Algoritmos y Estructuras de Datos II
Clase 1

Carreras:

Licenciatura en Informática

Ingeniería en Informática

2024

Unidad I

Muchas personas que no estan familiarizadas con estudios matemáticos, se imaginan que puesto que su meta (la máquina analítica de Babbage) es dar sus resultados en notación numérica, la naturaleza de sus procedimientos deben ser por consiguiente aritméticos y numéricos, más que algebráicos y analíticos. Esto es un error. La máquina puede disponer y combinar sus cantidades numéricas tal como si fuesen letras u otros símbolos generales cualesquiera; y de hecho podría proporcionar sus resultados en notación algebráica, si se hicieran las previsiones convenientes.

—ADA AUGUSTA, Condesa de Lovelace (1844)

Entrénese usted mismo, por amor de Dios, en pequeñas cosas; y a continuación proceda a algo mayor.

—EPICTETUS (Discursos IV. i)

Del libro: "*El arte de programar ordenadores, Algoritmos Fundamentales*" . Donald Knuth. Editorial Reverté. (1985)

Ada Augusta Byron King (1815-1852)

Hija del famoso poeta Lord Byron, hoy en día se la reconoce como la primera persona en describir un lenguaje de programación de carácter general interpretando las ideas de Babbage, en el diseño de una *máquina analítica* que nunca se construyó.

Sugirió el uso de tarjetas perforadas como método de entrada de información e instrucciones a la máquina analítica.

Se la considera como la primera programadora, ya que fue la primera persona en escribir un programa para una computadora programable, escribió un especie de algoritmo donde describió los pasos que permitirían calcular los valores de los números de Bernulli.

Sus aportes no fueron valorados en su época, sin embargo hoy un lenguaje de programación lleva su nombre: **Ada**, lenguaje creado en el Departamento de Defensa de los Estados Unidos en 1979.

Algoritmo

Del latín, dixit algorithmus y éste a su vez del matemático persa Al Juarismi.

Conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema.

En la edad media se crea que el origen era de:

- Álgidos (dolor) + arithmos (número)
- El rey Algor de Castilla

Historiadores matemáticos afirman que el origen de la palabra *algorismo (forma antigua de algoritmo)*:

- Abu Ja'far Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi (autor de texto persa, año 825).

Algoritmo

El Diccionario de la Real Academia Española (DRAE):

- ***algoritmo.*** (Quizá del lat. tardío **algobarismus,* y este abrev. del ár. clás. *ḥisābu lġubār*, cálculo mediante cifras arábigas). m. Conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema. || **2.** Método y notación en las distintas formas del cálculo.

- ***algorítmico*, ca.** adj. Perteneciente o relativo al algoritmo.

- ***algoritmia.*** *(De algoritmo). f. Ciencia del cálculo aritmético y algebraico; teoría de los números.*

Algoritmo

No apareció en los diccionarios en inglés hasta 1957.
Del diccionario de Inglés:

- *algorithm* (*plural* **al·go·rithms**) *noun*

1. **problem-solving procedure:** a logical step-by-step procedure for solving a mathematical problem in a finite number of steps, often involving repetition of the same basic operation

2. **problem-solving computer program:** a logical sequence of steps for solving a problem, often written out as a flow chart, that can be translated into a computer program

[Late 17th century. Alteration, after Greek *arithmos* "number," of *algorism*, via Old French and medieval Latin < Arabic *al-Ḵwārizmī*, name of the 9th century mathematician who introduced algorithms to the West]

Algoritmo

Así algoritmo, según los diccionarios, es un método o proceso para resolver un problema, que se desarrolla según una secuencia de un número finito de pasos, consistente a menudo de la repetición de algunas operaciones básicas.

Algunas definiciones de algoritmos:

- *Secuencia finita de instrucciones, reglas o pasos que describen de forma precisa las operaciones que un ordenador debe realizar para llevar a cabo un tarea en un tiempo finito. [Donald E. Knuth, 1968]*

- *Descripción de un esquema de comportamiento expresado mediante un repertorio finito de acciones y de informaciones elementales, identificadas, bien comprendidas y realizables a priori. [Pierre Scholl, 1988]*

Algoritmo

Mas definiciones de algoritmos:

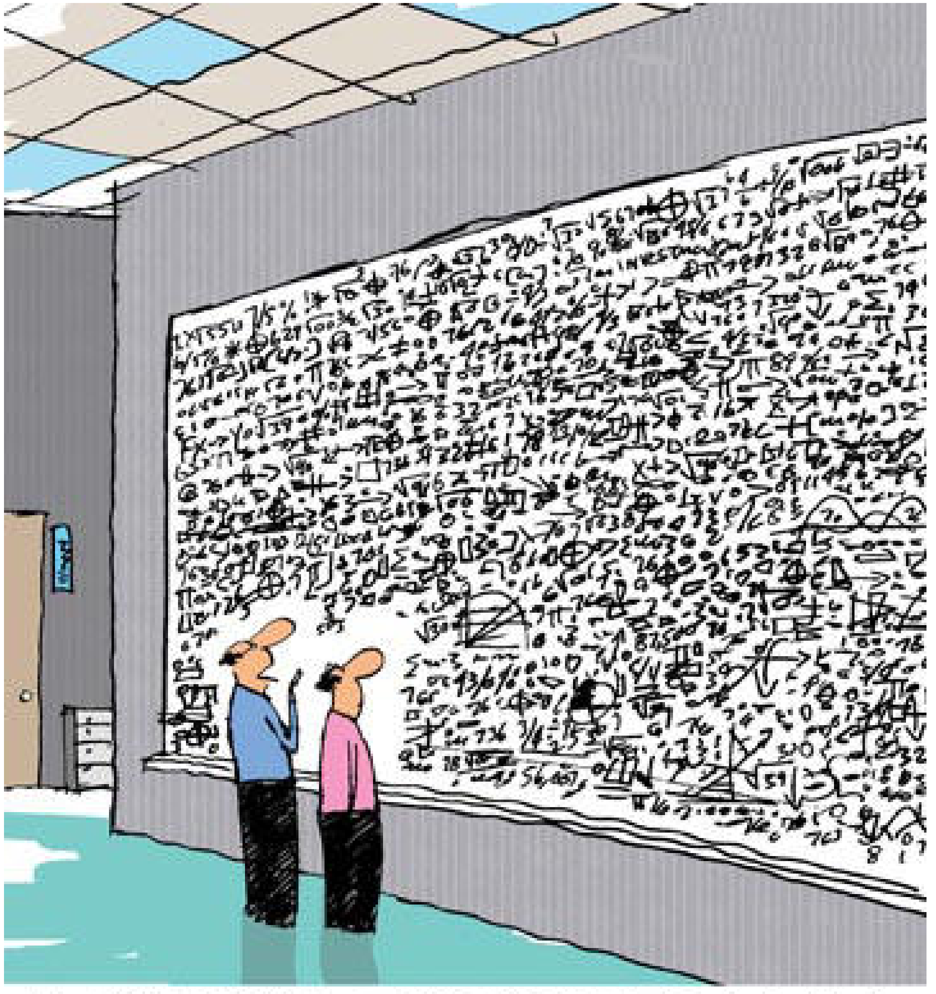
- *Es un conjunto claramente especificado de instrucciones que deben realizarse para resolver un problema* [Baase 1991].

- *Es un procedimiento bien definido que toma un conjunto de valores de entrada y produce otro como salida. Una serie de pasos que transforma la entrada dada en la salida* [Cormen 1991].

- *Es una especificación no ambigua de una secuencia de pasos que sirven para resolver un problema* [Aho 1995].

- *Conjunto de reglas para efectuar algún cálculo bien sea a mano o, más frecuentemente, en una maquina*. [Brassard & Bratley, 1998]

Algoritmos Hoy…



"…Y ESTA ES LA VERSION SIMPLIFICADA DEL ALGORITMO DE GOOGLE"

Algoritmo

Noción "informal":

Un algoritmo es una sucesión finita de instrucciones "*bien definidas*" tal que:

- No hay ambigüedad en las instrucciones.
- Después de ejecutar una instrucción no hay ambigüedad respecto de cual es la instrucción que debe ejecutarse a continuación.
- Después de un número finito de instrucciones ejecutadas se llega siempre a la instrucción STOP ("Un algoritmo siempre para").

Algoritmo

Un algoritmo es una especificación rigurosa de la secuencia finita de instrucciones a ejecutar sobre un autómata para resolver un problema en un tiempo finito, con las siguientes condiciones:

- **Entrada (*Input*):** puede ser vacía
- **Salida (*Output*):** debe ser no vacía
- **Determinístico (*deterministic*):** siempre la misma salida para idénticas entradas.
- **Definido (*Unambiguous Operations*):** cada instrucción debe ser rigurosa, expresada sin ambigüedad.
- **Factible (*Feasible*):** todos los pasos deben ser efectivamente computables.
- **Finito (*Finite*):** terminar en un numero finito de pasos.

Algoritmo

Un algoritmo se dice ***correcto***, si para cada instancia de entrada, termina con una salida correcta.

En ese caso si dice que un algoritmo correcto ***resuelve*** el problema computacional dado.

Un algoritmo incorrecto puede no finalizar en algunas instancias de entrada, o puede finalizar con un resultado distinto al esperado.

Problemas

Se usa un algoritmo para computar la respuesta a un Problema

Se plantean algunas Preguntas:

- Los llamados “***algoritmos probabilistas***” son algoritmos?
- Los llamados “***algoritmos aproximados***” son algoritmos?
- Los llamados “***algoritmos heurísticos***” son algoritmos?

Conjeturas

En matemática una conjetura es una afirmación o una ***proposición*** que se supone cierta, pero que no ha podido ser demostrada ni refutada hasta el día de la fecha.

A menudo consideran que una conjetura está fuertemente respaldada por evidencia, aunque aún no haya sido probada. Esa evidencia puede ser de varios tipos, entre ellos programas que demuestren resultados.

Una vez que se demuestra la veracidad de una conjetura, mediante una demostración matemática, esta pasa a ser considerada un ***teorema*** y puede utilizarse como tal para construir otras demostraciones formales.

Conjeturas

Algunas de las conjeturas más famosas:

- **Conjetura de Goldbach.**
- **Conjetura de Collatz.**
- **Hipótesis de Riemann.**
- **$P \neq NP$**

Conjeturas demostradas

Algunas conjeturas que pudieron ser demostradas:

- **Último teorema de Fermat**.
- **Teorema de los cuatro colores**.
- **Conjetura de Poincaré**.

Conjeturas demostradas

El **Último teorema de Fermat** establece que no hay tres números enteros positivos a, b y c que puedan satisfacer la ecuación:

$a^n + b^n = c^n$, para cualquier valor entero de $n > 2$.

- Fue conjeturado por primera vez por Pierre de Fermat en 1637.
- Primera prueba exitosa después de 358 años (por Andrew Wiles en 1994).
- Es uno de los teoremas más notables de la historia de la matemática, y antes de su demostración estaba en el Libro Guinness de los Récords Mundiales como uno de "los problemas matemáticos más difíciles".

Conjeturas demostradas

El **Problema de los cuatro colores**, que establece que no se requieren más de cuatro colores para colorear las regiones del mapa, asegurando que dos regiones adyacentes tengan distinto color.

- Möbius mencionó el problema en 1840.
- Fue probado en 1976 por Kenneth Appel y Wolfgang Haken.
- Fue el primer teorema importante que se demostró utilizando como ayuda una computadora.

Conjeturas demostradas

La **Conjetura de Poincaré**, es un teorema sobre la caracterización de la 3-esfera, que es la hiperesfera que delimita la bola unitaria en el espacio de cuatro dimensiones.

- Fue conjeturado originalmente en 1904 por Henri Poincaré.
- En 2000, se nombró como uno de los siete Problemas del Milenio, por los que el Instituto Clay de Matemáticas ofreció un premio de 1 millón de dólares a la primera solución correcta.
- Después de casi un siglo, Grigori Perelman presentó una demostración de la conjetura en 2003, publicada en 2006.
- La conjetura de Poincaré, antes de ser probada, era una de las cuestiones abiertas más importantes en topología.
- La conjetura de Poincaré es el único problema del Milenio resuelto.

Problema de Collatz

Lothar Collatz (1910-1990, matemático alemán) en 1937 formuló la siguiente conjetura:

- Tomar un número natural z
- Si z es par se lo divide por 2:

  z ← z / 2
- Si z es impar se lo multiplica por 3 y se suma 1:

  z ← 3*z +1

Repetir hasta obtener z=1

La conjetura afirma que cualquiera sea el número z con el que se comience, repitiendo se llegará a 1.

Esta conjetura se ha designado también como: Problema 3n +1, Cartografía 3x + 1, Algoritmo de Hasse, Problema de Kakutani, Algoritmo de Syracuse, Conjetura de Thwaites y Problema de Ulam.

Problema de Collatz

Sea n un numero entero positivo:

Formalmente, se plantea la función: $f(n) = \begin{cases} n/2 & si\, n\, par \\ 3*n+1 & si\, n\, impar \end{cases}$

La conjetura dice que ***el calculo de f(n) siempre llega al valor 1 cualquiera sea el número n*** con el que se comience.

Por ejemplo:

Si **n=6**. Aplicando f(n) se genera la siguiente sucesión:
6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Si **n=11**. Aplicando f(n) se genera la siguiente sucesión:
11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Si **n=13**. Aplicando f(n) se genera la siguiente sucesión:
13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

Si **n=27**, la sucesión tiene 112 pasos, crece hasta 9232 antes de llegar a 1.

Si **n=1617283130171273**, la sucesión tiene 1300 pasos para llegar a 1.

Problema de Collatz

Entrada: n número entero positivo

Salida: secuencia de números enteros positivos

P1. Leer (n)

P2. Escribir(n)

P3. Mientras $n \neq 1$ hacer

Si n es par entonces

$n \leftarrow n / 2$

Sino

$n \leftarrow 3*n + 1$

Escribir(n)

P4. Fin

Esta secuencia es un algoritmo?

A través de programas se ha probado que la Conjetura de Collatz es cierta para todo $z < 2^{68} \approx 3.10^{20}$ (mayo 2020)

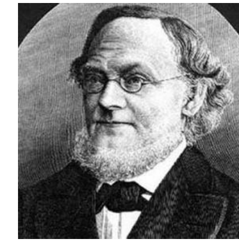
Problema de Goldbach

En el año 1742, Christian Goldbach (un matemático nacido en 1690, en Königsberg, Prusia que murió en 1764, en Moscú, Rusia) le escribió una carta a Leonhard Euler (uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos), sugiriéndole que pensara una demostración para la siguiente afirmación porque a él no se le ocurría:

“***Todo numero par positivo, mayor que dos, se puede escribir como la suma de dos números primos.”***

Esta se conoce como la **“conjetura fuerte de Goldbach”** y si bien hasta hoy no ha sido probada, no se ha hallado número par alguno mayor que 2, que no pueda expresarse mediante la suma de dos números primos.

Problema de Goldbach



¿Porque se piensa que la conjetura es cierta?

4 = 2 + 2

6 = 3 + 3

8 = 3 + 5 = 5 + 3

10 = 3 + 7 = 5 + 5 = 7 + 3

12 = 5 + 7 = 7 + 5

14 = 3 + 11 = 7 + 7 = 11 + 3

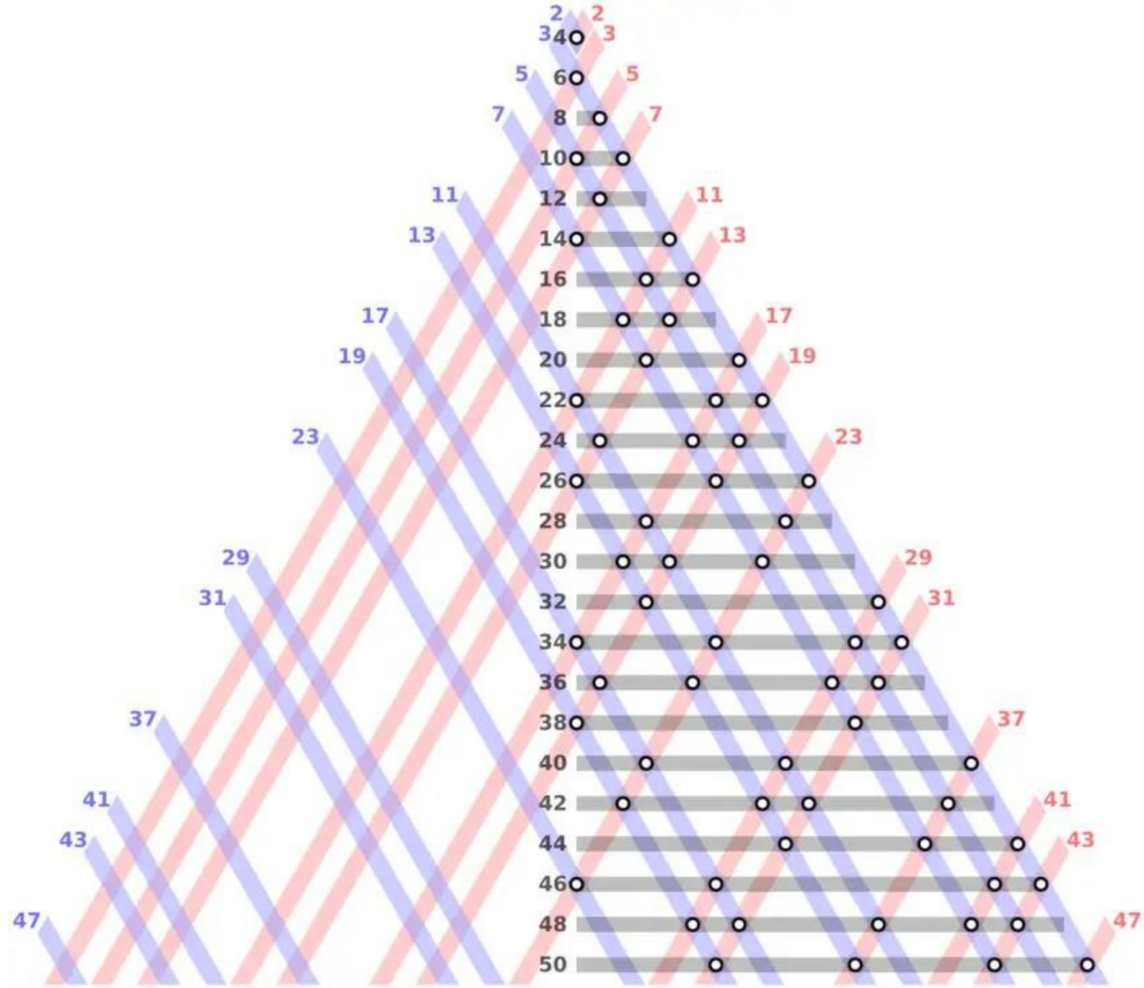
16 = 3 + 13 = 5 + 11 = 11 + 5 = 13 + 3

18 = 5 + 13 = 7 + 11 = 11 + 7 = 13 + 5

20 = 3 + 17 = 7 + 13 = 13 + 7 = 17 + 3

22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11 = 17 + 5 = 19 + 3

Problema de Goldbach



Enteros pares del 4 al 50 representados como suma de dos números primos (Imagen de Adam Cunningham y John Ringland)

Problema de Goldbach

Se podría diseñar un **algoritmo** para probar la conjetura?.

Esto es, escribir un **algoritmo** que tenga como entrada un entero n>2, y como salida dos números primos cuya suma sea n

(Nota: esta descomposición puede no ser única).

Esta conjetura ha sido investigada por muchos matemáticos y ha sido comprobada por programas en computadoras para todos los números pares menores que 10^{18}. De todos modos, el conjunto de los números naturales es infinito y por lo tanto haber demostrado la conjetura para un numero finito de casos no es suficiente.

La conjetura de Goldbach es solo uno de los problemas no resueltos más difíciles de la teoría de números.

Problema de Goldbach

Hacia el año 1742, Christian Goldbach escribió la llamada ***conjetura débil (ternaria) de Goldbach*** que dice:

"Todo número impar mayor que 5 puede expresarse como suma de tres números primos."

Se pudo calcular con las computadoras que la conjetura débil se cumple para todos los enteros impares entre 5 y 8875.10^{30}

En el año 2013 el matemático peruano Harald Helfgott demostró la conjetura despues de 271 años de intentos. De este modo la conjetura pasa a ser un teorema.

Helfgott declara que han sido necesarias técnicas teóricas y computacionales para resolver la conjetura débil de Goldbach.

Números perfectos

Conjetura: "*no existen numeros perfectos impares*".

Un **número perfecto** es un número entero positivo que es igual a la suma de sus divisores propios positivos.

Por ejemplo el número **6** es perfecto porque sus divisores propios positivos son 1, 2 y 3;

- 6 = 1 + 2 + 3.

Los siguientes números perfectos son:

- **28** = 1 + 2 + 4 + 7 + 14
- **496** = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248
- **8128 =** 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064

Números perfectos

Fueron estudiados a lo largo de los años por Euclides, Cataldi, Mersenne, Euler…

- En 2018 se descubrió el número perfecto más grande conocido al momento:

$$2^{82\ 589\ 933} - 1$$

Corresponde al número 51 de la lista de números perfectos, con 49.724.095 dígitos.

- Al día de la fecha, No se conoce la existencia de números perfectos que sean impares.