ALJABAR LINEAR

Dr. Eng. Sulfayanti

Pertemuan 9

Prodi Informatika
Fakultas Teknik
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT

9

Sub-CPMK

Mampu menjelaskan cara memperoleh determinan suatu matriks untuk menyelesaikan permasalahan invers dan sistem persamaan linier.

Indikator:

a. Ketepatan memahami, menyelesaikan soal tentang matriks ekivalent
b. Ketepatan menyelesaikan soal rank matriks

Review Definisi Matriks

DEFINITION 1 A *matrix* is a rectangular array of numbers. The numbers in the array are called the *entries* in the matrix.

Notasi Matriks:

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \longrightarrow \text{baris 1} \\ \longrightarrow \text{baris 2} \\ \\ \longrightarrow \text{baris i} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \text{kolom 1} & \text{kolom 2} & & \text{kolom j} \end{array} & \end{array}$$

Review Pemanfaatan Matriks

Pemanfaatan matriks antara lain:

- Pada bidang keamanan komputer (Enkripsi data),
- Pemrograman yang membutuhkan array dalam Ilmu Komputer.

Review Operasi Matriks

1. Penjumlahan & pengurangan matriks A dan B yang memiliki ukuran yang sama

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{and} \quad (A-B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

2. Perkalian matriks dengan skalar

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

3. Perkalian 2 matriks

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

Review Transpose Matriks

DEFINITION 7 If A is any $m \times n$ matrix, then the ***transpose of A***, denoted by A^T, is defined to be the $n \times m$ matrix that results by interchanging the rows and columns of A; that is, the first column of A^T is the first row of A, the second column of A^T is the second row of A, and so forth.

Sifat-sifat Matriks

If A and B are matrices (with sizes such that the given matrix operations are defined) and c is a scalar, then the following properties are true.

1. $(A^T)^T = A$ — Transpose of a transpose
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$ — Transpose of a sum
3. $(cA)^T = c(A^T)$ — Transpose of a scalar multiple
4. $(AB)^T = B^T A^T$ — Transpose of a product

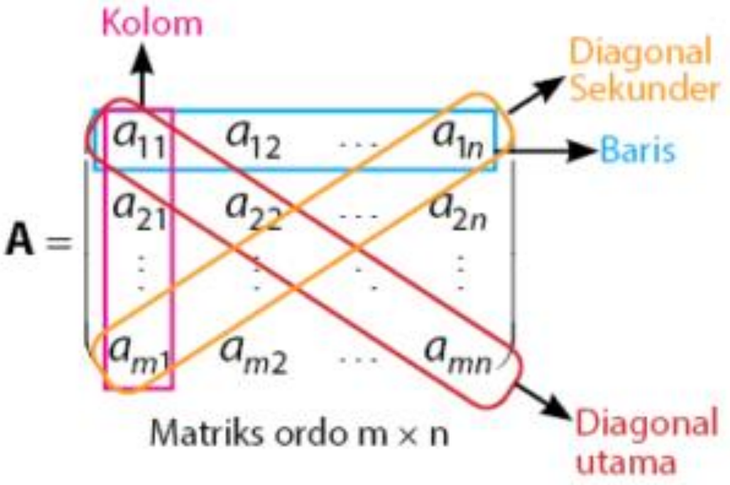
Review Trace of Matrices

DEFINITION 8 If A is a square matrix, then the ***trace of A***, denoted by $\mathrm{tr}(A)$, is defined to be the sum of the entries on the main diagonal of A. The trace of A is undefined if A is not a square matrix.

Determinan Matriks

Definisi Determinan:selisih antara perkalian elemen-elemen pada diagonal utama dengan perkalian elemen-elemen pada diagonal sekunder.

- Determinan matriks hanya dapat ditentukan pada matriks persegi.
- Determinan matriks A, dituliskan: det(A) atau |A|.



Determinan Matriks Ordo 2x2

Determinan matriks persegi dengan ordo 2x2 dapat dihitung dengan cara berikut:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$$

Determinan Matriks Ordo 3x3

Cara yang paling sering digunakan dalam menentukan determinan matriks ordo 3x3 adalah dengan kaidah Sarrus.

Contoh Det. Matriks Ordo 2x2

Contoh 1: 1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$,

2) $A = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,

3) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1/5 \\ 2/3 & -1/2 \end{bmatrix}$,

Determinan Matriks Ordo 3x3

Langkah-langkah mencari determinan matriks ordo 3x3 dengan **kaidah Sarrus**:

1. Meletakkan kolom pertama dan kolom kedua di sebelah kanan garis vertikal determinan.
2. Jumlahkan hasil kali elemen-elemen yang terletak pada diagonal utama dengan hasil kali elemen-elemen yang sejajar diagonal utama pada arah kanan kemudian kurangi dengan jumlah hasil kali elemen-elemen yang terletak pada diagonal samping dengan elemen-elemen yang sejajar dengan diagonal samping.

$$|A| = \begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \left|\begin{matrix} a \\ d \\ g \end{matrix}\right. & \begin{matrix} b \\ e \\ h \end{matrix} & \left.\begin{matrix} c \\ f \\ i \end{matrix}\right| & \begin{matrix} a \\ d \\ g \end{matrix} & \begin{matrix} b \\ e \\ h \end{matrix} \\ & & + & + & + \end{array}$$

$$|A| = (a.e.i) + (b.f.g) + (c.d.h) - (c.e.g) - (a.f.h) - (b.d.i)$$

$$|A| = (a.e.i + b.f.g + c.d.h) - (c.e.g + a.f.h + b.d.i)$$

Contoh Det. Matriks Ordo 3x3

Contoh 2: Tentukan determinan dari matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1/2 \\ 3 & -4 & 2/3 \\ 1 & 1/2 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Matriks Ekuivalen

Matriks A dan B adalah **Ekuivalen** (A~B) bila salah satu matriks tersebut dapat diperoleh dari yang lain dengan **transformasi elementer** atau perpindahan suatu nilai elementer terhadap baris atau kolom.
Jika transformasi elemen pada baris saja maka dikatakan ekuivalen baris, jika pada kolom dikatakan ekuivalen kolom.

$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ Adalah ekuivalen baris, karena

$B = H_{12}(A)$

Transformasi Elementer

a. Penukaran tempat antara baris ke-i dengan baris ke-j atau pertukaran kolom ke-i dan kolom ke-j.
   Dimana:
   Hij(A) untuk transformasi baris, dan
   Kij(A) untuk transformasi kolom

Transformasi Elementer

a. Penukaran tempat antara baris atau pertukaran antara kolom

Contoh:

1) Pertukaran Baris:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1/3 & 0 & 9 \\ 2 & 1/2 & 4 \end{bmatrix}$ maka $H_{12}(A) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 9 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1/2 & 4 \end{bmatrix}$

H_{12} adalah perpindahan baris pertama menjadi baris kedua.

2) Pertukaran Kolom:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1/3 & 0 & 9 \\ 2 & 1/2 & 4 \end{bmatrix}$ maka $K_{23}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1/3 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & 1/2 \end{bmatrix}$

K_{23} adalah perpindahan kolom kedua menjadi kolom ketiga.

Transformasi Elementer

b. Mengalikan baris ke-i dengan suatu bilangan skalar h ≠0, ditulis $H_{i(h)}(A)$ dan mengalikan kolom ke – i dengan skalar k ≠ 0, ditulis $K_{i(k)}(A)$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \text{ maka } \quad H_{2(2)}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1x2 & \frac{1}{2x2} & -\frac{2}{3x2} \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$H_{2(2)}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4/3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$H_{2(2)}$ artinya adalah mengalikan baris kedua dengan 2

Transformasi Elementer

c. Menambah kolom ke - i dengan hasil perkalian k dengan kolom ke-j, ditulis $K_{ij(k)}(A)$ dan menambah baris ke–i dengan h dikali baris ke–j, ditulis $H_{ij(k)}(A)$. Contoh: A = $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1/2 & -2/3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

maka $H_{23(-1)}$ (A) = $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1+(5x-1) & \frac{1}{2}+(6x-1) & -\frac{2}{3}+(7x-1) \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

$H_{23(-1)}$ (A) = $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1+(-5) & \frac{1}{2}+(-6) & -\frac{2}{3}+(-7) \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

$H_{23(-1)}$(A) = $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & -11/2 & -23/3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

Dimana $H_{23(-1)}$(A) adalah mengalikan baris ketiga dengan -1 dan menjumlahkan dengan baris kedua.

Transformasi Elementer

Contoh:
Carilah solusi persamaan linear berikut dengan tranformasi baris elementer

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 9\\
2x + 4y - 3z &= 1\\
3x + 6y - 5z &= 0
\end{aligned}
$$

Rank Matriks

- ✓ Rank dari suatu matriks berukuran m×n adalah jumlah maksimum dari vektor baris atau kolom yang bebas linier atau independen linier.
- ✓ Rank matriks digunakan untuk menentukan apakah suatu matriks singular atau non-singular.
  - Singular artinya tidak dapat di-invers-kan.
  - Jika determinan matriks adalah 0, maka invers dari matriks tersebut tidak ada.

Vektor Baris & Kolom

Jika diketahui matriks A berukuran i x j

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Vektor-vektor baris A adalah b_1, b_2, ... , b_i dimana

$$b_1 = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1j})$$

$$b_2 = (a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2j})$$

$$\vdots$$

$$b_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ij})$$

Vektor-vektor kolom A adalah k_1, k_2, ... , k_j dimana

$$k_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \end{pmatrix} \quad k_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{i2} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad k_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \end{pmatrix}$$

Bebas Linear

- ✓ Vektor-vektor pada sebuah matriks disebut **linier dependen (tidak bebas linear)** apabila salah satu dari vektor-vektor tersebut merupakan kombinasi linier dari vektor lainnya.
- ✓ Sedangkan disebut **linier independen (bebas linear)** apabila tidak terdapat satu pun kombinasi linier antara vektor baris yang satu dengan vektor baris yang lain.

Bebas Linear

- ✓ Secara matematis, linier dependen dan linier independen dapat dipahami sebagai berikut. Misalkan vektor-vektor pada matriks A dapat dibuat menjadi suatu persamaan

$$c_1k_1 + c_2k_2 + \cdots + c_jk_j = 0$$

Rank **Matriks**

Penentuan suatu rank matriks, menggunakan:

a. Metode Minor matriks

Metode minor matriks adalah metode untuk mendapatkan rank matriks dengan menggunakan determinan minor matriks. Jika determinan minor-minor matriks yang berukuran $m \times m$ adalah nol dan determinan minor-minor matriks di bawahnya yang berukuran $(m-1) \times (m-1)$ tidak sama dengan 0, maka rank dari matriks tersebut adalah $m-1$.

b. Metode transformasi elementer

Pada metode ini diusahakan elemen-elemen baris atau kolom dalam matriks diubah menjadi vektor 0. Maksudnya adalah agar diketahui apakah vektor tersebut linier independen atau linier dependen. Sebagaimana diketahui sebelumnya bahwa vektor 0 merupakan linier dependen.

Latihan

Tentukan determinan dari matriks B berikut: (Gunakan NIM masing-masing)

D	0	2	2	0	4	0	5
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & A2 \\ -A3 & A4 & A5 \\ A6 & -A7 & 3 \end{bmatrix}$$

Thanks!

Any questions?

You can find me at sulfayanti@unsulbar.ac.id