TPN°3: Recurrencias

Algoritmos y Estructuras de Datos II

Recurrencias Homogéneas

$$a_0T(n) + a_1T(n-1) + a_2T(n-2) + \ldots + a_kT(n-k) = 0$$

- Lineal $\rightarrow$ términos $T(n-i)$
- Homogénea $\rightarrow$ sin término independiente
- Coeficientes constantes $\rightarrow$ a_i constantes

Recurrencias Homogéneas

$T(n) = 5\,T(n-1) - 6\,T(n-2) \quad n \geq 2$
$T(0) = 3$
$T(1) = 8$

- Lineal
- Homogénea
- Coeficientes constantes

$$T(n) - 5\,T(n-1) + 6\,T(n-2) = 0$$

$T(n) = x^n$ $\quad x^n - 5\,x^{n-1} + 6\,x^{n-2} = 0$

% x^{n-2} $\quad x^2 - 5x + 6 = 0$

Raíces $\quad [5 \pm \sqrt{(25 - 24)}] / (2*1) =$ $X1 = 3$, $X2 = 2$

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

Recurrencias Homogéneas

$T(n) = 5\,T(n-1) - 6\,T(n-2) \quad n \geq 2$
$T(0) = 3$
$T(1) = 8$

- Lineal
- Homogénea
- Coeficientes constantes

$(x - 3)(x - 2) = 0$

$T(n) = c_1\,3^n + c_2\,2^n$

$\boxed{T(n) = 2.3^n + 2^n}$

$\therefore\ T(n) \in O(3^n)$

Condiciones Iniciales

$T(0) = c_1\,3^0 + c_2\,2^0 = 3$

$T(1) = c_1\,3^1 + c_2\,2^1 = 8$

$c_1 + c_2 = 3$ $\quad \boxed{\mathbf{c_1 = 2}}$

$3\,c_1 + 2c_2 = 8$ $\quad \boxed{\mathbf{c_2 = 1}}$

Recurrencias NO Homogéneas

$T(n) = 3\,T(n-1) + 2 \quad n \geq 2$
$T(1) = 1$

- Lineal
- NO Homogénea
- Coeficientes constantes

$\boxed{T(n) - 3\,T(n-1)} = 2 = \mathbf{2.1^n}$

$b^n p(n) \begin{cases} b = 1 \\ p(n) = 2 \\ d = 0 \end{cases}$

$T(n) - 3\,T(n-1) = 0$

$(x - b)^{d+1} = (x - 1)$

$T(n) = x^n$ $\qquad x^n - 3\,x^{n-1} = 0$

$\%\ x^{n-1}$ $\qquad x - 3 = 0$

$(x - 3)\,(x - 1) = 0$

Recurrencias NO Homogéneas

$T(n) = 3\,T(n-1) + 2 \quad n \geq 2$
$T(1) = 1$

- Lineal
- NO Homogénea
- Coeficientes constantes

$(x - 3)\,(x - 1) = 0$

$T(n) = c_1\,3^n + c_2\,1^n$

$\boxed{T(n) = 2/3\;3^n - 1}$

$\therefore$ **$T(n) \in O(3^n)$**

Condiciones Iniciales

$T(1) = c_1\,3^1 + c_2\,1^1 = 1$

$T(2) = 3\,T(1) + 2 = 5$

$T(2) = c_1\,3^2 + c_2\,1^2 = 5$

$3\,c_1 + c_2 = 1 \qquad \boxed{c_1 = 2/3}$

$9\,c_1 + c_2 = 5 \qquad \boxed{c_2 = -1}$

Recurrencias Homogéneas

RAICES MÚLTIPLES

$$(x - 2)^3 (x - 1) = 0$$

$$T(n) = c_1\, n^0\, 2^n + c_2\, n^1\, 2^n + c_3\, n^2\, 2^n + c_4\, 1^n$$

Recurrencias NO Lineales

$T(n) = 2\,T(n/2) + 5n^2 \qquad n \geq 2$, pot de 2
$T(1) = 3$
$T(2) = 6$

- NO Lineal
- NO Homogénea
- Coeficientes constantes

$$T(n) - 2\,T(n/2) = 5n^2$$

$n = 2^k$

$$\boxed{T(2^k) - 2\,T(2^{k-1})} = 5.(2^k)^2 \longrightarrow b^k p(k) \begin{cases} b = 4 \\ p(k) = 5 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$= 5.(2^2)^k$$

$$T(2^k) - 2\,T(2^{k-1}) = 0$$

$$(x - b)^{d+1} = (x - 4)$$

$t_k = T(2^k)$

$$t_k - 2\,t_{k-1} = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$(x - 2)\,(x - 4) = 0$$

Recurrencias NO Lineales

$T(n) = 2\,T(n/2) + 5n^2 \qquad n \geq 2$, pot de 2
$T(1) = 3$
$T(2) = 6$

- NO Lineal
- NO Homogénea
- Coeficientes constantes

$$(x - 2)\,(x - 4) = 0$$

$$t_k = c_1\, 2^k + c_2\, 4^k \qquad (2^k)^2$$

$n = 2^k$

$$T(n) = c_1\, n + c_2\, n^2$$

$$\boxed{T(n) = 3\,n}$$

$\therefore\ T(n) \in O(n)$

Condiciones Iniciales

$$T(1) = c_1\, 1 + c_2\, 1 = 3$$

$$T(2) = c_1\, 2 + c_2\, 4 = 6$$

$$c_1 = 3 - c_2$$

$$2\,(3 - c_2) + 4\,c_2 = 6$$
$$6 - 2\,c_2 + 4\,c_2 = 6$$
$$2\,c_2 = 0$$

$$\boxed{\mathbf{c_1 = 3}}$$

$$\boxed{\mathbf{c_2 = 0}}$$

Ecuación de Recurrencia

Dado el siguiente algoritmo:

a) Plantee la ecuación de recurrencia en función de la cantidad de operaciones matemáticas de la misma.

Función F(n): ent ≥0 → ent ≥1
Si n≤1 entonces
Retorna n
Sino
Retorna F(n-2) + 4n + (-4)

b) Resuelva la ecuación de recurrencia mediante:
i. Suposiciones inteligentes (desarrollo, generalización y particularización)
ii. La ecuación característica.

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n \leq 1 \\ T(n-2) + 5 & n > 1 \end{cases}$$

Preguntas…
…y a practicar…