

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Введение	3
1. ГРУППОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЖИВОТНОМ МИРЕ	5
1.1. Методы наблюдения и сбора информации.....	5
1.2. Основные результаты наблюдений	6
1.3. Количественные характеристики группового движения ...	9
2. КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ ГРУППОВОЙ ДИНАМИКИ	12
2.1. Основные модели	12
3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГРУППОВОЙ ДИНАМИКИ	15
3.1. Модели “с вязкостью”	15
3.2. Модель микроскопической фазовой плотности	18
4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ	22
4.1. Задача, поставленная перед численным моделированием .	22
4.2. Оптимизации, проведенные в программе-симуляторе	23
4.3. Адаптация граничных условий течения Куэтта	26
4.4. Алгоритм определения стабилизации состояния системы	28
5. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	30
Выводы.....	31
Список литературы	33

ВВЕДЕНИЕ

Считается, что впервые задача моделирования поведения “разумно” взаимодействующих объектов была поставлена и удовлетворительно решена К. Рейнольдсом в 1987 году [1]. Его модель носила исключительно прикладной характер и использовалась для моделирования поведения стай птиц, групп животных или даже космических кораблей при создании анимационных фильмов.

В природе существует безграничное многообразие взаимодействий между живими существами. Однако многолетние наблюдения показали, что все живые организмы, собираясь в группы, демонстрируют особый класс группового взаимодействия, в результате чего было выделено отдельное направление в биологии, изучающее этот феномен.

Параллельно с этим, в 1995 годы Т. Vicsek’ом и коллегами [2] была предложена минимальная модель, описывающаяся простыми уравнениями и демонстрирующая многие аспекты групповой динамики. Наиболее интересным с физической точки зрения в их модели оказалось наличие явления фазового перехода от разупорядоченного к упорядоченному поведению частиц, называемых “самодвижущимися”.

С тех пор было предложено большое количество аналогичных моделей, к примеру [3–8], проведено множество симуляций с различными параметрами систем (наиболее полную информацию можно найти в одной из последних работ Т. Vicsek’а [9] и в приведенном списке литературы), а также был получен богатый экспериментальный материал, см. например в [10–23].

Однако, несмотря на 20-ти летнюю историю, по-прежнему в области описания поведения самодвижущихся частиц остается множество пробелов. К примеру, нет однозначности касательно рода фазового перехода, так, в работах [3, 24] приводятся аргументы в пользу фазового перехода 1-го рода, в то время как в [2, 6, 12] обосновывается его непрерывный характер (ф. п. 2-го рода).

Не менее интересным является вопрос об аналитическом описании гидродинамики системы самодвижущихся частиц. Среди полученных результатов выделяются работы Tonner'a и Tu [8, 25], в которых были получены феноменологические уравнения, аналогичные уравнениям Навье-Стокса, а также работы Bertin'a и соавторов [26], в которых был рассмотрен Больцмановский подход в приближении парного взаимодействия и получены уравнения, прямо соответствующие феноменологическим.

Недавно был предложен другой подход, основанный на функционале микроскопической фазовой плотности, в результате которого было получено уравнение идеальной жидкости вичековского типа (о нем ниже), которое является аналогом уравнения Эйлера для молекулярных жидкостей.

1. ГРУППОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЖИВОТНОМ МИРЕ

1.1 Методы наблюдения и сбора информации

Главная сложность в выполнении экспериментального наблюдения за группой животных или, тем более, насекомых заключается в трудности отслеживания траекторий отдельных особей. Это связано с тем, что рассматриваемые колонии или группы

- состоят из множества индивидов, которые
- выглядят очень похоже
- и в основном очень быстро перемещаются

Кроме того, необходимо учитывать крайнее разнообразие живых организмов, за перемещением которых необходимо наблюдать, поскольку, как уже говорилось во введении, изменение поведения при объединении в группы наблюдается для широкого разнообразия типоразмеров животных — начиная от бактерий в пробирке [10, 13] и заканчивая китами на океанских просторах [27]. Несмотря на совсем неочевидные методы решения этих проблем, изучению группового поведения на протяжении многих лет посвящалось значительное внимание.

Условно их можно разделить на две неравные группы: в одну отнесем так или иначе методы с использованием визуальных средства (т.е. фото- и видеокамер в комбинации с различного рода маячками или метками), а в другую — сравнительно недавно начавшие применяться методы с использованием GPS-систем.

Классическим может считаться метод измерения скорости по изображениям частиц [28]. Обычно он применяется для измерения скорости потока жидкости или газа: в исследуемую среду вводится краситель, состоящий из броуновских частиц, и при помощи наблюдения за перемещением этого вещества возможно определить линии тока в исследуемой среде. Применимо к самодвижущимся частицам метод успешно был применен Czirók et al[13], которые при помощи фазово-контрастной микроскопии исследовали групповое движение молекул.

Когда речь заходит об исследовании стай птиц (стад животных), размер индивидов больше, однако, в отличие от бактерий, область перемещения слабо ограничена. Чтобы обойти эту сложность, например, Вессо et all [29] ограничили движение рыб по высоте, используя плоский аквариум.

Использование нескольких камер для съемки стай с разных точек в дальнейшем требовало трудоемкой обработки результатов для получения трехмерной картины, но позволило получить мгновенные снимки положения сотен скворцов в стае [15], однако получить траектории движения не удалось.

По мере развития технологий стало возможным создать маячки GPS — достаточно маленькие, чтобы их можно было закрепить на животном или птице, не мешая ему. Ограничением такого подхода является возрастающая стоимость исследования. Были проведены исследования пар [18, 30] или даже шестерок [17] тренированных голубей.

Помимо вышесказанного, в настоящее время увеличение точности сонаров и разработка определенной технологии применения, в которой океан выступает в роли акустического волновода, позволило использовать их для единовременного наблюдения за огромными количествами рыб на больших территориях океанического шельфа. [21]

Подводя итоги, можно отметить увеличение роли компьютера в накоплении и обработке экспериментальных данных. Текущая динамика позволяет надеяться, что со временем будут получены данные не меньшей точности, чем получаемые во время численных экспериментов по различным моделям.

1.2 Основные результаты наблюдений

Поскольку экспериментальное наблюдение стадных явлений не является темой данной работы, мы не будем останавливаться подробно на результатах полевых или лабораторных исследованиях, тем более что всестороннее освещение этого вопроса дано в работе Вичека [9]. Однако для лучшего понимания распространенности в природе стадных явлений будет приведен

краткий обзор наиболее характерных, с нашей точки зрения, работ, сгруппированных по исследуемому материалу. Итак, в разные годы объектами исследования становились:

- а) внутриклеточные соединения [10, 11]
- б) колонии бактерий [13, 31]
- в) насекомые [14]
- г) птицы [15–19, 30]
- д) рыбы [20, 22, 27]
- е) млекопитающие, к примеру, буйволы [23]

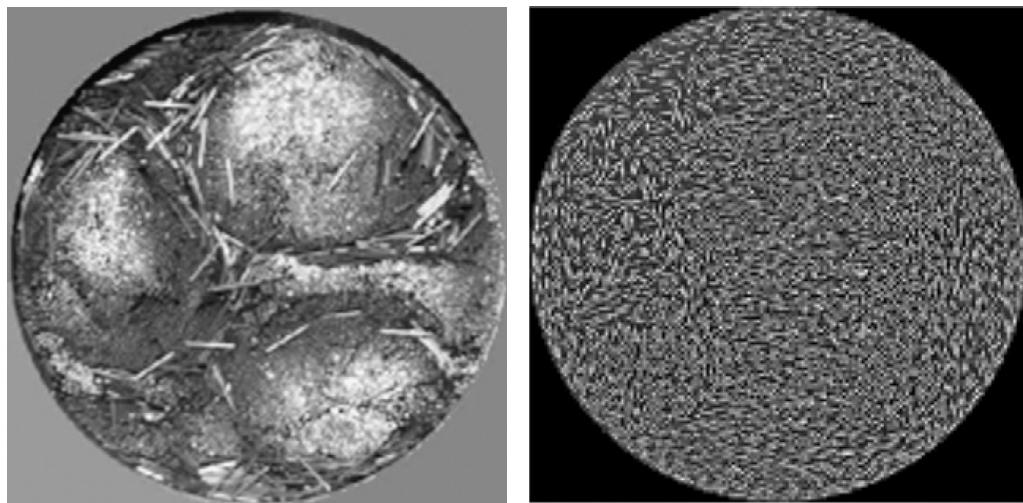
Особняком в этом ряду стоят наблюдения за океаническим планктоном [32] и превышающие по своей численности наблюдения за любым другим типом объектов, наблюдения за поведением групп людей, например [33, 34].

Кроме того, в совершенно отдельную группу необходимо выделить лабораторные эксперименты, проводимые с неживыми объектами — нематической жидкостью, колеблющимися металлическими стержнями, наночастицами в жидкости, микророботами и тому подобным. [35–37]

Теперь приведем основные результаты, полученные в ходе наблюдений. Для начала необходимо четко разделять работы, в которых исследования велись на плоскости (все, кроме указанных далее) и в которых наблюдения велись в трехмерном пространстве [15, 19, 27, 38]. Хотя, как выяснилось, для рыб такое разделение не вполне необходимо.

Главным наблюдением является то, что существует отдельный класс перемещений группы индивидов как целого. При определенных условиях происходит спонтанное нарушение симметрии, и хаотическое движение сменяется упорядоченным. Это наблюдается на всех масштабах природы, и при этом не обязательно прямое взаимодействие между особями, и бывает достаточно опосредованного взаимодействия через среду обитания [9, с. 119].

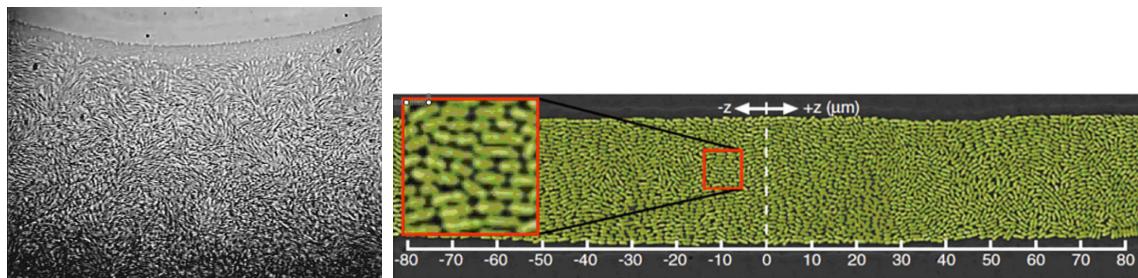
Следующим важным наблюдением является возникновение дальнего порядка связи, к примеру, рыбы могут изменять общее направление движения практически мгновенно [20], а птицы — так же быстро принимать решения о посадке. [19, 39].



(а) Нематическая жидкость [9, с. 82]

(б) Цилиндры на вибрирующей поверхности [37]

Рисунок 1.1 – Упорядочивание неживых объектов



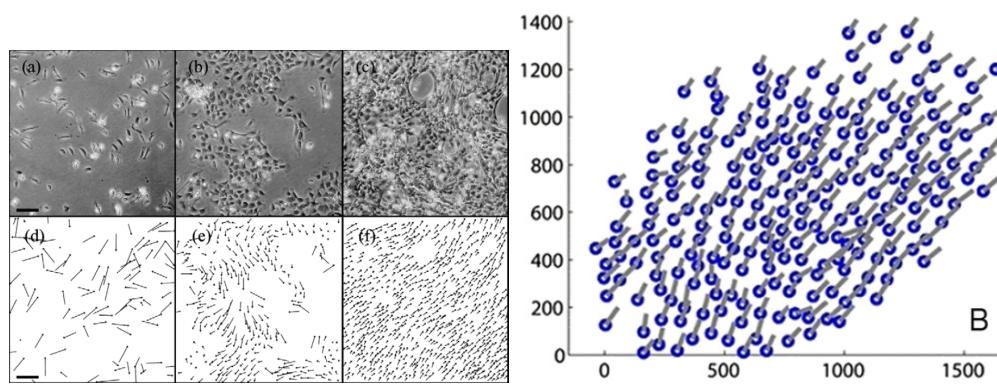
(а) Бактерии [9, с. 85]

(б) Молекулы [9, с. 87]

Рисунок 1.2 – Микроскопические проявления групповой динамики

Самым удивительным является то, что у всех живых существ и неживых предметов, при движении которых проявляются групповые явления, качественный характер этих явлений практически одинаков.

Наглядно это можно рассмотреть на рис. 1.1, 1.2, 1.3. Особенностью всех представленных на изображениях объединений является то, что они расположены на плоскости. И, как мы видим, возникает два типа упорядоченностей, иногда (как на рис. 1.1а) проявляющихся единовременно: это упорядоченное движение в спонтанно выбранном направлении или упорядоченное обращение вокруг некоторого центра. Видно также, что для совершенно, казалось бы, различных объектов групповое поведение является очень схожим.



(а) Косяк рыб [9, с. 90]

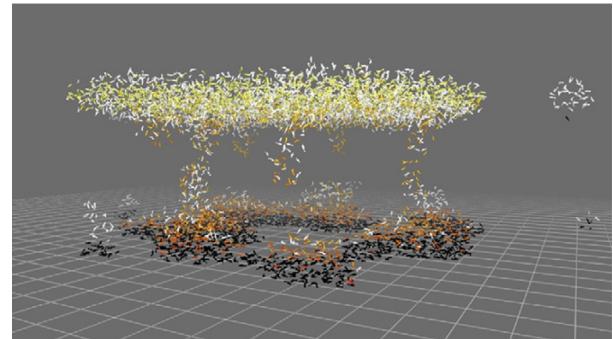
(б) Стая птица [39]

Рисунок 1.3 – Макроскопические проявления группового движения

Что же касается перемещений, не ограниченных в двух плоскостях, то нам хотелось бы заострить внимание на трех моментах.

Во-первых, в объемном пространстве также наблюдаются все вышеперечисленные упорядоченные перемещения: птицы сбиваются в стаю и летят в выбранном направлении [17], насекомые кружат вокруг улья [14] и т.п.

Во-вторых, и это является особенностью косяков рыб, возможно расслоение трехмерной группы на более плоские подгруппы, с наличием соединяющих (цилиндрических) столбов. Предполагается, что это связано с “мотивацией”, например, молодая стерлядь во время нереста предпочитает подниматься выше, а более старая опускается вниз. [40] При этом наблюдаются структуры, подобные изображенным на рис. 1.4

*Рисунок 1.4 – Расслоение косяка рыб*
При этом наблюдаются структуры, подобные изображенным на рис. 1.4

1.3 Качественные характеристики группового движения

Несмотря на то, что подобность движений различных типов объектов очевидна, для какого-либо исследования нельзя обойтись без количественных характеристик явления. Укажем отдельно характеристики объектов, которые участвуют в коллективном движении:

- а) все они похожи друг на друга
- б) они перемещаются с почти постоянной скоростью и способны изменять направление движения
- в) при сближении взаимодействие приводит к выравниванию направления движения
- г) выравнивание происходит с ошибками (шумом)

Для совокупности объектов характерным является наличие фазового перехода от разупорядоченного движения к упорядоченному.

Помня о том, что изменяется только направление движения каждого объекта, в качестве параметра порядка было естественно определить следующую величину:

$$\varphi = \frac{1}{Nv_0} \left| \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \right| \quad (1.1)$$

Тогда мерой упорядоченности системы является модуль средней скорости, нормированной на единицу. В уравнении 1.1 N — полное число объектов, v_0 — средний модуль скорости объектов в системе. Понятно, что если движение неупорядочено, то скорости объектов направлены случайным образом, и такая сумма будет стремиться к нулю. Если же скорости направлены вдоль некоторого выбранного направления, то параметр порядка стремится к единице. Разумеется, как и всяческий статистический параметр, выражаемый через средние величины, это выражение имеет смысл только при больших N , иначе величина флюктуаций из-за каждого объекта будет слишком высокой.

Из статистической физики нам известно, что фазовый переход может происходить как в равновесной (замкнутой), так и в неравновесной системе. Ввиду того, что в групповом движении, согласно рассматриваемой модели, участвуют самодвижущиеся частицы, становится понятно, что системы с групповой динамикой сугубо неравновесны. Неравновесная статистическая физика в последнее десятилетие выделилась в отдельное направление физики, и потому, возможно, было бы предпочтительнее модифицировать модель или провести аналогии с фазовыми переходами, рассматриваемыми в рамках равновесной статистической физики. [9]

Эта идея, однако, кажется неприемлимой по нескольким соображениям: во-первых, в системах, демонстрирующих групповую динамику, наблюдаются совершенно не характерные для равновесной термодинамики явления, такие как “пробки” или флюктуации гигантского числа частиц. А во-вторых, статистическая механика имеет дело с количеством частиц, стремящимся к бесконечности (10^{23}), и в рамках этого допущения определяет остальные понятия, в то время как явления группового перемещения наблюдаются при числе частиц, редко превышающем десятки тысяч.

Интересным было замечание [8], указывающее на значительную аналогию в поведении систем, демонстрирующих групповую динамику, и ферромагнитных систем. К примеру, рассмотрение критических экспонент, которые связаны с параметром порядка соотношениями вида:

$$\sigma \sim |1 - \eta/\eta_c|^{-\gamma} \quad (1.2)$$

позволяет вычислить критические индексы γ . При этом получается, что критические индексы, вычисленные, скажем, по модели Изинга и определенные из (численных) экспериментов с системами, демонстрирующими групповую динамику, оказываются в хорошем согласии между собой.

Итак, резюмируя, в системах с коллективными эффектами происходит фазовый переход, при этом параметром порядка выступает средняя векторная скорость 1.1, а в качестве “температуры” — шум, т.е. некоторое добавочное воздействие, которое случайным образом изменяет направление движения каждого объекта в рассматриваемой системе. Возникает вопрос — единственный ли это параметр, который может повлиять на фазу системы и привести к фазовому переходу? Как было экспериментально проведено Камбуи [20] и многими другими, фазовый переход в системе взаимодействующих объектов также возможен при увеличении плотности. Кроме “обычного” фазового перехода, при котором изменяется только направление скорости объектов, иногда наблюдается явление, в котором при увеличении плотности уменьшается скорость перемещения объектов и образуется “пробка”. [10]

2. КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ ГРУППОВОЙ ДИНАМИКИ

Как было сказано в главе 1, основной сложностью в исследовании процессов, происходящих в системе, демонстрирующей групповую динамику, является невозможность уследить сразу за всеми особями. В первую очередь проблема заключается в высокой технической сложности гарантированно отличить одну особь от другой.

2.1 Основные модели

Моделированием групповых эффектов начали заниматься в 70е годы несколько групп ученых - биологов, физиков и специалистов по компьютерной графике. Первая широко известная модель была предложена Рейнольдсом [1]. В его модели поведение объектов (боидов) определялось из расчета наилучшего визуального представления. Боиды могли демонстрировать три типа взаимодействия: избегание столкновений, следование в направлении ближайших боидов и стремление к центру масс стаи, см. рис. 2.1.

С тем, чтобы привнести в изучение групповых эффектов количественный подход, была предложена модель, широко известная сейчас как “модель Вичека” [2]. Поведение частиц в этой модели определяется следующими со-

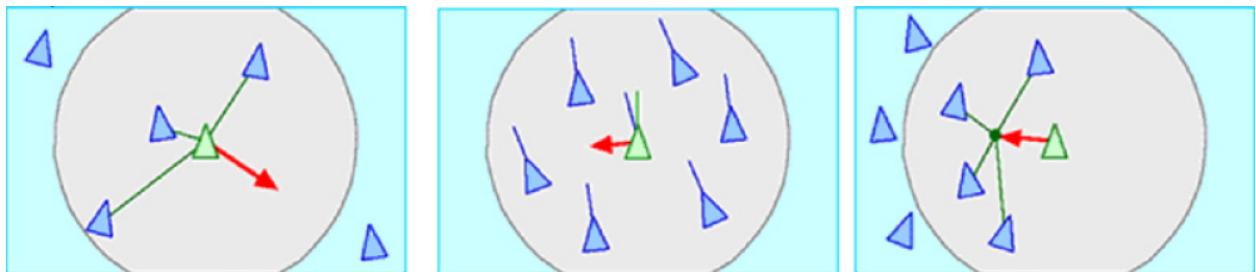


Рисунок 2.1 – Поведение, основное для модели Рейнольдса. (а) Разделение, с тем чтобы избежать чрезмерного скапливания боидов. (б) Выравнивание: боиды поворачивают в направлении средней скорости окружающих боидов. (в) Когезия: боиды смещаются в направлении центра масс окружения.

отношениями:

$$\vec{v}_i(t+1) = v_0 \frac{\langle \vec{v}_i(t) \rangle_R}{|\langle \vec{v}_j(t) \rangle_R|} + perturbation \quad (2.1)$$

$$\vec{x}_i(t+1) = \vec{x}_i(t) + \vec{v}_i(t+1) \quad (2.2)$$

Здесь $\langle \dots \rangle_R$ обозначают усреднение (или суммирование) по всем частицам в радиусе R вокруг i -й. Тогда $\frac{\langle \vec{v}_i(t) \rangle_R}{|\langle \vec{v}_j(t) \rangle_R|}$ предоставляет нам единичный вектор в направлении средней скорости группы частиц. Такое выравнивающее правило не принимает во внимание характер взаимодействия, и потому модель может соответствовать когезии, взякости и тому подобному. Ввести шум в модель можно из следующих соображений: поскольку единичный вектор однозначно соответствует углу, задающему направление, и скорость частиц можно аналогично задать в виде модуля скорости и единичного вектора направления, то тогда угол направления движения в момент времени $(t+1)$ получается следующим образом:

$$\vartheta_i(t+1) = \vartheta_i(t) + \Delta_i(t) \quad (2.3)$$

где $\vartheta_i(t) = \arctan\left[\frac{\langle \vec{v}_i(t) \rangle_R}{|\langle \vec{v}_j(t) \rangle_R|}\right]$, и шум представлен $\Delta_i(t)$ - случайное число, равновероятно выбранное из $[-\eta\pi, \eta\pi]$. Параметрами модели является плотность ρ , модуль скорости частиц v_0 и уровень шума, определяемый $\eta < 1$. Параметром порядка становится $\varphi = 1/Nv_0 \sum_{i=1}^n |\vec{v}_i|$, как определено в уравнении 1.1.

Несмотря на кажущуюся простоту этой модели, она проявляет богатый спектр свойств, характерных для систем, демонстрирующих групповую динамику. В первую очередь это, конечно же, фазовый переход к упорядоченному движению. Помимо этого, варьируя указанные выше параметры модели, удавалось получить различные паттерны, характерные для групповой динамики, а именно “вращающиеся цепи”, “ленты”, “мельницы”, “марширующие группы” и другие.

Интересным вопросом является род фазового перехода. В своей оригинальной работе Vicsek и соавторы показали, что при переходе к термодинамическому пределу поведение параметра порядка недалеко от фазового

перехода описывается:

$$\varphi \sim [\eta_c(\rho) - \eta]^\beta \quad (2.4)$$

$$\varphi \sim [\rho - \rho_c(\eta)]^\delta \quad (2.5)$$

Однако это было поставлено под вопрос Grégoir and Chaté [3], что привело к серии работ, адресующих этот фундаментальный вопрос коллективного движения. В результате исследования Chaté et all [7] удалось показать существование т.н. переходного режима, в котором происходит фазовый переход второго рода для любого значения скорости частиц.

В общем, тип фазового перехода зависит от модуля скорости частиц и того, как шум вводится в систему. Для малых скоростей $v_0 < 0.5$ даже в пределе скорости $v_0 \rightarrow 0$ наблюдается фазовый переход второго рода. Для больших скоростей фазовый переход аналогичен фазовому переходу первого рода, косвенным свидетельством этого является формирование “лент”. [6]

Существует две возможности привнести шум в систему: в виде случайного угла, на который поворачивается скорость частицы *после* выравнивания с учетом направления движения окружения, и в виде случайного вектора, который добавляется ко всем частицам *до* определения преимущественного направления движения. Первый вариант используется в модели Vicsek'a, в то время как второй вариант был предложен Grégoir and Chaté [3]. И как было показано численным экспериментом [41], модель Вичека испытывает фазовый переход второго рода, в то время как при введении “векторного” шума возможно состояние, при котором фазовый переход является переходом первого рода [24].

За годы прошедшие с момента создания модели Вичека было предложено определенное количество моделей самодвижущихся частиц, воспроизводящих групповую динамику или отдельные характерные эффекты.

Можно выделить два типа такого рода моделей — в одних прямо вводится правило выравнивания частиц, а в других рассматривается опосредственное взаимодействие, к примеру, через столкновения или среду обитания. Однако их обзор не входит в рамки данной работы, потому интересующимся рекомендуем обратиться к литературе, в особенности к [9].

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГРУППОВОЙ ДИНАМИКИ

Теоретический подход к описанию групповых явлений был впервые предложен в 2000 году Tu [8] и был основан на соображениях симметрии. Бу-дучи развитым Bertin'ом [26], этот подход привел к получению уравнений движения, подобных уравнениям Навье-Стокса (подробнее см. 3.1).

Адресуя вопрос о допустимости такого подхода, группой ученых был предложен иной подход [42, 43], основанный на статистическом описании системы через функционал микроскопической фазовой плотности. Разница между этими подходами заключается в наличии вязкости в уравнениях первой группы (раздел 3.1), но при этом в уравнениях второй группы (раздел 3.2) вязкий член не появляется.

Рассмотрим далее основные постулаты и уравнения двух теорий.

3.1 Модели “с вязкостью”

3.1.1 Феноменологические уравнения

Основываясь на соображениях симметрии и используя методы теории ренормализационных групп, Tu [8] выписал обобщенные уравнения движения для систем, состоящих из частиц, взаимодействующих по правилу Vilksec'a, рассмотренному в разделе 2.1.

Им были отмечены следующие общие характеристики, которыми обладают все компьютерные модели групповой динамики, а именно:

- а) большое число точечных частиц (“боидов”) перемещается со временем в пространстве, стремясь “следовать” (т.е. двигаться в одном направлении) за своими соседями
- б) взаимодействие короткодействующее: каждый “боид” реагирует на окружение внутри определенного малого радиуса R
- в) “следование” не совершенно - каждый “боид” постоянно совершает ошибки, которые моделируются белым шумом
- г) модель обладает полной вращательной симметрией - “стая” может направиться в любом направлении

На основании этих наблюдений были записаны уравнения движения:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + \lambda_1 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \lambda_2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + \lambda_3 \nabla (|\mathbf{v}|^2) \\ = \alpha \mathbf{v} - \beta |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} - \nabla P + D_T \nabla^2 \mathbf{v} + D_B \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + D_2 (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Уравнение, описывающее давление:

$$P = P(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n (\rho - \rho_0)^n \quad (3.2)$$

И аналог уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho) = 0 \quad (3.3)$$

Рассмотрим смысл коэффициентов при слагаемых в уравнении 3.1.

Следует отметить, что невыполнение Галилеевой инвариантности, в отличие от уравнений Навье-Стокса, приводит к тому, что все коэффициенты λ_i не равны нулю. Члены при λ_i аналогичны конвективным членам в уравнениях Навье-Стокса.

Коэффициенты α и β введены для того, чтобы модуль скорости, вычисленный локально, был больше нуля в упорядоченной фазе.

Нам наиболее интересны коэффициенты $D_{B,1,2}$, по форме слагаемых при них можно сказать, что эти коэффициенты играют роль диффузионных констант, или вязкостей, и отображают стремление локальных флуктуаций к распространению из-за связи между соседними бойдами [8].

Сферическая симметрия не налагает никаких ограничений на потенциально возможную зависимость каждого из феноменологических коэффициентов от квадрата модуля скорости $|\mathbf{v}^2|$ или от плотности ρ .

В ходе анализа феноменологического уравнения было показано [8], что возможно формирование стабильной упорядоченной фазы в двумерном пространстве (что наглядно видно в симуляциях, рассмотренных в главе 2). Однако известно что это нарушает теорему Мермина-Вагнера (которая также не выполняется для дискретной спиновой модели).

3.1.2 Больцмановский подход к получению уравнений движения

Bertin et all, развивая подход, предложенный Tonner'ом и Ти, рассмотрели определенную модельную задачу. В их определении существовало исключительно парное взаимодействие между частицами, а шум был определен как “самодиффузия” [26].

Записывая диффузионный и коллизионный интегралы, которые, следуя подходу Больцмана, подчиняются соотношению вида:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{r}, \theta, t) + \mathbf{e}(\theta) \cdot \nabla f(\mathbf{r}, \theta, t) = I_{diff}[f] + I_{coll}[f] \quad (3.4)$$

где $\mathbf{e}(\theta)$ - единичный вектор в направлении θ , и пользуясь методами теории ренормализационной группы, было получено следующее уравнение движения:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \gamma(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{2}\nabla(\rho - \kappa\mathbf{v}^2) + (\mu - \varepsilon\mathbf{v}^2)\mathbf{v} + \nu\nabla^2 - \kappa(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \quad (3.5)$$

Как можно заметить, все члены этого уравнения совместимы с феноменологическим уравнением, предложенным Ти и рассмотренным в предыдущем пункте 3.1.1.

Первый член в правой части уравнения 3.5 представляет собой градиент давления, и таким образом эффективное давление становится равным $p = \frac{1}{2}(\rho - \kappa\mathbf{v}^2)$.

Наиболее интересным с нашей точки зрения является третий член в правой части уравнения 3.5, поскольку он очевидно соответствует проявлению вязкости, с коэффициентом вязкости ν равным:

$$\nu = \frac{1}{4}[\lambda(1 - e^{-2\sigma_0^2}) + \frac{4}{\pi}\rho(\frac{14}{15} + \frac{2}{3}e^{-2\sigma^2})]^{-1} \quad (3.6)$$

Анализ вышеприведенного уравнения 3.5 также показал наличие стабильной упорядоченной фазы при определенных условиях.

Было замечено [43, 44], что приведенный в этом разделе подход к построению теоретической базы группового движения обладает определенными допущениями, плохо согласующимися с моделью Вичека. Во-первых,

совершенно очевидно, что для наличия вязкости необходимо столкновение частиц, что невозможно, если рассматривать точечные частицы, а значит, хоть феноменологическое уравнение формально правильное, необходимо наложить определенные ограничения на значения коэффициентов. Во-вторых, Больцмановский подход, вообще говоря, не применим в силу отсутствия в модели Vicsek'a стохастического хаоса, связанного с, опять же, столкновениями частиц и равновероятностью всех направлений движения в пространстве.

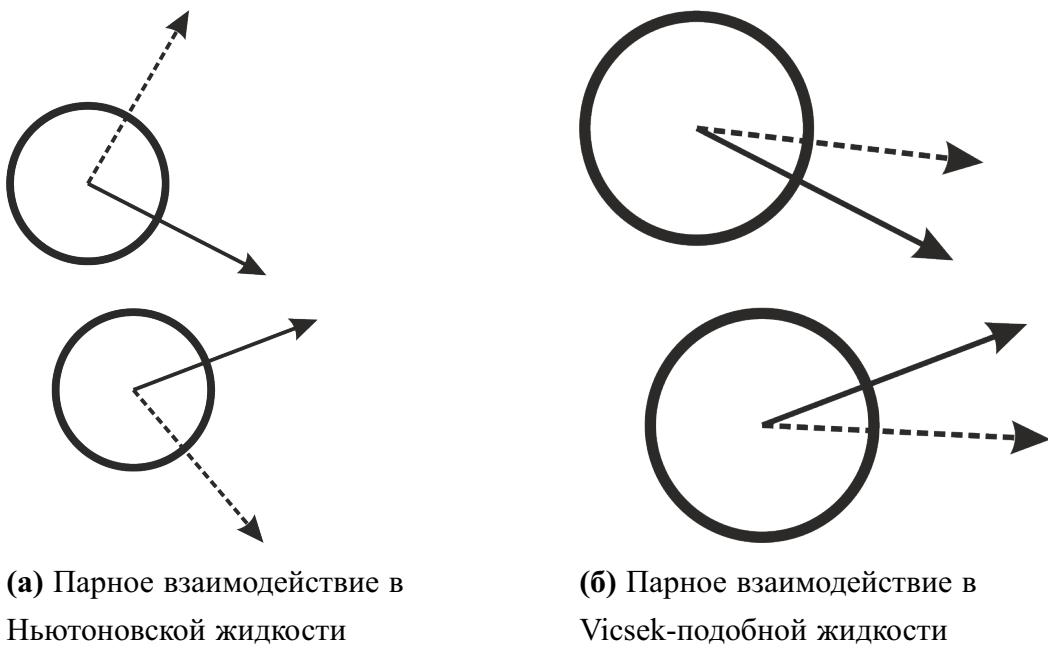


Рисунок 3.1 – Взаимодействие между частицами в разных моделях жидкости, непрерывная линия - направление скорости до взаимодействия, пунктирная - после.

Однако, как мы видим на рис. 3.1, для модели Vicsek'a, наоборот, выполняется увеличение упорядоченности при взаимодействии. Вопрос о роли шума в качестве стохастического хаоса остается открытым.

3.2 Модель микроскопической фазовой плотности

Подход, основанный на рассмотрении функционала микроскопической фазовой плотности, предложенный в последние годы [43, 45], позволил по-

лучить, в приближении идеальной самодвижущейся жидкости, уравнения движения, отличные от рассмотренных в разделе 3.1.

Строгое получение этих уравнений выходит далеко за рамки работы, потому приведем здесь только исходные положения и результаты.

Функционал микроскопической фазовой плотности записывается следующим образом:

$$N(x, t) = \sum_i \delta(x - x_i(t)) \quad (3.7)$$

где $x = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$, подчиняется закону сохранения:

$$\partial_t N + \mathbf{v} \partial_{\mathbf{r}} N + \partial_{\mathbf{v}}(\dot{\mathbf{v}} N) = 0 \quad (3.8)$$

Соответствующие плотность и поток плотности получаются как:

$$\rho^{(m)}(\mathbf{r}, t) = \int N(x, t) d\mathbf{v} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{j}^{(m)}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{v} N(x, t) d\mathbf{v} \quad (3.10)$$

В контексте модели Vicsek'а уравнение движения без шумового члена записывается как:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{v}_i \quad (3.11)$$

и отображает тот факт, что энергия частиц в алгоритме Vicsek'а сохраняется.

В наиболее общей форме, уравнение для поля гидродинамической скорости \mathbf{v} получается из уравнения для одночастичной функции распределения:

$$(\partial_t + \mathbf{v} \partial_{\mathbf{r}} + \partial_{\mathbf{v}} \mathcal{F}) f_1(x, t) = I(x, t) \quad (3.12)$$

где накладывается ограничение

$$\int \delta v_i f_1 dx = 0 \quad (3.13)$$

и записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} = -\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + \mathcal{F}_i + n \int \delta v_i I(x, t) d\mathbf{v} \quad (3.14)$$

В уравнении 3.14 $P_{i,j}$ — тензор давления, а \mathcal{F} — средняя плотность силы самосогласованного поля.

Переходя сначала к гидродинамическому пределу идеальной жидкости вичековского типа, то есть пренебрегая всеми вкладами корелляций в уравнении 3.14, можно получить следующее базовое уравнение:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla p_0}{\rho} + p_0 \mathbf{v} \quad (3.15)$$

где $p_0 = \frac{\rho}{2}(1 - \mathbf{v}^2)$, для которого можно получить решение в виде, независимом от пространственной координаты:

$$\rho = \rho_0, \quad |\mathbf{v}(v)| = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\rho_0 t}(\frac{1}{u_0^2} - 1)}} \quad (3.16)$$

Учет шума может быть проведено путем рассмотрения перехода от предела нулевого шума к пределу низкого шума. Тогда становится возможным использовать приближение локального равновесия.

В таком приближении для одномерного случая можно разложить тензор давления в ряд, и путем достаточно громоздких преобразований, также пользуясь результатами [44], можно выписать уравнение движения системы самодвижущихся частиц для одномерного случая:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho - \rho v^2) + \left(\frac{\rho}{2} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x}\right)v + \left(\frac{\beta}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\rho}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)v^3 \quad (3.17)$$

Можно сравнить коэффициенты μ и ε с результатами [26].

В приближении этого раздела,

$$\mu = \frac{1}{2}\rho, \quad \xi = \frac{1}{2\rho} + \frac{\alpha}{2\rho^2} \quad (3.18)$$

в то время как в [26] эти коэффициенты равны

$$\mu = \frac{8\rho}{3\pi} \approx 0.85\rho, \quad \xi = \frac{4}{\pi\rho} - \frac{6\sigma^2}{\pi\rho} + \mathcal{O}(\sigma^4) \quad (3.19)$$

Полученное уравнение показывает, что самодвижущиеся жидкости ведут себя отлично от молекулярных жидкостей и даже от жидкостей, состоящих из активных броуновских частиц.

Сравнение же этих результатов с рассмотренными в разделе 3.1, как уже говорилось, приводит к возникновению вопроса о существовании вязкости в модели Vicsek'a, поскольку в этом подходе показывается отсутствие сдвиговой вязкости, в то время как в других приближениях вклад вязкости проявлялся в гидродинамических уравнениях, и был не равен нулю даже при стремлении шума к нулю.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

4.1 Задача, поставленная перед численным моделированием

Как мы рассмотрели в главе 3, на данный момент существует два основных теоретических подхода к описанию группового движения. Важным отличием между ними является наличие (или отсутствие) вязкости. Поскольку обе модели являются приближенными и к тому же допускают решение только в ограниченном числе случаев, прямое сравнение результатов с экспериментом провести достаточно затруднительно. Однако проведение эксперимента само по себе не является проблемой - как указано в главе 2, компьютерное моделирование является основным способом изучения систем, демонстрирующих групповую динамику.

Таким образом, поставив численный эксперимент над системой с граничными условиями, в которой обязательно проявляется вязкость, можно получить ответ на главный вопрос - присутствует ли вязкость в самодвижущейся жидкости?

Такого рода системой было выбрано течение Куэтта, несколько адаптированное к реалиям самодвижущихся частиц, см. раздел 4.3.

Прежде чем перейти к описанию работы приложения, необходимо сделать несколько замечаний, которые способны существенно сократить время симуляций:

- в силу детерминированности взаимодействия частиц в модели Vicsek'а возможно выполнение симуляции в несколько потоков
- простота модели и очевидная локальность взаимодействия позволяет при помощи специального размещения данных в памяти существенно сократить число вычислений
- кроме того, простые арифметические действия, из которых состоят уравнения движения 2.1, позволяют перенести вычисления на GPU, используя CUDA-подобную технологию C++ AMP
- для формирования устоявшегося состояния системы из статистической механики известно, что достаточно, чтобы флуктуации параметра порядка были $< \frac{1}{\sqrt{N}}$, где N - число частиц. Это может быть использо-

вано в качестве критерия для прекращения симуляции. Подробнее эти вопросы будут рассмотрены в разделе [4.2](#)

4.2 Оптимизации, проведенные в программе-симуляторе

4.2.1 Особенности многопоточной обработки данных

Широко известно, что увеличение тактовой частоты процессоров на-толкнулось на физический предел, связанный с увеличением роли токов утечки в транзисторах при уменьшении размеров, и потому основной тренд в современном компьютеростроении - это наращивание числа ядер в процессорах и улучшение эвристик, позволяющих использовать т.н. гиперпоточность. Итогом этого стала потенциальная возможность проводить вычисления во вплоть до 30-ти потоках одновременно, используя при этом только один процессор общего назначения (CPU).

Когда речь идет о задачах молекулярной динамики, предполагается симуляция взаимодействия хотя бы нескольких сотен тысяч частиц. По счастью, групповые явления наблюдаются и на гораздо меньшем масштабе - несколько (десятков) тысяч частиц.

Свойство модели Vicsek'а, позволяющее успешно разбить задачу на множество потоков, ограниченное сверху лишь числом частиц, заключается в том, что положения и скорости частиц в один момент времени однозначно определяют положения и скорости этих частиц в следующий момент. Также важно отметить, что это совершенно не зависит от порядка учета частиц. Таким образом, при разработке программы для выполнения на CPU мы можем безо всяких недостатков получить практически линейное увеличение скорости вычислений в зависимости от доступного нам числа потоков.

Задача несколько осложняется, если мы захотим пойти по пути всех исследовательских групп и организовать выполнение приложения на вычислительном кластере. Поскольку, как мы видим на рис. [4.1](#), между отдельными узлами кластера проложены связи по локальной сети, здравый смысл подсказывает, что доступ к общей памяти в такой архитектуре окажется куда

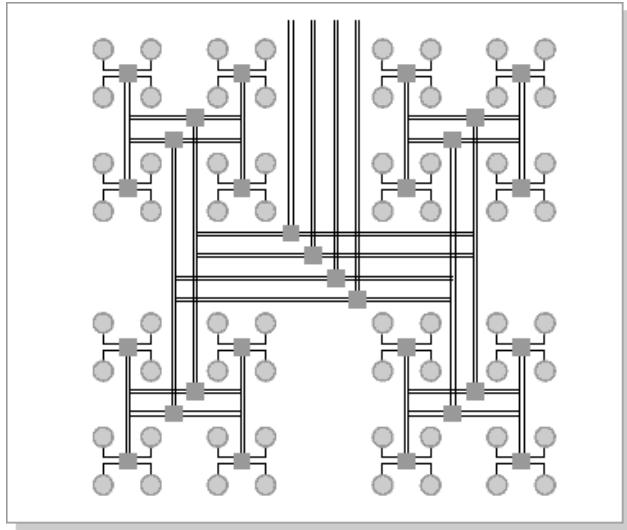


Рисунок 4.1 – Пример архитектуры вычислительного кластера

медленней, чем если бы вся информация была доступна локально. Даже несмотря на возможность скопировать данные для вычислений на каждый из узлов, все равно требуется оптимизировать обмен данными после каждого шага.

Кроме того, обычно очередьность доступа к вычислительному кластеру жестко ограничивает возможность быстро исправить что-либо в программе и сразу же перезапустить ее для получения нового результата.

4.2.2 GPGPU вычисления

Проблема кластерных вычислений осложняется, помимо всего прочего, малой доступностью такого рода услуг. Здравый смысл подсказывает, что оборудование вычислительного кластера - сложный и дорогостоящий процесс, даже не принимая во внимание дальнейшее обслуживание компьютерного парка. Потому малым группам ученых без высокого финансирования необходимо искать обходные пути, не требующие доступа к кластерным суперкомпьютерам.

Таким путем является использование графических процессоров для проведения вычислений общего назначения. Как показано на рис. 4.2, по существу графический процессор состоит нескольких сотен (или тысяч) простей-

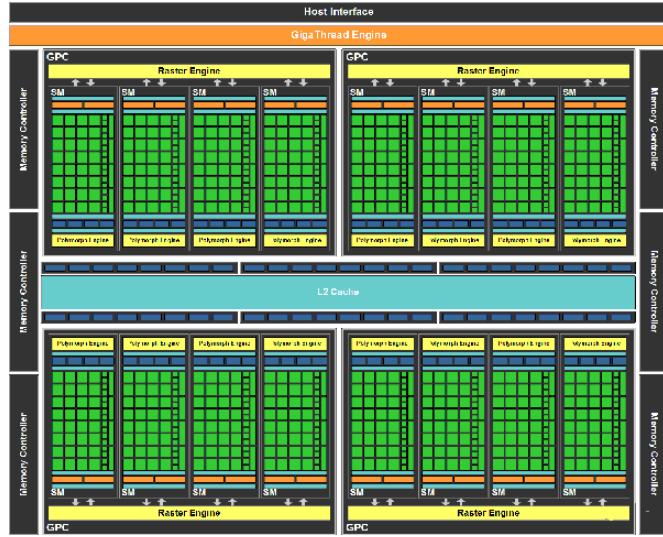


Рисунок 4.2 – Пример архитектуры графического процессора

ших, т.н. потоковых, процессоров, которые обладают поддержкой ограниченного набора инструкций, но при этом способны выполнять их действительно быстро. Кроме того, количество переходит в качество - простейшие вычисления, которые можно разбить на множество потоков, могут выполняться одновременно всеми процессорами видеокарты.

Также на диаграмме можно заметить, что процессоры GPU, аналогично вычислительным юнитам в кластере, сгруппированы в “вычислительные блоки” с общим доступом к элементу памяти. Это позволяет проводить часть вычислений, пользуясь локальной копией данных, а затем отправлять результаты в “общий буфер” - область памяти, к которой имеют доступ все потоковые процессоры.

В контексте модели Vicsek’а это позволяет нам путем периодической сортировки частиц так, чтобы локально взаимодействующие частицы оказывались в смежной области памяти, существенно уменьшить число обращений к общей, и потому более медленной, памяти.

4.2.3 Определение равновесного состояния системы

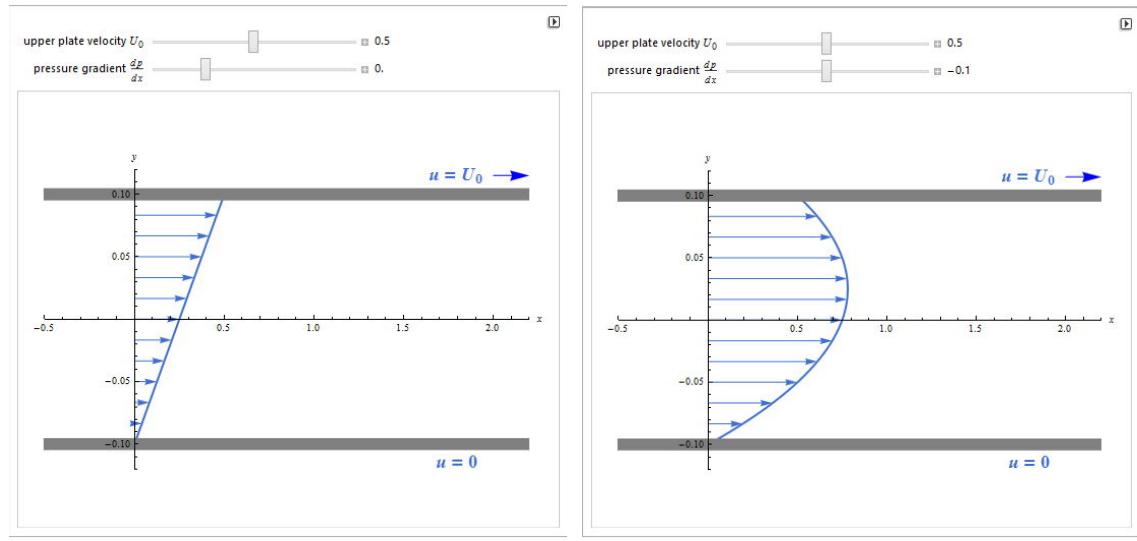
Помимо сугубо прикладных аспектов, т.е. вопроса “на чем считать?”, необходимо отметить, что стандартная практика, применяемая во всех рабо-

так по моделированию самодвижущихся частиц, это запустить симуляцию для определенного значения шума, прождать от 10^4 до 10^6 шагов по времени, с тем чтобы “минимизировать влияние начального распределения” [6], и после этого заполучить результат. В некоторых работах, кроме того, производится усреднение интересующих значений по всему времени симуляции, к примеру, в [3].

В условиях острой ограниченности вычислительных ресурсов мы полагаем такой подход крайне расточительным. Потому нами был предложен несложный алгоритм, позволяющий проводить симуляции столько, сколько потребуется для стабилизации значения интересующей нас величины, т.е. чтобы отклонения не превышали, в среднем, тех, которые происходят под влиянием динамических флюктуаций. Подробнее этот алгоритм будет рассмотрен в разделе 4.4.

4.3 Адаптация граничных условий течения Куэтта

Как известно, течение Куэтта является простейшим примером системы, в которой вязкие силы играют основную роль в формировании профиля потока. Напомним основные положения в постановке задачи.



(а) Без градиента давления

(б) С отрицательным градиентом давления

Рисунок 4.3 – Профиль скорости течения Куэтта

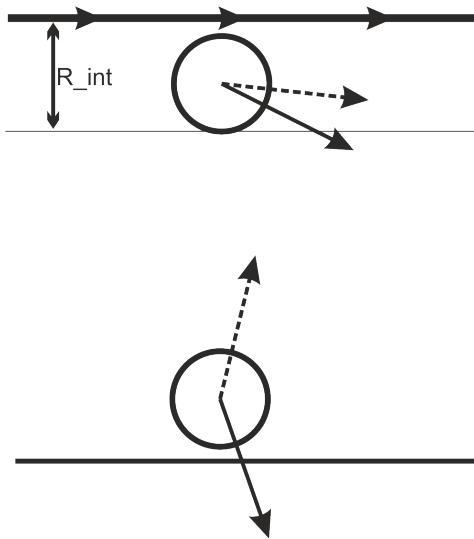


Рисунок 4.4 – Границные условия для адаптированного течения Куэтта

Как изображено на рисунке 4.3, в двумерном течении Куэтта боковые границы удалены на бесконечность (или, что то же самое, реализуют трансляционные граничные условия), нижняя граница неподвижна ($v(0) = 0$), а верхняя движется со скоростью u_0 : $v(h) = u_0$. В зависимости от наличия или отсутствия градиента давления профили скорости потока получаются как изображенные на рис. 4.3б 4.3а, соответственно, и описываются уравнением:

$$u(y) = u_0 \frac{y}{h} + \frac{1}{2\mu} + \left(\frac{dp}{dx} (y^2 - hy) \right) \quad (4.1)$$

Однако из-за того, что рассматриваемая нами система существенно неравновесна, а частицы обладают собственным моментом движения, применение этих граничных условий при симуляции несколько затруднительно. Во-первых, при прилеплении частиц к верхней или нижней стенке, они очень быстро будут изъяты из потока, и в середине ничего не останется. Во-вторых, даже поставить нулевое значение скорости на нижней границе невозможно в силу того, что если остановить приблишившиеся на радиус взаимодействия частицы, то очень скоро остановятся все частицы, что следует из уравнения 2.1.

Потому нами было предложено два варианта адаптации задачи Куэтта для самодвижущейся жидкости. В обоих верхняя граница считается, в некотором роде, непрерывным слоем частиц, движущихся в указанном направ-

лении, и при подхождении частицы на радиус взаимодействия к границе, после взаимодействия этой частицы с остальными частицами, происходит взаимодействие с границей как с еще одной частицей, см. рис. 4.4.

На нижней границе в одном варианте адаптации происходит зеркальное отражение частицы, а в другом частица отражается на угол меньший, чем угол падения, что в нашем понимании соответствует “трению” с “шероховатой” границей. В большинстве симуляций использовался именно первый вариант, подробнее см. в разделе посвященном обсуждению результатов.

4.4 Алгоритм определения стабилизации состояния системы

Важным вопросом, на который необходимо обратить внимание, это вопрос о том, является ли полученное состояние системы достаточно стабильным. Обычно, предполагается что время релаксации должно значительно превышать число частиц, и потому прежде чем снимать результаты, предварительно проводится длительная симуляция системы на протяжении $10^5 \div 6$ шагов по времени.

Как уже было сказано, мы предполагаем такой подход расточительным, и потому нами предложено использовать простой критерий релаксации системы. Как известно из термодинамики, влияние флюктуаций на параметры системы пропорционально $1/\sqrt{N}$, где N - число частиц. Потому мы предложили выполнять для начала 100 шагов по времени для каждого значения шума, а затем, если разница средней скорости и средней скорости на предыдущей итерации HE оказывается меньше чем $1/\sqrt{N}$, продолжать симуляцию с тем же значением шума (см. алгоритм на рис. 4.5)

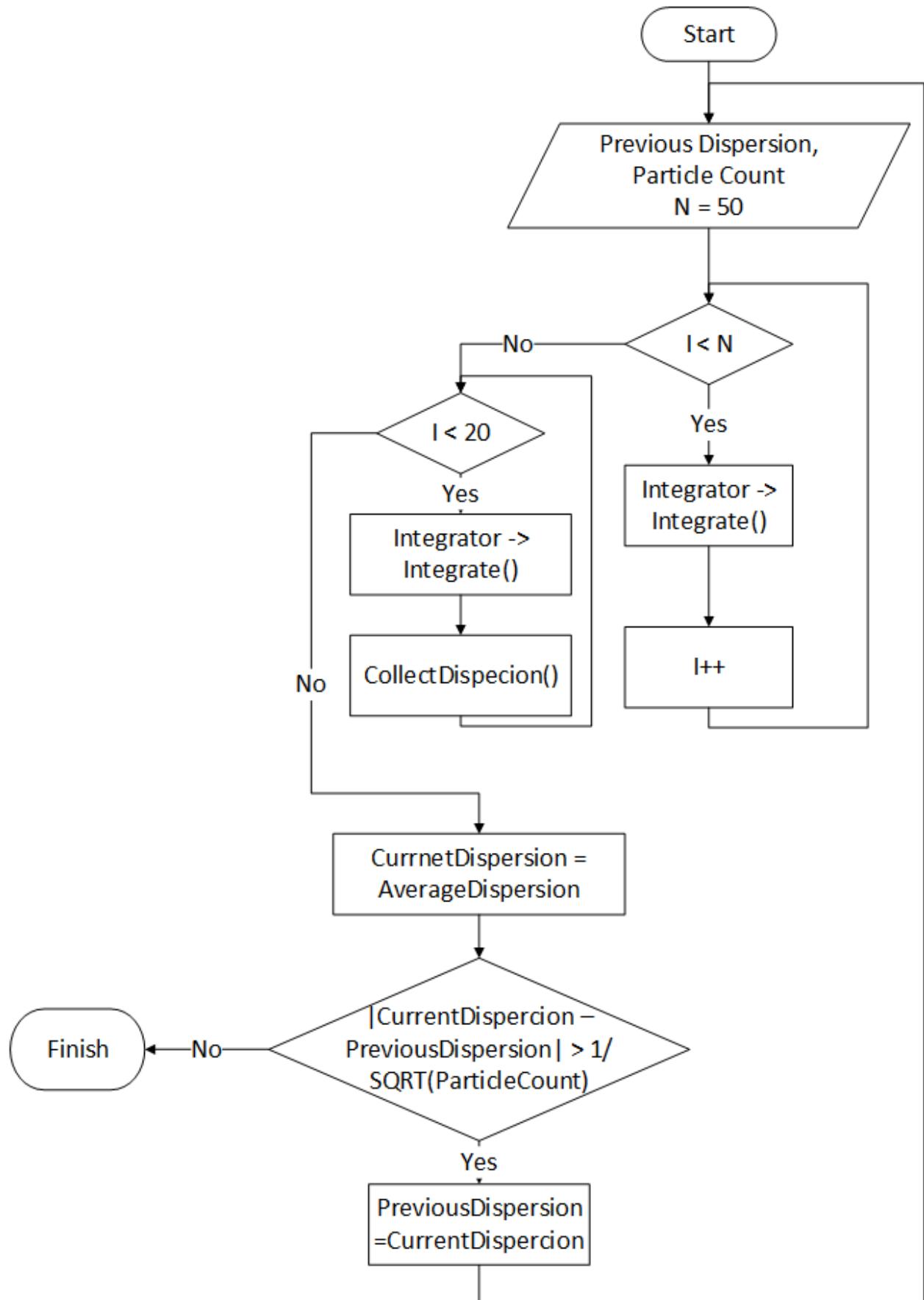


Рисунок 4.5 – Алгоритм определения стабильного состояния системы

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

В результате выполнения работы нами были получены профили скорости (т.е. зависимость параметра порядка от высоты) для течения Куэтта идеальной самодвижущейся жидкости по модели Vicsek'a.

Предложенный алгоритм определения стабилизации состояния системы оправдал себя. Поскольку определение времени стабилизации не входило в тему данной работы, то специальных замеров не проводилось, но среднее значение времени симуляции для каждого значения шума составило 10^{2-3} по порядку величины, увеличиваясь с увеличением количества частиц.

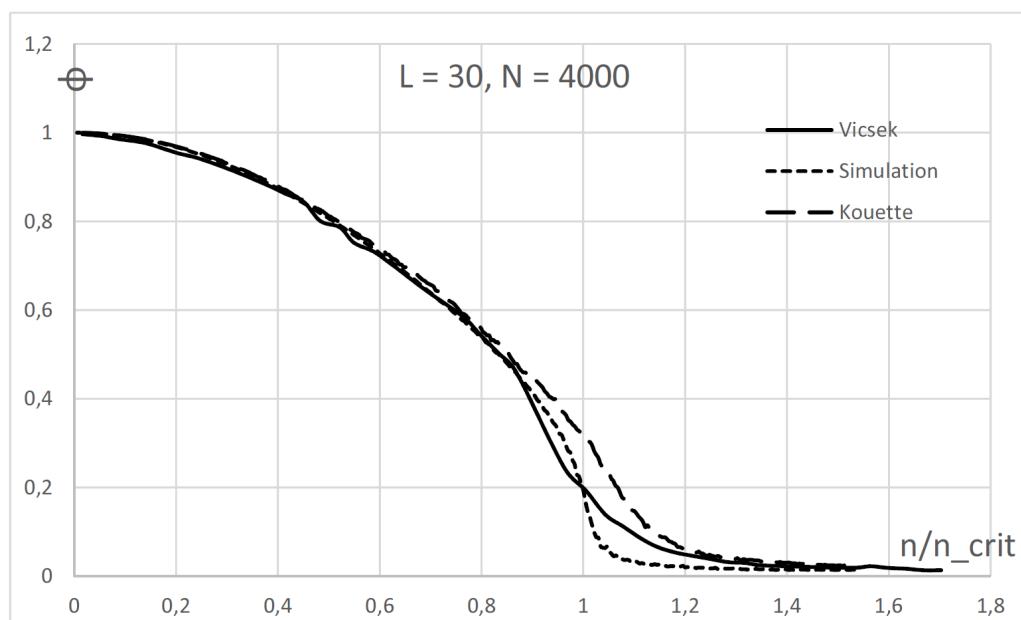


Рисунок 5.1 – Зависимость параметра порядка от безразмерного шума

Проверка работоспособности алгоритма и его невлияния на предполагаемый результат была проведена прямой симуляцией системы, аналогичной одной из [2], и были построены графики зависимости параметра порядка от безразмерного шума, представленные на рис. 5.1

Кроме того, были проведены более длительные симуляции для отдельных значений шума (в частности, очень большого и очень низкого). Полученные результаты не вошли в эту работу по причине того, что они аналогичны представленным на рис. 5.2.

Побочным результатом выполнения работы также стало создание программы, способной выполнять симуляции идеальной самодвижущейся жид-

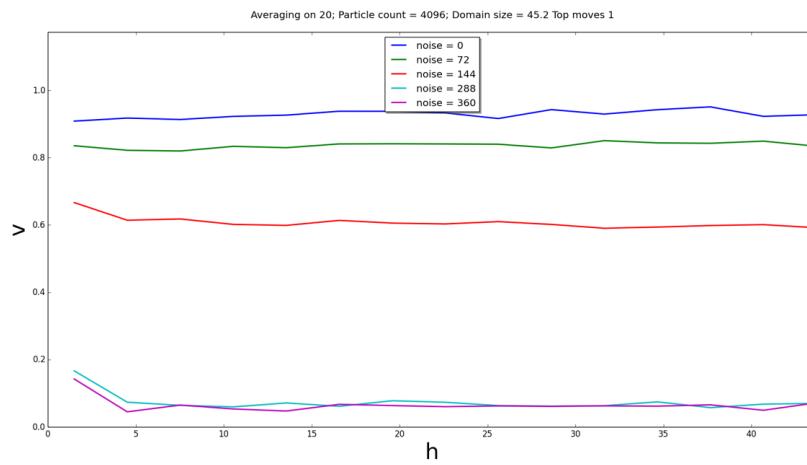
кости по модели Vicsek'а на GPU и легко доступной для модернизации.

ВЫВОДЫ

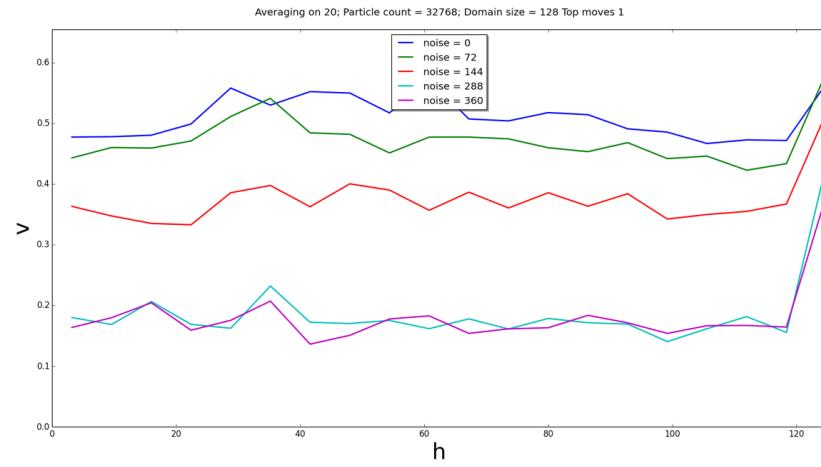
Главным выводом, который можно сделать из результатов работы, является полная несостоятельность теоретического описания, основанного на подходе Больцмана и дающего в результате ненулевые значения вязкости, поскольку, как видно из представленных результатов, профили скорости в случае идеальной самодвижущейся жидкости никак не соответствуют предполагаемым профилям Куэттовского потока.

Благодаря предложенному алгоритму удалось радикально сократить время, необходимое для проведения симуляций. Конечно, по мере стремления к термодинамическому пределу требуемое для релаксации время будет увеличиваться, но для всех разумных значений числа частиц алгоритм может быть полезен, если правильно выбрать параметр стабилизации.

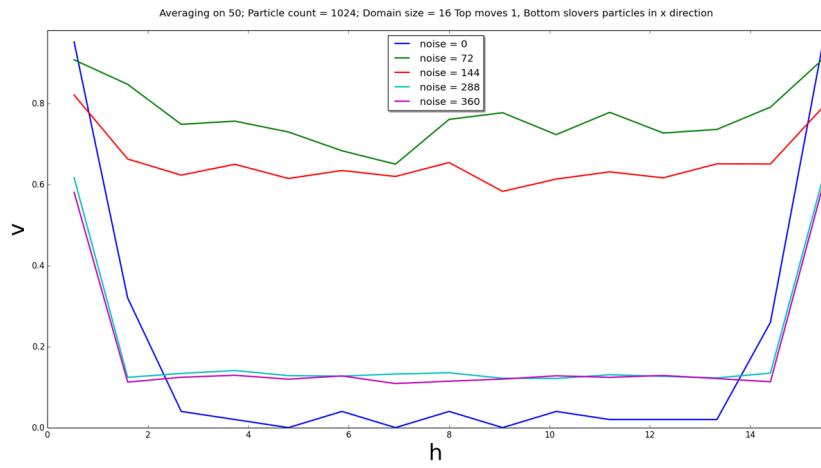
Наконец, использование GPU для проведения физических расчетов с высоким фактором параллелизации не только оправдано, но и необходимо: замеренная производительность GPU превышает производительность CPU более чем в 100 раз!



(а) Число частиц: 4096; Плотность: 2; Число конфигураций: 20; Зеркальная граница



(б) Число частиц: 32768; Плотность: 2; Число конфигураций: 20; Зеркальная граница



(в) Число частиц: 1024; Плотность: 4; Число конфигураций: 50; Шероховатая граница

Рисунок 5.2 – Зависимость параметра порядка от высоты для течения Куэтта при разных значениях шума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reynolds C. W. Flocks, Herds and Schools: A Distributed Behavioral Model // *SIGGRAPH Comput. Graph.* 1987. Vol. 21, no. 4. P. 25–34.
2. Vicsek T., Czirók A., Ben-Jacob E. et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles // *Physical Review Letters*. 1995. Vol. 75, no. 6. P. 1226.
3. Grégoire G., Chaté H. Onset of collective and cohesive motion // *Physical review letters*. 2004. Vol. 92, no. 2. P. 025702.
4. Schubring D., Ohmann P. R. Density-independent model of self-propelled particles // *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 88, no. 3. P. 032108.
5. Kümmel F., ten Hagen B., Wittkowski R. et al. Circular Motion of Asymmetric Self-Propelling Particles // *Physical Review Letters*. 2013. Vol. 110, no. 19.
6. Huepe C., Aldana M. New tools for characterizing swarming systems: A comparison of minimal models // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2008. Vol. 387, no. 12. P. 2809–2822.
7. Chaté H., Ginelli F., Grégoire G. et al. Modeling collective motion: variations on the Vicsek model // *The European Physical Journal B*. 2008. Vol. 64, no. 3-4. P. 451–456.
8. Tu Y. Phases and phase transitions in flocking systems // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2000. Vol. 281, no. 1–4. P. 30 – 40.
9. Vicsek T., Zafeiris A. Collective motion // *Physics Reports*. 2012. Vol. 517, no. 3-4. P. 71–140.
10. Keller E. F., Segel L. A. Model for chemotaxis // *Journal of Theoretical Biology*. 1971. Vol. 30, no. 2. P. 225–234.
11. Chowdhury D. Collective effects in intra-cellular molecular motor transport: Coordination, cooperation and competition // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2006. Vol. 372, no. 1. P. 84–95.

12. Czirok A., Vicsek M., Vicsek T. Collective motion of organisms in three dimensions // *Physica A*. 1999. P. 299–304.
13. Csahók Z., Czirók A. Hydrodynamics of bacterial motion // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1997. Vol. 243, no. 3–4. P. 304 – 318.
14. Buhl J. From Disorder to Order in Marching Locusts // *Science*. 2006. Vol. 312, no. 5778. P. 1402–1406.
15. Ballerini M., Cabibbo N., Candelier R. et al. Interaction ruling animal collective behavior depends on topological rather than metric distance: Evidence from a field study // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2008. Vol. 105, no. 4. P. 1232–1237.
16. Selous E. Thought-transference (or What?) in Birds. R.R Smith, 1931. LCCN: 32001018.
17. Dell’Ariccia G., Dell’Omo G., Wolfer D. P., Lipp H. Flock flying improves pigeons’ homing: GPS track analysis of individual flyers versus small groups // *Animal Behaviour*. 2008. Vol. 76, no. 4. P. 1165–1172.
18. Biro D., Sumpter D. J. T., Meade J., Guilford T. From compromise to leadership in pigeon homing // *Current biology: CB*. 2006. Vol. 16, no. 21. P. 2123–2128. PMID: 17084696.
19. Major P. F., Dill L. M. The three-dimensional structure of airborne bird flocks // *Behavioral Ecology and Sociobiology*. 1978. Vol. 4, no. 2. P. 111–122.
20. Cambuí D. S., Rosas A. Density induced transition in a school of fish // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2012. Vol. 391, no. 15. P. 3908–3914.
21. Makris N. C. Fish Population and Behavior Revealed by Instantaneous Continental Shelf-Scale Imaging // *Science*. 2006. Vol. 311, no. 5761. P. 660–663.
22. Individual decisions, traffic rules, and emergent pattern in schooling fish // Animal Groups in Three Dimensions / Ed. by J. K. Parrish, W. M. Hamner. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. P. 126–142. URL: <http://ebooks.cambridge.org/ref/id/CBO9780511601156A066>.

23. Sinclair A. R. E. The African buffalo: a study of resource limitation of populations. Wildlife behavior and ecology. Chicago: University of Chicago Press, 1977. ISBN: 0226760308.
24. Aldana M., Larralde H., Vázquez B. On The Emergence Of Collective Order In Swarming Systems: A Recent Debate // *International Journal of Modern Physics B*. 2009. Vol. 23, no. 18. P. 3661–3685.
25. Toner J., Tu Y. Long-Range Order in a Two-Dimensional Dynamical XY Model: How Birds Fly Together // *Physical Review Letters*. 1995. Vol. 75, no. 23. P. 4326–4329.
26. Bertin E., Droz M., Grégoire G. Boltzmann and hydrodynamic description for self-propelled particles // *pre*. 2006. Vol. 74, no. 2. P. 022101.
27. Makris N. C., Ratilal P., Jagannathan S. et al. Critical Population Density Triggers Rapid Formation of Vast Oceanic Fish Shoals // *Science*. 2009. Vol. 323, no. 5922. P. 1734–1737.
28. Raffel M. *Particle image velocimetry a practical guide*. Heidelberg; New York: Springer, 2007. ISBN: 9783540723080 3540723080 9783540723073 3540723072.
29. Becco C., Vandewalle N., Delcourt J., Poncin P. Experimental evidences of a structural and dynamical transition in fish school // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2006. Vol. 367. P. 487–493.
30. Nagy M., Ákos Z., Biro D., Vicsek T. Hierarchical group dynamics in pigeon flocks // *Nature*. 2010. Vol. 464, no. 7290. P. 890–893.
31. Czirók A., Schlett K., Madarász E., Vicsek T. Exponential Distribution of Locomotion Activity in Cell Cultures // *Physical Review Letters*. 1998. Vol. 81, no. 14. P. 3038–3041.
32. Seuront L. Small-scale turbulence in the plankton: low-order deterministic chaos or high-order stochasticity? // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2004. Vol. 341. P. 495–525.
33. Parisi D. R., Gilman M., Moldovan H. A modification of the Social Force Model can reproduce experimental data of pedestrian flows in normal conditions // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2009. Vol. 388, no. 17. P. 3600–3608.

34. Moussaid M., Helbing D., Theraulaz G. How simple rules determine pedestrian behavior and crowd disasters // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2011. Vol. 108, no. 17. P. 6884–6888.
35. Schaller V., Weber C., Semmrich C. et al. Polar patterns of driven filaments // *Nature*. 2010. Vol. 467, no. 7311. P. 73–77.
36. Turgut A. E., Çelikkanat H., Gökçe F., Şahin E. Self-organized flocking in mobile robot swarms // *Swarm Intelligence*. 2008. Vol. 2, no. 2-4. P. 97–120.
37. Blair D., Neicu T., Kudrolli A. Vortices in vibrated granular rods // *Physical Review E*. 2003. Vol. 67, no. 3.
38. Cullen J., Shaw E., Baldwin H. A. Methods for measuring the three-dimensional structure of fish schools // *Animal Behaviour*. 1965. Vol. 13, no. 4. P. 534–543.
39. Lukeman R., Li Y., Edelstein-Keshet L. Inferring individual rules from collective behavior // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2010. Vol. 107, no. 28. P. 12576–12580.
40. Axelsen B., N?ttestad L., Fernö A. et al. Await in the pelagic: dynamic trade-off between reproduction and survival within a herring school splitting vertically during spawning // *Marine Ecology Progress Series*. 2000. Vol. 205. P. 259–269.
41. Baglietto G., Albano E. Finite-size scaling analysis and dynamic study of the critical behavior of a model for the collective displacement of self-driven individuals // *Physical Review E*. 2008. Vol. 78, no. 2.
42. Ratushnaya V., Bedeaux D., Kulinskii V., Zvelindovsky A. Collective behavior of self-propelling particles with kinematic constraints: The relation between the discrete and the continuous description // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2007. Vol. 381. P. 39–46.
43. Chepizhko O., Kulinskii V. The microscopic phase density functional approach to the construction of the kinetic and hydrodynamic description for the system of self-propelled particles // *arXiv preprint arXiv:1304.6645*. 2013.
44. Chepizhko A. A., Kulinskii V. L., Holovatch Y. et al. *The kinetic regime of the Vicsek model*. 2009. P. 25–33. URL: <http://scitation.aip.org>.

- <http://org/content/aip/proceeding/aipcp/10.1063/1.3284421>.
45. Kulinskii V., Chepizhko O. Self-propelling particles as a new challenge for nonequilibrium statistical mechanics. 2012. URL: <http://www.complexfluids.ethz.ch/CONF/g/SLIDES/Kulinskii..pdf>.
 46. C++ AMP RNG Library - Home. <http://amprng.codeplex.com/>. 2014. URL: <http://amprng.codeplex.com/>.
 47. Amazon Web Services (AWS) - Cloud Computing Services. <http://aws.amazon.com/>. 2014. URL: <http://aws.amazon.com/>.
 48. Parallel Reduction using C++ AMP - Parallel Programming in Native Code - Site Home - MSDN Blogs. <http://blogs.msdn.com/b/nativeconcurrency/archive/2012/03/08/parallel-reduction-using-c-amp.aspx>. 2014. URL: <http://blogs.msdn.com/b/nativeconcurrency/archive/2012/03/08/parallel-reduction-using-c-amp.aspx>.
 49. Design patterns: elements of reusable object-oriented software / Ed. by E. Gamma. Addison-Wesley professional computing series. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1995. ISBN: 0201633612.
 50. Gaster B. Heterogeneous computing with OpenCL, revised OpenCL 1.2 edition. Waltham, Mass.: Morgan Kaufmann, 2013.
 51. Gregory K., Miller A., Corporation M. C++ AMP accelerated massive parallelism with Microsoft Visual C++. S.l.: Microsoft Press, 2012.
 52. Josuttis N. M. The C++ standard library: a tutorial and reference. Upper Saddle River, NJ: Addison-Wesley, 2012. ISBN: 9780321623218 0321623215.
 53. Luna F. D. Introduction to 3D game programming with DirectX 11. Dulles, VA: Mercury Learning & Information, 2012. ISBN: 9781936420223 1936420228.