QUY HOẠCH ĐỘNG 1

Quy hoạch động

1. **Bài toán ba lô (knapsack 0-1)**
2. **Nguyên lý tối ưu Bellman**
3. **Đánh giá thuật toán**
4. **Bài toán dãy con chung dài nhất**
5. **Bài toán dãy con đơn diệu dài nhất**
6. **Bài tập**

Quy hoạch động

1. **Bài toán ba lô**
2. **Nguyên lý tối ưu Bellman**
3. **Đánh giá thuật toán**
4. **Bài toán dãy con chung dài nhất**
5. **Bài toán dãy con đơn diệu dài nhất**
6. **Bài tập**

1. Bài toán ba lô (1)

<u>Phát biểu bài toán</u>

Cho *n* đồ vật.

Đồ vật thứ *i*, với i=1,..,*n*, có kích thước a_i và giá trị c_i.

Cần xếp đồ vật vào túi có kích thước T.

Tìm phương án xếp sao cho tổng giá trị các đồ vật trong túi lớn nhất.

Cho rằng T, a_1, a_2, ..., a_n là các số nguyên dương.

1. Bài toán ba lô (2)

<u>Ví dụ 4.1</u>:

n **= 3,**

a = (5, 4, 6),

c = (4, 10, 3),

T = 10.

Phương án xếp các đồ vật thứ 1 và thứ 2 cho tổng giá trị lớn nhất là 14.

<u>Ví dụ 4.2</u>:

n **= 5,**

a = (2, 7, 1, 5, 4),

c = (2, 5, 2, 4, 10),

T = 12.

Phương án tối ưu là

x* = (1, 0, 1, 1, 1)

với tổng giá trị các đồ vật là 18.

1. Bài toán ba lô (3)

Phương pháp vét cạn

- Xét mọi phương án có thể, tìm ra trong đó phương án tối ưu. Nếu phạm vi tìm kiếm nhỏ và vừa phải, phương pháp vét cạn là khả thi, nếu phạm vi tìm kiếm lớn, phương pháp này không khả thi.
- Trong ví du 1 và 2, phạm vi tìm kiếm có thể là tất cả các tập con của tập các đồ vật.

Kí hiệu:

- X là tập các đồ vật;
- A* là tập tối ưu (chứa các đồ vật khi xếp vào túi có tổng giá trị lớn nhất);
- t* là tổng giá trị các đồ vật trong A*.

1. Bài toán ba lô (4)

<u>Thuật toán</u>:

1) $A^* = \varnothing$;
2) $t^* = 0$;
3) for each tập con $A \subseteq X$:

    if (tổng kích thước các đồ vật trong $A \le T$)

        a) t = tổng giá trị các đồ vật trong A;

        b) if ($t > t^*$)

            $A^* = A$;

            $t^* = t$;

4) output A^*, t^*;

1. Bài toán ba lô (5)

<u>Phương pháp gần đúng (tham lam)</u>

- Duyệt theo cách có lợi. Ví dụ, tỉ số c_i/a_i cho ta biết hệ số có lợi khi dùng đồ vật i.
- Hệ số có lợi của các đồ vật trong ví dụ 1

  $n = 3$, a = (5, 4, 6), c = (4, 10, 3)

  là 0.8, 2.5, 0.5

  và trong ví dụ 2

  $n = 5$, a = (2, 7, 1, 5, 4), c = (2, 5, 2, 4, 10)

  là 1.0, 0.7, 2.0, 0.8, 2.5.
- Nếu đem xếp các đồ vật không tăng theo hệ số có lợi thì dang sách các độ vật trong 2 ví dụ lần lượt là:

  a = (4, 5, 6), c = (10, 4, 3),

  và

  a = (4, 1, 2, 5, 7), c = (10, 2, 2, 4, 5)

1. Bài toán ba lô (6)

- Nếu lần lượt xếp các đồ vật có hệ số có lợi lớn vào cho đến khi không xếp được nữa, ta có kết quả ứng với hai ví dụ:

1) $n = 3$, $a = (4, 5, 6)$, $c = (10, 4, 3)$, $T = 10$

$x^* = (1, 1, 0)$,

$t^* = 14$ (trùng với giá trị tối ưu là 14)

2) $n = 5$, $a = (4, 1, 2, 5, 7)$, $c = (10, 2, 2, 4, 5)$, $T = 12$

$x^* = (1, 1, 1, 1, 0)$,

$t^* = 18$. (trùng với giá trị tối ưu là 18)

1. Bài toán ba lô (7)

Thuật toán:

1) for (i=1; i≤n; i++) $d_i = c_i/a_i$;

2) sắp xếp $a_1, a_2, .., a_n$ và $c_1, c_2, .., c_n$ sao cho $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$;

3) t* = 0; s = 0; i = 1;

4) while ($s + a_i \leq T$)

   a) $t^* = t^* + c_i$;

   b) $s = s + a_i$;

   c) $x^*_i = 1$;

   d) i = i + 1;

5) for (j=i; j≤n; j++) $x^*_j = 0$;

6) output x*, t*;

1. Bài toán ba lô (8)

Xét phương pháp cét cạn:

n=3, T = 10, a = (5, 4, 6), c = (4, 10, 3)

x* = (0, 0, 0), t* =0;

Sử dụng phương pháp vét cạn, ta có 7 phương án đề nghị:

(1, 0 ,0), phù hợp, t = 4,   x* = (1, 0 ,0)

(0, 1 ,0), phù hợp, t = 10, x* = (0, 1 ,0)

(0, 0 ,1), phù hợp, t = 3,   x* = (0, 1 ,0)

(1, 1 ,0), phù hợp, t = 14, x* = (1, 1 ,0)

(1, 0 ,1), không phù hợp, x* = (1, 1 ,0)

(0, 1 ,1), phù hợp, t = 13, x* = (1, 1 ,0)

(1, 1 ,1), không phù hợp, x* = (1, 1 ,0)

1. Bài toán ba lô (9)

Xét phương pháp cét cạn:

n = 5, T = 12, a = (2, 7, 1, 5, 4),
c = (2, 5, 2, 4, 10)
31 phương án đề nghị:

(1, 0 ,0, 0, 0), s = 2, t = 2*,
(0, 1 ,0, 0, 0), s = 7, t = 5*,
(1, 1 ,0, 0, 0), s = 9, t = 7*,
(0, 0 ,1, 0, 0), s = 1, t = 2,
(1, 0 ,1, 0, 0), s = 3, t = 4,
(0, 1 ,1, 0, 0), s = 8, t = 7,
(1, 1 ,1, 0, 0), s = 10, t = 9*,
(0, 0 ,0, 1, 0), s = 5, t = 4,
(1, 0 ,0, 1, 0), s = 7, t = 6,
(0, 1 ,0, 1, 0), s = 12, t = 9,
(1, 1 ,0, 1, 0), s = 14*
(0, 0 ,1, 1, 0), s = 6, t = 6,
(1, 0 ,1, 1, 0), s = 8, t = 8,
(0, 1 ,1, 1, 0), s = 13*
(1, 1 ,1, 1, 0), s = 15*
(0, 0 ,0, 0, 1), s = 4, t = 10*,
(1, 0 ,0, 0, 1), s = 6, t = 12*,
(0, 1 ,0, 0, 1), s = 11, t = 15*,
(1, 1 ,0, 0, 1), s = 13*
(1, 0 ,1, 0, 1), s = 7, t = 14,
(0, 0 ,1, 0, 1), s = 5, t = 12,
(0, 1 ,1, 0, 1), s = 12, t = 17*,
(1, 1 ,1, 0, 1), s = 14*
(0, 0 ,0, 1, 1), s = 9, t = 14,
(1, 0 ,0, 1, 1), s = 11, t = 16,
(0, 1 ,0, 1, 1), s = 16*
(1, 1 ,0, 1, 1), s = 18*
(0, 0 ,1, 1, 1), s = 10, t = 16,
(1, 0 ,1, 1, 1), s = 12, t = 18*,
(0, 1 ,1, 1, 1), s = 17*
(1, 1 ,1, 1, 1), s = 20*

Quy hoạch động

1. Bài toán ba lô
2. Nguyên lý tối ưu Bellman
3. Đánh giá thuật toán
4. Bài toán dãy con chung dài nhất
5. Bài toán dãy con đơn điệu dài nhất
6. Bài tập

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (1)

Phát biểu:

Một chiến lược tối ưu có đặc trưng:

- với mọi trạng thái khởi tạo và quyết định ban đầu các quyết định tiếp theo phải thiết lập được chiến lược tối ưu
- trên cơ sở các trạng thái được hình thành từ các quyết định trước đó.

Nhận xét:

Lời giải tối ưu của bài toán được cấu trúc từ lời giải tối ưu của các bài toán con.

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (2)

n đồ vật:

kích thước: $a_1, a_2, ..., a_n$

giá trị: $c_1, c_2, ..., c_n$

ba lô: T

Xếp đồ vật vào túi sao cho tổng giá trị lớn nhất

Trạng thái khởi tạo, quyết định ban đầu

Kí hiệu

B(i,j) là giá trị lớn nhất của đồ vật xếp trong túi khi:

túi có kích thước j

xét đến các đồ vật 1, 2, ..., i.

B(i,0) = 0, i = 1, 2, ..., n;

B(0,j)=0, j = 1, 2, ..., T;

B(1,j) = 0, với j = 1,..,a_1-1,

B(1,j) = c1, với j = a_1,..,T,

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (3)

n đồ vật:

kích thước: $a_1, a_2, ..., a_n$

giá trị: $c_1, c_2, ..., c_n$

ba lô: T

Xếp đồ vật vào túi sao cho tổng giá trị lớn nhất

Chiến lược tối ưu

Xét đến đồ vật thứ *i* và ba lô có kích thước *j*:

Với $j = 0, ..., a_i-1$:

không thể sử dụng đồ vật thứ *i*, chỉ có thể sử dụng các đồ vật 0 ..., *i*-1:

$$B(i,j) = B(i-1,j)$$

Với $j = a_i, ..., T$:

có đúng 2 lựa chọn:

a) không sử dụng đồ vật thứ i

$$B(i,j) = B(i-1,j)$$

b) sử dụng đồ vật thứ i

$$B(i,j) = B(i-1,j-a_i)+c_i$$

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (4)

n đồ vật:

kích thước: $a_1, a_2, ..., a_n$

giá trị: $c_1, c_2, ..., c_n$

ba lô: T

Xếp đồ vật vào túi sao cho tổng giá trị lớn nhất

Chiến lược tối ưu:

sử dụng lựa chọn tốt nhất!

$$B(i,j) = \max\left\{B(i-1,j),\ B(i-1,j-a_i)+c_i\right\}$$

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (5)

Xét ví dụ minh họa:

n = 3 a = (5, 4, 6)

c = (4, 10, 3)

T = 10

Trạng thái khởi tạo:

Với ∀ j = 0, ..., 10: B(0,j) = 0,

Với ∀ j = 0, ..., 4: B(1,j) = 0, j = 5, ..., 10: B(1,j) = 4,

	a	c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4	4
2	4	10											
3	6	3											

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (6)

n = 3 a = (5, 4, 6)
c = (4, 10, 3)
T = 10

Chiến lược tối ưu:
Xét i=2
với j = 0, ..., 3: B(2,j) = B(1, j)

	a	c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4	4
2	4	10	0	0	0	0							
3	6	3											

với j = 4, ..., 10: $B(2,j) = \max\{B(1, j), B(1,j-a_2) + c_2\}$
$= \max\{B(1, j), B(1,j-4) + 10\}$

	a	c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4	4
2	4	10	0	0	0	0	10	10	10	10	10	14	14
3	6	3											

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (7)

n = 3   a = (5, 4, 6)
c = (4, 10, 3)
T = 10

Xét i=3

với j = 0, ..., 5: B(3,j) = B(2, j)

	a	c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4	4
2	4	10	0	0	0	0	10	10	10	10	10	14	14
3	6	3	0	0	0	0	10	10					

với j = 6, ..., 10: $B(3,j) = \max\{B(2, j), B(2,j-a_3) + c_3\}$
$= \max\{B(2, j), B(2,j-6) + 3\}$

	a	c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4	4
2	4	10	0	0	0	0	10	10	10	10	10	14	14
3	6	3	0	0	0	0	10	10	10	10	10	14	14

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (8)

Chi tiết thuật toán

A. Tìm giá trị tối ưu B(n, T):

```
for ( j = 0; j ≤ T; j++) B(0,j) = 0;
for ( i = 0; i ≤ n; i++) B(i,0) = 0;

for ( i = 1; i ≤ n; i++)
    {
        for ( j = 1; j < a_i ; j++)        B(i,j) = B(i-1,j);
        for ( j = a_i; j <= T; j++)        B(i,j) = max { B(i-1,j); B(i-1, j-a_i) + c_i};
    }
```

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (9)

Chi tiết thuật toán

B. Tìm phương án tối ưu ứng với B(n, T):

```
j = T;
for (i = n; i ≥ 1; i--)
    {
        if   (B(i,j) > B(i-1,j))        { x*(i) = 1; j = j –a_i; }
        if   (B(i,j) = B(i-1,j))        x*(i) = 0;
    }
```

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (10)

n = 3
a = (5, 4, 6)
c = (4, 10, 3)
T = 10

i = 3; B[3,10] = B[2,10] $\Rightarrow$ x[3] = 0

	a	c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4	4
2	4	10	0	0	0	0	10	10	10	10	10	14	14
3	6	3	0	0	0	0	10	10	10	10	10	14	14

i = 2; B[2,10] > B[1,10] $\Rightarrow$ x[2] = 1
j = 10 – 4 = 6

	a	c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4	4
2	**4**	**10**	**0**	**0**	**0**	**0**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**14**	**14**
3	6	3	0	0	0	0	10	10	10	10	10	14	14

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (11)

n = 3 **a = (5, 4, 6)**
c = (4, 10, 3)
T = 10

i = 2; B[2,10] > B[1,10] ⇒ x[2] = 1
j = 10 – 4 = 6

	a	c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4	4
2	**4**	**10**	**0**	**0**	**0**	**0**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**14**	**14**
3	6	3	0	0	0	0	10	10	10	10	10	14	14

i = 1; B[1,6] > B[0,6] ⇒ x[1] = 1

	a	c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	4	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4	4
2	**4**	**10**	**0**	**0**	**0**	**0**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**14**	**14**
3	6	3	0	0	0	0	10	10	10	10	10	14	14

Phương án tối ưu: **x* = (1, 1, 0)**

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (12)

Tìm phương án tối ưu ứng với B(n, T):

```
j = T; i = n;
while (B(i,j) > 0)
        {
                while (B(i,j) = B(i-1,j))  { x*(i) = 0; i--; };
                x*(i) = 1;
                j = j –a_i;
                i --;
        }
```

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (13)

Tính đúng đắn của thuật toán:

Giả sử B(r,j) là giá trị lớn nhất đưa được vào trong túi xét với sức chứa của túi không quá j và xét đến các đồ vật thứ r = 1, 2, ..., i-1.

B(1,j-1), B(2,j-1),...,B(i,j-1)

B(0,j), B(1,j), ...,B(i-1,j);

Cần chứng minh

$$\mathbf{B(i,j) = max\left\{\ B(i-1,j),\ \ B(i-1,j - a_i\,) + c_i\,\right\}} \qquad \mathbf{(1)}$$

là giá trị lớn nhất khi:

túi có sức chứa j

và xét đến các đồ vật 1, 2, ..., i-1, i

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (14)

$$B(i,j) = \max\{\ B(i-1,j),\ B(i-1,j - a_i) + c_i\ \} \qquad (1)$$

Xét đến đồ vật thứ i, có 2 khả năng:

- Không dùng đồ vật thứ i, theo giả thiết quy nạp giá trị lớn nhất của túi sẽ là B(i-1,j);
- Dùng đồ vật thứ i: giá trị mang lại là c_i và chiếm kích thước a_i trong túi.

  Chỗ dành cho các đồ vật 1, 2, ...,i-1 là $j-a_i$.

  Theo giả thiết quy nạp:

  giá trị lớn nhất lớn nhất của túi khi xét đồ vật 1, 2, ..., i-1 trong túi có sức chứa $j-a_i$ sẽ là $B(i-1, j-a_i)$. Giá trị lớn nhất của túi là

  $B(i-1,j-a_i) + c_i$

  Nếu không dùng được đồ vật thứ i, hiển nhiên, giá trị lớn nhất các đồ vật chứa được trong túi sẽ là

  B(i-1,j)

  Suy ra tính đúng đắn của (1).

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (15)

Bài tập về xây dựng chiến lược tối ưu. Phân tích đầu tư của Bellman.

Mô tả:

Giả thiết $x>0$ là giá trị đầu tư ở thời điểm ban đầu.

Chia x thành 2 phần: $y \geq 0$ và $x-y \geq 0$

Khai thác:

phần thứ nhất mang lại $g(y)$, giá trị còn lại là ay, $0<a<1$;

phần thứ hai mang lại $h(x-y)$, giá trị còn lại là $b(x-y)$, $0<b<1$;

Quá trình khai thác tiếp tục với $ay+b(x-y)$ cho đến khi có thể kết thúc.

Hỏi, ở mỗi bước cần phân chia như thế nào để đạt giá trị lớn nhất.

Gợi ý:

Kí hiệu $f(x)$ là giá trị thu được khi khai thác tốt nhất lượng đầu tư x ban đầu

$$f(x) = \sup \{g(y) + h(x - y) + f(ay + b(x - y))\},\ 0 \leq y \leq x,$$

$$f(0) = 0$$

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (16)

Bài tập áp dụng

Có *n* đồ vật với giá trị $c_1, c_2, ..., c_n$. Cần chia các đồ vật làm hai phần sao cho độ lệch về giá trị giữa hai phần là ít nhất.

<u>Lời giải gợi ý</u>:

Kí hiệu $M = c_1 + c_2 + ... + c_n$, $T = \lfloor M/2 \rfloor$

Giải bài toán ba lô với a = c, T.

Kí hiệu

$I = \{1, 2, ..., n\}$

$I_1 = \{i_1, i_2, .., i_m\}$ tập các đồ vật được đưa vào ba lô và

$I_2 = I \setminus I_1$ tập các đồ vật để ở ngoài

<u>Phải CM</u>: **I_1, I_2 là hai phần đồ vật mà độ lệch tổng giá trị giữa chúng là ít nhất.**

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (17)

Chứng minh:

Kí hiệu:

$T_1 = a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{im}$

$T_2 = M - T_1$.

Ta phải chứng minh $T_2 - T_1$ là số không âm nhỏ nhất so với mọi cách chia.

Giả thiết tồn tại cách chia khác $J_1 = \{ j_1, j_2, .., j_k \}$ có tính chất:

$P_1 = a_{j1} + a_{j2} + ... + a_{jk}$ và $P_2 = M - P_1$

sao cho $|P_2 - P_1| < T_2 - T_1$. Giả thiết $P_2 \geq P_1$.

Suy ra 1) $T_2 - T_1 > P_2 - P_1 \geq 0$.

2) $T_1 \leq T$

Suy ra $P_1 < T_1 \leq T$, nghĩa là tồn tại một tập con J_1 các phần tử mà có tổng gần với T hơn I_1. Điều này mâu thuẫn với giả thiết I_1 là lời giải bài toán ba lô.

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (18)

Bán hàng:

Có n chợ trên một trục đường, đánh số lần lượt là 1, 2, ..., n. Một người đi bán hàng xuất phát từ chợ thứ nhất.

Tại chợ thứ i, anh ta có thể bán được số hàng k(i) ở ngay phút đầu tiên. Mỗi phút sau đó số hàng có thể bán được bị giảm đi một lượng g(i) so với số hàng có thể bán được ở phút trước.

Thời gian đi từ chợ i đến chợ i+1 là t(i). Quỹ thời gian cho phép là P. Hãy chỉ ra thời gian dừng bán ở các chợ để sao cho số hàng bán được là nhiều nhất. Giả thiết rằng nguồn hàng và phương tiện chuyên chở của anh ta là không hạn chế.

Ví dụ, có n=4 P=48

k=(10, 15, 50, 30)

g=(0, 3, 4, 3)

và t=(1, 2, 3)

thì kết quả là

thời gian dừng bán ở các chợ: 23, 2, 10, 7

lượng hàng bán được: 724

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (19)

Kí hiệu:

Quyết định ban đầu:

B(i, j) là lượng bán được nhiều nhất khi đi đến chợ thứ i và sử dụng j đơn vị thời gian.

Khởi tạo:

B(i, 0) = 0, i = 1, 2, .., n

B(0, j) = 0, j = 1,...., P

Chiến lược tối ưu:

$$B(i, j) = \max \{ B(i-1, j),$$
$$B(i-1, j - t(i-1)-x) + x*k(i)–x*(x-1)*g(i)/2,\ x = 0, 1, 2, ..., k(i)/g(i) \}$$

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (16)

Bài toán cực đại giá trị biểu thức

Có *n* toán hạng $a_1, a_2, .., a_n$. Không thay đổi thứ tự các toán hạng, đặt các toán tử cộng và trừ sao cho biểu thức *số học* nhận được có giá trị không âm nhỏ nhất.

Ví dụ, với *n* = 3 và các toán hạng lần lượt là

3, 2, 6,

biểu thức nhận được là

3 –2 + 6.

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (16)

Đặt

$M = A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n$

$T = ½ M$

Kí hiệu BL là bài toán:

Có n-1 số $A = \{A_2, A_3, ..., A_n\}$ và số nguyên T. Hãy chọn các số từ A sao cho có tổng lớn nhất và không vượt quá T.

và

$S_1 = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ là lời giải bài toán BL, có tổng lớn nhất không quá T.

$S_2 = \{2, 3, ..., n\} \setminus S_1$.

Đặt trước các số có chỉ số thuộc S_1 dấu "–" và trước các phần tử thuộc S_2 dấu "+". Biểu thức nhận được có giá trị không âm nhỏ nhất.

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (16)

Kí hiệu

$M_1 = A_{i1} + A_{12} + ... + A_{im}$

$M_2 = M – M_1$

Do $M_1 \leq T = M/2$ nên $M_2 – M_1 = M – 2*M_1 \geq 0$.

Nghĩa là: Biểu thức nhận được không âm.

Biểu thức nhận được không âm nhỏ nhất!

Giả sử tồn tại một cách phân bố dấu "+", "–" khác đối với các số trong X mà đạt được tổng không âm nhỏ hơn $M_2 – M_1$.

Kí hiệu T_1 là tổng các số có dấu "–",

T_2 là tổng các số còn lại (kể cả A_1). Theo giả sử

$M_2 – M_1 > T_2 – T_1 \geq 0$ (*)

Do $M_2 + M_1 = T_2 + T_1 = M$

Trừ các vế, có $T \geq T_1 > M_1$ (**)

Như vậy T_1 là tổng con gần T và lớn hơn M_1.

Điều mâu thuẫn chứng tỏ **giả sử** tồn tại một phân bố khác tốt hơn là sai.

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (16)

Thuật toán:

Kí hiệu B[i,j] là tổng lớn nhất không quá j của các số sẽ được đặt dấu "–" khi xét trong phạm vi i số đầu tiên (trừ A_1).

Tìm giá trị tối ưu:

B[i, 0] = 0, với ∀ i = 1, ..., n

B[1, j] = 0, với ∀ j = 1, ..., T

với i = 2, 3, .., n

j = 1, 2, ..., T

$A_i > j$: B[i, j] = B[i-1, j],

$A_i \le j$: B[i, j] = $\max\{$ B[i-1, j], B[i-1, j-A_i] + A_i $\}$

2. Nguyên lý tối ưu Bellman (16)

<u>Tính phương án</u>:

```
x[1] = 0;
for (i=n; i≥ 2; i--)
        if ( B[i,j] > B[i-1,j])
              { x[i] = 1;   j = j – A[i]; }
        else
              x[i] = 0;
output  x;
```

8. Bài tập

<u>Câu hỏi ôn tập và bài tập tự làm</u>:

1) Xây dựng thuật toán giải bài toán cực đại giá trị biểu thức đại số.
2) Có các đồng xu với mệnh giá là các số nguyên c1, c2, ..., cn. Chọn số đồng xu ít nhất để đạt tổng T. Đánh giá độ phức tạp của các thuật toán xây dựng được.