



ÉCOLE DE
TECHNOLOGIE
SUPÉRIEURE

Université du Québec

Rapport de Laboratoire

Projet 2 : Kalman sur un entraînement différentiel

Cours : MEC745-01 Robotique mobile (H2025)

Professeur : David St-Onge

Chargés de laboratoire : Paul Gérard et Alexandre Lapointe

Étudiants :

Marie Hamady HAMM78370201

Louis Le Lay LELL73350201

Pierre Teixeira TEIP86260201

Numéro de groupe : 04

Établissement : École de Technologie Supérieure (ETS)

Date de remise : 17 février 2025

Table des matières

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Introduction | 1 |
| 2 | Choix de design | 1 |
| 2.1 | Définition des états | 1 |
| 2.2 | Définition des commandes | 1 |
| 2.3 | Modélisation du système | 1 |
| 2.3.1 | Matrice de transition \mathbf{F} | 2 |
| 2.3.2 | Matrice de commande \mathbf{B} | 2 |
| 2.4 | Modélisation des mesures | 2 |
| 2.5 | Gestion du bruit | 3 |
| 2.5.1 | Bruit sur les commandes \mathbf{Q} | 3 |
| 2.5.2 | Bruit sur les mesures \mathbf{R} | 4 |
| 3 | Résultats | 5 |
| 3.1 | Sans filtre | 5 |
| 3.2 | Filtre de Kalman | 5 |
| 4 | Discussion | 6 |
| 4.1 | Analyse des résultats | 6 |
| 4.2 | Limites du modèle | 6 |
| 4.3 | Autres approches possibles | 6 |
| 5 | Conclusion | 6 |

Table des figures

| | | |
|---|--|---|
| 1 | Histogrammes des vitesses des encodeurs gauches (v_g) et droits (v_d), montrant une distribution gaussienne. | 3 |
| 2 | Histogrammes des mesures de l'IMU montrant la distribution du bruit. | 4 |
| 3 | Comparaison entre l'estimation de la position sans filtre et le ground truth pour x , y et θ | 5 |
| 4 | Comparaison entre l'estimation de la position avec le filtre de Kalman et le ground truth pour x , y et θ | 6 |

1 Introduction

Ce projet s'inscrit dans le cadre du cours MEC745-01 de robotique mobile et vise à mettre en œuvre un filtre de Kalman pour améliorer l'estimation de l'état d'un robot à entraînement différentiel. L'objectif est d'exploiter les données issues des capteurs du robot, notamment les encodeurs et l'IMU, afin de corriger les erreurs d'estimation.

Dans ce rapport, nous décrivons la conception du filtre de Kalman et l'analyse des résultats obtenus avec et sans filtrage. Nous évaluons également les performances du filtre et discutons des limites du modèle ainsi que des alternatives possibles pour affiner l'estimation du mouvement du robot.

2 Choix de design

Cette section présente la conception du filtre de Kalman utilisé dans notre projet, en détaillant le modèle choisi pour estimer l'état du système.

2.1 Définition des états

L'état du système est représenté par un vecteur de dimension 9 :

$$x = [x \ \dot{x} \ \ddot{x} \ y \ \dot{y} \ \ddot{y} \ \theta \ \dot{\theta} \ \ddot{\theta}]^T$$

où :

- x, y, θ : position et orientation du robot,
- $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$: vitesses linéaires et angulaire,
- $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\theta}$: accélérations linéaires et angulaire.

Ce choix permet d'améliorer la modélisation de la dynamique du robot en prenant en compte les variations de vitesse et d'accélération. Puisque l'IMU peut fournir directement les accélérations \ddot{x} et \ddot{y} , il semble pertinent de les inclure dans le vecteur d'état afin de mieux exploiter ces données et d'affiner l'estimation du mouvement, portant ainsi sa dimension à 9.

2.2 Définition des commandes

Le vecteur de commande est défini comme suit :

$$u = \begin{bmatrix} V_{\text{lin}} \\ V_{\text{ang}} \end{bmatrix}$$

où :

- V_{lin} : vitesse linéaire du robot,
- V_{ang} : vitesse angulaire du robot.

Ce choix permet d'exploiter directement les commandes du robot différentiel en entrée du modèle.

2.3 Modélisation du système

L'évolution de l'état du robot est donnée par :

$$x_k = Fx_{k-1} + Bu_k$$

où :

- F est la matrice de transition d'état,
- B est la matrice de commande.

Le robot utilisé est un Dingo, qui possède un entraînement différentiel. Ainsi, les relations entre les vitesses et l'orientation sont :

$$\begin{aligned}v_x &= V_{\text{lin}} \cos(\theta_{k-1}) \\v_y &= V_{\text{lin}} \sin(\theta_{k-1}) \\\omega_I &= \omega_b = V_{\text{ang}}\end{aligned}$$

Nous supposons une accélération constante, ce qui nous permet d'exprimer les équations de mise à jour des états sous la forme :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{x}_{k-1} & \dot{x}_k &= v_x + \ddot{x}_{k-1}\Delta t & x_k &= x_{k-1} + \dot{x}_{k-1}\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}_{k-1}\Delta t^2 \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_{k-1} & \dot{y}_k &= v_y + \ddot{y}_{k-1}\Delta t & y_k &= y_{k-1} + \dot{y}_{k-1}\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{y}_{k-1}\Delta t^2 \\ \ddot{\theta} &= \ddot{\theta}_{k-1} & \dot{\theta}_k &= V_{\text{ang}} + \ddot{\theta}_{k-1}\Delta t & \theta_k &= \theta_{k-1} + \dot{\theta}_{k-1}\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_{k-1}\Delta t^2\end{aligned}$$

2.3.1 Matrice de transition F

La matrice de transition du modèle est :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Matrice de commande B

La commande est appliquée au modèle via la matrice :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos(\theta_{k-1}) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sin(\theta_{k-1}) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice reflète l'influence des commandes sur l'état du robot.

2.4 Modélisation des mesures

L'équation d'observation est donnée par :

- où :
- H est la matrice de transition des mesures
 - z représente les mesures disponibles.

Dans notre filtre, nous avons pris en compte toutes les données de l'IMU comme mesures, ce qui donne :

$$z = [\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T$$

L'IMU fournit les données dans le repère du robot, nécessitant leur conversion dans le repère global, ce qui se fait grâce aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}\ddot{x}_I &= \ddot{x}_b \cos \theta - \ddot{y}_b \sin \theta \\ \ddot{y}_I &= \ddot{x}_b \sin \theta + \ddot{y}_b \cos \theta \\ \theta_I &= \theta_b \\ \dot{\theta}_I &= \dot{\theta}_b\end{aligned}$$

La matrice de transition des mesures résultante est :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos \theta & 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.5 Gestion du bruit

Dans cette section, nous modélisons les matrices de bruit : \mathbf{Q} pour l'incertitude sur les commandes et \mathbf{R} pour l'incertitude sur les mesures.

2.5.1 Bruit sur les commandes \mathbf{Q}

Les données brutes des encodeurs nous ont été fournies sous forme de fichiers CSV. Les histogrammes des vitesses des roues (voir Fig. 1) montrent que les données des encodeurs suivent une distribution gaussienne, ce qui justifie l'utilisation d'un filtre de Kalman pour estimer l'état.

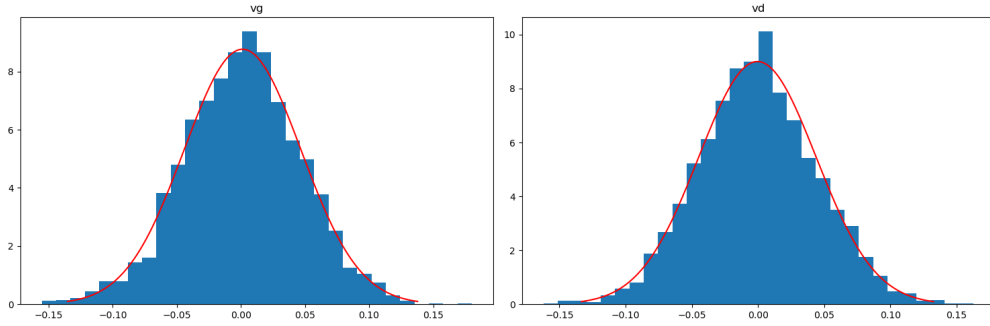


FIGURE 1 – Histogrammes des vitesses des encodeurs gauches (v_g) et droits (v_d), montrant une distribution gaussienne.

D'après cette analyse, nous avons estimé les écarts-types des vitesses mesurées par les encodeurs :

$$\sigma_{v_g} = 0.002072, \quad \sigma_{v_d} = 0.001964$$

Le robot utilisé étant un système à entraînement différentiel, ses vitesses linéaire et angulaire sont définies par :

$$V_{\text{lin}} = \frac{v_g + v_d}{2}, \quad V_{\text{ang}} = \frac{v_d - v_g}{L}$$

où :

- v_d et v_g sont les vitesses angulaires des roues droite et gauche,
- L est l'écart entre les roues du robot.

En appliquant les règles de propagation des variances :

$$\begin{aligned}\text{VAR}(X + Y) &= \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y) \\ \text{VAR}(aX) &= a^2 \text{VAR}(X)\end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\sigma_{V_{\text{lin}}}^2 = \frac{\sigma_{v_d}^2 + \sigma_{v_g}^2}{4}, \quad \sigma_{V_{\text{ang}}}^2 = \frac{\sigma_{v_d}^2 + \sigma_{v_g}^2}{L^2}$$

En utilisant les valeurs expérimentales :

$$\sigma_{V_{\text{lin}}}^2 = \frac{(0.001964)^2 + (0.002072)^2}{4} \approx 0.001, \quad \sigma_{V_{\text{ang}}}^2 = \frac{(0.001964)^2 + (0.002072)^2}{L^2} \approx 0.021$$

Nous pouvons alors définir la matrice de covariance du processus :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \sigma_{V_{\text{lin}}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{V_{\text{ang}}}^2 \end{bmatrix} \mathbf{B}^T$$

En remplaçant les valeurs numériques :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.021 \end{bmatrix} \mathbf{B}^T$$

La propagation de cette incertitude à l'ensemble des états donne :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.021 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.5.2 Bruit sur les mesures \mathbf{R}

L'analyse des fichiers CSV contenant les mesures de l'IMU nous a permis d'estimer les covariances des variables mesurées. Ces données — heading, vitesse angulaire et accélérations — présentent une légère dispersion mais conservent une distribution proche d'une loi gaussienne, comme le montrent les histogrammes de la figure (voir Fig. 2).

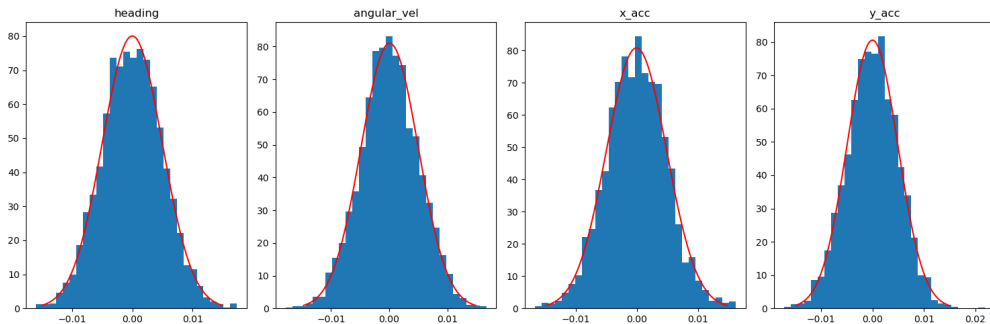


FIGURE 2 – Histogrammes des mesures de l'IMU montrant la distribution du bruit.

D'après cette analyse, les variances associées aux mesures $\sigma_{\ddot{x}}, \sigma_{\ddot{y}}, \sigma_{\theta}, \sigma_{\dot{\theta}}$ ont été extraites et utilisées pour définir la matrice de covariance des mesures.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_{a_x}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{a_y}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\theta}}^2 \end{bmatrix}$$

En remplaçant par les valeurs estimées expérimentalement :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2.4 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.4 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

3 Résultats

Dans cette section, nous présentons les résultats de l'estimation des déplacements du robot, avec et sans filtrage.

3.1 Sans filtre

Les graphiques ci-dessous montrent la comparaison entre l'estimation de la position du robot à partir des encodeurs seuls et le ground truth (voir Fig. 3). Ces résultats permettent d'observer l'évolution de la trajectoire estimée sans correction.

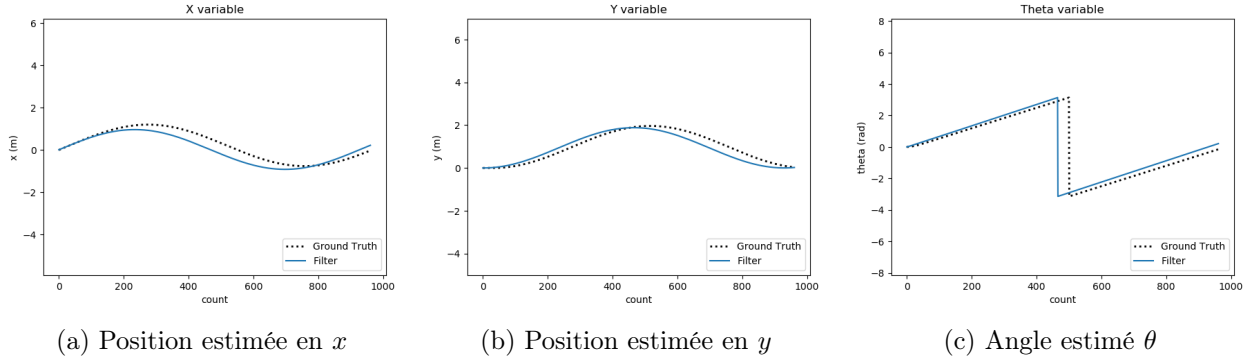


FIGURE 3 – Comparaison entre l'estimation de la position sans filtre et le ground truth pour x , y et θ .

3.2 Filtre de Kalman

Les graphiques suivants montrent la comparaison entre l'estimation de la position du robot après l'application du filtre de Kalman et le ground truth (voir Fig. 4). Ces résultats permettent d'observer l'impact du filtrage sur la trajectoire estimée.

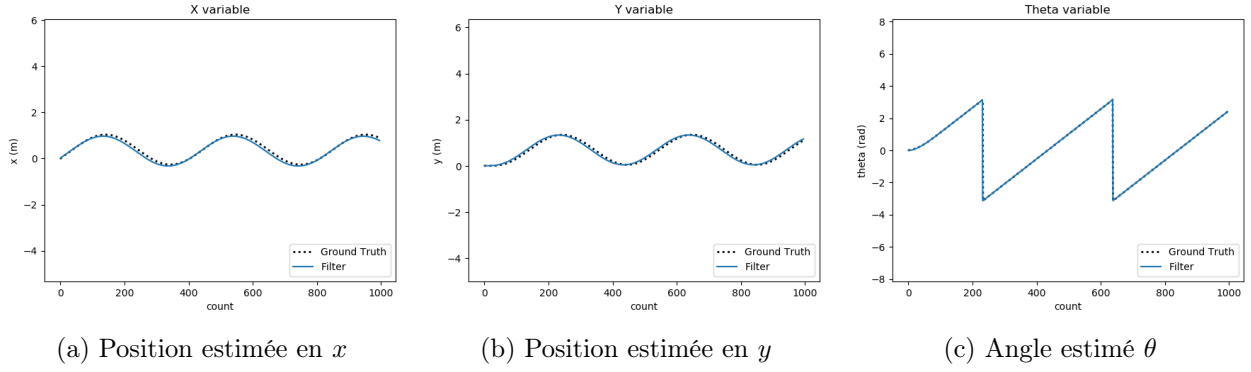


FIGURE 4 – Comparaison entre l'estimation de la position avec le filtre de Kalman et le ground truth pour x , y et θ .

4 Discussion

4.1 Analyse des résultats

Sans filtrage, les erreurs dues au glissement des roues entraînent une dérive de la trajectoire. (voir Fig. 3). Les estimations basées uniquement sur les encodeurs accumulent progressivement des erreurs, compromettant ainsi la précision du suivi de la position et de l'orientation du robot.

L'application du filtre de Kalman permet de réduire ces erreurs et d'obtenir des trajectoires plus proches du grand truth (voir Fig.4). En lissant les estimations et en compensant les incertitudes des capteurs, le filtre améliore la cohérence du suivi du mouvement et limite la dérive observée avec les encodeurs seuls.

4.2 Limites du modèle

Le filtre de Kalman repose sur l'hypothèse d'une accélération constante, ce qui peut induire des erreurs lors de variations brusques de vitesse ou de direction. Sa précision dépend aussi des matrices de covariance \mathbf{Q} et \mathbf{R} , dont un mauvais réglage peut compromettre la fiabilité des estimations.

4.3 Autres approches possibles

Des filtres non linéaires comme le filtre de Kalman étendu auraient pu mieux prendre en compte la dynamique réelle du robot, mais avec une mise en œuvre plus complexe. Une autre approche aurait été d'utiliser un filtre sans commande, en augmentant la dimension du vecteur de mesure.

5 Conclusion

Le filtre de Kalman a permis d'améliorer l'estimation de la position et de l'orientation du robot en réduisant la dérive des encodeurs. Malgré ses limites, notamment l'hypothèse d'accélération constante, il offre une meilleure précision. Des approches non linéaires ou un vecteur de mesure élargi pourraient encore améliorer les performances.