Algoritmos y Estructuras de Datos II
Clase 5

Carreras:

Licenciatura en Informática

Ingeniería en Informática

2024

Algoritmos recursivos

- Los algoritmos recursivos tienen la dificultad que el tiempo de ejecución viene dado por una ecuación de recurrencia.

- Resolver este tipo de ecuaciones consiste en encontrar una expresión no recursiva de T.

- Con un poco de experiencia y de intuición, algunas de las recurrencias se pueden resolver mediante *suposiciones inteligentes*.

Algoritmos recursivos

Ejemplo de función recursiva:

```
Funcion F(n): ent ≥1 → ent ≥1
Si n=1 entonces
        Retorna 1
Sino
        Retorna F(n-1) + 2n -1
Fin
```

- Que calcula?
- Cual es su costo?

Algoritmos recursivos

Para analizar el costo de las funciones recursivas, se debe asociar una función de tiempo desconocida T(n).

- Se plantea una ***recurrencia para T(n)***, donde n mide el tamaño de la entrada al proceso.
- Se *generaliza* la ecuación para T(n) en términos de T(k) para distintos valores de k.
- Se *particulariza* para algún valor apropiado de k llegando al caso base.

Algoritmos recursivos

Funcion **F(n)**: ent ≥1 → ent ≥1
  Si n=1 entonces retorna 1
  Sino retorna **F(n-1)** + 2n -1
Fin

Sea T(n) el tiempo para calcular F(n):

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{si } n = 1 \\ c + T(n-1) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

c,d son constantes

Algoritmos recursivos

Sea T(n) el tiempo para calcular F(n)

$T(n) = d$ si $n = 1$

$T(n) = c + T(n-1)$ si $n > 1$ c,d son constantes

desarrollando la recurrencia:

Si $n>1$: $T(n) = c+T(n-1)$

Si $n-1>1$, $n>2$: $T(n-1) = c+T(n-2)$, $T(n) = 2*c+T(n-2)$

Si $n-2>1$, $n>3$: $T(n-2) = c+T(n-3)$, $T(n) = 3*c+T(n-3)$

…generalizando:

$\forall$ $n>k$ $T(n) = k*c+T(n-k)$

en particular, vale para $n=k+1$ entonces:

si $n=k+1$, $k=n-1$ $T(n) = (n-1)*c+T(1) = c*(n-1)+d$

Entonces: $T(n) \in O(n)$

Algoritmos recursivos

Ejemplo de función recursiva con 2 variables:

FUNCION **F(a,b)**: entero ≥ 0 x entero>0 → entero ≥ 0

SI a<b ENTONCES

Retorna 0

SINO

Retorna 1+**F(a-b,b)**

Fin

- Que calcula?
- Cual es su costo?

Algoritmos recursivos

FUNCION **F(a,b)**: entero ≥ 0 x entero>0 → entero ≥ 0

SI a<b ENTONCES Retorna(0)

SINO Retorna 1+**F(a-b,b)**

Fin

Sea T(a,b) el tiempo para calcular F(a,b):

$$T(a,b) = \begin{cases} d & \text{si } a < b \\ c + T(a-b,b) & \text{si } a \geq b \end{cases} \qquad \text{c,d son constantes}$$

Algoritmos recursivos

Sea

$T(a,b) = d$ si $a < b$, c,d son constantes

$T(a,b) = c + T(a-b,b)$ si $a \geq b$

Si $a \geq b$: $T(a,b) = c + T(a-b,b)$

Si $a-b \geq b$: $T(a-b,b) = c+T(a-2b,b)$

Si $a \geq 2b$: $T(a,b) = T(a-2b,b)+2c$

…generalizando:

$\forall\ a \geq kb$: $T(a,b) = T(a-kb,b)+kc$

en particular, vale para a=kb entonces:

$a = kb$, $k=a/b$: $T(a,b) = T(0,b)+kc = d+kc = d+(a/b)c$

entonces $T(a,b) \in O(a/b)$

Ecuación Característica

- En los casos en que resulte complicado hacer un desarrollo, generalizar y particularizar, existe además una potente técnica que se puede usar que es la técnica de la *ecuación característica.*

- Para aplicar esta técnica hay que reconocer el tipo de ecuación de recurrencia a resolver.

Tipos de recurrencias

- **RECURRENCIAS**
  - Recurrencias Homogeneas
    - Raíces simples
    - Raíces múltiples
  - Recurrencias NO Homogeneas
    - Generales
    - Con Cambio de Variable

Recurrencias homogéneas

- Se comienza el estudio de la técnica de la ecuación característica mediante la resolución de *recurrencias homogéneas lineales con coeficientes constantes* de la forma:

$$a_0T(n) + a_1T(n-1) + a_2T(n-2) + ... + a_kT(n-k) = 0$$

donde los coeficientes a_i son números reales,
k es un número natural entre 1 y n,
Los T son los valores que se quieren conocer.

- Se necesitan además las condiciones iniciales.

Recurrencias homogéneas

Esta recurrencia:

$$\boxed{a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \ldots + a_k T(n-k) = 0}$$

es:

- ***lineal,*** porque contiene términos lineales en T de la forma $T(n\text{-}i)$

- ***homogénea,*** porque la combinación lineal de los T es igual a cero, no tiene término independiente de T

- con ***coeficientes constantes*** porque los a_i son constantes.

Recurrencias homogéneas

Para resolver: $a_0T(n)+a_1T(n-1)+a_2T(n-2)+...+a_kT(n-k)=0$

- Se hace el cambio de variable: $\boxed{T(n)=x^n}$ y se obtiene la ecuación:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_kx^{n-k}=0$$

- Esta ecuación se satisface si $x=0$, pero esta solución trivial no tiene interés.

- Para encontrar las otras soluciones no triviales:

$$x^{n-k}\frac{(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_kx^{n-k})}{x^{n-k}}=0$$

Recurrencias homogéneas

- La ecuación se satisface si y solo si:

$$\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_k x^{n-k}}{x^{n-k}} = 0$$

- Esta ecuación de grado k en x se llama la *ecuación característica* asociada a la recurrencia.

$$\boxed{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k = 0}$$

Recurrencias homogéneas

- El ***polinomio característico*** será:

$$\boxed{P(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k}$$

- El ***teorema fundamental del álgebra*** afirma que todo polinomio $P(x)$ de grado k tiene exactamente k raíces (no necesariamente distintas).

- Esto significa que se puede factorizar como un producto de k monomios:

$$P(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - r_i)$$

Donde los r_i (pueden ser números complejos) son las únicas soluciones de la ecuación $P(x)=0$

Recurrencias homogéneas

- Si r_i es raíz del polinomio característico: $P(r_i)=0$, entonces $x=r_i$ es una solución de la ecuación característica y por lo tanto r_i^n es una solución de la recurrencia.

- Si todas las raíces de la ecuación característica *son distintas*, esto es ($r_i \neq r_j$) si ($i \neq j$), entonces la *solución de la ecuación de recurrencia* viene dada por la combinación lineal:

$$\boxed{T(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n}$$

donde las c_i son constantes cualquiera que se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Recurrencias homogéneas

Ejemplo: Dada la recurrencia:

$$T(0)=0$$
$$T(1)=5$$
$$T(n)=3T(n-1)+4T(n-2) \qquad n\geq 2$$

- Reescribiendo la *ecuación de recurrencia* es entonces:

$$T(n) - 3T(n-1) - 4T(n-2) = 0$$

- Con el cambio: $T(n)=x^n$ resulta: $x^n - 3x^{n-1} - 4x^{n-2} = 0$

- Dividiendo en x^{n-2} resulta la *ecuación característica:*

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Recurrencias homogéneas

- El *polinomio característico* es:

$$P(x)=x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$$

- Cuyas *raíces* son:

$$r_1 = 4 \qquad r_2 = -1$$

- La *solución general* es por lo tanto de la forma:

$$T(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n = c_1 (4)^n + c_2 (-1)^n$$

- Hay que usar las condiciones iniciales para determinar las constantes c_1 y c_2.

Recurrencias homogéneas

- Con las *condiciones iniciales*: $T(0)=0$ y $T(1)=5$

$$T(0) = c_1(4)^0 + c_2(-1)^0 = c_1 + c_2 = 0$$

$$T(1) = c_1(4)^1 + c_2(-1)^1 = 4c_1 - c_2 = 5$$

- Resolviendo este *sistema de 2 ecuaciones* resulta:

$$c_1 = -c_2 = 1$$

- Que sustituidas en la ecuación anterior queda:

$$T(n) = c_1(4)^n + c_2(-1)^n = 4^n - (-1)^n$$

- Entonces: $T(n) \in O(4^n)$

Recurrencias homogéneas

Ejemplo:

La sucesión de Fibonacci está definida por la siguiente recurrencia:

$$f_0 = 0 \qquad f_1 = 1 \qquad y$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad para\ n \geq 2$$

Los primeros términos de la sucesión son:
0, 1, 1 ,2 , 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 …

Recurrencias homogéneas

Considere el costo del *algoritmo de Fibonacci recursivo*.

FUNCION fib1 (n) : entero $\geq$ 0 $\rightarrow$ entero $\geq$ 0;

SI n $<$ 2 ENTONCES

RETORNA(n)

SINO

RETORNA **fib1(n-1)** + **fib1(n-2)**

FIN

Recurrencias homogéneas

- La *ecuación de recurrencia* del algoritmo de Fibonacci recursivo.

$$T(n) = \begin{cases} n & si\ n = 0\ o\ n = 1 \\ T(n-1) + T(n-2) & si\ n \geq 2 \end{cases}$$

- Reescribiendo la ecuación en recurrencia:

$$T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0 \quad si\ n \geq 2$$

- Haciendo el cambio: $T(n)=x^n$ resulta: $x^2 - x - 1 = 0$

- El *polinomio característico* es:

$$P(x) = x^2 - x - 1$$

Recurrencias homogéneas

- Cuyas *raíces* son:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

- La *solución general* es por lo tanto de la forma:

$$T(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- Hay que usar las condiciones iniciales para determinar las constantes c_1 y c_2.

Recurrencias homogéneas

- Con las *condiciones iniciales*: $T(0)=0$ y $T(1)=1$

$$T(0)=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0=c_1+c_2=0$$

$$T(1)=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1=1$$

- Resolviendo este sistema de ecuaciones resulta:

$$c_1=-c_2=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Recurrencias homogéneas

- Que sustituidas en la ecuación anterior queda:

$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Esta es la famosa *fórmula de Moivre* Para encontrar el enesimo numero de la la sucesión de Fibonacci sin calcular los números anteriores.

Si bien esta formula ya era conocida en tiempos de Euler y de Moivre, se difundió recién en el siglo XIX, con las publicaciones del matemático francés Binet.

Recurrencias homogéneas

- Cuando n es grande el segundo término se puede despreciar, ya que:

$$\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1 \quad \text{entonces} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

- Se puede concluir que el tiempo de ejecución para la sucesión de Fibonacci es:

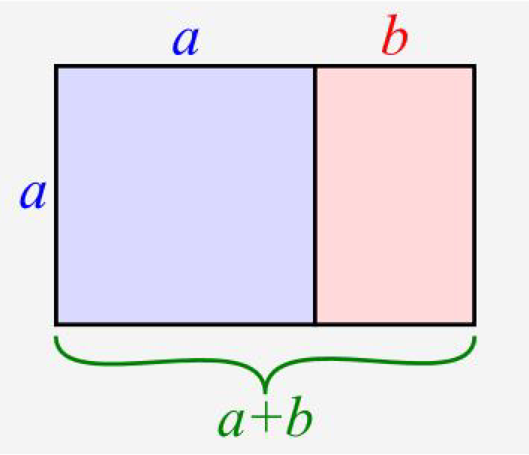
$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- O también: $T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi)^n$ donde: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Número áureo

- El primero en hacer un estudio formal sobre el número áureo fue Euclides (300 años AC), quien demostró que es un número irracional.
- La definición de Euclides: *Un segmento se dice que está dividido en su razón extrema y media cuando el total del segmento es a la parte mayor como la parte mayor a la menor*. (Libro IV, Definición 3)

- Se dice que dos números positivos ***a*** y ***b*** están en ***razón áurea*** si y sólo si:



$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

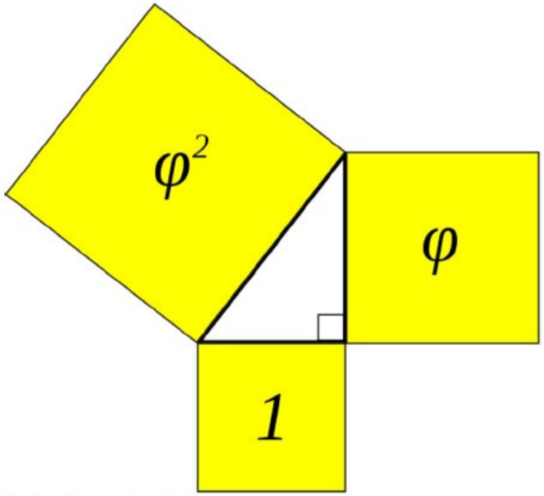
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398874989484820458683436563811772030917980576286213544862270526\,0...$$

Número áureo

Algunas propiedades interesantes de φ :

- Es el único real positivo tal que:

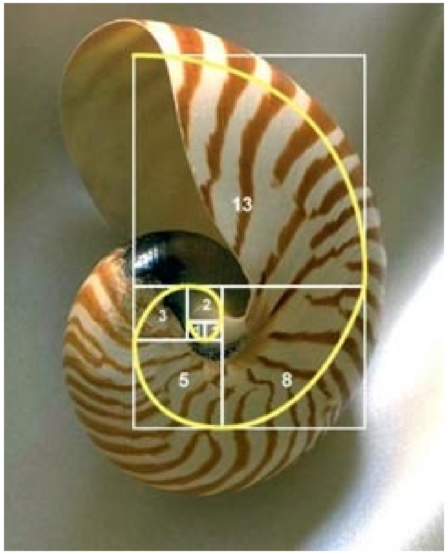
$$\varphi^2 = \varphi + 1$$



- Además:

$$\varphi^3 = \frac{\varphi + 1}{\varphi - 1}$$

Número áureo



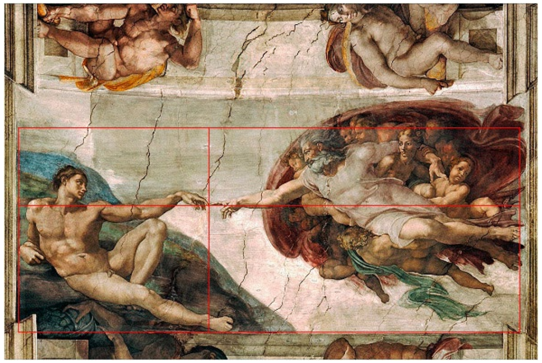
- Algunas propiedades interesantes:

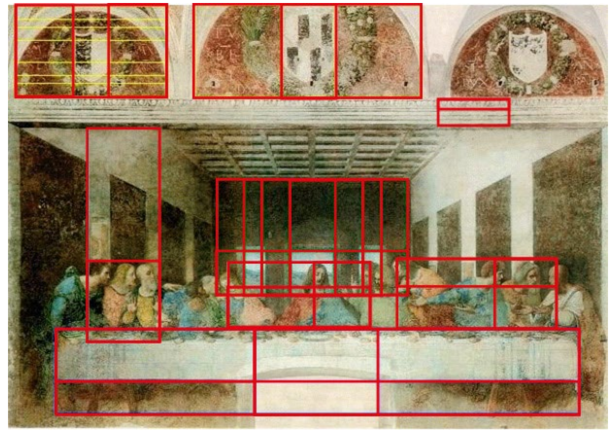
$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \quad \longrightarrow \quad \varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}$$

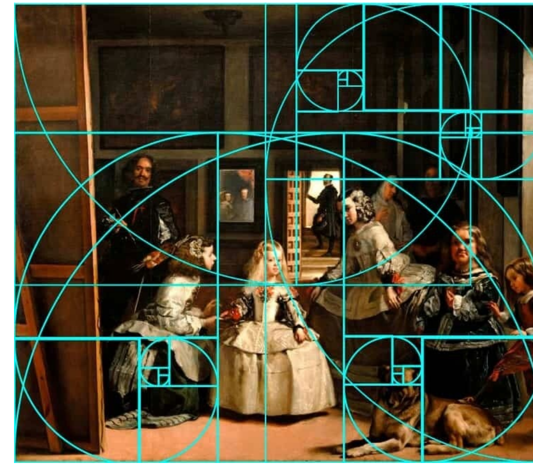
$$\varphi = \sqrt{1+\varphi} \quad \longrightarrow \quad \varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

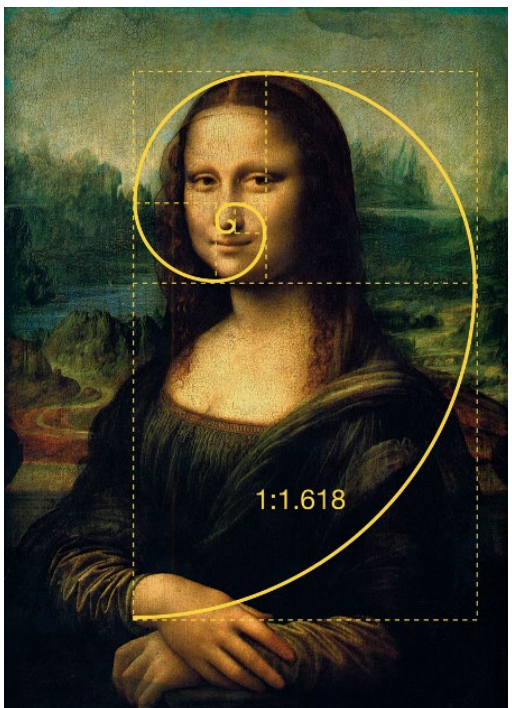
$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

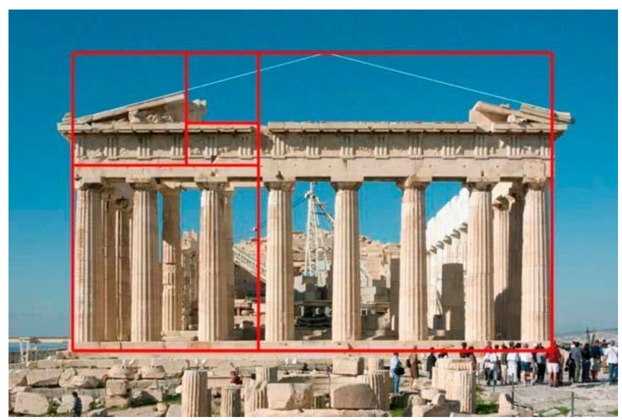
Proporción aurea:

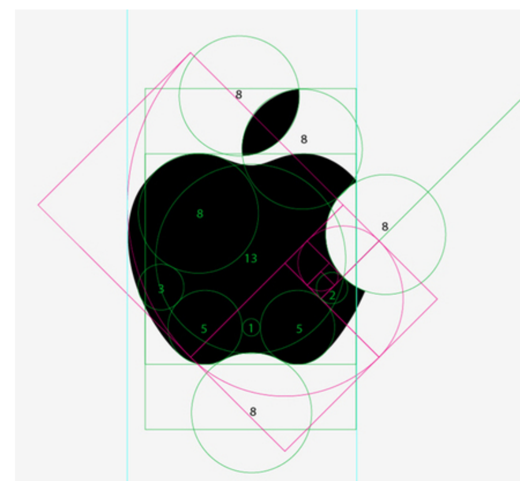












Para conocer más:

- http://www.youtube.com/watch?v=DKGsBUxRcV0
- http://masquemates.blogspot.com/2009/10/la-sucesion-de-fibonacci-y-el-numero-de.html
- https://www.youtube.com/watch?v=Fbz1ZUgTgeY

Recurrencias homogéneas

- La solución se vuelve más complicada cuando el polinomio tiene raíces de *multiplicidad mayor que 1*.

- Si la raíz r_1 tiene multiplicidad m, entonces el polinomio característico puede ser escrito de la forma:

$$\boxed{P(x) = (x - r_1)^m (x - r_2) \ldots (x - r_{k-m+1})}$$

- Se puede demostrar que:

$$\boxed{T(n) = r_1^{\,n}, \quad T(n) = n r_1^{\,n}, \quad T(n) = n^2 r_1^{\,n}, \ldots, \quad T(n) = n^{m-1} r_1^{\,n}}$$

son todas soluciones diferentes de la recurrencia.

Recurrencias homogéneas

- La *solución general* es una combinación lineal de estos términos y de los otros términos con que contribuyan las demás raíces al polinomio característico.

- En este caso la *solución a la ecuación de recurrencia* viene dada por:

$$\boxed{T(n) = \sum_{i=1}^{m} c_i n^{i-1} r_1^{\,n} + \sum_{i=m+1}^{k} c_i r_{i-m+1}^{\,n}}$$

Recurrencias homogéneas

Ejemplo: Dada la recurrencia:

$$T(n)=n \qquad n=0,1,2$$
$$T(n)=5T(n-1) - 8T(n-2) + 4T(n-3) \qquad n\geq 3$$

- La ecuación de recurrencia es entonces:

$$T(n) - 5T(n-1) + 8T(n-2) - 4T(n-3) = 0$$

- El polinomio característico es:

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-2)^2 (x-1)$$

Con raíz múltiple de valor 2

- La solución general es: $T(n)=c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3 1^n$

Recurrencias homogéneas

- De las condiciones iniciales se obtienen los valores de c:

$$n=0: \quad 1.c_1 + 0.c_2 + 1.c_3 = 0$$
$$n=1: \quad 2.c_1 + 2.1.c_2 + 1.c_3 = 1$$
$$n=2: \quad 4.c_1 + 4.2.c_2 + 1.c_3 = 2$$

- de donde resulta:

$$c_1 = 2$$
$$c_2 = -1/2$$
$$c_3 = -2$$

- Por lo tanto:

$$T(n)=2.2^n-(1/2)n2^n-2.1^n$$
$$\boldsymbol{T(n)=2^{n+1}-n2^{n-1}-2}$$

Recurrencias homogéneas

- Se puede generalizar este tratamiento para *varias raíces múltiples*.

- Sean $r_1, r_2, .. r_p$, las raíces de la ecuación característica de una ecuación de recurrencia homogénea, cada una de multiplicidad m_i, entonces la ecuación característica puede expresarse como:

$$(x - r_1)^{m_1} (x - r_2)^{m_2} \dots (x - r_p)^{m_p} = 0$$

- Así la solución a la ecuación de recurrencia viene dada por:

$$T(n) = \sum_{j=1}^{m_1} c_{1j} n^{j-1} r_1^{\,n} + \sum_{j=1}^{m_2} c_{2j} n^{j-1} r_2^{\,n} + \dots + \sum_{j=1}^{m_p} c_{pj} n^{j-1} r_p^{\,n}$$

Recurrencias homogéneas

- La *solución general para la ecuación de recurrencia homogéneas lineales con coeficientes constantes.*

$$\boxed{a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \ldots + a_k T(n-k) = 0}$$

- Con raíces: $r_1, r_2, .. r_p$, con multiplicidad: $m_1, m_2, .. m_p$, es:

$$\boxed{T(n) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} n^{j-1} r_i^{\,n}}$$

- Las constantes c_{ij} deben determinarse de las k condiciones iniciales.

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = k$$