PRÁCTICA 2. FUNCIONES DE UNA VARIABLE: LÍMITES, CONTINUIDAD Y DERIVADAS

1. Límites y continuidad de funciones

Como veremos a continuación, el módulo de cálculo simbólico (Symbolic Math Toolbox) proporciona a MATLAB la capacidad de realizar algunas de las operaciones fundamentales del Análisis Matemático de funciones de una variable. Comenzaremos con el cálculo de límites y el análisis de la continuidad de una función.

`limit(f,x,a)`	Calcula el límite de *f* cuando *x* tiende hacia el punto `a` : $\lim_{x\to a} f(x)$. Si no se especifica la variable tomará, por defecto, *x*. Si no se especifica `a` tomará, por defecto, 0.
`limit(f,x,a,'right')`	Calcula el límite por la derecha : $\lim_{x\to a^+} f(x)$
`limit(f,x,a,'left')`	Calcula el límite por la izquierda : $\lim_{x\to a^-} f(x)$
`limit(f,x,inf)`	Calcula el límite de *f* en *más infinito* : $\lim_{x\to +\infty} f(x)$
`limit(f,x,-inf)`	Calcula el límite de *f* en *menos infinito* : $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

Por ejemplo, vamos a calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x},\quad \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x},$$

```
>> syms x
>> limit(sin(x)/x,x,0), también limit(sin(x)/x)
>> limit((x-2)/(x^2-4),x,2)
>> limit(1/x,x,0)  *
>> limit(1/x,x,0,'right')
>> limit(1/x,x,0,'left')
>> limit(1/x,x,+inf)
>> limit(1/x,x,-inf)
```

* *observacion*

¿Cuál es el resultado que da MATLAB para el límite: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$? ¿Cuál es el valor de dicho límite?

1.1 Ejemplo

Calcula los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen5x}{\ln(1+4x)} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+sen4x)}{e^{sen5x}-1}$$

```
>> syms x
>> f(x)=sin(5*x)/log(1+4*x); pretty(f)
>> limit(f(x),x,0)  **
>> g(x)=log(1+sin(4*x))/(exp(sin(5*x))-1); pretty(g)
>> limit(g(x),x,0)  **
```

** *observacion* `¿o bien limit(f)?`

1.2 Ejemplo

Estudia la continuidad de la siguiente función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3}{5} & si \quad x\le 1 \\ 6-5x & si \quad 1<x<3 \\ x-3 & si \quad x\ge 3 \end{cases}$

Represéntala gráficamente en el intervalo $[-5, 5]$.

Solución.- En los intervalos abiertos: $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ y $(3,+\infty)$ es continua por ser el resultado de realizar operaciones con funciones continuas. Tenemos que estudiar qué ocurre en los puntos $x=1$ y $x=3$.

Estudio en el punto $x=1$:

```
>> syms x
>> f1(x)=(2*x^2+3)/5
>> limit(f1(x),x,1,'left')
ans =
1
>> f2(x)=6-5*x
>> limit(f2(x),x,1,'right')
ans =
1
>> f1(1)
ans =
1
```

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$, entonces f es continua en $x=1$.

Estudio en el punto $x=3$:

```
>> limit(f2(x),x,3,'left')
ans =
-9
>> f3(x)=x-3
>> limit(f3(x),x,3,'right')
ans =
0
```

Como $\lim_{x\to 3^-} f(x)\neq\lim_{x\to 3^+} f(x)$, entonces $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe, luego f no es continua en $x=3$.
Por tanto, la función f es continua en $\mathbb{R}-\{3\}$.

Para representarla gráficamente en el intervalo $[-5, 5]$, tiene que dibujarse a trozos:

```
>> ezplot(f1,[-5,1])
>> hold on
>> ezplot(f2,[1,3])    **
>> ezplot(f3,[3,5])
>> hold off
>> axis([-5,5,-10,12])
>> grid on
```

** *observación*

En un dibujo para puristas `[1.0001 , 2.9999]`

1.3 Ejemplo

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} + |x| + 1$$

Calcular sus **asíntotas**.

Solución.-

Observar que el dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$, luego para saber si posee asíntotas verticales hemos de calcular los límites laterales de la función f en 0:

```
>> syms x
>> f(x)=(x^2+1)/x+abs(x)+1, pretty(f)
>> limit(f(x),x,0,'left')
>> limit(f(x),x,0,'right')
```

luego la recta $\boldsymbol{x = 0}$ **es asíntota vertical**.

Buscamos asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$:

```
>> limit(f(x),x,inf)
```

como el límite no es un número real, **no hay asíntota horizontal** cuando x tiende a $+\infty$.

Buscamos entonces la asíntota oblicua, $y = mx + n$, primero calculamos la pendiente m y, si $m \in \mathbb{R}$, calculamos n :

```
>> m=limit(f(x)/x,x,inf)
m =
   2
>> n=limit(f(x)-m*x,x,inf)
n =
   1
```

se obtiene $m = 2$ y $n = 1$, luego la recta $\boldsymbol{y = 2x + 1}$ **es asíntota oblicua** cuando x tiende a $+\infty$. Buscamos ahora la asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$, si es que existe:

```
>> m=limit(f(x)/x,x,-inf)
>> n=limit(f(x)-m*x,x,-inf)
```

se obtiene $m = 0$ y $n = 1$, es decir, la asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$ es la recta $\boldsymbol{y = 1}$. En este caso **es asíntota horizontal** y podríamos haberla encontrado directamente si primero hubiésemos calculado:

```
>> limit(f(x),x,-inf)
```

Por último, observamos todo lo anterior dibujando en un intervalo adecuado, por ejemplo en $[-7, 7]$

```
>> ezplot(f,[-7,7])
```

2. Ejercicios

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$ b) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{senx}}$ c) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} e^{tgx}$

Sol.: a) −1, b) 1, c) e, d) No existe.

2. Estudia la continuidad de la siguiente función y represéntala gráficamente en el intervalo $[-4, 5]$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^{1/x}} & si \quad x<0\\ 1 & si \quad x=0\\ \sqrt{x^2+1} & si \quad x>0\end{cases}$$

Calcula el valor de *f* en 1/2. Calcula los puntos donde *f* toma el valor 3.

Sol: f es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$; $f(1/2)=1.1180$; $x=2.8284$

3. Representa gráficamente las funciones en los intervalos indicados, si ello es posible:

a) $f(x)=\frac{x^2+2}{x-3}$ en [-5, 8]   b) $f(x)=\sqrt{x^2+2}$ en [-4, 6]

c) $f(x)=x^2e^{-x}$ en [-2, 6]   d) $f(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ en [-6, 6]

4. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{2n+3}$ c) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+1}\right)^{3n^2}$

d) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(n^2+n\right)}{n}$ e) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n-sen(n)}{n}$ f) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+sen\frac{1}{n}\right)^{n}$

3.- Apéndice: Vectores fila

En general, los vectores fila se introducen escribiendo entre corchetes cada una de sus coordenadas separadas por un espacio o una coma. Por ejemplo, se puede crear el vector $v = (4,-6, 5)$ escribiendo:

```
>> v=[4 -6 5]
```

Además, para conseguir vectores fila con valores igualmente espaciados, tenemos la siguiente orden:

`v=[a:h:b]`	Define un vector fila `v` cuya primera coordenada es `a` y las demás coordenadas aumentan de `h` en `h` sin superar `b`. Si no se especifica `h`, toma por defecto el valor 1. También se puede escribir sin los corchetes.
`v=a:b`	Define un vector fila `v` cuya primera coordenada es `a` y las demás coordenadas aumentan de 1 en 1 sin superar `b`.

4.- Cálculo de derivadas

Para calcular la *función derivada* de una función, MATLAB dispone de la orden `diff`:

`diff(f,x,n)`	Calcula la derivada *n-ésima* de f con respecto a la variable x.
`diff(f,x)`	Calcula la derivada de la función simbólica f con respecto a la variable x.
`diff(f)`	Deriva f con respecto a la variable que elegirá Matlab por defecto.

Por ejemplo:

1.- Para $f(x) = x^2$, calcular $f'(x)$, o lo que es lo mismo, $\dfrac{df}{dx}$.

2.- Para $g(x) = x \, sen \, x$, calcular $g'''(x)$.

3.- Para $h(x) = ln \, x$, calcular $h''(x)$.

4.- Para $f(x) = \dfrac{1}{x}$, calcular $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$.

5.- Para $f(y) = cos(ay)$, calcular $f'(y)$

```
>> syms x
>> diff(x^2,x)
>> diff(x*sin(x),x,3)
>> diff(log(x),x,2)
>> f(x)=1/x
>> diff(f), diff(f,2), diff(f,3)
>> syms y a
>> diff(cos(a*y),y)
```

4.1. Ejemplo

Dada la función $$f(x)=\frac{x}{1+x^2},$$

a) Calcula su derivada primera y su segunda derivada, dibuja las tres en un mismo gráfico en el intervalo [-3, 3]. Observa la relación entre los extremos y los puntos de inflexión de las gráficas de las tres funciones.

b) Calcula los extremos absolutos de f en el intervalo [-3, 3], y señálalos en la gráfica de f en [-3, 3].

Solución.-

Calculamos la primera y la segunda derivada de *f*, a veces es conveniente simplificar expresiones,

```
>> syms x
>> f(x)=x/(1+x^2); pretty(f)
>> df=diff(f), pretty(df)
>> df=simplify(df), pretty(df)
>> d2f=diff(f,2), pretty(d2f)
>> d2f=simplify(d2f), pretty(d2f)
```

Observación: Mirar si la variable `df` es una expresión o función simbólica.

Representamos gráficamente la función y sus derivadas en el intervalo [-3, 3]. Cuando tengamos representadas las tres funciones cambiamos el color de los distintos trazos utilizando los botones de la ventana gráfica. Para poder distinguirlas, podemos añadir una leyenda con la orden `legend`.

```
>> ezplot(f,[-3,3])
>> hold on
>> ezplot(df,[-3,3])
>> ezplot(d2f,[-3,3])
>> grid on
>> legend('f','df','d2f')
```

La función f es continua en el intervalo [-3, 3].

Para calcular los extremos bastará con calcular los puntos donde se anule la derivada y evaluar la función, en dichos puntos y en los extremos del intervalo,

```
>> solve(df)
>> f([-3,-1,1,3])    → Halla el valor de f en los cuatro puntos a la vez
>> figure(2), ezplot(f,[-3,3])
>> hold on, plot(-1,f(-1),'*r')
>> plot(1,f(1),'*g')
```

El valor máximo es 1/2 y se alcanza en el punto 1, luego en $x_0 = 1$ tenemos el máximo absoluto de f en $[-3, 3]$.
El valor mínimo es -1/2 y se alcanza en el punto -1, luego en $x_1 = -1$ tenemos el mínimo absoluto de f en $[-3, 3]$.

4.2. Ejemplo

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3}$,

Estudia: a) Los puntos de corte con los ejes, puntos de discontinuidad y asíntotas.
b) Intervalos de monotonía, extremos relativos y absolutos de *f*.
c) Los intervalos de concavidad y de convexidad de la función.

Solución.-

a) Para calcular los **cortes de la gráfica de *f* con el eje** *x*, resolvemos la ecuación *f(x)* = 0:

```
>> syms x
>> f(x)=(x^2-4*x+4)/x^3;
>> solve(f)
ans =
     2
     2
```

luego sólo corta al eje *x* en el punto (2, 0). Con respecto al corte con el eje *y*, observar que en este caso no hay corte con el eje *y* porque la función no está definida en el punto *x* = 0, siendo un lugar candidato para encontrar una asíntota vertical.

Para calcular las **asíntotas verticales**:

```
>> limit(f(x),x,0,'right')
ans =
    Inf
>> limit(f(x),x,0,'left')
ans =
   -Inf
```

luego la recta *x* = 0 es una asíntota vertical.

Buscamos **asíntotas horizontales** calculando el límite de la función en + ∞ y en − ∞

```
>> limit(f(x),x,inf)
>> limit(f(x),x,-inf)
```

como el $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ entonces la recta *y* = 0 es asíntota horizontal cuando x tiende a + ∞.

Y como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, también la recta y = 0 es asíntota horizontal cuando x tiende a − ∞.

Puesto que tiene asíntotas horizontales en + ∞ y en − ∞, no hay que buscar oblicuas, porque obtendríamos las horizontales.

b) Para resolver este apartado es preciso calcular la derivada primera de *f* y los puntos que anulan a dicha derivada primera:

```
>> df=diff(f)
>> solve(df)
ans =
     2
     6
```

Por tanto los intervalos de monotonía de la función son (−∞, 0), (0, 2), (2, 6), (6, + ∞) (nótese que la función no está definida en 0). Estudiamos el signo de la primera derivada en los intervalos de monotonía, evaluando la función simbólica derivada de *f* en puntos intermedios:

```
>> df([-4,0,1,2,3,6,9])     →     Halla el valor de df en los seis puntos a la vez
ans =
    [-15/64, -5, 0, 1/27, 0, -7/2187]
```

Se obtiene:

Intervalo/Valor	**Valor de *f***	**Valor de *df***	**Comportamiento de *f***
$(-\infty, 0)$		$f'(-4) = -15/64 < 0$	decreciente
0	No existe		
$(0, 2)$		$f'(1) = -5 < 0$	decreciente
2		$f'(0) = 0$	extremo → mínimo
$(2, 6)$		$f'(3) = 1/27 > 0$	creciente
6		$f'(6) = 0$	extremo → máximo
$(6, +\infty)$		$f'(9) = -7/2187 < 0$	decreciente

Tras el estudio de la monotonía se obtuvo que en $x = 2$ hay un **mínimo relativo** y que en $x = 6$ hay un **máximo relativo** de *f*, pero *f* no tiene ni máximo ni mínimo absoluto.

c) Para resolver este apartado es preciso calcular la derivada segunda de *f* y los puntos que anulan a dicha derivada segunda:

```
>> d2f=diff(f,2)
>> solve(d2f)
ans =
    6 - 2*3^(1/2)
2*3^(1/2) + 6
>> double(ans)
ans =
    2.5359
    9.4641
```

Por tanto los intervalos de concavidad-convexidad son:

$$(-\infty, 0), (0, 6-2\sqrt{3}), (6-2\sqrt{3}, 6+2\sqrt{3}) \text{ y } (6+2\sqrt{3}, +\infty).$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en estos intervalos:

```
>> d2f([-4,2,5,10])
ans =
    [-11/64, 1/4, -22/3125, 1/12500]
```

Se obtiene que:

$f''(-4) = -11/64 < 0$, $f''(2) = 1/4 > 0$, $f''(5) = -22/3125 < 0$, $f''(10) = 1/12500 > 0$,

por tanto la función *f* es **convexa** en $(-\infty, 0)$ y $(6-2\sqrt{3}, 6+2\sqrt{3})$

cóncava en $(0, 6-2\sqrt{3})$ y $(6+2\sqrt{3}, +\infty)$.

los **puntos de inflexión** de *f* se encuentran en: $x_1 = 6-2\sqrt{3}$ y $x_2 = 6+2\sqrt{3}$.

Por último, representamos la función y comprobamos que los resultados obtenidos se corresponden con la **representación gráfica**. Para dibujar, elegimos un intervalo adecuado que contenga los aspectos más significativos de la gráfica:

```
>> ezplot(f,[-10,15])
>> grid on
```

5.-Polinomios de Taylor $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \forall x\in B(x_0,r) \quad a_n=\frac{f'^n(x_0)}{n!}$

`taylor(f,x,x0,'Order',n)`	Calcula el polinomio de Taylor de f de orden $n-1$ en el punto x_0. Es imprescindible declarar la variable x de la función f.
`taylor(f,'Order',n)`	Calcula el polinomio de MacLaurin de f de orden $n-1$.
`taylortool`	Es una calculadora de polinomios de Taylor

Por ejemplo, para las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\cos x$, vamos a calcular:
(1) el polinomio de Taylor de f de orden 4 en el punto 0, (o polinomio de MacLaurin de f de orden 4),
(2) el polinomio de Taylor de f de orden 6 en el punto 0, (o polinomio de MacLaurin de f de orden 6),
(3) el polinomio de Taylor de f de orden 3 en el punto 2,
(4) el polinomio de Taylor de g de orden 4 en el punto $\pi/4$,

```
>> syms x, f(x)=exp(x), g(x)=cos(x)
>> taylor(f,'Order',5)
>> taylor(f,'Order',7)
>> taylor(f,x,2,'Order',4)
>> taylor(g,x,pi/4,'Order',5)
```

Observar como, en este último caso, se obtiene el siguiente polinomio de Taylor:

$$T(x)=\frac{\sqrt{2}}{48}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)^4-\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)^3-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

es decir

$$T(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{\sqrt{2}}{48}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4$$

5.1. Ejemplo

Representa la función $f(x)=sen\,x$ y sus polinomios de MacLaurin de grados 1, 3 y 5 en el intervalo $[-\pi,\pi]$.

Solución.- Calculamos en primer lugar dichos polinomios:

```
>> syms x, f(x)=sin(x)
>> tf1=taylor(f,'Order',2),tf3=taylor(f,'Order',4),tf5=taylor(f,'Order',6)
```

Representamos gráficamente f y sus polinomios de Taylor. Para poder diferenciar las distintas graficas, podemos cambiar el color de los trazos y/o añadir una leyenda.

```
>> ezplot(f,[-pi,pi])
>> hold on
>> ezplot(tf1,[-pi,pi])
>> ezplot(tf3,[-pi,pi])
>> ezplot(tf5,[-pi,pi])
>> grid on
>> legend('f','tf1','tf3','tf5')
```

6.- Ejercicios

1.- Dada la función $f(x) = arctg\left(\dfrac{\cos x}{1+senx}\right)$ Calcular la derivada y comprobar que f (x) = constante.

2.- Halla los intervalos de monotonía y de concavidad de la función: $f(x) = x + \dfrac{1}{x-2}$

Comprueba gráficamente los resultados obtenidos. Calcula las asíntotas y los cortes con los ejes.

Solución: *f* es creciente en (- ∞, 1) y (3,+∞) y decreciente en (1, 2) y (2, 3). *f* es cóncava en (- ∞, 2) y convexa en (2, + ∞). Asíntotas: $x = 2$, $y = x$. Cortes: (1, 0), (0,-1/2).

3.- Se considera la función f definida por: $f(x) = \dfrac{e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)}}{t}$, $t > 0$,

que representa la evolución a lo largo del tiempo de la concentración de un compuesto en una cierta reacción química. Calcula en qué momento se produce la concentración máxima y cuál es este valor máximo. Representa gráficamente la función.

Solución: El máximo se produce en el instante t = 1 y la concentración máxima es $e^{-\frac{1}{2}}$.

4.- La función $f(t) = 3t^4 - 10t^3 + 6t^2$ representa los beneficios que tiene una empresa en miles de euros considerando *t* medido en años. ¿Qué beneficios obtiene pasado dos meses? ¿Qué beneficios máximos tiene el primer año y en qué momento se alcanza? ¿Tiene pérdidas? ¿En qué momento comienzan? ¿Qué perdidas máximas tiene? A la larga ¿tiene beneficios o pérdidas?

Solución: a los 2 meses 122.7 euros; al medio año tiene beneficio máximo de 437.5 euros; a los 0.7847 años comienzan las pérdidas; al año tiene 1000 euros de pérdidas; a los dos años tiene pérdida máxima de 8000 euros; a la larga tiene beneficios.

5.- Dada la función $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2+1}$. Hallar la ecuación de la recta tangente a *f* en el punto de abscisa x = −1. Representar en la misma ventana y con distintos colores, la función, la recta y el punto, tomando como intervalo [−2 , 0]. Añadir leyendas.

Solución : y = 2.5 x + 4

6.- Aproxima la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ por una parábola en $x = 0$. Representa la función y la parábola en un mismo gráfico.

Solución: $y = 1 - x^2$.

7.- Se considera la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & si \quad x \in (0,+\infty) \\ a & si \quad x = 0 \end{cases}$

a) Calcula *a* para que la función sea continua en [0,+∞).
b) Halla los extremos de *f* en [0,+∞).
c) Aproxima *f* por una parábola en un entorno del punto 1. Dibuja la función y la parábola.

Solución: a) a = 0, b) $e^{-\frac{1}{2}}$ es el mínimo absoluto de *f*, c) $y = \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}$.

8.- Hallar las dimensiones del rectángulo de perímetro 12 que tiene la diagonal más pequeña.

Solución: Cuadrado de lado 3.

9.- Calcula los polinomios de McLaurin de grados 2, 4, 6 y 8 de la función *f(x) = x sen x* y representálos junto con la función en un mismo gráfico.

Solución: $P_2(x) = x^2$, $P_4(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^4$, $P_6(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{120}x^6$,

$$P_8(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{120}x^6 - \frac{1}{5040}x^8$$

10.- Obtener el polinomio de McLaurin de orden 3 de la función $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Usarlo para calcular un valor aproximado de ln 3.

Solución: P3(x) = 2x + 2x3/3 , ln 3 ≈ 1.0833.

11.- Una sustancia se somete a variaciones de temperatura durante tres horas para estudiar su comportamiento. La función

$$T(t) = \frac{32t}{(t+1)^2} + 2,$$

mide la temperatura (en grados centígrados) de la sustancia en el instante t.

a) Estudia analíticamente en qué momentos del intervalo [0, 3] se alcanzan las temperaturas máxima y mínima. La sustancia estudiada pierde algunas de sus propiedades si se somete a temperaturas mayores de 15ºC o menores de −2ºC. ¿Se traspasan estos límites durante el experimento?

b) Representa gráficamente la función temperatura. Comprueba sobre la gráfica los resultados obtenidos en el apartado anterior.

12.- Un transporte especial por carretera supone un gasto en función de la velocidad (en km/h) según la función (en céntimos de euro por km):

$$f(v) = 2\left(\frac{8100}{v} + v\right), \quad v \in [10,100].$$

a) Analiza si la función gasto *f* es continua y derivable.

b) ¿En qué intervalos aumenta el gasto y en cuáles disminuye?

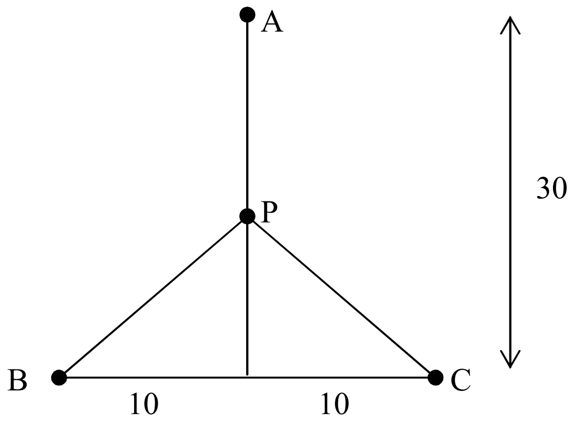
c) Estudia para qué valores de *v* se produce el gasto mínimo y el gasto máximo y cuáles son los valores máximo y mínimo del gasto.

d) Representa gráficamente la función *f*.

e) Si el transporte tiene que cubrir un trayecto de 100 km en el menor número de horas posible y la velocidad máxima permitida en ese trayecto es de 80 km/h. ¿Cuál es en este caso el valor de la velocidad *v* que supone un gasto mínimo?

f) Aproxima la función f por una parábola en un entorno de v=30. Representa en un mismo gráfico la función f y la parábola.

13.- Se desea proyectar el trazado de un sistema de tuberías para transportar petróleo desde un punto A hasta los puntos B y C situados como se representa en la figura inferior (la distancia se mide en km). Determina la posición del punto P para que la longitud total de la tubería sea mínima. Representa gráficamente la función que has utilizado para resolver el problema



14.- Se diseña un almacén de 900 m2 de planta. La planta del almacén es rectangular con tres paredes de ladrillo y un frente de cristal. Se ha calculado que la pérdida de calor a través del cristal es de 71 kcal por metro lineal y a través del ladrillo es de 50 kcal por metro lineal.

a) Halla las dimensiones de la planta del almacén para que la pérdida de calor sea mínima.

b) Si añadimos la condición de que la pared de cristal no mida menos de 30 m ni más de 45 m, ¿cuáles deben ser en este caso las dimensiones de la planta para optimizar la pérdida de calor?