Problème : irrationnalité du nombre e

A. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^{1-x}$.
On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 4 cm).

1. Étudier la fonction f. Construire la courbe $\mathcal{C}$.
2. Calculer $I_1 = \int_0^1 f(x)\,dx$.

B. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx.$$

1.a. Montrer que pour tout x dans $[0;1]$,

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e\,x^n.$$

b. Calculer $J_n = \int_0^1 x^n\,dx$.

c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose

$$k_n = n!\,e - I_n.$$

a. Exprimer k_{n+1} à l'aide de k_n.

b. Calculer k_1. En déduire par récurrence sur n, que k_n est un entier naturel pour tout $n \geq 1$.

c. Montrer que, quel que soit le naturel $n \geq 2$, le nombre $n!\,e = k_n + I_n$ n'est pas un entier naturel.

4.a. Soit p et q deux entiers naturels strictement positifs. Montrez que, pour $n \geq q$, le nombre $\dfrac{n!\,p}{q}$ est un entier naturel.

4.b. En déduire que e n'est pas un nombre rationnel.