TRABAJO PRACTICO 1er CUATRIMESTRE 2024 – cursos K3013 y K3052

In [ ]:
```
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')

import numpy as np
import pandas as pd
import seaborn as sns
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

Descripción de la Base de Datos mpg

Esta base de datos contiene información sobre diversos aspectos de automóviles, especialmente centrada en la eficiencia del combustible medida en millas por galón (mpg).

Columnas Principales

- **mpg**: Millas por galón, una medida de eficiencia del combustible.
- **cylinders**: Número de cilindros en el motor.
- **displacement**: Desplazamiento del motor (en pulgadas cúbicas).
- **horsepower**: Potencia del motor (en caballos de fuerza).
- **weight**: Peso del vehículo (en libras).
- **acceleration**: Tiempo que tarda en acelerar de 0 a 60 mph (en segundos).
- **model_year**: Año del modelo del automóvil.
- **origin**: Origen del automóvil (1: América, 2: Europa, 3: Asia).
- **name**: Nombre del modelo del automóvil.

Origen

- Los datos provienen del Centro de Investigación de Automóviles de la Universidad de California, Irvine (UCI) y se han utilizado en numerosos estudios y proyectos.

Primera Parte: Análisis exploratorio de datos (EDA)

> - Damos una vista rápida de la base de datos para tener una idea de los tipos de valores que son utilizados en cada columna.*

In [ ]:
```
mpg_df = sns.load_dataset('mpg')
mpg_df.head()
```

Out[ ]:

	mpg	cylinders	displacement	horsepower	weight	acceleration	model_year	origin	name
0	18.0	8	307.0	130.0	3504	12.0	70	usa	chevrolet chevelle malibu
1	15.0	8	350.0	165.0	3693	11.5	70	usa	buick skylark 320
2	18.0	8	318.0	150.0	3436	11.0	70	usa	plymouth satellite
3	16.0	8	304.0	150.0	3433	12.0	70	usa	amc rebel sst
4	17.0	8	302.0	140.0	3449	10.5	70	usa	ford torino

> *Realizamos un resumen de valores que nos seran de utilidad. Ej:cantidad de datos por columna(count), el promedio de cada columna (mean), el numero max y min de cada columna.*

In [ ]:
```
mpg_df.describe()
```

Out[ ]:

	mpg	cylinders	displacement	horsepower	weight	acceleration	model_year
count	398.000000	398.000000	398.000000	392.000000	398.000000	398.000000	398.000000
mean	23.514573	5.454774	193.425879	104.469388	2970.424623	15.568090	76.010050
std	7.815984	1.701004	104.269838	38.491160	846.841774	2.757689	3.697627
min	9.000000	3.000000	68.000000	46.000000	1613.000000	8.000000	70.000000
25%	17.500000	4.000000	104.250000	75.000000	2223.750000	13.825000	73.000000
50%	23.000000	4.000000	148.500000	93.500000	2803.500000	15.500000	76.000000
75%	29.000000	8.000000	262.000000	126.000000	3608.000000	17.175000	79.000000
max	46.600000	8.000000	455.000000	230.000000	5140.000000	24.800000	82.000000

> Podemos ver que la cantidad de valores que tiene la columna "horsepower" en la fila "count" es inferior al resto. Esto quiere decir que hay valores NaN cargados en dichas columnas "faltantes". El resumen anterior no tiene en cuenta esos valores NaN para hacer calculos.

> Para solucionar el problema mencionado procedemos a descartar aquellas filas en las que tengan algun atributo NaN.

In [ ]:
```
mpg_df = mpg_df.dropna()
mpg_df.describe()
```

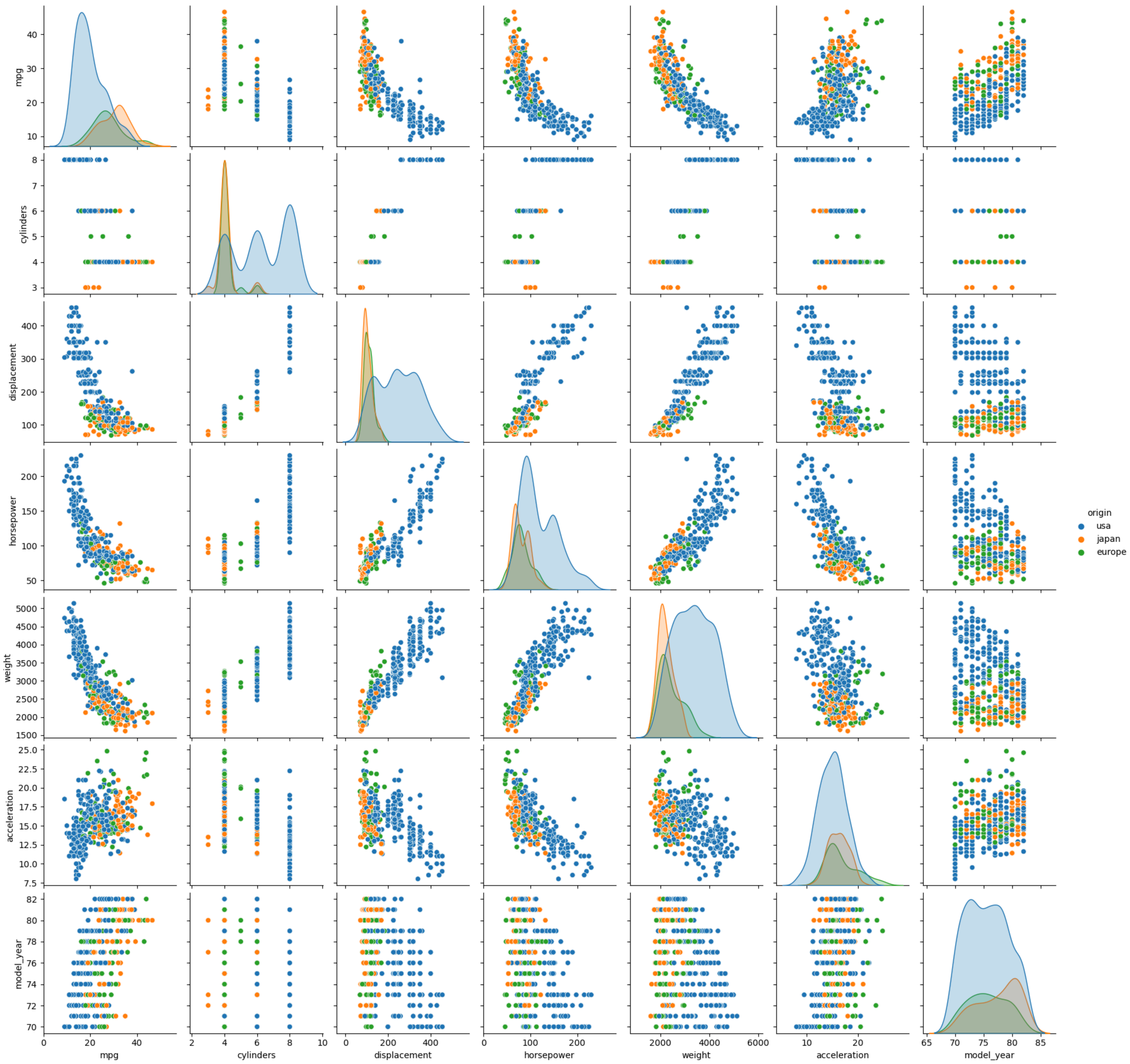
Out[ ]:

	mpg	cylinders	displacement	horsepower	weight	acceleration	model_year
count	392.000000	392.000000	392.000000	392.000000	392.000000	392.000000	392.000000
mean	23.445918	5.471939	194.411990	104.469388	2977.584184	15.541327	75.979592
std	7.805007	1.705783	104.644004	38.491160	849.402560	2.758864	3.683737
min	9.000000	3.000000	68.000000	46.000000	1613.000000	8.000000	70.000000
25%	17.000000	4.000000	105.000000	75.000000	2225.250000	13.775000	73.000000
50%	22.750000	4.000000	151.000000	93.500000	2803.500000	15.500000	76.000000
75%	29.000000	8.000000	275.750000	126.000000	3614.750000	17.025000	79.000000
max	46.600000	8.000000	455.000000	230.000000	5140.000000	24.800000	82.000000

> *Si bien presentamos un buen resumen de la base de datos, lo hicimos para cada columna individualmente y lo que nos interesa es ver si hay algún tipo de relación entre cada una de ellas. Para eso mismo, lo mejor sería hacer un gráfico (X; Y).*

> Utilizamos la funcion "sns.pairplot" de la libreria seaborn que nos que permite visualizar relaciones en un conjunto de datos de varias variables mediante la creación de una cuadrícula de gráficos de dispersión (scatter plots) y distribuciones (histogramas o gráficos de densidad) para cada par de variables

In [ ]:
```
sns.pairplot(mpg_df,hue='origin')
plt.show()
```



> Viendo todos los gráficos, podemos notar que la relación del atributo 'mpg' con 'displacement', 'horsepower' o 'weight', sigue cierto patrón que nos puede ser de utilidad en el trabajo que estamos realizando.

> Por cuestiones de entendimiento, nos quedaremos con las relaciones:

- 'mpg' vs. 'horsepower' que vendría a ser la relación que hay entre la eficiencia del combustible y la cantidad de HP que entrega el motor.
- 'mpg' vs. 'weight' que vendría a ser la relación que hay entre la eficiencia del combustible y el peso del auto.

In [ ]:
```
df_mpg = mpg_df[['mpg','weight','horsepower']]
df_mpg
```

Out[ ]:

	mpg	weight	horsepower
0	18.0	3504	130.0
1	15.0	3693	165.0
2	18.0	3436	150.0
3	16.0	3433	150.0
4	17.0	3449	140.0
...	...	...	...
393	27.0	2790	86.0
394	44.0	2130	52.0
395	32.0	2295	84.0
396	28.0	2625	79.0
397	31.0	2720	82.0

392 rows × 3 columns

> Una vez filtrada la base de datos, mostramos un resumen por columna y luego graficamos.

In [ ]:

```
df_mpg.describe()
```

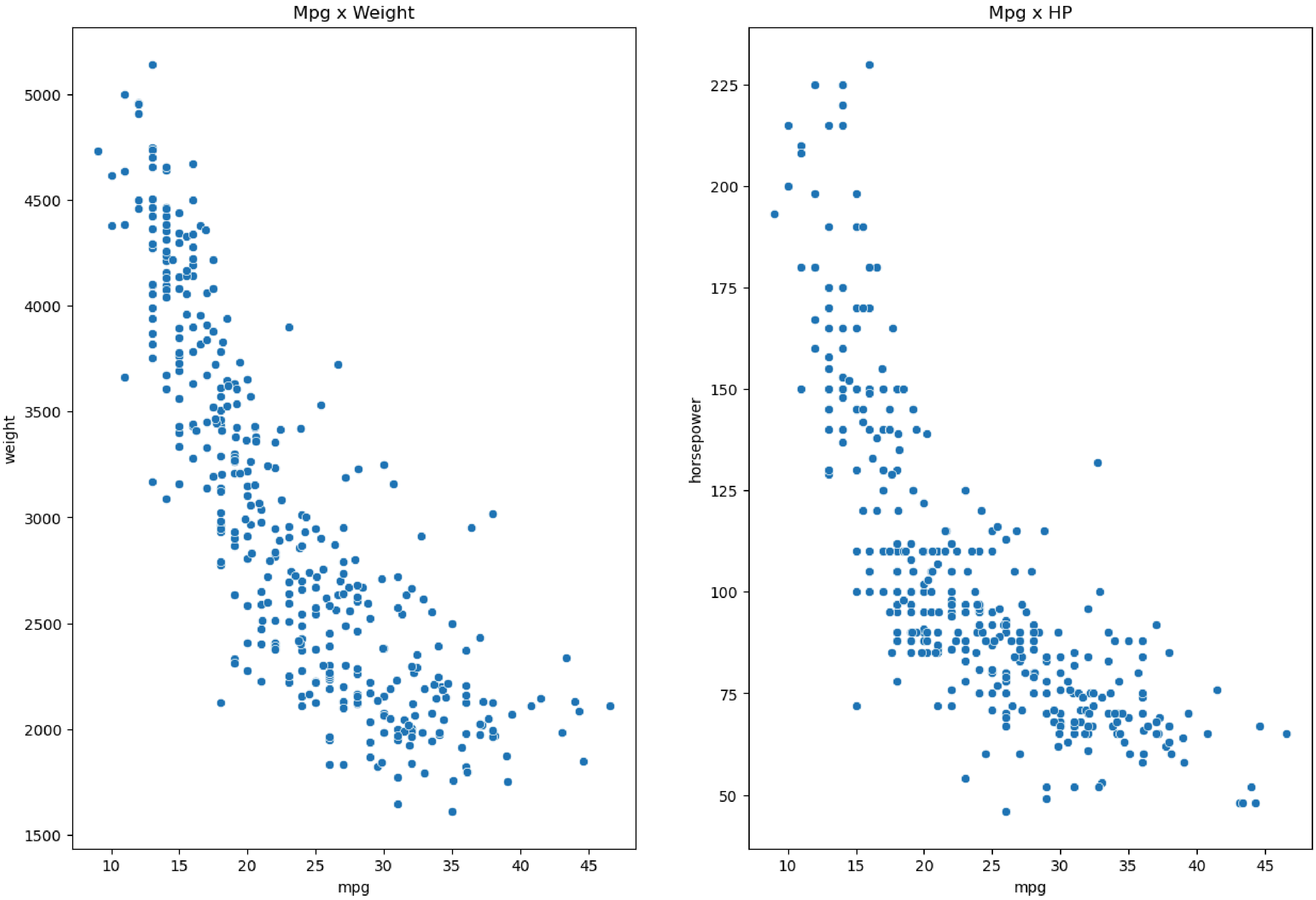
Out[ ]:

	mpg	weight	horsepower
count	392.000000	392.000000	392.000000
mean	23.445918	2977.584184	104.469388
std	7.805007	849.402560	38.491160
min	9.000000	1613.000000	46.000000
25%	17.000000	2225.250000	75.000000
50%	22.750000	2803.500000	93.500000
75%	29.000000	3614.750000	126.000000
max	46.600000	5140.000000	230.000000

> **Tenemos un total de 392 datos por columna.**

In [ ]:

```
fig,axes = plt.subplots(1,2,figsize=(15,10))
sns.scatterplot(ax=axes[0],data=df_mpg,x='mpg',y='weight')
axes[0].set_title("Mpg x Weight")
sns.scatterplot(ax=axes[1],data=df_mpg,x='mpg',y='horsepower')
axes[1].set_title("Mpg x HP")
plt.show()
```



> *Viendo el gráfico, podemos notar que hay puntos que están alineados en vertical, lo que sugiere que hay más de un valor de Y (weight o horsepower) para un mismo valor de X (mpg).*

In [ ]:
```
df_mpg['mpg'].value_counts()
```

Out[ ]:
```
mpg
13.0    20
14.0    19
18.0    17
15.0    16
26.0    14
        ..
31.9     1
16.9     1
18.2     1
22.3     1
44.0     1
Name: count, Length: 127, dtype: int64
```

> Confirmamos que, por ejemplo, mpg(x=13) tiene asociado 20 valores tanto de weight y horsepower.

> Para solucionar este problema, optaremos por agrupar aquellas columnas tales que su valor en 'mpg' sea igual. Luego haremos el promedio tanto de la columna 'weight' y 'horsepower' por separado para dichos valores de 'mpg' y este promedio pasará a ser el nuevo y único valor del 'mpg' en cuestión. Veamos un ejemplo para entender mejor.

> Supongamos que tenemos los siguientes valores:

X = mpg	2	2	2
y	3	6	12

Vemos que para el valor x = 2 tenemos mas de un valor asociado.

Tomamos todos valores asociados, realizamos el promedio y se lo asiganamos a x=2.

- y_mean = $\frac{3+6+12}{3} = 7$

X = mpg	2
y_mean	7

In [ ]:
```
df_mpg = df_mpg.groupby(['mpg'],as_index=False).mean()
df_mpg.head()
```

Out[ ]:

	mpg	weight	horsepower
0	9.0	4732.00	193.00
1	10.0	4495.50	207.50
2	11.0	4419.00	187.00
3	12.0	4786.50	185.00
4	13.0	4254.45	158.35

In [ ]:
```
df_mpg.describe()
```

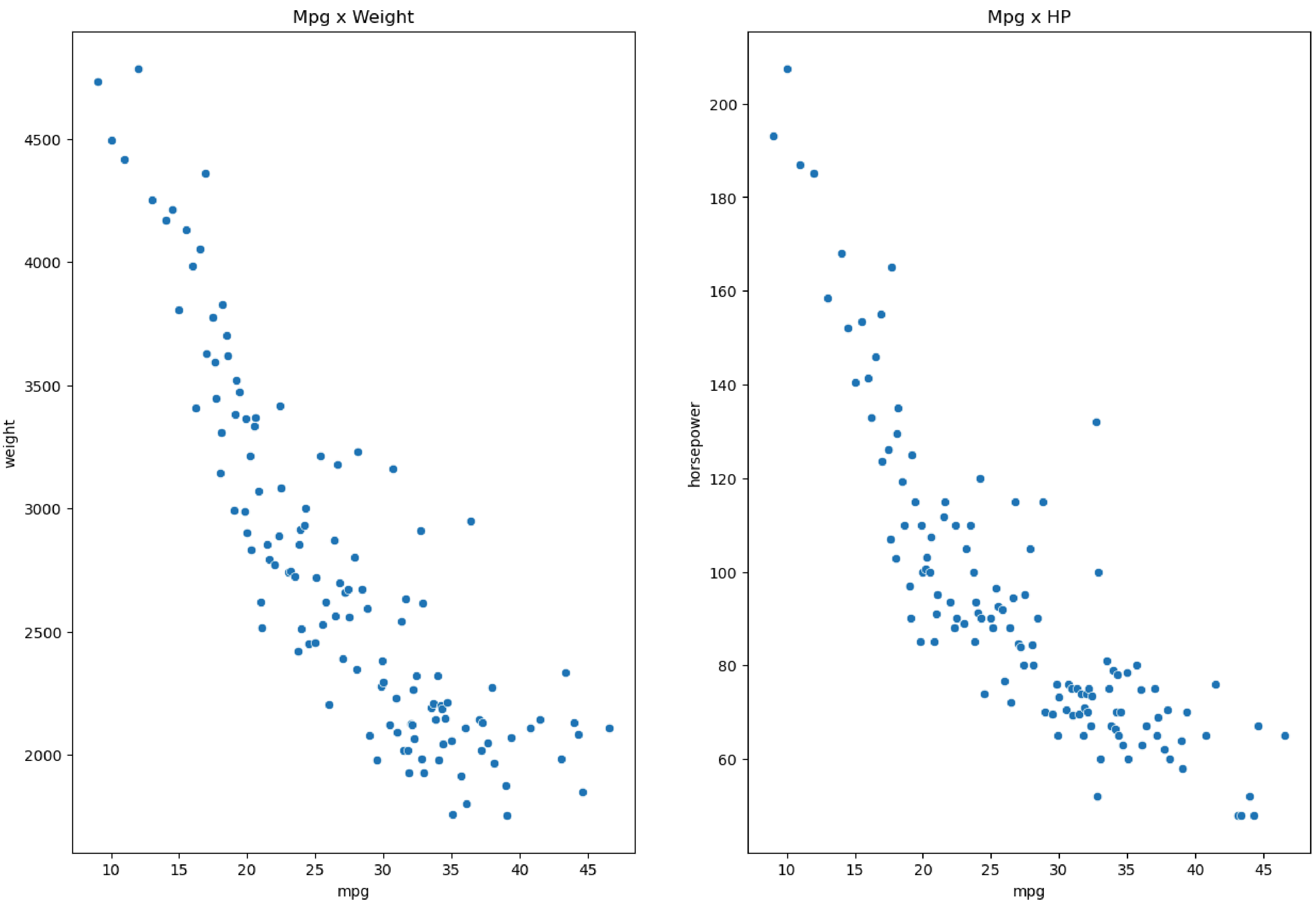
Out[ ]:

	mpg	weight	horsepower
count	127.000000	127.000000	127.000000
mean	27.322047	2739.352415	93.182258
std	8.352976	716.279404	31.924081
min	9.000000	1755.000000	48.000000
25%	20.550000	2137.000000	70.062500
50%	27.200000	2615.000000	85.000000
75%	33.600000	3170.000000	107.250000
max	46.600000	4786.500000	207.500000

> *Vemos que una vez realizada nuestra operación, la cantidad de valores por columna pasó de 392 a 127,* **MENOS DE LA MITAD!!**

> **Volvemos a graficar**

In [ ]:
```
fig,axes = plt.subplots(1,2,figsize=(15,10))
sns.scatterplot(ax=axes[0],data=df_mpg,x='mpg',y='weight')
axes[0].set_title("Mpg x Weight")
sns.scatterplot(ax=axes[1],data=df_mpg,x='mpg',y='horsepower')
axes[1].set_title("Mpg x HP")
plt.show()
```



> Vemos como la cantidad de puntos se redujo notablemente.

> Con lo realizado, ya estamos listos para aplicar el método de aproximación por mínimos cuadrados.

Segunda Parte: Calculos

Empezamos con la recta de Minimos cuadrados del tipo: $Y = aX + b$

> Para lograr la recta de Minimos cuadrados debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales llamadas ECUACIONES NORMALES. Se puede

resolver por cualquier método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Una vez hallados los valores de a y b, se tendrá la MEJOR recta de ajuste de los datos.

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum f(x_i)x_i \\ a\sum x_i + bn = \sum f(x_i) \end{cases}$$

> Hacemos una copia de la base de dato que estuvimos trabajando y renombramos las columnas para que sea mas sencillo identificarlas.

In [ ]:
```
df_mpg_lineal = df_mpg
df_mpg_lineal = df_mpg_lineal.rename(columns={'mpg':'mpg=X','weight':'Y1(W)','horsepower':'Y2(HP)'})
```

Aclaración:

> Como vamos a realizar la aproximación lineal para dos conjuntos de datos distintos, debemos realizar estos cálculos dos veces. Lo único que comparten son los valores de 'x' que son los de 'mpg'.
>
> > Para eso separamos por Y1(W) que serian las imagenes de la relación mpg vs. weight y por otro lado Y2(HP) que son las imagenes de la relación mpg vs. horsepower

> Calculamos los valores de:

$x_i^2 ; f(x_i) * x_i$
Y los asiganamos a una nueva columna que la llamaremos por su respectiva operación.

In [ ]:
```
df_mpg_lineal.loc[:,'X2'] = np.power(df_mpg_lineal['mpg=X'],2)  #Calculo x^2
df_mpg_lineal.loc[:,'X*Y1(W)'] = df_mpg_lineal['mpg=X']*df_mpg_lineal['Y1(W)'] #Calculo x*y(Weight)
df_mpg_lineal.loc[:,'X*Y2(HP)'] = df_mpg_lineal['mpg=X']*df_mpg_lineal['Y2(HP)'] #Calculo x*y(HorsePower)
df_mpg_lineal.head()
```

Out[ ]:

	mpg=X	Y1(W)	Y2(HP)	X2	X*Y1(W)	X*Y2(HP)
0	9.0	4732.00	193.00	81.0	42588.00	1737.00
1	10.0	4495.50	207.50	100.0	44955.00	2075.00
2	11.0	4419.00	187.00	121.0	48609.00	2057.00
3	12.0	4786.50	185.00	144.0	57438.00	2220.00
4	13.0	4254.45	158.35	169.0	55307.85	2058.55

> Ahora calculamos:

$$\sum x_i^2$$

$$\sum x_i$$

$$\sum f(x_i)x_i$$

$$\sum f(x_i)$$

> Con estos datos ya podemos pasar a resolver nuestro sistema de ecuaciones.

In [ ]:
```
suma_parametros = df_mpg_lineal.sum().astype('float').round(2)
suma_parametros
```

Out[ ]:
```
mpg=X          3469.90
Y1(W)        347897.76
Y2(HP)        11834.15
X2           103596.07
X*Y1(W)     8854536.66
X*Y2(HP)     295179.68
dtype: float64
```

> Para resolver un sistema de ecuaciones lineales en Python, puedes utilizar una función llamada numpy.linalg.solve que resuelve sistemas de ecuaciones lineales de la forma

$Ax = B$, donde A es una matriz de coeficientes y B es un vector de términos constantes.

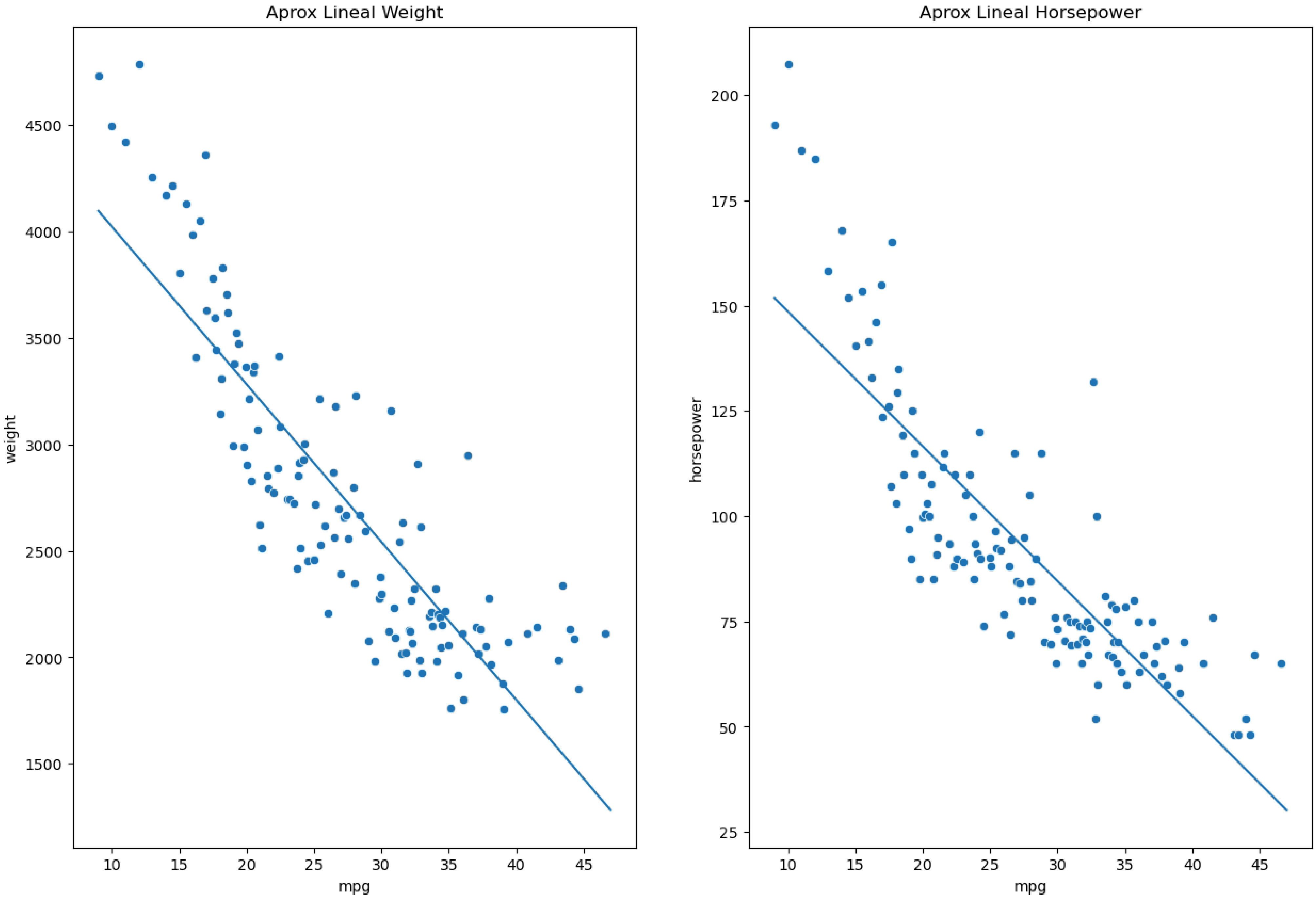
$$A = \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum f(x_i)x_i & n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \sum f(x_i)x_i \\ \sum f(x_i) \end{pmatrix}$$

> Aclaración:
>
> > Recordar que n=127, para saber este dato de forma general simplemente debemos ver la longitud de la tabla. Esto ultimo lo hacemos con el metodo *df_mpg_lineal.shape[0]*

In [ ]:
```
# Define the coefficients matrix A
A = np.array([[suma_parametros['X2'],suma_parametros['mpg=X']],
             [suma_parametros['mpg=X'],df_mpg_lineal.shape[0]]])

# Define the coefficients matrix B1, Weight
B1 = np.array([suma_parametros['X*Y1(W)'],
              suma_parametros['Y1(W)']])
solve1 = np.linalg.solve(A,B1) # Obtenemos a y b de Weight

# Define the coefficients matrix B1, Weight
B2 = np.array([suma_parametros['X*Y2(HP)'],
```

```
                 suma_parametros['Y2(HP)']])
solve2 = np.linalg.solve(A,B2) # Obtenemos a y b de HorsePower

x1 = np.arange(df_mpg_lineal['mpg=X'].min(),df_mpg_lineal['mpg=X'].max()+1,1)
y1 = solve1[0]*x1 + solve1[1]

x2 = np.arange(df_mpg_lineal['mpg=X'].min(),df_mpg_lineal['mpg=X'].max()+1,1)
y2 = solve2[0]*x2 + solve2[1]

print(f"Aproximacion Lineal Weight:\t\tY = {solve1[0].round(2)}X + {solve1[1].round(2)}")
print(f"Aproximacion Lineal Horse Power:\tY = {solve2[0].round(2)}X + {solve2[1].round(2)}")


fig,axes = plt.subplots(1,2,figsize=(15,10))
axes[0].set_title("Aprox Lineal Weight")
axes[1].set_title("Aprox Lineal Horsepower")
sns.scatterplot(ax=axes[0],data=df_mpg,x='mpg',y='weight')
sns.lineplot(ax=axes[0],x=x1,y=y1)
sns.scatterplot(ax=axes[1],data=df_mpg,x='mpg',y='horsepower')
sns.lineplot(ax=axes[1],x=x2,y=y2)
plt.show()
```

```
Aproximacion Lineal Weight:             Y = -74.02X + 4761.76
Aproximacion Lineal Horse Power:        Y = -3.2X + 180.68
```



In [ ]:
```
df_mpg_lineal.loc[:,'Y1_predict'] = solve1[0]*df_mpg_lineal['mpg=X'] + solve1[1]
df_mpg_lineal.loc[:,'Y2_predict'] = solve2[0]*df_mpg_lineal['mpg=X'] + solve2[1]
df_mpg_lineal.head()
```

Out[ ]:

	mpg=X	Y1(W)	Y2(HP)	X2	X*Y1(W)	X*Y2(HP)	Y1_predict	Y2_predict
0	9.0	4732.00	193.00	81.0	42588.00	1737.00	4095.572213	151.857374
1	10.0	4495.50	207.50	100.0	44955.00	2075.00	4021.551022	148.654943
2	11.0	4419.00	187.00	121.0	48609.00	2057.00	3947.529830	145.452512
3	12.0	4786.50	185.00	144.0	57438.00	2220.00	3873.508638	142.250081
4	13.0	4254.45	158.35	169.0	55307.85	2058.55	3799.487446	139.047650

Calculamos Error de la recta de Mínimos cuadrados

> La función de error será: $E(a,b) = \sum d_i^2 = \sum[(ax_i + b) - f(x_i)]^2$

> Siendo 'Y1_predict' $= (ax_i + b)$ las nuevas imagenes de la relación 'mpg' vs. 'weight'

> Siendo 'Y2_predict' $= (ax_i + b)$ las nuevas imagenes de la relación 'mpg' vs. 'horsepower'

In [ ]:
```
weight_error_lineal = np.power(df_mpg_lineal['Y1_predict']-df_mpg_lineal['Y1(W)'],2).sum()
horsepower_error_lineal = np.power(df_mpg_lineal['Y2_predict']-df_mpg_lineal['Y2(HP)'],2).sum()
print(f"Weight linear error:\t\t{weight_error_lineal.round(2)}")
print(f"Horse Power linear error:\t{horsepower_error_lineal.round(2)}")
```

```
Weight linear error:            16476367.35
Horse Power linear error:       38253.36
```

> Se realizará el mismo procedimiento para las siguientes aproximaciones.

Empezamos con la hiperbola de Mínimos cuadrados del tipo: $y = \frac{a}{x+b}$

> Nuestro objetivo en este momento es plantear las ecuaciones normales que nos permitirán encontrar la mejor hipérbola que se ajuste a los datos. El problema ahora es que es muy difícil encontrar una solución exacta. Por eso mismo es que vamos a buscar una función aproximante para poder resolver el problema en su forma lineal.

> Partiendo de la funcion:

- Paso 1) $y = \frac{a}{x+b}$
- Paso 2) $\frac{1}{y} = \frac{x+b}{a}$
- Paso 3) $Y = AX + B$

> Siendo:
>
> > $$Y = \frac{1}{y}$$
> > $$A = \frac{1}{a}$$
> > $$B = \frac{b}{a}$$
> > $$X = x$$

> Ahora que ya tenemos nuestra aproximacion lineal pasamos a resolver las ecuaciones normales que usamos en la aproximacion lineal.

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum f(x_i)x_i \\ a\sum x_i + bn = \sum f(x_i) \end{cases}$$

> Hacemos una copia de la base de dato que estuvimos trabajando y renombramos las columnas para que sea mas sencillo identificarlas.

In [ ]:
```
df_mpg_hip = df_mpg # Hacemos copia para hacer aproximacion hiperbolica
df_mpg_hip = df_mpg_hip.rename(columns={'mpg':'mpg=X','weight':'y1(W)','horsepower':'y2(HP)'})
df_mpg_hip
```

Out[ ]:

	mpg=X	y1(W)	y2(HP)
0	9.0	4732.00	193.00
1	10.0	4495.50	207.50
2	11.0	4419.00	187.00
3	12.0	4786.50	185.00
4	13.0	4254.45	158.35
...	...	...	...
122	43.4	2335.00	48.00
123	44.0	2130.00	52.00
124	44.3	2085.00	48.00
125	44.6	1850.00	67.00
126	46.6	2110.00	65.00

127 rows × 3 columns

> Calculamos los valores de:

$$Y = \frac{1}{y}$$

$$x_i^2$$

$$f(x_i) * x_i$$

> Asiganamos a una nueva columna los resultados de cada operación.

In [ ]:

```
df_mpg_hip.loc[:,'Y1(W)'] = 1/df_mpg_hip['y1(W)']
df_mpg_hip.loc[:,'Y2(HP)'] = 1/df_mpg_hip['y2(HP)']
df_mpg_hip.loc[:,'X2'] = np.power(df_mpg_hip['mpg=X'],2)
df_mpg_hip.loc[:,'X*Y1(W)'] = df_mpg_hip['mpg=X'] * df_mpg_hip['Y1(W)']
df_mpg_hip.loc[:,'X*Y2(HP)'] = df_mpg_hip['mpg=X'] * df_mpg_hip['Y2(HP)']
df_mpg_hip.head()
```

Out[ ]:

	mpg=X	y1(W)	y2(HP)	Y1(W)	Y2(HP)	X2	X*Y1(W)	X*Y2(HP)
0	9.0	4732.00	193.00	0.000211	0.005181	81.0	0.001902	0.046632
1	10.0	4495.50	207.50	0.000222	0.004819	100.0	0.002224	0.048193
2	11.0	4419.00	187.00	0.000226	0.005348	121.0	0.002489	0.058824
3	12.0	4786.50	185.00	0.000209	0.005405	144.0	0.002507	0.064865
4	13.0	4254.45	158.35	0.000235	0.006315	169.0	0.003056	0.082097

> Ahora calculamos:

$$\sum x_i^2$$

$$\sum x_i$$

$$\sum f(x_i) x_i$$

$$\sum f(x_i)$$

> Con estos datos ya podemos pasar a resolver nuestro sistema de ecuaciones.

In [ ]:

```
suma_parametros_hip = df_mpg_hip.sum().astype('float').round(2)
suma_parametros_hip
```

Out[ ]:
```
mpg=X          3469.90
y1(W)        347897.76
y2(HP)        11834.15
Y1(W)             0.05
Y2(HP)            1.50
X2           103596.07
X*Y1(W)           1.43
X*Y2(HP)         44.13
dtype: float64
```

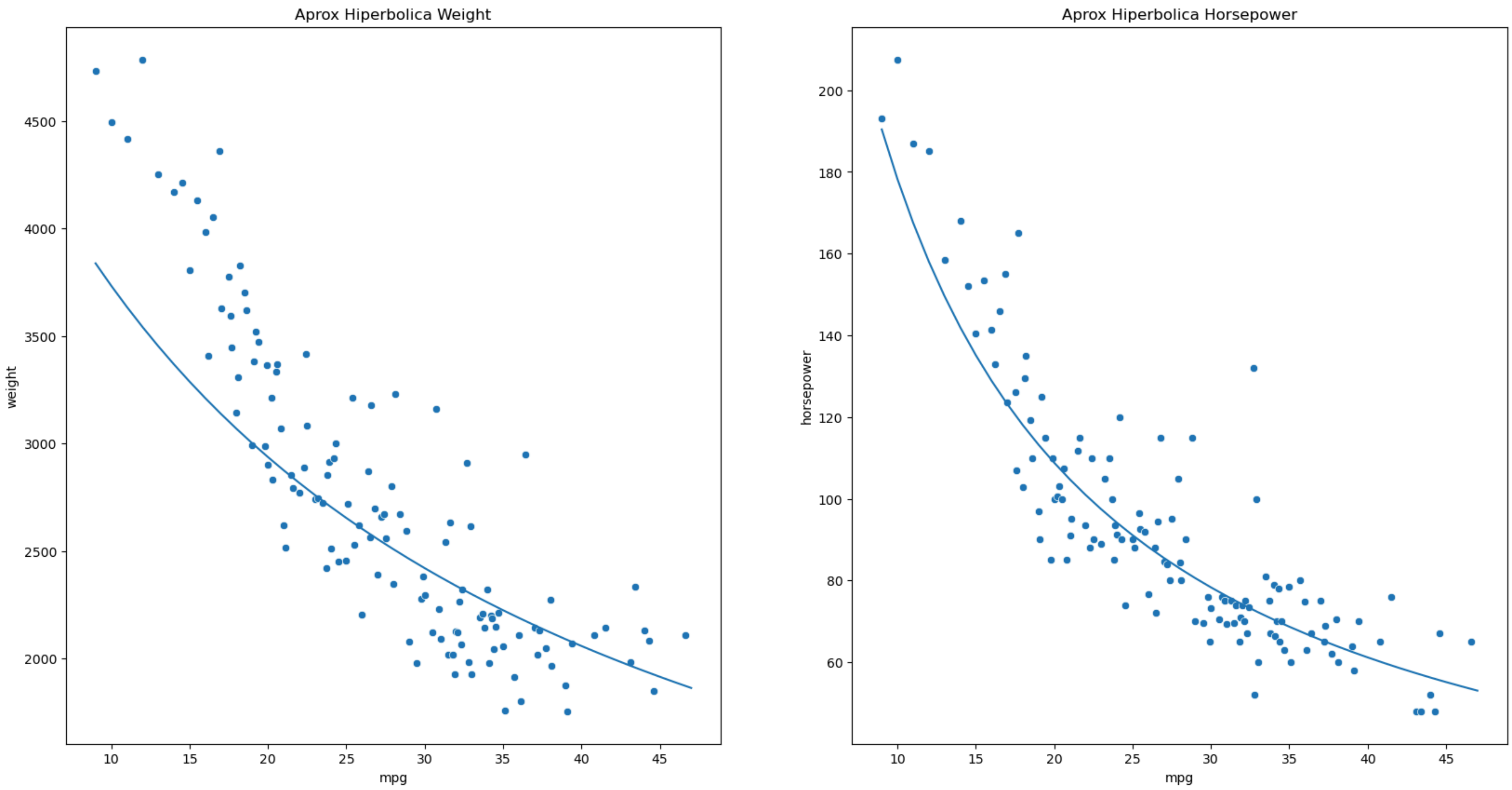
In [ ]:
```python
# Define the coefficients matrix A
A_hip = np.array([[suma_parametros_hip['X2'],suma_parametros_hip['mpg=X']],
             [suma_parametros_hip['mpg=X'],df_mpg_hip.shape[0]]])

# Define the coefficients matrix B1, Weight
B1_hip = np.array([suma_parametros_hip['X*Y1(W)'],
              suma_parametros_hip['Y1(W)']])
solve1_hip = np.linalg.solve(A_hip,B1_hip) # Obtenemos a y b de Weight

# Define the coefficients matrix B1, Weight
B2_hip = np.array([suma_parametros_hip['X*Y2(HP)'],
              suma_parametros_hip['Y2(HP)']])
solve2_hip = np.linalg.solve(A_hip,B2_hip) # Obtenemos a y b de HorsePower

print(f"Para la aproximacion 'mpg vs. weight':\t\tA1 = {solve1_hip[0]}\tB1 = {solve1_hip[1]}")
print(f"Para la aproximacion 'mpg vs. horsepower':\tA2 = {solve2_hip[0]}\tB2 = {solve2_hip[1]}")

solve1_hip[0] = 1/solve1_hip[0]
solve1_hip[1] = solve1_hip[1]*solve1_hip[0]

solve2_hip[0] = 1/solve2_hip[0]
solve2_hip[1] = solve2_hip[1]*solve2_hip[0]

print("\n\nAhora aplicamos las relaciones que obtuvimos de la función de aproximación.\n")
print(f"Para la aproximación 'mpg vs. weight':\t\ta1 = {solve1_hip[0].round(2)}\tb1 = {solve1_hip[1].round(2)}")
print(f"Para la aproximación 'mpg vs. horsepower':\ta2 = {solve2_hip[0].round(2)}\tb2 = {solve2_hip[1].round(2)}")
```

```
Para la aproximacion 'mpg vs. weight':          A1 = 7.2682823229784674e-06     B1 = 0.00019511643438974033
Para la aproximacion 'mpg vs. horsepower':      A2 = 0.0003579595456810333      B2 = 0.0020308360034754537


Ahora aplicamos las relaciones que obtuvimos de la función de aproximación.

Para la aproximación 'mpg vs. weight':          a1 = 137584.09  b1 = 26.84
Para la aproximación 'mpg vs. horsepower':      a2 = 2793.61    b2 = 5.67
```

> $$A = \frac{1}{a}$$
>
> $$B = \frac{b}{a}$$

In [ ]:
```python
X1_hip = np.arange(df_mpg_hip['mpg=X'].min(),df_mpg_hip['mpg=X'].max()+1,1)
x1_hip = X1_hip
y1_hip = solve1_hip[0] / (x1_hip + solve1_hip[1])


X2_hip = np.arange(df_mpg_hip['mpg=X'].min(),df_mpg_hip['mpg=X'].max()+1,1)
Y2_hip = solve2_hip[0]*X2_hip + solve2_hip[1]
x2_hip = X2_hip
y2_hip = solve2_hip[0] / (x2_hip + solve2_hip[1])

print(f"Aproximacion Hiperbolica Weight:\ty = {solve1_hip[0].round(2)}/ (x + {solve1_hip[1].round(2)})")
print(f"Aproximacion Hiperbolica Horse Power:\ty = {solve2_hip[0].round(2)}/ (x + {solve2_hip[1].round(2)})")

fig,axes = plt.subplots(1,2,figsize=(20,10))
axes[0].set_title("Aprox Hiperbolica Weight")
axes[1].set_title("Aprox Hiperbolica Horsepower")
sns.scatterplot(ax=axes[0],data=df_mpg,x='mpg',y='weight')
sns.lineplot(ax=axes[0],x=x1_hip,y=y1_hip)
sns.scatterplot(ax=axes[1],data=df_mpg,x='mpg',y='horsepower')
sns.lineplot(ax=axes[1],x=x2_hip,y=y2_hip)
plt.show()
```

```
Aproximacion Hiperbolica Weight:        y = 137584.09/ (x + 26.84)
Aproximacion Hiperbolica Horse Power:   y = 2793.61/ (x + 5.67)
```



In [ ]:
```
df_mpg_hip.loc[:,'y1_predict'] = solve1_hip[0] / (df_mpg_hip['mpg=X'] + solve1_hip[1])
df_mpg_hip.loc[:,'y2_predict'] = solve2_hip[0] / (df_mpg_hip['mpg=X'] + solve2_hip[1])
df_mpg_hip.head()
```

Out[ ]:

	mpg=X	y1(W)	y2(HP)	Y1(W)	Y2(HP)	X2	X*Y1(W)	X*Y2(HP)	y1_predict	y2_predict
0	9.0	4732.00	193.00	0.000211	0.005181	81.0	0.001902	0.046632	3838.315190	190.386549
1	10.0	4495.50	207.50	0.000222	0.004819	100.0	0.002224	0.048193	3734.140299	178.239411
2	11.0	4419.00	187.00	0.000226	0.005348	121.0	0.002489	0.058824	3635.470766	167.549344
3	12.0	4786.50	185.00	0.000209	0.005405	144.0	0.002507	0.064865	3541.881409	158.069015
4	13.0	4254.45	158.35	0.000235	0.006315	169.0	0.003056	0.082097	3452.989734	149.604071

Calculamos Error de la hiperbola de Mínimos cuadrados

> La función de error será: $E(a,b) = \sum d_i^2 = \sum [(\frac{a}{x+b}) - f(x_i)]^2$

> Siendo 'Y1_predict' $= (\frac{a_1}{x+b_1})$ las nuevas imagenes de la relación 'mpg' vs. 'weight'

> Siendo 'Y2_predict' $= (\frac{a_2}{x+b_2})$ las nuevas imagenes de la relación 'mpg' vs. 'horsepower'

In [ ]:
```
weight_error_hip = np.power(df_mpg_hip['y1_predict']-df_mpg_hip['y1(W)'],2).sum()
horsepower_error_hip = np.power(df_mpg_hip['y2(HP)']-df_mpg_hip['y2_predict'],2).sum()
print(f"Weight Hiperbolico error:\t{weight_error_hip.round(2)}")
print(f"Horse Power Hiperbolico error:\t{horsepower_error_hip.round(2)}")
```

```
Weight Hiperbolico error:       20605315.77
Horse Power Hiperbolico error:  23109.99
```

Empezamos con la exponencial de Mínimos cuadrados del tipo: $y = b * e^{(ax)}$

> Estamos ante el mismo problema que se nos planteó anteriormente. Por eso mismo es que vamos a buscar una función aproximante para poder resolver el problema en su forma lineal.

> Partiendo de la funcion:

- Paso 1) $y = b * e^{(ax)}$
- Paso 2) $ln(y) = ln(b * e^{(ax)})$

- Paso 3) $ln(y) = ln(b) + ln(e^{(ax)})$
- Paso 4) $ln(y) = ln(b) + axln(e)$
- Paso 5) $ln(y) = ax + ln(b)$
- Paso 6) $Y = AX + B$

> Siendo:
>
> > $$Y = ln(y)$$
> > $$A = a$$
> > $$B = ln(b)$$
> > $$X = x$$

> Ahora que ya tenemos nuestra aproximacion lineal pasamos a resolver las ecuaciones normales que usamos en la aproximacion lineal.

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum f(x_i)x_i \\ a\sum x_i + bn = \sum f(x_i) \end{cases}$$

> Hacemos una copia de la base de dato que estuvimos trabajando y renombramos las columnas para que sea mas sencillo identificarlas.

In [ ]:
```
df_mpg_exp = df_mpg # Hacemos copia para hacer aproximacion hiperbolica
df_mpg_exp = df_mpg_exp.rename(columns={'mpg':'mpg=X','weight':'y1(W)','horsepower':'y2(HP)'})
df_mpg_exp
```

Out[ ]:

	mpg=X	y1(W)	y2(HP)
0	9.0	4732.00	193.00
1	10.0	4495.50	207.50
2	11.0	4419.00	187.00
3	12.0	4786.50	185.00
4	13.0	4254.45	158.35
...	...	...	...
122	43.4	2335.00	48.00
123	44.0	2130.00	52.00
124	44.3	2085.00	48.00
125	44.6	1850.00	67.00
126	46.6	2110.00	65.00

127 rows × 3 columns

> Calculamos los valores de:

$$Y = ln(y)$$
$$x_i^2$$
$$f(x_i) * x_i$$

> Asiganamos a una nueva columna los resultados de cada operación.

In [ ]:
```
df_mpg_exp.loc[:,'Y1(W)'] = np.log(df_mpg_exp['y1(W)'])
df_mpg_exp.loc[:,'Y2(HP)'] = np.log(df_mpg_exp['y2(HP)'])
df_mpg_exp.loc[:,'X2'] = np.power(df_mpg_exp['mpg=X'],2)
df_mpg_exp.loc[:,'X*Y1(W)'] = df_mpg_exp['mpg=X'] * df_mpg_exp['Y1(W)']
df_mpg_exp.loc[:,'X*Y2(HP)'] = df_mpg_exp['mpg=X'] * df_mpg_exp['Y2(HP)']
df_mpg_exp.head()
```

Out[ ]:

	mpg=X	y1(W)	y2(HP)	Y1(W)	Y2(HP)	X2	X*Y1(W)	X*Y2(HP)
0	9.0	4732.00	193.00	8.462103	5.262690	81.0	76.158929	47.364212
1	10.0	4495.50	207.50	8.410832	5.335131	100.0	84.108322	53.351313
2	11.0	4419.00	187.00	8.393669	5.231109	121.0	92.330356	57.542195
3	12.0	4786.50	185.00	8.473555	5.220356	144.0	101.682657	62.644270
4	13.0	4254.45	158.35	8.355721	5.064808	169.0	108.624370	65.842501

> Ahora calculamos:

$$\sum x_i^2$$

$$\sum x_i$$

$$\sum f(x_i)x_i$$

$$\sum f(x_i)$$

> Con estos datos ya podemos pasar a resolver nuestro sistema de ecuaciones.

In [ ]:
```
suma_parametros_exp = df_mpg_exp.sum().astype('float').round(2)
suma_parametros_exp
```

Out[ ]:
```
mpg=X          3469.90
y1(W)        347897.76
y2(HP)        11834.15
Y1(W)          1001.29
Y2(HP)          569.48
X2           103596.07
X*Y1(W)       27130.06
X*Y2(HP)      15273.50
dtype: float64
```

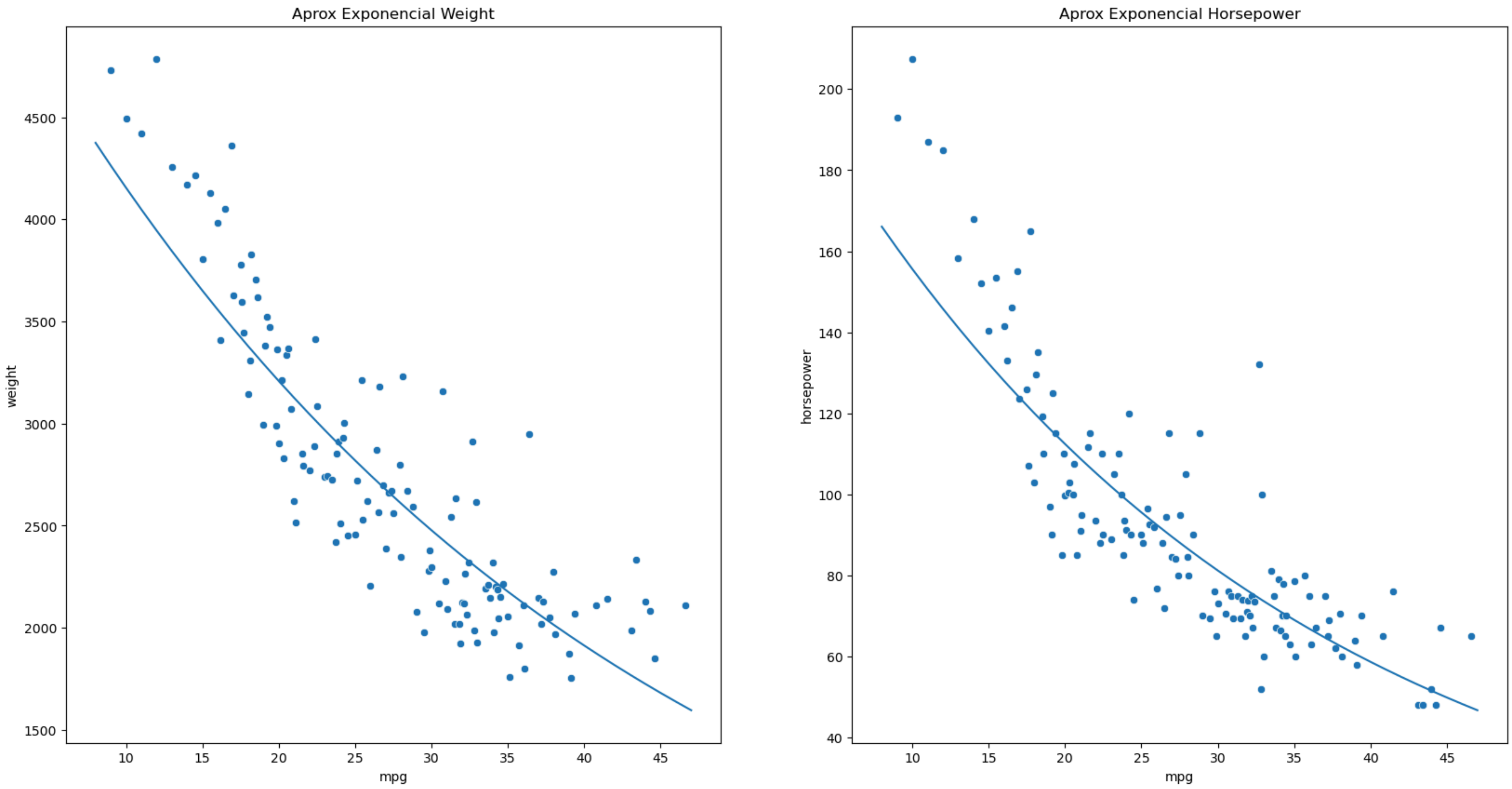
In [ ]:
```
# Define the coefficients matrix A
A_exp = np.array([[suma_parametros_exp['X2'],suma_parametros_exp['mpg=X']],
             [suma_parametros_exp['mpg=X'],df_mpg_exp.shape[0]]])

# Define the coefficients matrix B1, Weight
B1_exp = np.array([suma_parametros_exp['X*Y1(W)'],
              suma_parametros_exp['Y1(W)']])
solve1_exp = np.linalg.solve(A_exp,B1_exp) # Obtenemos a y b de Weight

# Define the coefficients matrix B1, Weight
B2_exp = np.array([suma_parametros_exp['X*Y2(HP)'],
              suma_parametros_exp['Y2(HP)']])
solve2_exp = np.linalg.solve(A_exp,B2_exp) # Obtenemos a y b de HorsePower

print(f"Para la aproximacion 'mpg vs. weight':\t\tA1 = {solve1_exp[0]}\tB1 = {solve1_exp[1]}")
print(f"Para la aproximacion 'mpg vs. horsepower':\tA2 = {solve2_exp[0]}\tB2 = {solve2_exp[1]}")

solve1_exp[1] = np.exp(solve1_exp[1])
solve2_exp[1] = np.exp(solve2_exp[1])

print("\n\nAhora aplicamos las relaciones que obtuvimos de la función de aproximación.\n")
print(f"Para la aproximación 'mpg vs. weight':\t\ta1 = {solve1_exp[0].round(6)}\tb1 = {solve1_exp[1].round(3)}")
print(f"Para la aproximación 'mpg vs. horsepower':\ta2 = {solve2_exp[0].round(6)}\tb2 = {solve2_exp[1].round(3)}")
```

```
Para la aproximacion 'mpg vs. weight':          A1 = -0.025847454849053753      B1 = 8.590378610871902
Para la aproximacion 'mpg vs. horsepower':      A2 = -0.032516183146312556      B2 = 5.372503180310157


Ahora aplicamos las relaciones que obtuvimos de la función de aproximación.

Para la aproximación 'mpg vs. weight':          a1 = -0.025847   b1 = 5379.65
Para la aproximación 'mpg vs. horsepower':      a2 = -0.032516   b2 = 215.401
```

> $$A = a$$
> $$B = ln(b)$$

In [ ]:
```
X1_exp = np.arange(df_mpg_exp['mpg=X'].min()-1,df_mpg_exp['mpg=X'].max()+1,1)
x1_exp = X1_exp
y1_exp = solve1_exp[1]*np.exp(solve1_exp[0]*x1_exp)


X2_exp = np.arange(df_mpg_exp['mpg=X'].min()-1,df_mpg_exp['mpg=X'].max()+1,1)
x2_exp = X2_exp
y2_exp = solve2_exp[1]*np.exp(solve2_exp[0]*x2_exp)

print(f"Aproximacion Exponencial Weight:\ty = {solve1_exp[1].round(3)}*exp^({solve1_exp[0].round(6)}X)")
print(f"Aproximacion Exponencial Horse Power:\ty = {solve2_exp[1].round(3)}*exp^({solve2_exp[0].round(6)}X)")

fig,axes = plt.subplots(1,2,figsize=(20,10))
axes[0].set_title("Aprox Exponencial Weight")
axes[1].set_title("Aprox Exponencial Horsepower")
sns.scatterplot(ax=axes[0],data=df_mpg,x='mpg',y='weight')
sns.lineplot(ax=axes[0],x=x1_exp,y=y1_exp)
sns.scatterplot(ax=axes[1],data=df_mpg,x='mpg',y='horsepower')
sns.lineplot(ax=axes[1],x=x2_exp,y=y2_exp)
plt.show()
```

```
Aproximacion Exponencial Weight:        y = 5379.65*exp^(-0.025847X)
Aproximacion Exponencial Horse Power:   y = 215.401*exp^(-0.032516X)
```



In [ ]:
```
df_mpg_exp.loc[:,'y1_predict'] = solve1_exp[1]*np.exp(solve1_exp[0]*df_mpg_exp['mpg=X'])
df_mpg_exp.loc[:,'y2_predict'] = solve2_exp[1]*np.exp(solve2_exp[0]*df_mpg_exp['mpg=X'])
df_mpg_exp.head()
```

Out[ ]:

	mpg=X	y1(W)	y2(HP)	Y1(W)	Y2(HP)	X2	X*Y1(W)	X*Y2(HP)	y1_predict	y2_predict
0	9.0	4732.00	193.00	8.462103	5.262690	81.0	76.158929	47.364212	4263.098478	160.751152
1	10.0	4495.50	207.50	8.410832	5.335131	100.0	84.108322	53.351313	4154.320111	155.608206
2	11.0	4419.00	187.00	8.393669	5.231109	121.0	92.330356	57.542195	4048.317362	150.629799
3	12.0	4786.50	185.00	8.473555	5.220356	144.0	101.682657	62.644270	3945.019407	145.810668
4	13.0	4254.45	158.35	8.355721	5.064808	169.0	108.624370	65.842501	3844.357231	141.145715

Calculamos Error de la hiperbola de Mínimos cuadrados

> La función de error será: $E(a,b) = \sum d_i^2 = \sum[(b * e^{(ax)}) - f(x_i)]^2$

> Siendo 'Y1_predict' $= (b_1 * e^{(a_1 x)})$ las nuevas imagenes de la relación 'mpg' vs. 'weight'

> Siendo 'Y2_predict' $= (b_2 * e^{(a_2 x)})$ las nuevas imagenes de la relación 'mpg' vs. 'horsepower'

In [ ]:
```python
weight_error_exp = np.power(df_mpg_exp['y1_predict']-df_mpg_exp['y1(W)'],2).sum()
horsepower_error_exp = np.power(df_mpg_exp['y2_predict']-df_mpg_exp['y2(HP)'],2).sum()
print(f"Weight Exponencial error:\t{weight_error_exp.round(2)}")
print(f"Horse Power Exponencial error:\t{horsepower_error_exp.round(2)}")
```

```
Weight Exponencial error:       13123971.47
Horse Power Exponencial error:  29995.59
```

Tercera Parte: Conclusión

> Es momento de decidir cuál es la mejor aproximación. Para eso veremos qué aproximación tuvo la menor cantidad de errores y graficaremos todas ellas.

In [ ]:
```python
df_error = pd.DataFrame({'weight error':[weight_error_lineal,weight_error_hip,weight_error_exp],
                         'horsepower error':[horsepower_error_lineal,horsepower_error_hip,horsepower_error_exp]},
                        index=['Aprox. Lineal','Aprox. Hiperbola','Aprox. Exponencial'])
df_error.round(2)
```

Out[ ]:

	weight error	horsepower error
Aprox. Lineal	16476367.35	38253.36
Aprox. Hiperbola	20605315.77	23109.99
Aprox. Exponencial	13123971.47	29995.59

> Conclusión final de los errores obtenidos.

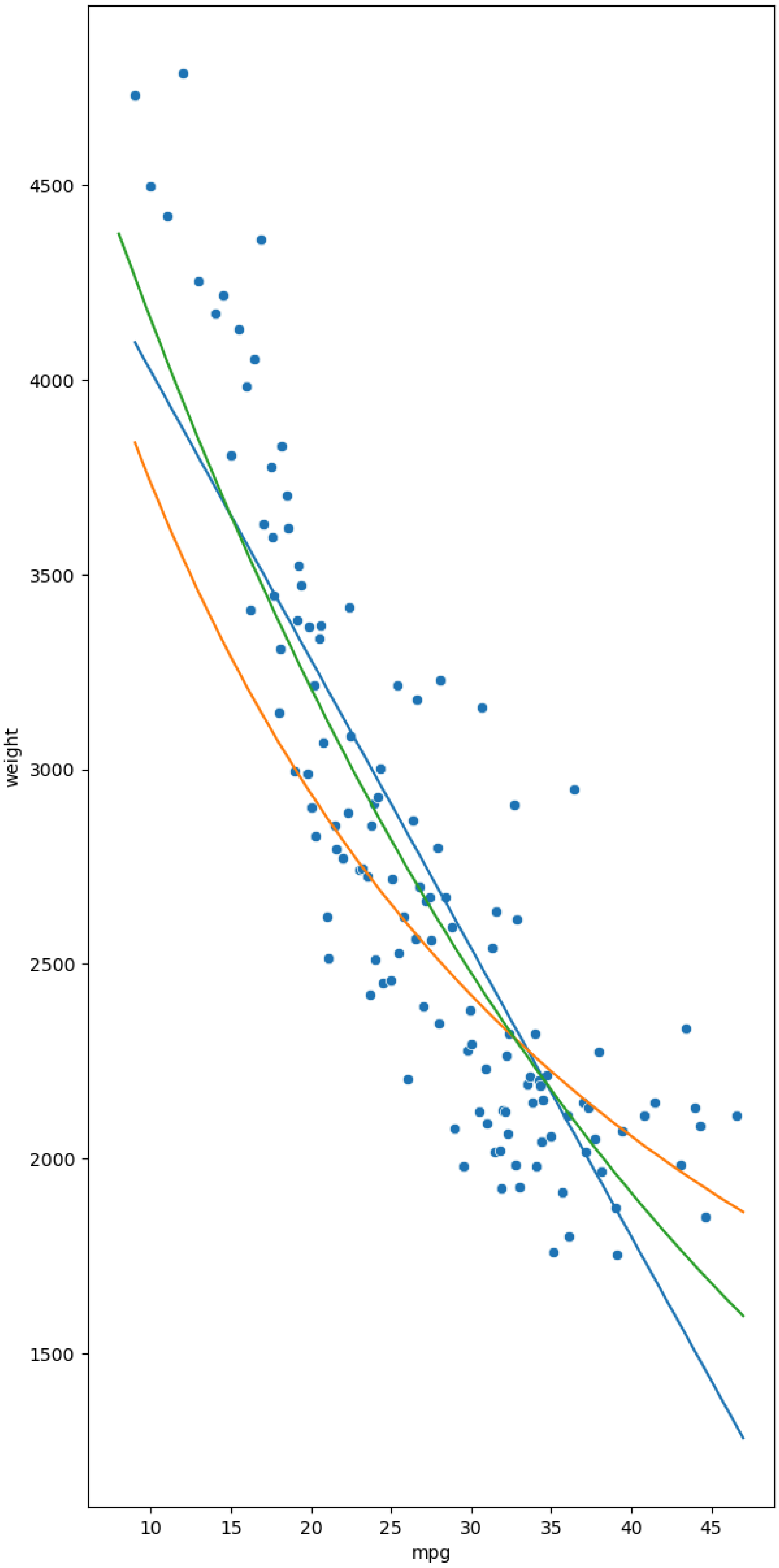
> Buscamos en que aproximación hubo menor error.

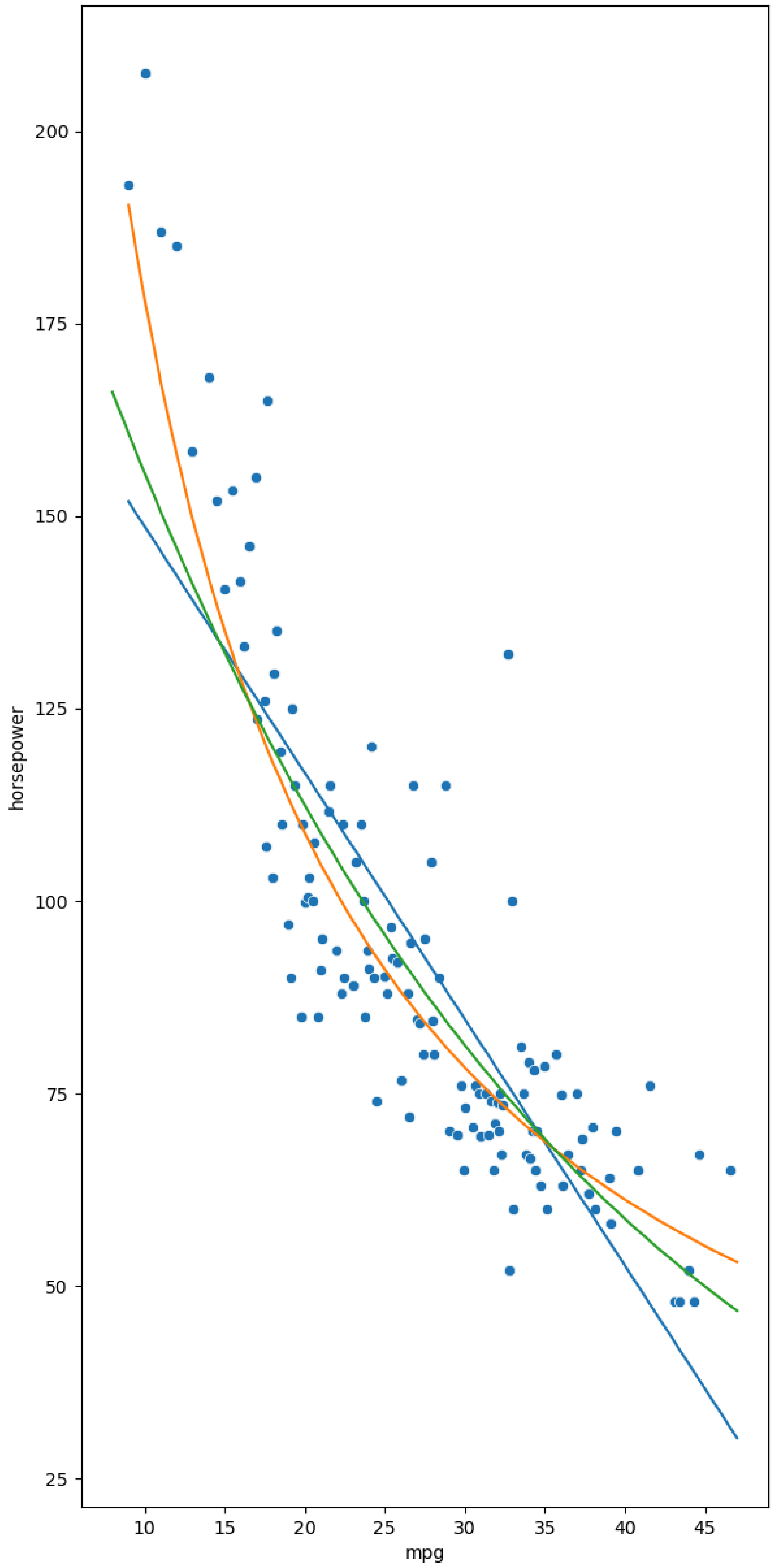
In [ ]:
```python
print("Mpg vs Weight")
print(f"El error mas chico fue {df_error['weight error'].round(2).min()} de Aprox. Exponencial\n")

print("Mpg vs Horsepower")
print(f"El error mas chico fue {df_error['horsepower error'].round(2).min()} de Aprox. Hiperbola ")
```

```
Mpg vs Weight
El error mas chico fue 13123971.47 de Aprox. Exponencial

Mpg vs Horsepower
El error mas chico fue 23109.99 de Aprox. Hiperbola
```

In [ ]:
```python
print(f"Aproximacion Lineal Weight:\t\tY = {solve1[0].round(2)}X + {solve1[1].round(2)}")
print(f"Aproximacion Lineal Horse Power:\tY = {solve2[0].round(2)}X + {solve2[1].round(2)}\n")
print(f"Aproximacion Hiperbolica Weight:\ty = {solve1_hip[0].round(2)}/ (x + {solve1_hip[1].round(2)})")
print(f"Aproximacion Hiperbolica Horse Power:\ty = {solve2_hip[0].round(2)}/ (x + {solve2_hip[1].round(2)})\n")
print(f"Aproximacion Exponencial Weight:\ty = {solve1_exp[1].round(3)}*exp^({solve1_exp[0].round(6)}X)")
print(f"Aproximacion Exponencial Horse Power:\ty = {solve2_exp[1].round(3)}*exp^({solve2_exp[0].round(6)}X)\n")


fig,axes = plt.subplots(1,2,figsize=(15,15))

sns.scatterplot(ax=axes[0],data=df_mpg,x='mpg',y='weight')
sns.lineplot(ax=axes[0],x=x1,y=y1)
sns.lineplot(ax=axes[0],x=x1_hip,y=y1_hip)
sns.lineplot(ax=axes[0],x=x1_exp,y=y1_exp)

sns.scatterplot(ax=axes[1],data=df_mpg,x='mpg',y='horsepower')
sns.lineplot(ax=axes[1],x=x2,y=y2)
sns.lineplot(ax=axes[1],x=x2_hip,y=y2_hip)
sns.lineplot(ax=axes[1],x=x2_exp,y=y2_exp)

plt.show()
```

```
Aproximacion Lineal Weight:             Y = -74.02X + 4761.76
Aproximacion Lineal Horse Power:        Y = -3.2X + 180.68

Aproximacion Hiperbolica Weight:        y = 137584.09/ (x + 26.84)
Aproximacion Hiperbolica Horse Power:   y = 2793.61/ (x + 5.67)

Aproximacion Exponencial Weight:        y = 5379.65*exp^(-0.025847X)
Aproximacion Exponencial Horse Power:   y = 215.401*exp^(-0.032516X)
```





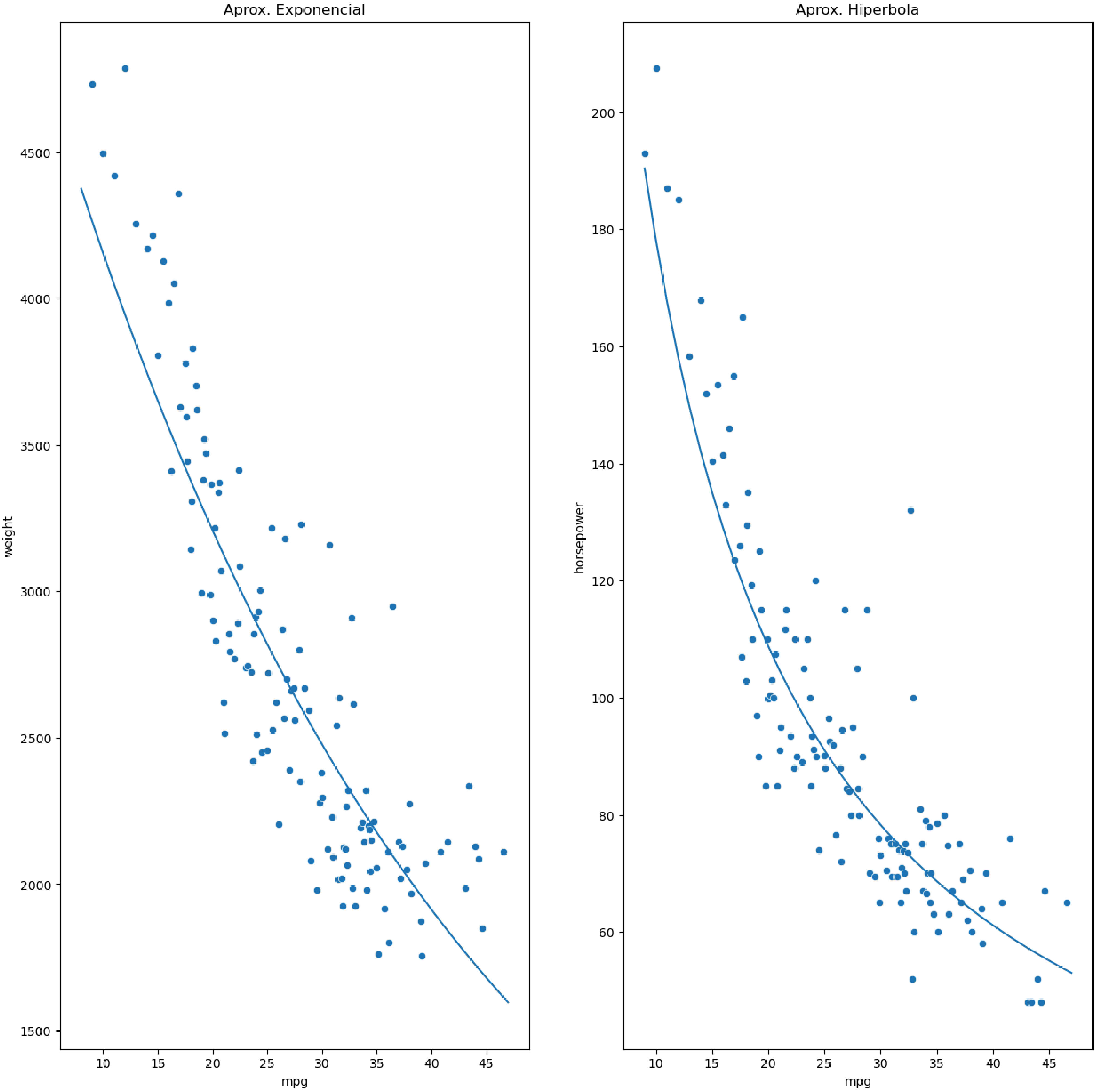
> Como resultado final, nos quedamos con las siguientes aproximaciones y sus respectivos gráficos.

In [ ]:

```
print(f"Aproximacion Exponencial Weight:\ty = {solve1_exp[1].round(3)}*exp^({solve1_exp[0].round(6)}X)")
print(f"Aproximacion Hiperbolica Horse Power:\ty = {solve2_hip[0].round(2)}/ (x + {solve2_hip[1].round(2)})\n")



fig,axes = plt.subplots(1,2,figsize=(15,15))

sns.scatterplot(ax=axes[0],data=df_mpg,x='mpg',y='weight')
sns.lineplot(ax=axes[0],x=x1_exp,y=y1_exp)
axes[0].set_title("Aprox. Exponencial")

sns.scatterplot(ax=axes[1],data=df_mpg,x='mpg',y='horsepower')
sns.lineplot(ax=axes[1],x=x2_hip,y=y2_hip)
axes[1].set_title("Aprox. Hiperbola")
plt.show()

print("Mpg vs Weight")
print(f"El error\t{df_error['weight error'].round(2).min()} libras\n")
```

```
print("Mpg vs Horsepower")
print(f"El error\t{df_error['horsepower error'].round(2).min()} HP ")
```

```
Aproximacion Exponencial Weight:        y = 5379.65*exp^(-0.025847X)
Aproximacion Hiperbolica Horse Power:   y = 2793.61/ (x + 5.67)
```




```
Mpg vs Weight
El error        13123971.47 libras

Mpg vs Horsepower
El error        23109.99 HP
```

Comentarios:

> Si bien quedó claro cuáles son los mejores modelos de aproximación para cada caso, pienso que los resultados están un poco alejados de la simple interpretación. Esa razón es suficiente para seguir avanzando.

> La idea es proporcionar una métrica fácil de interpretar en la escala de los datos originales. Para eso mismo haremos el cálculo de la Raíz del error cuadrático medio (o Root Mean Squared Error, RMSE) que es una métrica bien conocida en el cálculo estadístico utilizada para medir la

> precisión de un modelo de predicción. Proporciona una medida de la magnitud promedio de los errores de predicción, en las mismas unidades que los valores originales.

Su formula es:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} (y_i - yhat_i)^2}$$

donde

- y_i son los valores reales.
- $yhat_i$ son los nuevos valores que obtenemos en cada aproximación.
- n es el número de observaciones.

De nuestros calculos sabemos que:

$$\sum d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - yhat_i)^2$$

Justamente es el error que presentamos en la conclusión final, por lo tanto, si a este valor lo dividimos por el número total de observaciones n y hacemos la raíz cuadrada, obtenemos el RMSE.

> El otro problema que tenemos es la unidad de libras, no es común presentarlo de esta forma asi que lo representaremos en Kilogramos con la equivalencia:

$$1 libra = 0.4536 Kg$$

> Apliquemos lo mencionado.

In [ ]:

```
df_RMSE=np.sqrt(df_error/df_mpg.shape[0])
df_RMSE['weight error Kg'] = df_RMSE['weight error']*0.4536
df_RMSE
```

Out[ ]:

	weight error	horsepower error	weight error Kg
Aprox. Lineal	360.187695	17.355331	163.381139
Aprox. Hiperbola	402.798437	13.489567	182.709371
Aprox. Exponencial	321.462841	15.368336	145.815545

> Con el último cuadro y los modelos elegidos como finales, podemos ver que para el caso del peso(weight) tendremos un error aproximado de 145 kg en nuestra predicción del peso del auto, basándonos en la eficiencia del combustible (en millas por galón). En el caso de los HP tendremos un error de 13.5 HP en nuestra predicción, basándonos en la eficiencia del combustible (en millas por galón).

Herramientas

- Se utilizo el lenguaje de programacion Python con las librerias Pandas, Numpy y Seaborn.
- Jupyter Notebook.

Bibliografía

- Apunte teórico de interpolación y aproximación ofrecida por la cátedra de Matemática Superior UTN FRBA.
- Jake VanderPlas, Python Data Science Handbook.

Link base de datos:

Dataset Mpg

Alumno

Matias Pormi