TPN°2: Cotas asintóticas

Algoritmos y Estructuras de Datos II

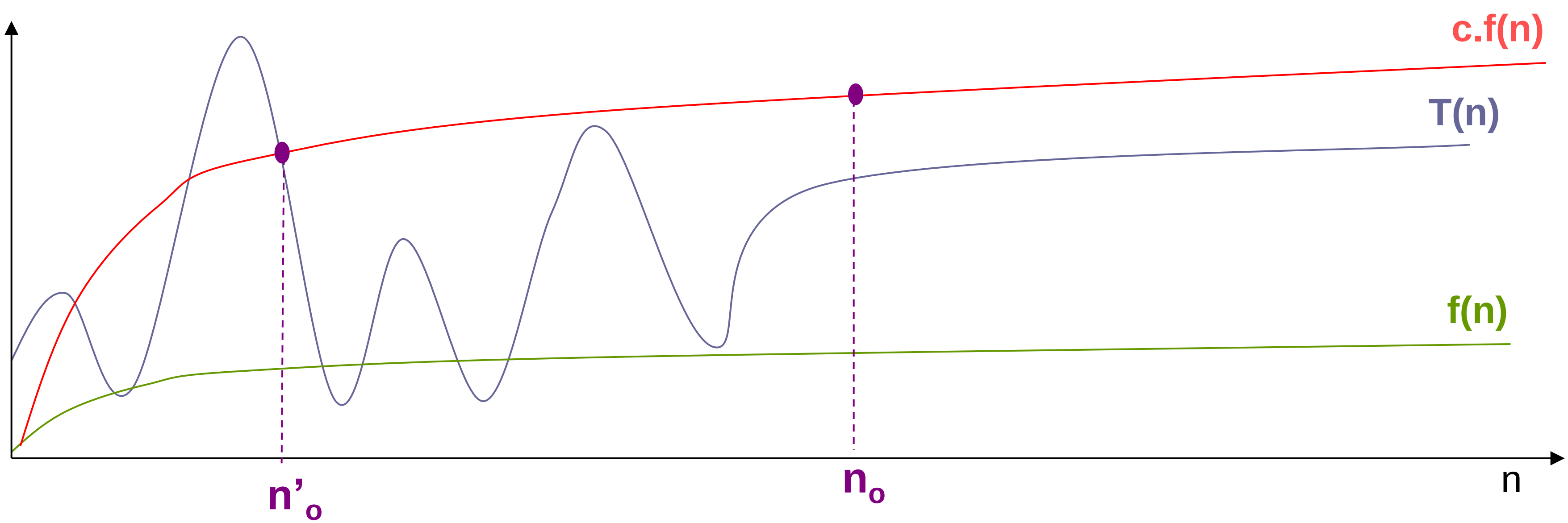
NOTACIÓN O GRANDE

Notación O grande

Cota superior para el crecimiento de T(n)

$$T(n) \in O(f(n)) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \exists\, c \in R^{+} \\ \wedge \\ \exists\, n_0 \in N \end{array}\right\} \;/\; \forall\, n \geq n_0, \quad T(n) \leq c * \boxed{f(n)}$$

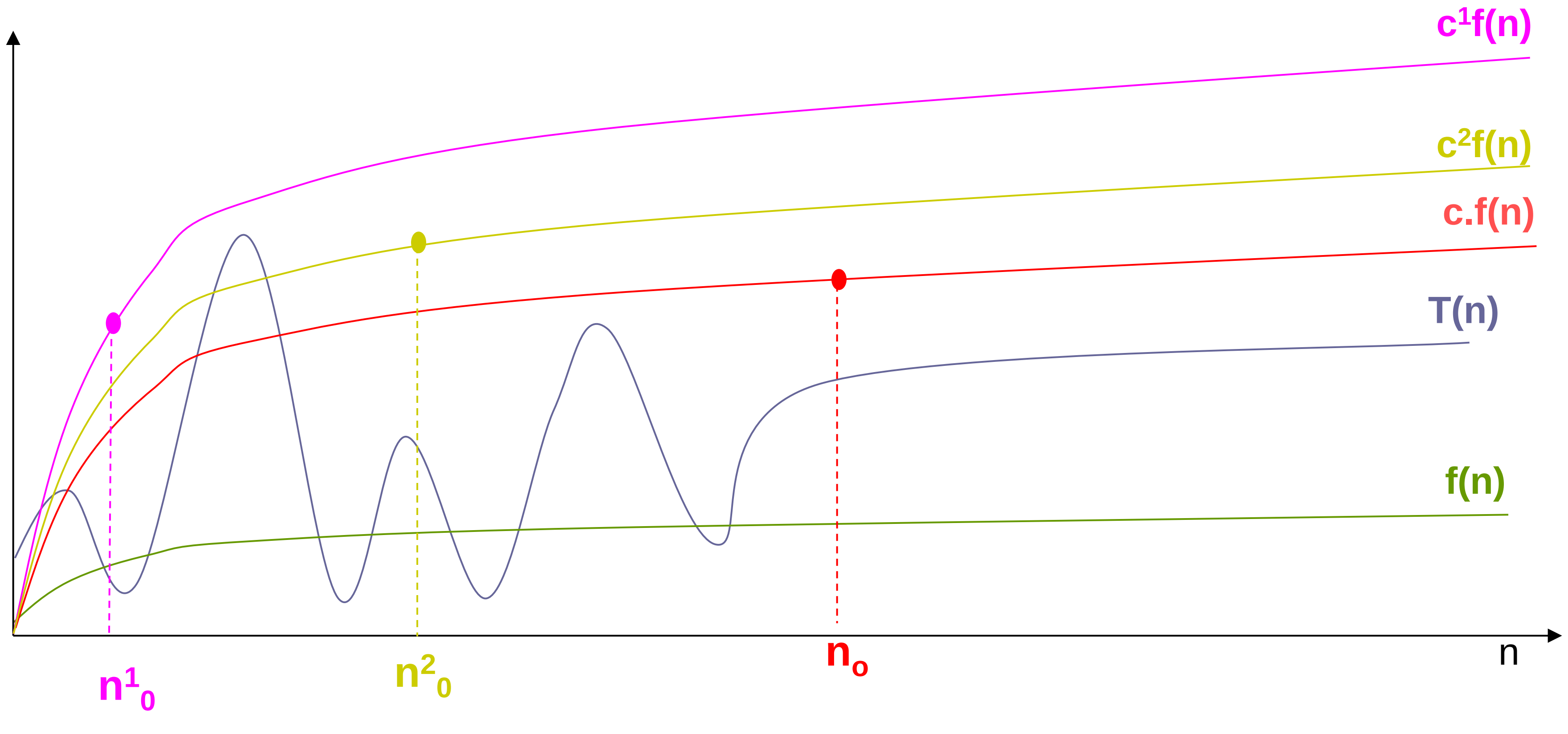
Gráficamente



Notación O grande

¿Existe un único valor de c y n_0 que verifican que $T(n) \leq c.f(n)$?

Gráficamente



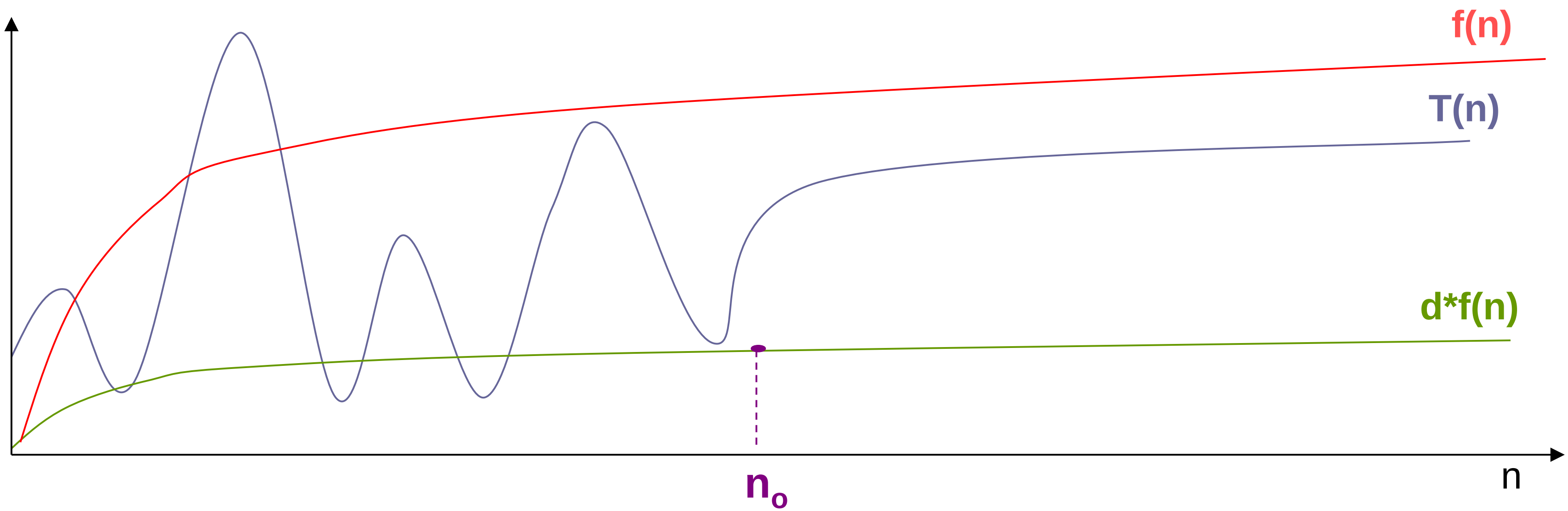
NOTACIÓN Ω

Notación Ω

Cota inferior para el crecimiento de T(n)

$$T(n) \in \Omega(f(n)) \iff \left.\begin{array}{l} \exists\, d \in R^{+} \\ \wedge \\ \exists\, n_0 \in N \end{array}\right\} \;/\; \forall\, n \geq n_0, \quad T(n) \geq d * \boxed{f(n)}$$

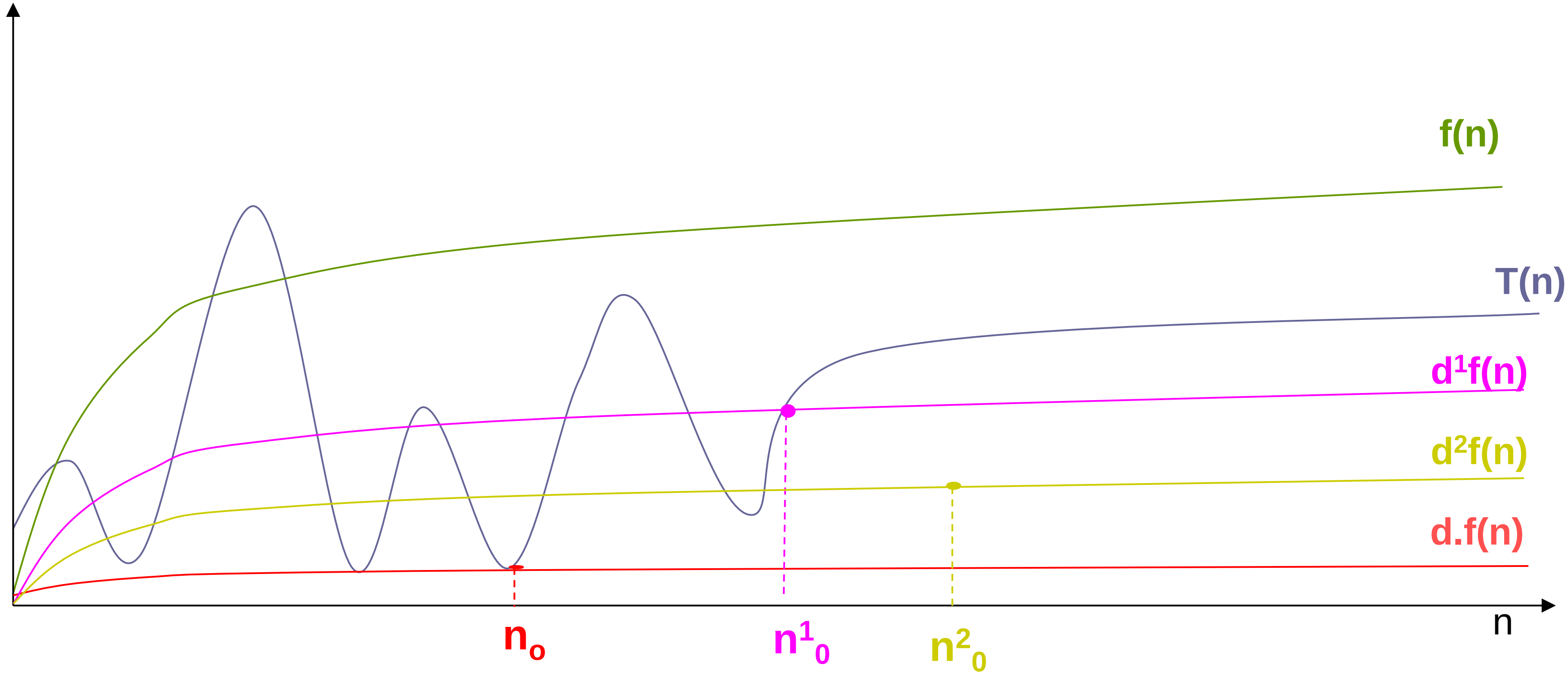
Gráficamente



Notación Ω

¿Existe un único valor de d y n_0 que verifican que $T(n) \geq d.f(n)$?

Gráficamente



EJEMPLOS

Notación Ω

$T(n) \in \Omega(f(n)) \Leftrightarrow \exists\, d \in R^{+} \wedge \exists\, n_0 \in N \,/\, \forall\, n \geq n_0,\ T(n) \geq d * f(n)$

$$¿\ \underbrace{2^n}_{T(n)} \in \Omega(\underbrace{n^3}_{f(n)})\ ?$$

$$2^n \geq d * n^3$$

$$2^n / n^3 \geq d$$

n	$2^n / n^3$
1	2
2	0,5
3	0,293
4	0,25
5	0,256
6	0,296
10	1,024
50	9.007.199.254

Verdadero
$d = 1$
$n_0 = 10$

Verdadero
$d = 0,25$
$n_0 = 4$

Verdadero
$d = 0,5$
$n_0 = 12$

Pasos:
1. Plantear la desigualdad
2. Despejar la constante
3. Analizar
4. Concluir

Notación Ω

$T(n) \in \Omega(f(n)) \Leftrightarrow \exists\, d \in R^+ \wedge \exists\, n_0 \in N \,/\, \forall\, n \geq n_0,\ T(n) \geq d * f(n)$

$$¿\ \underbrace{4n^2 + 6n}_{T(n)} \in \Omega(\underbrace{n^3}_{f(n)})\ ?$$

$$4n^2 + 6n \geq d * n^3$$

$$(4n^2 + 6n) / n^3 \geq d$$

$$4/n + 6/n^2 \geq d$$

Pasos:

1. Plantear la desigualdad
2. Despejar la constante
3. Analizar
4. Concluir

n	$4/n + 6/n^2$
1	10
2	3,5
3	2
4	1,375
5	1,04
10	0,46
100	0,0406

Falso
La función $4n^2 + 6n$ no se puede acotar inferiormente con una función polinómica n^3

NOTACIÓN Θ

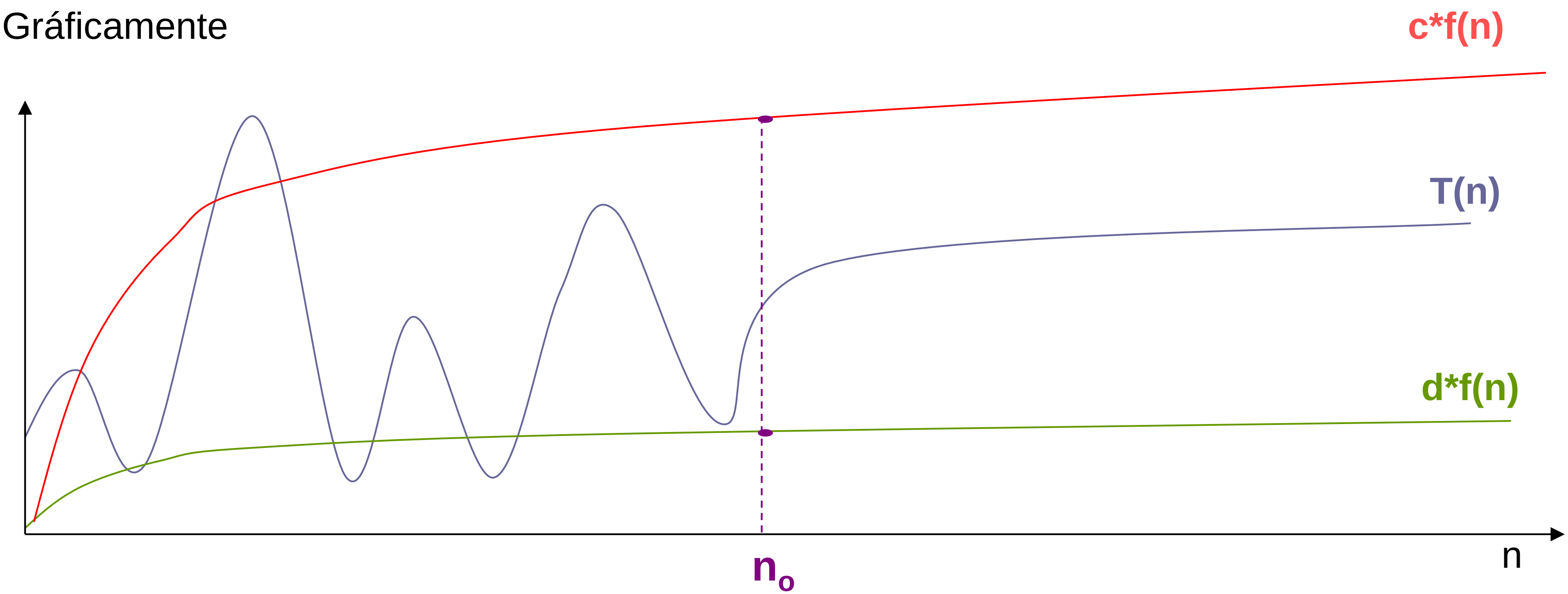
Notación Θ

Cota superior

Cota inferior

$$T(n) \in \Theta(f(n)) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \exists\ c,d \in R^{+} \\ \wedge \\ \exists\ n_0 \in N \end{array}\right\} \ /\ \forall\ n \geq n_0,\quad d\boxed{*f(n)} \leq T(n) \leq c\boxed{*f(n)}$$

Gráficamente



EJEMPLOS

Notación Θ

$T(n) \in \Theta(f(n)) \Leftrightarrow \exists c, d \in R^{+} \wedge \exists n_0 \in N \,/\, \forall n \geq n_0, d*f(n) \leq T(n) \leq c*f(n)$

$$¿\ \underbrace{4n^2 + 6n}_{T(n)} \in \Theta(\underbrace{n^2}_{f(n)})\ ?$$

$$d*n^2 \leq 4n^2 + 6n \leq c*n^2$$
$$d \leq (4n^2 + 6n)/n^2 \leq c$$
$$d \leq 4 + 6/n \leq c$$

Pasos:
1. Plantear la desigualdad
2. Despejar las constantes
3. Analizar
4. Concluir

n	4 + 6/n
1	10
2	7
3	6
4	5,5
5	5,2
10	4,6
100	4,06

Verdadero
$c = 10$
$d = 4$
$n_0 = 1$

Verdadero
$c = 6$
$d = 1$
$n_0 = 3$

Verdadero
$c = 5$
$d = 3$
$n_0 = 10$

Notación Θ

$T(n) \in \Theta(f(n)) \Leftrightarrow \exists c, d \in R^+ \wedge \exists n_0 \in N / \forall n \geq n_0, d*f(n) \leq T(n) \leq c*f(n)$

$$¿\ \underbrace{2^n}_{T(n)} \in \Theta(\underbrace{n^3}_{f(n)})\ ?$$

$$d*n^3 \leq \quad 2^n \quad \leq c*n^3$$

$$d \leq 2^n / n^3 \leq c$$

Pasos:

1. Plantear la desigualdad
2. Despejar la constante
3. Analizar
4. Concluir

n	$2^n / n^3$
1	2
2	0,5
3	0,293
4	0,25
5	0,256
6	0,296
10	1,024
50	9.007.199.254

Falso
La función 2^n no se puede acotar superiormente con una función polinómica n^3

REGLA DEL LIMITE

Regla del Límite

Regla del límite: Sean $f, g: N \rightarrow R^*$ dos funciones arbitrarias de los números naturales en los números reales no negativos, y sea $L = lim_{n \rightarrow \infty} [f(n)/g(n)]$.

Se tiene que:

Si $L \in R^+$ entonces $f \in \Theta(g)$

Si $L = 0$ entonces $f \in O(g)$ y $f \notin \Theta(g)$

Si $L \rightarrow \infty$ entonces $f \in \Omega(g)$ y $f \notin \Theta(g)$

Regla del Límite

$\underbrace{f(n)=2^n}_{\color{red}\mathbf{f(n)}} \quad \underbrace{g(n) = n}_{\mathbf{g(n)}}$

$$L = \lim_{n\to\infty} f(n)/g(n)$$

$$L = \lim_{n\to\infty} 2^n/n = \lim_{n\to\infty} (2^n . Ln2)/1 = \infty$$

$L \to \infty$ entonces $f(n) \in \Omega(g(n))$ y $f(n) \notin \Theta(g(n))$

$L \to \infty$ entonces $f(n) \in \Omega(g(n))$ y $f(n) \notin O(g(n))$

Preguntas…
…y a practicar…