Algoritmos y
Estructuras de Datos II
Clase 6

Carreras:

Licenciatura en Informática

Ingeniería en Informática

2024

Recurrencias homogéneas

- La *solución general para la ecuación de recurrencia homogéneas lineales con coeficientes constantes.*

$$\boxed{a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \ldots + a_k T(n-k) = 0}$$

- Con raíces: $r_1, r_2,.. r_p,$ con multiplicidad: $m_1, m_2,.. m_p,$ es:

$$\boxed{T(n) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} n^{j-1} r_i^{\,n}}$$

- Las constantes c_{ij} deben determinarse de las k condiciones iniciales.

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = k$$

Recurrencias homogéneas
Ejemplo 1

Dada la expresión recurrente para $T(n)$:

$$T(n)=n \qquad n=0,1,2$$
$$T(n)=3T(n-1) - 3T(n-2) + T(n-3) \qquad n \geq 3$$

- La ecuación de recurrencia es entonces:

$$T(n) - 3T(n-1) + 3T(n-2) - T(n-3) = 0$$

- El polinomio característico es:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

- La solución general para recurrencia homogénea con 3 raíces múltiples:

$$T(n)=c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 n^2 1^n$$

Recurrencias homogéneas
Ejemplo 1

- De las condiciones iniciales se obtienen los valores de c:

$$n=0: \quad T(0)=0 \qquad c_1 = 0$$
$$n=1: \quad T(1)=1 \qquad c_1 + c_2 + c_3 = 1$$
$$n=2: \quad T(2)=2 \qquad c_1 + 2.c_2 + 4.c_3 = 2$$

- de donde resulta:

$$c_1 = 0 \text{ , } c_2 = 1 \text{ , } c_3 = 0$$

- Por lo tanto:

$$T(n) = 0+1.n.1^n +0$$
$$T(n) = n$$

Recurrencias homogéneas
Ejemplo 2

Dada la expresión recurrente para $T(n)$:

$$\boldsymbol{T(n)=n \qquad n=0,1,2,3}$$

$$\boldsymbol{T(n)= -2T(n-1) + 3T(n-2) + 4T(n-3)-4T(n-4) \qquad n\geq 4}$$

- La ecuación de recurrencia es entonces:

$$T(n) + 2T(n-1) -3T(n-2) - 4T(n-3)+4T(n-4) = 0$$

- El polinomio característico es:

$$x^4 +2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = (x-1)^2 (x+2)^2$$

- La solución general para 2 raíces dobles:

$$T(n)=c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3(-2)^n + c_4 n (-2)^n$$

Recurrencias homogéneas
Ejemplo 2

- De las condiciones iniciales se obtienen los valores de c:

$$\begin{aligned}
n=0: &\quad c_1 + 1.c_3 = 0 \\
n=1: &\quad c_1 + c_2 - 2.c_3 - 2.c_4 = 1 \\
n=2: &\quad c_1 + 2.c_2 + 4.c_3 + 8.c_4 = 2 \\
n=3: &\quad c_1 + 3.c_2 - 8.c_3 - 24.c_4 = 3
\end{aligned}$$

- de donde resulta:

$$c_1 = 0,\ c_2 = 1\ ,\ c_3 = 0\ \ ,\ c_4 = 0$$

- Por lo tanto:

$$T(n)= 1n1^n= n$$

Recurrencias no homogéneas

- La solución de una recurrencia lineal con coeficientes constantes se vuelve más difícil cuando la recurrencia *no es homogénea*, esto es, cuando la combinación lineal no es igual a cero.

- En particular ya no es cierto que toda combinación lineal de las soluciones sea una solución.

- El *caso más sencillo* es de la forma:

$$\boxed{a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \ldots + a_k T(n-k) = b^n p(n)}$$

- El lado izquierdo de la igualdad es el mismo que el de las homogéneas, pero el lado derecho tiene una ***constante b elevada a la n*** multiplicada por un ***polinomio en n de grado d.***

- La primera idea para resolverla sería tratar de *convertirla en homogénea*.

Recurrencias no homogéneas
Ejemplo 1

$$T(n)=n \qquad n=0,1$$
$$T(n)=2T(n-1)+3^n \qquad n\geq 2$$

Entonces:

$$T(n)-2T(n-1)=3^n \qquad (1)$$

No homogénea

- Multiplicando por 3 la ecuación (1):

$$3T(n)-6T(n-1)=3^{n+1}$$

- Sustituyendo n por $n-1$ se transforma en:

$$3T(n-1)-6T(n-2)=3^n \qquad (2)$$

- Restando la ecuación (2) de la ecuación (1) resulta:

$$T(n)-5T(n-1)+6T(n-2)=0$$

Homogénea

Recurrencias no homogéneas
Ejemplo 1

- El *polinomio característico* correspondiente es:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

- Las *soluciones* son de forma:

$$T(n)= c_1 2^n+ c_2 3^n$$

- Aplicando las *condiciones iniciales*:

$n=0 \quad T(0)= c_1+ c_2=0$

$n=1 \quad T(1)= 2c_1+3c_2=1$

- De donde: $c_1= -1 \quad c_2= 1$

- La solución de la recurrencia es entonces:

$$\mathbf{T(n)= -2^n+ 3^n \in \Theta(3^n)}$$

Recurrencias no homogéneas
Ejemplo 2

Problema de las Torres de Hanoi.

Considere el algoritmo recursivo que mueve los n anillos de la torre origen i a la torre destino j :

```
Algoritmo Hanoi(n,i,j)
        SI  n > 0 ENTONCES
                Hanoi (n-1 , i , 6-i-j)
                Mover un disco de i → j
                Hanoi (n-1 , 6-i-j , j)
Fin.
```

- Número de Movimientos: M(n)

$$M(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 + 2\,M(n-1) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Recurrencias no homogéneas
Ejemplo 2

Se plantea la recurrencia para el ***número de movimientos:***

$$\mathbf{\mathit{M(n)=0 \qquad \text{si } n=0}}$$
$$\mathbf{\mathit{M(n)=2\,M(n-1)+1 \qquad \text{si } n\geq 1}}$$

Se puede escribir la ecuación de recurrencia de la forma:

$$M(n)-2\,M(n-1)=1$$

No homogénea

aplicada para $n= n-1$ resulta:

$$M(n-1)-2\,M(n-2)=1$$

Restando ambas:

$$M(n)-3\,M(n-1)+2\,M(n-2)=0$$

Homogénea

La *ecuación característica* será entonces:

$$x^2-3x+2=0$$

Recurrencias no homogéneas
Ejemplo 2

El *polinomio característico*:

$$P(x)=(x-1)(x-2)$$

Por lo tanto la *solución* de la recurrencia será:

$$M(n) = c_1 1^n + c_2 2^n$$

Usando las *condiciones iniciales*:

$n=0$	$M(0)=0$	$M(0)= c_1 + c_2 = 0$
$n=1$	$M(1)=2M(0)+1=1$	$M(1)= c_1 + 2c_2 = 1$

de donde: $c_1 = -1$ $\quad c_2 = 1$

Entonces: $\boldsymbol{M(n)=2^n-1}$

que dice que: $\boldsymbol{M(n) \in \Theta(2^n)}$

Recurrencias no homogéneas

- Dada la forma recurrente:

$$\boxed{a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \ldots + a_k T(n-k) = b^n p(n)}$$

b: constante elevada a la n

p(n): polinomio en n de grado d.

- Cuando los cambios para *convertirla en homogénea* no son fáciles de hacer, existe una *fórmula general* para resolverla, buscando sus soluciones entre las funciones que son combinaciones lineales de exponenciales, llegando a una ecuación característica de la forma:

$$\boxed{(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k)(x-b)^{d+1} = 0}$$

Recurrencias no homogéneas

Ejemplo 3

Calculo del factorial.

Considere el algoritmo recursivo:

```
FUNCION Fac(n) : entero ≥0 → entero ≥1
        SI n=0 ENTONCES retorna (1)
        SINO    retorna ( n * Fac (n-1) )
FIN
```

- Número de Multiplicaciones: M(n)

$$M(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 + M(n-1) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Recurrencias no homogéneas
Ejemplo 3

Aplicando las formulas:

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k)(x-b)^{d+1} = 0$$

$$a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \ldots + a_k T(n-k) = b^n p(n)$$

Se separa la parte homogénea de la que no lo es: ***M(n)-M(n-1)=1***

La parte homogénea aporta la solución: ***(x-1)***

La parte no homogénea: $b^n p(n)$ aporta una solución de la forma: $(x-b)^{d+1}$
En este caso *b=1* y *p(n)=1*, polinomio de grado *d=0.* Aporta: ***(x-1)***

- La *ecuación característica* será entonces:

  $(x-1)(x-1)=0$

- El *polinomio característico* correspondiente será:

  $P(x)=(x-1)^2$

Recurrencias no homogéneas
Ejemplo 3

El *polinomio característico*:

$$P(x)=(x-1)^2$$

Por lo tanto la *solución* de la recurrencia será:

$$M(n) = c_1\, 1^n + c_2\, n\, 1^n$$

Usando las *condiciones iniciales*:

$n=0$	$M(0)=0$	$M(0)= c_1=0$
$n=1$	$M(1)=M(0)+1=1$	$M(1)= c_1+ c_2=1$

de donde: $c_1= 0 \quad c_2=1$

Entonces: $\boldsymbol{M(n)=n}$

que dice que: $\boldsymbol{M(n) \in \Theta(n)}$

Recurrencias no homogéneas

$$a_0T(n)+a_1T(n-1)+a_2T(n-2)+...+a_kT(n-k)=b^n p(n)$$
$$(a_0x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+...+a_k)(x-b)^{d+1}=0$$

Aplicando las formulas en un Ejemplo 1:

$T(n)=n$ $\quad\quad$ $n=0,1$

$T(n)=2T(n-1)+3^n$ $\quad\quad$ $n\geq 2$

Se separa la parte homogénea de la que no lo es: $T(n)-2T(n-1)=3^n$
La parte homogénea aporta la solución: $(x-2)$
La parte no homogénea: $b^n p(n)$ aporta una solución de la forma: $(x-b)^{d+1}$
En este caso $b=3$ y $p(n)=1$, polinomio de grado $d=0$. Aporta: $(x-3)$

- La *ecuación característica* será entonces:

$$(x-2)(x-3)=0$$

- El *polinomio característico* correspondiente será:

$$P(x)=(x-2)(x-3)$$

- Las *soluciones* serán las ya obtenidas.

Recurrencias no homogéneas

$$a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \ldots + a_k T(n-k) = b^n p(n)$$

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k)(x-b)^{d+1} = 0$$

Aplicando las fórmulas en el Ejemplo 2 de las Torres de Hanoi:

$$M(n)=0 \qquad \text{si } n=0$$
$$M(n)=2\,M(n-1)+1 \qquad \text{si } n\geq 1$$

Se puede escribir la ecuación de recurrencia de la forma:

$$M(n)-2\,M(n-1)=\mathbf{1}$$

En este caso $b=1$ y $p(n)=1$, polinomio de grado $d=0$

- La *ecuación característica* será entonces:

  $$(x-2)(x-1)=0$$

- El *polinomio característico* será :

  $$P(x)=(x-2)(x-1)$$

- Las *soluciones* serán las ya obtenidas

Recurrencias no homogéneas

Una *generalización para las recurrencias* de la forma:

$$\boxed{a_0T(n)+a_1T(n-1)+a_2T(n-2)+\ldots+a_kT(n-k)=b_1{}^n p_1(n)+b_2{}^n p_2(n)+\ldots}$$

- donde las $\boldsymbol{b_i}$ son <u>constantes distintas</u> y los $\boldsymbol{p_i}$ son polinomios en $\boldsymbol{n}$ de grado $\boldsymbol{d_i}$, $i=1,2,3,\ldots$

Estas recurrencias se resuelven empleando la siguiente ecuación característica:

$$\boxed{(a_0x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_k)(x-b_1)^{d1+1}(x-b_2)^{d2+1}\ldots}$$

- Una vez que se ha obtenido el polinomio característico, la recurrencia se resuelve igual que antes.

Recurrencias no homogéneas
Ejemplo 4

Considere la recurrencia:

$$T(n)=0 \qquad\qquad n=0$$
$$T(n)=2T(n-1)+n+2^n \qquad n\geq 1$$

Se reescribe la recurrencia separando la parte no homogénea:

$$T(n)-2T(n-1)=\mathbf{n+2^n}$$

La parte no homogénea se puede identificar con la forma general con:

$b_1=1$, $p_1(n)=n$, el grado de p_1 es: $d_1=1$

$b_2=2$, $p_2(n)=1$, el grado de p_2 es: $d_2=0$

El *polinomio característico* es:

$$P(x)=(x-2)\,(x-1)^2\,(x-2)$$

Donde el primer factor corresponde a la parte homogénea de la recurrencia y los otros de la parte no homogénea.

Recurrencias no homogéneas

Las *raíces* del polinomio $(x-1)^2\ (x-2)^2$ son múltiples: 1 y 2

Las *soluciones* de la recurrencia tienen la forma:

$$T(n)= c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 2^n + c_4 n 2^n$$

Para calcular las cuatro constantes se usa la *condición inicial*: $\boldsymbol{T(0)=0}$

Las otras condiciones iniciales se calculan de $\boldsymbol{T(n)=2T(n-1)+n+2^n\ ,\ n\geq 1}$

$$\begin{array}{ll} n=0 & T(0)= c_1 + c_3 = 0 \\ n=1 & T(1)= c_1 + c_2 + 2c_3 + 2c_4 = 3 \\ n=2 & T(2)= c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 = 12 \\ n=3 & T(3)= c_1 + 3c_2 + 8c_3 + 24c_4 = 35 \end{array}$$

Al resolver el sistema resulta:

$c_1=-2$, $c_2=-1$, $c_3=2$, $c_4=1$

$T(n) = -2.1^n - 1.n1^n + 2.2^n + n2^n = -2-n+2^{n+1}+ n2^n$

Esto dice que: $\boldsymbol{T(n)\ \epsilon\ \Theta(n2^n)}$

Recurrencias

Cambio de variable

- Para resolver la recurrencia, algunas veces es conveniente hacer un *cambio de variable*.

- En ese caso se puede transformar una ecuación de recurrencia más complicada a algunos de los casos anteriores.

- Esta técnica se aplica cuando el valor n es potencia de un número real a, esto es: $n=a^k$.

- Por ejemplo para el caso típico de $a=2$ donde n es de la forma: $n=2^k$ como se muestra en el siguiente ejemplo.

Recurrencias

<u>Ejemplo</u>:

$$T(n)=4T(n/2)+n \qquad n>1 \text{ , } n \text{ potencia de } 2$$
$$T(n)=1 \qquad n=1$$

Se reescribe la recurrencia:

$$T(n) - 4T(n/2)= n$$

Haciendo el *cambio de variable:* $\boldsymbol{n=2^k}$ se tiene:

$$T(2^k) - 4T(2^{k-1})= 2^k$$

Llamando $\boldsymbol{t_k=T(2^k)}$ queda la ecuación como:

$$t_k - 4\, t_{k-1}= 2^k$$

El *polinomio característico* es: $(x-4)(x-2)$ con soluciones 2 y 4

Recurrencias

Entonces:

$$t_k = c_1 4^k + c_2 2^k = c_1 (2^k)^2 + c_2 2^k$$

Volviendo a que: $T(n) = T(2^k) = t_k$ y a: $2^k = n$, la ecuación queda como:

$$T(n) = c_1 n^2 + c_2 n$$

Con las condiciones iniciales:

$n=1$	$T(1)=1$	$c_1 + c2 = 1$
$n=2$	$T(2)=6$	$4c_1 + 2c_2 = 6$

De donde $c_1 = 2$ y $c_2 = -1$

$$\boldsymbol{T(n) = 2n^2 - n}$$
$$\boldsymbol{T(n) \in \Theta(n^2)}$$

Recurrencias

Resolución de recurrencias por transformaciones de intervalo

- El cambio de variable transforma el dominio de la recurrencia.
- Se puede transformar el rango para obtener una recurrencia que se pueda resolver.
- Se pueden usar ambas transformaciones.

Recurrencias

Ejemplo:

$$T(n)=nT^2(n/2) \qquad n>1\ ,\ n \text{ potencia de } 2$$
$$T(n)=1/3 \qquad n=1$$

Cambio de variable: $n=2^i\ ,\ i=\log(n)$

Llamando: $t_i = T(2^i)$

Entonces de la ecuación de recurrencia:

$$t_i = 2^i\, t^2_{i-1}$$

Aplicando logaritmo base 2:

$$log(t_i) = i\ log(2) + 2\ log(t_{i-1}) = i + 2\ log(t_{i-1})$$

Llamando: $u_i = log(t_i)$

$$u_i = i + 2log(t_{i-1}) = i + 2u_{i-1}$$

Recurrencias

La recurrencia queda:

$$u_i - 2u_{i-1} = i$$

Recordando: $a_0 T(n) + a_1 T(n-1) = b^n p(n)$; $(a_0 x^k + a_1 x^{k-1})(x-b)^{d+1} = 0$

El *polinomio característico* es:

$$P(x) = (x-2)\,(x-1)^2$$

Las *soluciones* de la recurrencia tienen la forma:

$$u_i = c_1 2^i + c_2 1^i + c_3 i 1^i$$

$$u_i = c_1 2^i + c_2 + c_3 i$$

Calculando las constantes: $c_2 = -2,\ \ c_3 = -1$

Entonces: $u_i = c_1 2^i - 2 - i$

Recurrencias

Las *soluciones* de la recurrencia t_i tienen la forma:

$$t_i = 2^{u_i} = 2^{c_1 2^i - i - 2}$$

Volviendo a $T(n)$:

$$T(n) = t_{log(n)} = \frac{2^{c_1 n}}{4n}$$

Con la condición inicial: $T(1)=1/3, \;\; c_1 = \log(4/3) = 2 - \log(3)$

Finalmente la solución:

$$T(n) = \frac{2^{2n}}{4n3^n} \qquad T(n) \in \Theta\left(\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{n}\right)$$

Algoritmos y Estructuras de Datos II

Trabajo Práctico 3