit E un espace préhilbertien réel et x et y dans E.

- Inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.
- Inégalité triangulaire :
$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$
l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires.
- Inégalité triangulaire, version distance :
$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

- Si $x = 0$, l'inégalité est vérifiée pour tout $y \in E$.
On suppose $x \neq 0$. On considère, pour $y \in E$ fixé :
$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto \|tx+y\|^2 \\ &= \langle tx+y, tx+y\rangle \\ &= t^2\|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$
f est une fonction polynomiale de degré 2 ($\|x| \neq 0$) positive donc de discriminant $\Delta \leq 0$.
Or $\Delta = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$. D'où le résultat.
Si $\Delta = 0$, alors f s'annule une unique fois en t_0. On a alors $\|t_0x+y\|^2 = 0$.
Donc $t_0x + y = 0$.
Donc (x,y) est liée.
Réciproquement, si (x,y) est liée, alors $y = t_0x$ ($x \neq 0$) et on a encore $f(t_0) = 0$.
- Pour $(x,y) \in E^2$:
$$\begin{aligned}\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| &\Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\Leftrightarrow \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \leq \|x\|\|y\|\end{aligned}$$
La dernière assertion est vraie d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la première l'est tout autant.
RAS pour l'inégalité généralisée.
Si $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz affirme que (par ex) :
$$y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$$

Mais alors (en supposant $x \neq 0$) :

$$\|1+\alpha\|\|x\| = \|x+y\| = (1+|\alpha|)\|x\|$$

Donc $|1+\alpha| = 1+|\alpha|$.
Nécessairement, $\alpha \geq 0$

34.17 Exemple

Exemple 34.17

Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

On munit $E = \mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right| &\leq \left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\| \\
\left|\sum_{k=1}^{n} 1 \times x_k\right| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \\
&= \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}
\end{aligned}$$

34.18 Exemple

Exemple 34.18

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Pour tout $f \in \mathcal{C}^1([a;b], \mathbb{R})$, on a

$$f(b)^2 - f(a)^2 \leq 2\sqrt{\int_a^b f(t)^2 \, dt} \sqrt{\int_a^b f'(t)^2 \, dt}$$

On munit $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) \cdot \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) \, dt$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs f et f' :

$$\begin{aligned}
\|f\| \times \|f'\| &\geq |\langle f, f' \rangle| \\
&= \left| \int_a^b f(t) f'(t) \, dt \right| \\
&= \left| \left[\frac{f^2(t)}{2} \right]_a^b \right| \\
&= \left| \frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2} \right|
\end{aligned}$$

34.20 Vecteur orthogonal à tout vecteur

Théorème 34.20

Dans un espace préhilbertien réel, le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur.

$\boxed{\Rightarrow}$ RAF
$\boxed{\Leftarrow}$ Si x est orthogonal à tout vecteur de E, alors $x \perp x$, donc $\|x\|^2 = 0$, donc $x = 0$.

34.21 Exemple

Exemple 34.21

Exemple 34.21 Montrer que pour le produit scalaire

$$(X, Y) \mapsto^t X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

sur $\mathbb{R}^2$, la base canonique n'est pas orthormale, mais la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2)\right)$ l'est.

$\|(1,0)\| = \sqrt{2} = \|(0,1)\|$
$\langle (1,0), (0,1) \rangle = 1$
Donc
$|\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0)\| = 1$
On a $\|(1,-2)\| = \sqrt{6}$
Et $\langle (1,0), (1,-2) \rangle = 0$.

34.23 Exemple

Exemple 34.23

La famille des fonctions $t \mapsto \sin(nt)$, où $n \in \mathbb{N}$ est orthonormale dans $\mathcal{C}([0; 2\pi], \mathbb{R})$ pour le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\, dt$$

On note pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}; x \mapsto \sin(nx)$.
Soit $p \neq n$.

$$\begin{aligned}
\langle f_p, f_n \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_n(t) f_p(t)\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(pt)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{n-p} \sin((n-p)t) - \frac{1}{n+p} \sin((n+p)t) \right]_0^{2\pi} \quad (n \neq p) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si $n = p$ alors :

$$\begin{aligned}
\|f_n\| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2nt))\, dt \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc (f_n) est bien une famille orthonormée.

34.24 Exemple

Exemple 34.24

Dans $\mathcal{C}([-1;1],\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux pour le produit scalaire

$$(f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$$

D'après le chapitre 4, si f est impaire :

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0$$

Si f est paire et g impaire, alors fg est impaire et ainsi $\langle f,g\rangle = 0$.

34.25 Propriétés des familles orthogonales

Théorème 34.25

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. Théorème de Pythagore : pour tout $(x,y) \in E^2$, x et y sont orthogonaux ssi $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. De surcro ^ it, si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

2. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre. En particulier, si E est de dimension finie n non nulle, toute famille orthogonale de n vecteurs est une base orthogonale.

1. RAF
2. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale. Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires à support fini. On suppose en outre que :

$$\forall i \in I, e_i \neq 0$$

On suppose que $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i e_i = 0$.
Soit $j \in I$.

$$\begin{aligned} \langle \sum_{i\in I} \lambda_i e_i, e_j\rangle &= 0 \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=0 \text{ pour } i\neq j} \\ \text{donc } \lambda_j \|e_j\|^2 &= 0 \\ \text{donc } \lambda_j &= 0 \end{aligned}$$

Donc la famille est libre.

34.26 Coordonnées dans une base orthonormale

Théorème 34.26

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle et $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E, et $x \in E$. Alors

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k$$

Autrement dit, les coordonnées de x dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ sont $(\langle x,e_1\rangle,\dots,\langle x,e_n\rangle)$.

Comme $(e_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une base, tout $x \in E$ s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Soit $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\langle x, e_j\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \lambda_j\end{aligned}$$

34.27 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale

Théorème 34.27

Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien et $(x,y) \in E^2$ de coordonnées respectives $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans une certaine base orthonormale de E. Alors

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^{\mathrm{t}}XY \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = {}^{\mathrm{t}}XX$$

Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormale de E. Pour $(x,y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i \\ y &= \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i\rangle e_i\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j\rangle e_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\end{aligned}$$

34.28 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 34.28

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. On peut transformer $(e_1, \ldots, e_n)$ en une famille orthonormale de $(u_1, \ldots, u_n)$ de E telle que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_k)\,.$$

Les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ peuvent être construits de proche en proche depuis u_1 jusqu'à u_n et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on n'a que deux choix possibles pour u_k :

$$\pm \frac{e_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i\rangle u_i}{\left\| e_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i\rangle u_i \right\|}$$

- Nécessairement, $u_1 = \pm \frac{e_1}{\|e_1\|}$ pour que u_1 soit unitaire et $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(u_1)$.
- Supposons construits $(u_1, \dots, u_k)$, $k \leq n-1$ vérifiant :
  - $Vect(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$
  - $(u_1, \dots, u_k)$ est une famille orthornormale

  Soit $v \in E$. Ccomme $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1})$. Si $v \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$, on a alors :

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i + \mu_{k+1} e_{k+1}$$

  On a :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k, v) \Leftrightarrow \lambda_{k+1} \neq 0$$

  On suppose désormais $\lambda_{k+1} \neq 0$.
  On a $(u_1, \dots, u_k, v)$ une familel orthogonale si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\forall i \in [\![1, k]\!], \langle u_i, v\rangle = 0 \\
\text{ssi. } &\forall i \in [\![1, k]\!], 0 = \langle u_1, \sum_{p=1}^{k} \lambda_p u_p + \lambda_{k+1} e_{k+1}\rangle \\
&= \sum_{p=1}^{k} \lambda_p \langle u_i, u_p\rangle + \lambda_{k+1}\langle u_i, e_{k+1}\rangle \\
&= \lambda_i + \lambda_{k+1}\langle u_i, e_{k+1}\rangle \\
\text{ssi. } &\forall i \in [\![1, k]\!], \lambda_i = -\lambda_{k+1}\langle u_i, e_{k+1}\rangle \\
\text{ssi. } &v = \lambda_{k+1}(e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, e_k\rangle u_i)
\end{aligned}$$

  Ainsi, $(u_1, \dots, u_{k+1})$ est orthonormée avec $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ si et seulement si :

$$u_{k+1} = \pm \frac{e_{k+1} - \sum\limits_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}, u_i\rangle u_i}{\|e_{k+1} - \sum\limits_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}, u_i\rangle u_i\|}$$

34.29 Exemple

Exemple 34.29

Sur $\mathbb{R}[X]$, la famille $\left(1, \sqrt{3}(2X-1), \sqrt{5}\left(6X^2 - 6X + 1\right)\right)$ est orthonormale pour le produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

On orthonormalise $(1, X, X^2) = (P_0, P_1, P_2)$ avec Gram-Schmidt.

- $\|P_0\| = 1$ donc on pose $V_0 = P_0$.
- Soit $\tilde{V_1} = X + aV_0$

$$\langle \tilde{V_1}, V_0\rangle = \langle X, V_0\rangle + a\|V_0\|^2 = \frac{1}{2} + a$$

  On pose donc $\tilde{V_1} = X - \frac{1}{2}$. On a :

$$\begin{aligned}
\|\tilde{V_1}\|^2 &= \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 \, dt \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

On pose $V_1 = \frac{\tilde{V_1}}{\|V_1\|} = \sqrt{12}(X - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}(2X-1)$.
On pose $\tilde{V_2} = X^2 + aV_1 + bV_0$.
On a :

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{V_2}, V_1\rangle &= \langle X^2, V_1\rangle + a\|V_1\|^2 \\
&= \sqrt{3}\int_0^1 t^2(2t-1)\,dt + a \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6} + a \\
\langle \tilde{V_2}, V_0\rangle &= \langle X^2, V_0\rangle + b\|V_0\|^2 \\
&= \frac{1}{3} + b
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
\tilde{V_2} &= X^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{3}(2X-1) - \frac{1}{3} \\
&= X^2 - X + \frac{1}{6} \\
\|\tilde{V_2}\|^2 &= \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2\,dt \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{180}
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
V_2 &= \sqrt{180}(X^2 - X + \frac{1}{6}) \\
&= \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)
\end{aligned}$$

34.34 Propriétés de l'orthogonal d'une partie

Propostion 34.34

Avec les mêmes hypothèses que la définition précédente :

1. $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, orthogonal à X.
2. Si X est un sous-espace vectoriel de E, orthogonal à X.
3. Si $X \subset Y$ alors $Y^\perp \subset X^\perp$.
4. On a $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$ et $X \subset (X^\perp)^\perp$

1. $X^\perp \perp X$.

   — $X^\perp \subset E$
   — $0 \in X^\perp$
   — Si $(t,u) \in (X^\perp)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:

   $$\begin{aligned}
   \forall x \in X, \langle t + \alpha u, x\rangle &= \langle t, x\rangle + \alpha\langle u, x\rangle \\
   &= 0
   \end{aligned}$$

   Donc $t + \alpha u \in X^\perp$.
   Donc $X^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

2. On suppose X un sous-espace vectoriel de E.
   Soit $X \in X \cap X^\perp$ donc $x \perp x$ donc $x = 0_E$.
   Donc $X \cap X^\perp = \{0_E\}$.

3. Soit $X \subset Y$ et $t \in Y^\perp$.
   Donc :
$$\forall x \in Y, \langle x, t\rangle = 0$$
   Donc :
$$\forall x \in X, \langle x, t\rangle = 0$$
   Donc $t \in X^\perp$.
4. Comme $X \subset \mathrm{Vect}(X)$, on a :
$$\mathrm{Vect}(X)^\perp \subset X^\perp$$
   Soit $t \in X^\perp$. Soit $u = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \in \mathrm{Vect}(X)$ ($X_i \in X$ et (λ_i) famille à support fini).
$$\langle t, u\rangle = \sum_{i\in I} \lambda_i \langle t, x_i\rangle = 0$$
   Donc $t \in \mathrm{Vect}(X)^\perp$.

34.38 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie

Théorème 34.38

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
1. $F^\perp$ est l'unique supplémentaire de F dans E orthogonal à F. On l'appelle le supplémentaire orthogonal de F dans E.
2. $F^{\perp\perp} = F$.

1. <u>Existence :</u>
   On remarque que la propriété est vraie pour $F = \{x\}$.
   On suppose $F \neq \{0_E\}$.
   Comme F est de dimension finie non nulle il possède une base orthonormée notée $(e_1, \dots, e_n)$.
   Soit $x \in E$, on décompose $x = \underbrace{x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k}_{:=v} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k}_{\in F}$.
   Or pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:
$$\begin{aligned}\langle v, e_i\rangle &= \langle x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k, e_i\rangle \\ &= \langle x, e_i\rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle\langle e_k, e_i\rangle \\ &= \langle x, e_i\rangle - \langle x, e_i\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$
   Donc $v \in F^\perp$.
   <u>Unicité :</u>
   On suppose que $F \oplus \perp G = F \oplus \perp F^\perp$.
   Par définition, $G \subset F^\perp$.
   Soit $t \in F^\perp$.
   On décompose $t = f + g$.
$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \langle f, f\rangle \\ &= \langle f, t - g\rangle \\ &= \langle f, t\rangle - \langle f, g\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

2. On sait que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.
   Soit $x \in (F^{\perp})^{\perp}$.
   D'après (1), $x = f + v$ avec $f \in F, v \in F^{\perp}$.
   Or :
$$\begin{aligned}\|v\|^2 = \langle v, v\rangle &= \langle v, x - f\rangle \\ &= \langle v, x\rangle - \langle v, f\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$
   Donc $v = 0$.

34.49 Exemple

Exemple 34.49

On note F le sous-espace vectoriel Vect(sin, cos) de $\mathcal{C}([0;2\pi],\mathbb{R})$. Montrer que le projeté orthogonal de l'identité sur F pour le produit scalaire

$$(f,g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

est la fonction $t \mapsto -2\sin t$.

Première Méthode :

—
$$\begin{aligned}\|\sin\|^2 &= \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,dt = \pi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt \\ &= \pi \\ &= \|\cos\|^2\end{aligned}$$

—
$$\begin{aligned}\langle \cos, \sin\rangle &= \int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2t)\,dt \\ &= 0\end{aligned}$$

On note $f_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin$ et $f_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos$.
(f_1, f_2) est une base orthonormée de F.
D'après le cours :

$$P_F(\mathrm{id}) = \langle \mathrm{id}, f_1\rangle f_1 + \langle \mathrm{id}, f_2\rangle f_2$$

Or :

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{id}, \sin\rangle &= \int_0^{2\pi} \sin(t)\,dt \\ &= [-t\cos(t)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(t)\,dt \\ &= -2\pi \\ \langle \mathrm{id}, \cos\rangle &= \int_0^{2\pi} t\cos(t)\,dt \\ &= [t\sin(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(t)\,dt \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P_F(\mathrm{id}) &= \langle \mathrm{id}, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \angle \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \\ &= -2\sin \end{aligned}$$

Deuxième Méthode :
$P_F(\mathrm{id}) \in \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$.
On écrit donc :

$$P_F(\mathrm{id}) = a\sin + b\cos$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathrm{id} - P_F(\mathrm{id}) \in F &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \mathrm{id} - P_F(\mathrm{id}), \sin\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{id} - P_F(\mathrm{id}), \cos\rangle = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \mathrm{id}, \sin\rangle - a\|\sin\|^2 - b\langle \sin, \cos\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{id}, \cos\rangle - a\langle \sin, \cos\rangle - b\|\cos\|^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2\pi - a\pi - b \times 0 = 0 \\ 0 - a \times 0 + b\pi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

34.50 Exemple

Exemple 34.50

Soit E un espace euclidien de dimension finie non nulle et H un hyperplan de E de vecteur normal a. On note p la projection orthogonale sur H. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$p(x) = x - \frac{\langle x, a\rangle a}{\|a\|^2}$$

En notant q la projection orthogonale sur $H^\perp$.
Or $H^\perp = \mathrm{Vect}(a) = \mathrm{Vect}\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$.

$$\begin{aligned} q(x) &= \langle x, \frac{a}{\|a\|}\rangle \frac{a}{\|a\|} \\ &= \frac{\langle x, a\rangle a}{\|a\|^2} \end{aligned}$$

34.53 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Théorème 34.53

Soit E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de dimension finie et $x \in E$. On note p la projection orthogonale sur F.

1. On a
$$d(x, F) = \|x - p(x)\| = d(x, p(x))$$
La distance de x à F est donc atteinte et est donc un minimum. Le minimum est donc atteint en projetant x orthogonalement sur F.
2. Par ailleurs
$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2$$

Comme F est un espace vectoriel de dimension finie, p est bien définie.
Soit $f \in F$. On écrit :

$$\begin{aligned} \|x - f\|^2 &= \|\underbrace{x - p(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p(x) - f}_{\in F}\|^2 \\ &= \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2 \text{ (Pythagore)} \\ &\geq \|x - p(x)\|^2 \end{aligned}$$

Donc $\|x-f\| \geq \|x-p(x)\|^2$.
Donc $\|x-f\| \geq \|x-p(x)\|$ ($t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante).
Par définition de la borne inférieure :

$$d(x,F) \geq \|x-p(x)\|$$

Or $p(x) \in F$ donc $\|x-p(x)\| \in \{d(x,f), f \in F\}$.
Donc $d(x,F) = \|x-p(x)\|$.
La dernière égalité provient du théorème de Pythagore.

34.54 Distance à un hyperplan affine

Théorème 34.54

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{H}$ un hyperplan affine passant par A et de vecteur normal unitaire a. Pour tout $M \in E$, on a

$$d(M,\mathcal{H}) = |\langle \overrightarrow{AM}, a\rangle|$$

On note H la direction de $\mathcal{H}$.

$$\begin{aligned} d(M,\mathcal{H}) &= d(M, A+H) \\ &= d(M-A, H) \\ &= d(\vec{AM}, H) \\ &= \|\vec{AM} - P_H(\vec{AM})\| \text{ (34.53)} \\ &= \|\langle \vec{AM}, a\rangle a\| \text{ (34.50)} \\ &= |\langle \vec{AM}, a\rangle| \text{ (a unitaire)} \end{aligned}$$

Exercice 6

D'après le cours :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 &\to \mathbb{R} \\ (A,B) &\mapsto \operatorname{tr}({}^tAB) \end{aligned}$$

définit un produit scalaire dont N est la norme associée.
Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

$$\begin{aligned} N(AB)^2 &= \operatorname{tr}({}^tABAB) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (AB)_{ji}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n A_{jk}B_{ki}\right]^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n A_{jk}^2\right] \times \left[\sum_{p=1}^n B_{pi}^2\right] \text{ (Cauchy-Schwarz)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n B_{pi}^2\right) \times \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk}^2\right) \\ &= N(A)^2 N(B)^2 \end{aligned}$$

Exercice 7

1. (a) RAF d'après la définition d'un produit scalaire.

(b) Pour $u \in E$, on note $f_u : E \to \mathbb{R}; x \mapsto \langle u, x\rangle$ et on note $f : E \to E^*; u \mapsto f_u$.
On a $\dim(E^*) = \dim(E)$ donc f est surjective.
Soit $u \in \ker f$. Donc :

$$\forall x \in E, \langle u, x\rangle = 0$$

Donc $u = 0_E$.
Donc f est injective.
Donc f est bijective.

2. (a) On munit $\mathbb{R}_n[X]$ (de dimension finie) du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$$

On note $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}; P \mapsto P(0)$.
Ainsi, $\varphi \in \mathbb{R}_n[X]^*$.
D'après (1.b), il existe un unique $A \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] : \varphi(P) = \langle A, P\rangle$$

(b) Par l'absurde, supposons qu'il existe $A \neq 0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P(t)A(t)\, dt = P(0)$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t^k A(t)\, dt = 0$.
En particulier, $\int_0^1 tA(t)\, dt = 0$.
Donc $t \mapsto tA(t)$ doit s'annuler sur $]0, 1[$.
Donc A possède au moins une racine sur $]0, 1[$.
Notons $r_1, \dots, r_k$ les racines de A sur $]0, 1]$. $(k \leq n)$
On pose $P = X \prod_{i \in [\![1,k]\!]}(X - r_i) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.
On a $\int_0^1 \underbrace{P(t)A(t)}_{\text{de signe constant}}\, dt = P(0) = 0$.
Donc $PA = 0$. Absurde.

Exercice 10

— Soit $e = (e_1, \dots, e_n), \mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ deux bases orthonormales de E.
On pose $P = P_b^e$. Simplifions ${}^tPP$.
On note $E_1, \dots, E_n$ les colonnes de P.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$\begin{aligned} [{}^tPP]_{ij} &= {}^tE_iE_j \\ &= \langle e_i, b_j\rangle \text{ (b orthonormée)} \\ &= \delta_{ij} \text{ (e orthonormale)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$${}^tPP = I_n$$

— Réciproquement si b est toujours orthonormée, si ${}^tPP = I_n$ alors e est une base orhtonormée.
— Si ${}^tPP = I_n$, alors $\det P = \pm 1$.
— Retour à l'exercice. Soit B une base orthonormée.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.
  — Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, l'inégalité est vérifiée ($\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$)
  — On suppose donc que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, donc une base de E.
  On orthonormalise cette pas par le procédé de Gram-Schmidt. On noté e la base obtenue.
  On a :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{B}}^e P_e^{\mathcal{F}} \text{ (changement de bases)}$$

avec $\det(P_{\mathcal{B}}^{e}) = \pm 1$, $P_e^{\mathcal{F}}$ triangulaire supérieure (avec une diagonale strictaire positive si on choisit avec un plus dans Gram-Schmidt).

$$\begin{aligned}
|\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})| &= |\det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}})| \\
&= |\det(P_{\mathcal{B}}^{e})| \times |\det(P_e^{\mathcal{F}})| \\
&= |\det(P_e^{\mathcal{F}})| \\
&= \left|\prod_{k=1}^{n} \langle x_k, e_k \rangle\right| \\
&\leq \prod_{k=1}^{n} \|x_k\| \|e_k\| \text{ (Cauchy-Schwarz)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|
\end{aligned}$$

Chapitre 35

Familles sommables

35.2 Reformulation

Propostion 35.2

Soit $\sum a_n$ une séries à termes positifs. Alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ est bien définie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$et

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \sup\left\{\sum_{k\in J} a_k, J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$$

En notant, pour $n\in\mathbb{N}, S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, on a :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\geq 0}^{a_k}$$

Or pour tout $n\in\mathbb{N}, S_n\in\left\{\sum_{k\in J} a_k \mid J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$.
Donc $\sum_{k\geq 0} a_k \leq \sup\left\{\sum_{k\in J} a_k \mid J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\} = S$.
Par ailleurs, pour $J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, on pose $N=\max J$ et $J\subset [\![0,N]\!]$ et :

$$\sum_{k\in J} a_k \leq \sum_{k=0}^{N} a_k \leq \sum_{k>0} a_k$$

Par définition de la borne supérieure :

$$S\leq \sum_{k\geq 0} a_k$$

Donc :

$$\sum_{k\geq 0} a_k = S$$

35.5 Croissance de la somme

Propostion 35.5

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Si pour tout $i\in I, a_i\leq b_i$, alors

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

Soit $J\in\mathcal{P}_f(I)$. Comme :

$$\forall i\in J, a_i\leq b_i$$

Alors :

$$\sum_{i\in j} a_i \leq \sum i\in J b_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

$\sum\limits_{i\in I} b_i$ est un majorant de $\left\{\sum_{i\in J} a_i \mid J\in\mathcal{P}_f(I)\right\}$.
Par définition :

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

35.8 Lien avec les séries à termes positifs

Propostion 35.8

Soit $\sum a_n$ une séries à termes positifs.

1. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (le terme de gauche correspond à la somme de la série tandis que le terme de droite à la somme de la famille sommable).
2. En particulier, $\sum a_n$ converge si et seulement si la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

1. (35.2)
2. Théorème de la Limite Monotone

35.10 Invariance de la somme d'une série à termes positifs par permutation des termes

Corollaire 35.10

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

Cette égalité reste vraie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}}$.
σ induit une bijection $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}_f(\mathbb{N}); J \mapsto \sigma(J)$ de $\left\{\sum_{i\in J} | J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$ sur $\left\{\sum_{i\in I} a_{\sigma(i)} \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$.
Ces deux ensembles ont donc la même borne supérieure. Donc :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{\sigma(i)}$$

Soit :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{\sigma(i)} \text{ (35.8)}$$

35.12 Restriction

Propostion 35.12

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Soit $J \subset I$, alors :

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

Comme $\mathcal{P}_f(J) \subset \mathcal{P}_f(I)$:

$$\left\{\sum_{j\in K} a_j \mid K \in \mathcal{P}_f(J)\right\} \subset \left\{\sum_{j\in K} a_j \mid K \in \mathcal{P}_f(I)\right\}$$

Donc (Chapitre 9) :

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

35.13 Preque linéarité

Propostion 35.13

Soit (a_i) et (b_i) deux familles d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$et $(\lambda, \mu) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$. On a

$$\sum_{i\in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i$$

On rappelle (Chapitre 9) que :

$$\sup(aA + bB) = a \sup A + b \sup B$$

($a \geq 0, b \geq 0$ et $\sup A, \sup B$ existent).

35.14 Sommation par paquets

Théorème 35.14

Soit I un ensemble quelconque et $I = \bigsqcup_{k\in K} I_k$ un recouvrement disjoint de I. Soit $a = (a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K} \left(\sum_{i\in I_k} a_i \right)$$

— Montrons que $\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{k\in K} \left(\sum_{i\in I_k} a_i \right)$:
Soit $J \in \mathcal{P}_f(I)$.
Pour tout $k \in K$, on note $J_k = J \cap I_k$.
Ainsi, $J_k \in \mathcal{P}_f(I_k)$ et :

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{k\in K} J_k &= \bigsqcup_{k\in K} (J \cap I_k) \\ &= J \cap \bigsqcup_{k\in K} I_k \\ &= J \cap I \\ &= J \end{aligned}$$

On pose également $L = \{k \in K, J_k \neq \emptyset\}$.
Alors $L \in \mathcal{P}_f(K)$ et :

$$\bigsqcup_{k\in L} J_k = \bigsqcup_{k\in K} J_k = J$$

Les ensembles étant finis :

$$\sum_{i\in J} a_i = \sum_{k\in L} \sum_{i\in J_k} a_i \leq \sum_{k\in L} \sum_{i\in I_k} a_i \leq \sum_{k\in K} \sum_{i\in I_k} a_i$$

Par définition de la borne supérieure :

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{k\in K} \sum_{i\in I_k} a_i$$

— On prouve $\sum_{k\in K} \sum_{i\in I_k} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$.
Soit $L \in \mathcal{P}_f(K)$.
Soit, pour $k \in L, J_k \in \mathcal{P}_f(I_k)$. $\bigsqcup_{k\in L} J_k$ est donc une partie finie de I.

$$\underbrace{\sum_{k\in L} \sum_{i\in J_k} a_i}_{\text{car } \bigsqcup J_k \text{ est fini}} \leq \sum_{i\in I} a_i$$

En utilisant un nombre fini de fois la définition de la borne supérieure :

$$\sum_{k\in L}\sum_{i\in I_k} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

Toujours par définition de la borne supérieure :

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

35.16 Théorème de Fubini positif

Corollaire 35.16

Soit I et J deux ensembles quelconques et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs. Alors

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}$$

$$\bigsqcup_{j\in J} I\times\{j\} = I\times J = \bigsqcup_{i\in I}\{i\}\times J$$

On conclut avec le théorème de sommation par paquets.

35.17 Exemple

Exemple 35.17

Montrer que $\sum\limits_{n\geq 2}(\zeta(n)-1) = 1$.

$\left(\frac{1}{k^n}\right)_{n\geq 2, k\geq 2}$ est une famille de $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^n} - 1\right) &= \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k^n}\right) \\
&= \sum_{k\geq 2}\left(\sum_{n\geq 2}\frac{1}{k^n}\right) \text{ (Fubini positif)} \\
&= \sum_{k\geq 2}\left(\frac{1}{k^2}\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right) \text{ (progresion géométrique)} \\
&= \sum_{k\geq 2}\frac{1}{k^2-k} \\
&= \sum_{k\geq 2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \text{ (DES)} \\
&= 1 \text{ (télescopage)}
\end{aligned}$$

35.18 Exemple

Exemple 35.18

Montrer que :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n} = 2$$

$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{1\leq k\leq n}$ est une famille de $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n} &= \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\\
&= \sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{2^n}\\
&= \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{n\geq k}\frac{1}{2^n}\right) \text{ (Fubini positif)}\\
&= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^k}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \text{ (progresion géométrique)}\\
&= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^{k-1}}\\
&= 2
\end{aligned}$$

35.19 Exemple

Exemple 35.19

Pour quelles valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ la somme $\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*}\frac{pq}{(p+q)^\alpha}$ est-elle réelle ?

$\left(\frac{pq}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q\geq 1}$ est une famille de réels positifs.

$$\begin{aligned}
\sum_{p\geq 1,q\geq 1}\frac{pq}{(p+q)^\alpha} &= \sum_{d\geq 1}\sum_{p=0}^{d}\frac{p(d-p)}{d^\alpha} \text{ (sommation par paquets)}\\
&= \sum_{d\geq 2}\sum_{p=0}^{d}\frac{p(d-p)}{d^\alpha}\\
&= \sum_{d\geq 2}\sum_{p=0}^{d}\left(\frac{p}{d^{\alpha-1}}-\frac{p^2}{d^\alpha}\right)\\
&= \sum_{d\geq 2}\left(\frac{d(d+1)}{2d^{\alpha-1}}-\frac{d(d+1)(2d+1)}{6d^{\alpha-1}}\right) \text{ (sommes usuelles)}\\
&= \sum_{d\geq 2}\frac{d+1}{d^{\alpha-1}}(3d-2d-1)\\
&= \sum_{d\geq 2}\frac{d^2-1}{6d^{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{d^2-1}{6d^{\alpha-1}}\sim\frac{1}{6d^{\alpha-3}}$$

D'après le TCSATTPE, la somme est finie si et seulement si $\alpha>4$.

35.25 Caractérisation de la sommabilité par les parties réelles et imaginaires, parties positives et négatives

Théorème 35.5

1. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\left(a_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(a_i^-\right)_{i\in I}$ le sont.
2. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(\mathrm{Re}\,(a_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}\,(a_i))_{i\in I}$ le sont.

1. On rappelle que :

$$\forall i \in I, a_i = a_i^+ - a_i^-$$

et :

$$\begin{aligned}\forall i \in I, 0 \leq a_i^+ &\leq |a_i| \\ 0 \leq a_i^- &\leq |a_i|\end{aligned}$$

Si (a_i) est sommable, alors $\left(a_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(a_i^-\right)_{i\in I}$ le sont aussi (35.24).
Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\forall i \in I, |a_i| \leq a_i^+ + a_i^-$$

Donc si $\left(a_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(a_i^-\right)_{i\in I}$ sont sommables, alors (a_i) est sommable (35.24) et (35.13).

2. Démonstration similaire.

35.27 Caractérisation de la somme par les ϵ

Propostion 35.27

Soit $(a_i)_{i\in I} \in \ell(I)$ et $S \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $S = \sum\limits_{i\in I} a_i$
2. pour tout $\epsilon > 0$, il existe $J_\epsilon \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que pour tout $K \in \mathcal{P}_f(I)$ avec $J_\epsilon \subset K$:

$$\left| S - \sum_{i\in K} a_i \right| \leq \epsilon$$

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que $S = \sum\limits_{i\in I} a_i$ (avec (a_i) une famille de réels).
On décompose :

$$\forall i \in I, a_i = a_i^+ - a_i^-$$

Et :

$$S = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- = S^+ - S^-$$

On note également :

$$\begin{aligned}A_+ &= \left\{ \sum_{i\in J} a_i^+ \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\} \\ A_- &= \left\{ \sum_{i\in J} a_i^- \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$.
$S^+ - \frac{\epsilon}{2}$ ne majore pas A_+, on choisit $J_\epsilon^+ \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que :

$$S^+ - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{i \in J_\epsilon^+} a_i^+$$

Pour les mêmes raisons, on choisit $J_\epsilon^- \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que :

$$S^- - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{i \in J_\epsilon^-} a_i^-$$

Pour tout $K \in \mathcal{P}_f(I)$ avec $K \supset J_\epsilon = J_\epsilon^+ \cup J_\epsilon^-$.

$$\begin{aligned} S^+ - \frac{\epsilon}{2} &< \sum_{i \in J_\epsilon^+} a_i^+ \leq \sum_{i \in K} a_i^+ \\ S^- - \frac{\epsilon}{2} &< \sum_{i \in J_\epsilon^-} a_i^- \leq \sum_{i \in K} a_i^- \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \left| S - \sum_{i \in K} a_i \right| &= \left| S^+ - \sum_{i \in K} a_i^+ - S^- + \sum_{i \in K} a_i^- \right| \\ &\leq \left| S^+ - \sum_{i \in K} a_i^+ \right| + \left| S^- - \sum_{i \in K} a_i^- \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$
SUpposons qu'il existe S et S' vérifiant la condition 2. Alors pour tout $\epsilon > 0$, n notant J_ϵ l'ensemble de l'assertion :

$$\begin{aligned} |S - S'| &= |S - \sum_{i \in J_\epsilon} a_i + \sum_{i \in J_\epsilon} a_i - S'| \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

Donc $S = S'$.

35.28 Linéarité

Théorème 35.28

L'ensemble $\ell^1(I)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $(a_i)_{i \in I} \to \sum_{i \in I} a_i$ est une forme linéaire sur $\ell^1(I)$.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

— — $\ell^1(I) \subset \mathbb{K}^I$.
  — Soit $(a_i), (b_i)$ dans $\ell^1(I)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} |\lambda a_i + \mu b_i| &\leq \sum_{i \in I} |\lambda||a_i| + |\mu||b_i| \\ &\leq |\lambda| \sum_{i \in I} |a_i| + |\mu| \sum_{i \in I} |b_i| \\ &< +\infty \end{aligned}$$

  Donc $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$.

— Soit $\epsilon > 0$. Soit $J_\epsilon^a \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que :

$$\forall K \in \mathcal{P}_f(I), K > J_\epsilon^a, \left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in K} a_i \right| < \epsilon$$

On pose $J_\epsilon = J_\epsilon^a \cup J_\epsilon^b$.
On a alors, pour $K \in \mathcal{P}_f(I), K > J_\epsilon$:

$$\begin{aligned}\left|\lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i - \sum_{i\in K}(\lambda a_i + \mu b_i)\right| &= \left|\lambda \sum_{i\in I} a_i - \lambda \sum_{i\in K} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i - \mu \sum_{i\in K} b_i\right| \\ &\leq |\lambda| \left|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in K} a_i\right| + |\mu| \left|\sum_{i\in I} b_i - \sum_{i\in K} b_i\right| \\ &\leq (|\lambda| + |\mu|)\epsilon\end{aligned}$$

D'après (35.27), on a donc :

$$\sum_{i\in I}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i$$

35.29 Intégalité triangulaire

Propostion 25.29

Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de complexes, alors

$$\left|\sum_{i\in I} a_i\right| \leq \sum_{i\in I} |a_i|$$

On suppose que $(a_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)(I, \mathbb{R})$.
On écrit donc :

$$\begin{aligned}\forall i \in I, a_i &= a_i^+ - a_i^- \\ |a_i| &= a_i^+ + a_i^-\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i\in I} a_i\right| &= \left|\sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-\right| \\ &\leq \sum_{i\in I} a_i^+ + \sum_{i\in I} a_i^- \text{ (Inégalité triangulaire sur } \mathbb{R}) \\ &= \sum_{i\in I}(a_i^+ + a_i^-) \text{ (presque linéarité)} \\ &= \sum_{i\in I} |a_i|\end{aligned}$$

On suppose que $(a_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)(I, \mathbb{C})$.
Soit $J \in \mathcal{P}_f(I)$:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i\in J} a_i\right| &\leq \sum_{i\in J} |a_i| \\ &\leq \sum_{i\in I} |a_i|\end{aligned}$$

On note $M = \sup\left\{\left|\sum_{i\in J} a_i\right| \mid J \in \mathcal{P}_f(I)\right\}$ de tele sorte que $M \leq \sum_{i\in I} |a_i|$.
Montrons que $M = \left|\sum_{i\in I} a_i\right| = |S|$.
Pour $\epsilon > 0$, on choisit $J_\epsilon \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que pour tout $K \in \mathcal{P}_f(I)$, $K \supset J_\epsilon$:

$$\left||S| - \left|\sum_{i\in K}\right|\right| \leq \left|S - \sum_{i\in K} a_i\right| < \epsilon$$

Ce qui permet de conclure :

$$M = |S|$$

35.31 Associativité pour les familles sommables

Théorème 35.31

Soit $(I_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I. Soit $a = (a_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes. Alors a est sommable si et seulement chaque $(a_i)_{i\in I_k}$ est sommable de somme s_k et de somme absolue t_k et si la famille $(t_k)_{k\in K}$ est sommable. Dans ce cas, (s_k) est également sommable et

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K} s_k = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} a_i$$

— On traite la sommabilité.
D'après le théorème de sommation par paquets dans le cas positif (35.14) :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} |a_i| = \sum_{k\in K} t_k \text{ (notations (35.31))}$$

i

— Si $\sum_{i\in I} |a_i| < +\infty$ alors :

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in t_k} |a_i| < +\infty$$

Donc (t_k) est sommable.
Et $(a_i)_{i\in I_k}$ est sommable.

— Si $(a_i)_{i\in I_k}$ est sommable pour tout $k \in K$ et $(t_k)_{k\in K}$ est sommable, alors :

$$\sum_{k\in K} t_k < +\infty$$

Donc :

$$\sum_{i\in I} |a_i| < +\infty$$

Théorème 35.33

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles sommables. Alors $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$$

35.33 Produit de familles sommables

— Sommabilité : On note $c_{ij} = a_ib_j$ pour tout $(i,j) \in I \times J$.
On écrit $I \times J = \bigsqcup_{i\in I} \{i\} \times J$.
On pose, pour $i \in I$:

$$\begin{aligned} t_i &= \sum_{j\in J} |c_{ij}| \\ &= \sum_{j\in J} |a_i||b_j| \\ &= |a_i| \times \sum_{j\in J} |b_j| \text{ (presque linéarité)} \\ &< +\infty \text{ ((}b_j\text{) est sommable)} \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} t_i &= \sum_{i\in I} |a_i| \times \underbrace{\left(\sum_{j\in J}\right)}_{\in\mathbb{R}_+} \\ &= \left(\sum_{j\in J} |b_j|\right) \times \sum_{i\in I} |a_i| \\ &< +\infty\end{aligned}$$

D'après le théorème de sommation par paquets (35.31), la famille $(c_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable.

— <u>Somme :</u>

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in I\times J} c_{ij} &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j \text{ (35.28)} \\ &= \sum_{i\in I} a_i \left(\sum_{j\in J} b_j\right) \\ &= \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) \quad \text{(35.28)}\end{aligned}$$

35.34 Exemple

Exemple 35.34

Montrer que la famille $\left(\frac{\sin(p+q)}{p^2q^2}\right)_{p,q\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 1, q\geq 1} \left|\frac{\sin(p+q)}{p^2q^2}\right| &\leq \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2q^2} \\ &= \left(\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^2}\right)\left(\sum_{q\geq 1}\frac{1}{q^2}\right) \quad \text{(Fubini positif)} \\ &= \zeta(2)^2 \\ &< +\infty\end{aligned}$$

35.35 Exemple

Exemple 35.35

Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$, la famille $(z^{ij})_{i,j\in N^*}$ est sommable si et seulement si $|z|<1$.

— Si $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 1, j\geq 1} |z|^{ij} &= \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} |z^i|^j \text{ (Fubini positif)} \\
&= \sum_{i\geq 1} |z|^i \frac{1}{1-|z|^i} \ (|z^i| \neq 1) \\
&= \sum_{i\geq 1}\sum_{i\geq 1} \frac{|z|^i}{1-|z|^i} \\
&\leq \sum_{i\geq 1} \frac{|z|^i}{1-|z|} \ (|z| < 1) \\
&= \frac{|z|}{(1-|z|)^2}
\end{aligned}$$

— Si $|z| \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 1, j\geq 1} |z|^{ij} &= \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} |z^i|^j \\
&= \sum_{i\geq 1} +\infty \ (|z^i| \geq 1) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

35.36 Exemple

Exemple 35.36

Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sum\limits_{k\geq n} \frac{1}{k(k+1)} = -\frac{\pi^2}{12}$.

On note $(a_{n,k}) = \left(\frac{(-1)^n}{nk(k+1)}\right)_{1\leq n\leq k}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq n\leq k} |a_{n,k}| &= \sum_{1\leq n\leq k} \frac{1}{nk(k+1)} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k\geq n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k\geq n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \\
&= \zeta(2) \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

La famille est donc sommable.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq n\leq k} a_{n,k} &= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\sum_{k\geq n}\frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2} \\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2} - \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} \\
&= \frac{1}{4}\zeta(2) - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2} \\
&= -\frac{1}{2}\zeta(2) \\
&= -\frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

35.37 Exemple

Exemple 35.37

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sum\limits_{k\geq 1}\sum\limits_{n\geq k+1}\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} = -\frac{1}{2}$.

On note $(a_{n,k}) = \left(\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}\right)_{1\leq k\leq n}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq k\leq n} |a_{n,k}| &= \sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^n} \text{ (Fubini positif)} \\
&= \sum_{n\geq 2}\frac{n-1}{2^n} \\
&< +\infty \text{ (car } \frac{n-1}{2^n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)\text{)} \\
\sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq n+1}\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} &= \sum_{n\geq 2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ (Fubini positif)} \\
&= \sum_{n\geq 2}\frac{1}{2^n}\times(-1) \\
&= -\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

35.38 Produit de Cauchy

Théorème 35.38

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries absolument convergentes. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Alors $\sum_{n\geq 0} c_n$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n\geq 0} c_n = \left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n\right)$$

La famille des $(a_i b_j)_{i\geq 0, j\geq 0}$ est sommable (35.38).
D'après le théorème de sommation par paquets :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n\right) &= \sum_{i\geq 0, j\geq 0} a_i b_j \text{ (35.33)} \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{i+j=n} a_i b_j \\ &= \sum_{n\geq 0} c_n\end{aligned}$$

35.39 Exemple

Exemple 35.39

Montrer que pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum\limits_{n\geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Soit $|x| < 1$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x} \\ &= \left(\sum_{k\geq 0} x^k\right)\left(\sum_{k\geq 0} x^k\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} \text{ (produit de Cauchy)} \\ &= \sum_{n\geq 0} (n+1) x^n\end{aligned}$$

35.41 Convergence de la série exponentielle

Théorème 35.41

La série exponentielle est absolument convergente pour tout paramètre $z \in \mathbb{C}$. La somme définit une fonction notée :

$$e(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

Comme pour tout $n \geq 0, z \neq 0$:

$$\frac{\frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|z^n|}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'après la règle d'Alembert, la série est absolument convergente pour tout $z \neq 0$.
Pour $z = 0, e(0) = 1$.

35.43 Propriété fondamentale de la série exponentielle

Théorème 35.43

Soit z et z' deux complexes. On a :

$$e(z + z') = e(z)e(z')$$

Produit de Cauchy.

35.46 Corollaire

Corollaire 35.46

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e(z) = e^z$, soit :

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
e(z) &= e(x+iy) \\
&= e(x)e(iy) \text{ (35.43)} \\
&= e(x) \sum_{n\geq 0} \frac{(iy)^n}{n!} \text{ (35.45)} \\
&= e^x \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \\
&= e^x \left(\cos(y) + i\sin(y)\right) \text{ (35.45)} \\
&= e^x e^{iy} \\
&= e^z
\end{aligned}$$

Chapitre 36

Fonctions de deux variables