Arquitectura y Organización de Computadoras II

Repaso Matemático

MSc. Ing. Ticiano J. Torres Peralta
Ing. Pablo Toledo

2023 – Segundo Cuatrimestre

Universidad Nacional de Tucumán
facet
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología

Introducción

Al comparar el rendimiento entre dos sistemas, normalmente nos interesa comparar el rendimiento medio de un sistema con el rendimiento medio de otro. Sin embargo, mucho depende de la definición del “promedio” que decidamos utilizar.

La ciencia de la estadística nos dice que si queremos información significativa, debemos realizar un número adecuado de pruebas para justificar la realización de inferencias basadas en los resultados de dichas pruebas. Después de realizar suficientes pruebas, nos queda la tarea de combinar o promediar los datos de manera que se cree una medida de tendencia central. Esta medición indica el comportamiento esperado del sistema muestreado. Pero no todos los métodos para promediar datos son iguales, por lo que el método que elijamos depende de la naturaleza de los datos y la distribución de los resultados de la prueba.

Promedio Aritmético

La forma más familiar de promediar cantidades. Si tenemos *N* medidas, las sumamos y luego las dividimos por *N*, y el resultado es la media aritmética. Cuando alguien informa el resultado promedio de alguna métrica, generalmente se refiere a esto.

Pero, no debe utilizarse cuando la variabilidad de los datos es alta o está sesgada hacia valores más bajos o más altos. Considere la siguiente tabla:

Program	System A Execution Time	System B Execution Time	System C Execution Time
v	50	100	500
w	200	400	600
x	250	500	500
y	400	800	800
z	5000	4100	3500
Average	1180	1180	1180

Está claro, que el rendimiento entre cada sistema es bastante diferente, pero la media aritmética oculta por completo esta información.

Promedio Aritmético (Ponderado)

La media aritmética ponderada mejora la media aritmética simple porque puede dar una imagen más informada del comportamiento esperado del sistema. Si sumamos información, como la frecuencia con la que se ejecuta cada uno de los cinco programas durante el transcurso de un día de procesamiento, podemos usar esto para ponderar el tiempo de ejecución y luego promediarlos para producir la media aritmética ponderada.

Program	Execution Frequency	System A Execution Time	System C Execution Time
v	50%	50	500
w	30%	200	600
x	10%	250	500
y	5%	400	800
z	5%	5000	3500
Weighted Average		380 seconds	695 seconds

Promedio Aritmético (Ponderado)

Ahora podemos ver que el Sistema A es un 83% más rápido que el Sistema C para esta carga de trabajo en particular. Esto puede parecer una gran mejora con respecto a la media simple, pero tiene sus limitaciones. Podríamos tener problemas con la media ponderada cuando utilizamos suposiciones que no se mantienen en el tiempo o que simplemente son incorrectas. Supongamos que una empresa compra el Sistema A basándose en este cálculo anterior. Entonces supongamos que un empleado descubre que el programa z puede producir los mismos resultados que el programa v. Este mismo empleado puede decidir utilizar el programa z porque le da una excusa para tomar más descansos para tomar café.

Promedio Aritmético (Ponderado)

Si se corre la voz de esto en la oficina, más empleados podrían comenzar a hacer lo mismo y la carga de trabajo descrita anteriormente ahora podría cambiar a la siguiente figura, cambiando completamente el resultado del cálculo:

Program	Execution Time	Execution Frequency
v	50	25%
w	200	5%
x	250	10%
y	400	5%
z	5000	55%
Weighted Average	2817.5 seconds	

Promedio Geométrico

De la discusión anterior, se puede ver que no podemos usar la media aritmética si existe una gran variabilidad en los datos y, además, si no tenemos una medida precisa de una carga de trabajo estática y representativa.

Con la media geométrica, nos da un número consistente con el cual realizar la comparación, independientemente de la distribución de los datos. Esta media se define como la raíz enésima del producto de *N* mediciones.

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

Promedio Geométrico

El promedio geométrico nos resulta más útil que la media aritmética al comparar el rendimiento relativo de dos sistemas. Los resultados de rendimiento pueden ser fáciles de comparar cuando se expresan en relación al rendimiento de una máquina común utilizada sólo como referencia; decimos que el sistema bajo evaluación está normalizado con respecto a la máquina de referencia y ocurre cuando tomamos la relación entre el tiempo de ejecución de la referencia y el del sistema que se está evaluando. Para encontrar esta media geométrica de las relaciones normalizadas, tomamos la raíz enésima del producto de las mismas.

Promedio Geométrico

A continuación se muestra un ejemplo. Se puede ver que obtenemos los mismos resultados independientemente de qué máquina usemos como referencia.

Program	System A Execution Time	Execution Time Normalized to B	System B Execution Time	Execution Time Normalized to B	System C Execution Time	Execution Time Normalized to B
v	50	2	100	1	500	0.2
w	200	2	400	1	600	0.6667
x	250	2	500	1	500	1
y	400	2	800	1	800	1
z	5000	0.82	4100	1	3500	1.1714
Geometric Mean		1.6733		1		0.6898

Program	System A Execution Time	Execution Time Normalized to C	System B Execution Time	Execution Time Normalized to C	System C Execution Time	Execution Time Normalized to C
v	50	10	100	5	500	1
w	200	3	400	1.5	600	1
x	250	2	500	1	500	1
y	400	2	800	1	800	1
z	5000	0.7	4100	0.8537	3500	1
Geometric Mean		2.4258		1.4497		1

Promedio Geométrico

Los resultados dan una intuición sobre el rendimiento relativo entre sistemas, pero no es una medición lineal. Esto significa que, aunque la relación de medias entre A y C es 2,43, esto no significa que C sea 2,43 veces más rápido que A. En otras palabras, a diferencia de la media aritmética, esta media no ayuda en absoluto a formular la expectativa estadística del rendimiento real del sistema.

Un segundo problema con la media geométrica es que los valores pequeños tienen una influencia desproporcionada en el resultado global. Por ejemplo, si para el sistema C, el programa v mejora en un 20%, de modo que se ejecuta en 400 segundos en lugar de 500 segundos, la media normalizada mejora en un 4,5%. Si la mejoramos un 40%, la media geométrica normalizada mejora más de un 16%. Si aplicamos las mismas mejoras al programa z, obtenemos el mismo cambio en la media normalizada. Sin embargo, según la Ley de Amdahl sabemos que los programas más grandes y que consumen más tiempo tienen la mayor influencia en el rendimiento total del sistema.

Promedio Armónico

Ni la media geométrica ni la media aritmética son apropiadas cuando nuestros datos se expresan como una tasa, como por ejemplo operaciones por segundo. Para promediar tasas o relaciones, se debe utilizar la media armónica. Esta medida nos permite formar una expectativa matemática del ancho de banda, así como comparar el ancho de banda relativo entre dos sistemas. La media armónica se define como *N* dividido por la suma del recíproco de *N* elementos.

$$H = n \div (1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + \ldots + 1/x_n)$$

Promedio Armónico

Consideremos un ejemplo sencillo. Supongamos que deseamos procesar 300 programas, procesando los primeros 100 a 30 programas por hora, los segundos 100 a 40 programas por hora y los últimos 100 a 60 programas por hora. Tomando la media aritmética de estas tasas, el rendimiento medio es de 43,3 programas por hora. Este valor es incorrecto. El tiempo requerido para procesar los primeros 100 programas fue de 3 horas y 1/3, los segundos 100 fueron de 2 horas y 1/2 y los terceros 100 fueron de 1 y 2/3 horas. El tiempo total de procesamiento fue de 7 horas y media, lo que hace que el rendimiento promedio sea 300/7,5 = 40 programas por hora.

La media armónica nos da la respuesta correcta directamente. La media armónica no nos dice cuánto trabajo se realizó, sólo la velocidad promedio a la que se realizó.

Promedio Armónico

Una gran ventaja de la media armónica respecto a la media geométrica es que los programas que consumen más tiempo tienen una mayor influencia en la media armónica que los que consumen menos tiempo. Esto refleja la realidad, ya que las tareas grandes y lentas tienen el potencial de consumir más ciclos de máquina que las más pequeñas y rápidas. En consecuencia, tenemos más que ganar si mejoramos su desempeño.

Promedio Armónico

Aquí se puede ver un resumen el uso de cada promedio.

Mean	Uniformly Distributed Data	Skewed Data	Data Expressed as a Ratio	Indicator of System Performance Under a Known Workload	Data Expressed as a Rate
Arithmetic	X			X	
Weighted Arithmetic				X	
Geometric		X	X		
Harmonic				X	X