QUY HOẠCH ĐỘNG 1

Quy hoạch động

1. Bài toán ba lô (knapsack 0-1)
2. Nguyên lý tối ưu Belman
3. Đánh giá thuật toán
4. Bài toán dãy con chung dài nhất
5. Bài toán dãy con đơn diệu dài nhất
6. Bài tập

Bài toán ba lô

<u>Phát biểu bài toán</u>

Cho *n* đồ vật.

Đồ vật thứ *i*, với i=1,..,*n*, có kích thước a_i và giá trị c_i.

Cần xếp đồ vật vào túi có kích thước T.

Tìm phương án xếp sao cho tổng giá trị các đồ vật trong túi lớn nhất.

Cho rằng T, a_1, a_2, ..., a_n là các số nguyên dương.

3. Đánh giá thuật toán (1)

<u>Thuật toán vét cạn:</u>

Kí hiệu: X là tập các đồ vật;

A* là tập tối ưu (chứa các đồ vật xếp vào túi có tổng giá trị lớn nhất);

t* là tổng giá trị các đồ vật trong A*.

Thuật toán:

1) A* = $\varnothing$;

2) t* = 0;

3) for each tập con A $\subseteq$ X:

if (tổng kích thước các đồ vật trong A ≤ T)

a) t = tổng giá trị các đồ vật trong A;

b) if (t > t*)

A* = A;

t* = t;

4) output A*, t*;

Số tập con là 2^n. Vì vậy số bước lặp là 2^n. Thuật toán có độ phức tạp $O(2^n)$.

3. Đánh giá thuật toán (2)

Thuật toán gần đúng:

1) for (i=1; i≤n; i++) $d_i = c_i/a_i$;
2) sắp xếp $a_1, a_2, .., a_n$ và $c_1, c_2, .., c_n$ sao cho $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$;
3) t* = 0; s = 0; i = 1;
4) while ($s + a_i \leq T$)
    a) $t^* = t^* + c_i$;
    b) $s = s + a_i$;
    c) $x^*_i = 1$;
    d) i = i + 1;
5) for (j=i; j≤n; j++) $x^*_j = 0$;
6) output x*, t*;

Chi phí cho vòng lặp 1) và 5) là O(*n*),

vòng lặp 2, trong trường hợp tốt nhất là O(*n*log*n*),

vòng lặp 4) là O(*n*).

Tổng hợp, độ phức tạp của thuật toán : O(*n*log*n*)

3. Đánh giá thuật toán (3)

<u>Quy hoạch động</u>:

```
for ( j = 0; j ≤ T; j++) B(0,j) = 0;
for ( i = 0; i ≤ n; i++) B(i,0) = 0;
for ( i = 1; i ≤ n; i++)
    {   for ( j = 1; j < a_i ; j++)        B(i,j) = B(i-1,j);
        for ( j = a_i; j < T; j++)         B(i,j) = max { B(i-1,j); B(i-1, j-a_i) + c_i};
    }
j = T;
for (i = n; i ≥ 1; i--)
        {   if    (B(i,j) > B(i-1,j))      { x*(i) = 1; j = j –a_i; }
            if    (B(i,j) = B(i-1,j))      x*(i) = 0;
        }
```

Chi phí cho vòng lặp 2) và 5) là O(*n*),

vòng lặp 1 là O(T) và

vòng lặp 3) là O(*n*T).

Tổng hợp, độ phức tạp của thuật toán O(*n*T)

3. Đánh giá thuật toán (4)

Ví dụ minh họa 2:

n = 5, T = 12, a = (2, 7, 1, 5, 4), c = (2, 5, 2, 4, 10)

- Với phương pháp vét cạn, phải xét 31 trường hợp, mỗi trường hợp có không quá 10 phép cộng, 2 phép so sánh và 1 phép gán.
- Với phương pháp gần đúng dựa trên ý tưởng "tham lam", chi phí khá thấp, O(*n*log*n*), và ***ngẫu nhiên cho kết quả tối ưu***.
- Với phương pháp quy hoạch động, bỏ qua một số thao tác, <u>tính trên vòng lặp chính là 60 bước</u>, mỗi bước cũng khoảng 10 phép tính cộng, nhân, so sánh. Như vậy, nếu T lớn thì chi phí của phương pháp quy hoạch động không hề nhỏ.

3. Đánh giá thuật toán (5)

Xét ví dụ tìm giá trị nhỏ nhất không âm của biểu thức:

Có n toán hạng $a_1, a_2, .., a_n$. Không thay đổi thứ tự, đặt các toán tử "+", "–" sao cho biểu thức số học nhận được có giá trị không âm nhỏ nhất.

Ví dụ, với n = 3 và các toán hạng 3, 2, 6, biểu thức nhận được là 3 –2 + 6.

Thuật toán QHĐ

```
for i=1 to n B[i, 0] = 0
for j = 1 to T  {B[0, j] = 0;  B[1, j] =0;}
for  i = 2 to n
   for j = 1 to T
        if (A_i > j)   B[i, j] =   B[i-1, j]
        else    B[i, j] = max{ B[i-1, j],  B[i-1, j-A_i] + A_i }
x[1] = 0;
for (i=n; i≥ 2; i--)
        if ( B[i,j] > B[i-1,j))  { x[i] = 1;  j = j – A[i]; }
        else                      x[i] = 0;
output  x;
```

Thuật toán vét cạn

```
quy ước   0 ứng với toán tử +
          1 ứng với toán tử –
1. gtmin = +∞
2. while !stop
        a)  sinh dãy nhị phân b = (b_2, b_3, .., b_n);
        b) tính giá trị gt của biểu thức ứng với
        dãy NP b;
        c) if (gt>0) & gt< gtmin)
            {gtmin = gt; x = b;}
3. output  x;
```

3. Đánh giá thuật toán (6)

Thuật toán QHĐ

```
for i=1 to n B[i, 0] = 0
for j = 1 to T  {B[0, j] = 0;  B[1, j] =0;}
for  i = 2 to n
   for j = 1 to T
        if (A_i > j)   B[i, j] =   B[i-1, j]
        else    B[i, j] = max{ B[i-1, j],  B[i-1, j-A_i] + A_i }
x[1] = 0;
for (i=n; i≥ 2; i--)
        if ( B[i,j] > B[i-1,j])  { x[i] = 1;  j = j – A[i]; }
        else                        x[i] = 0;
output  x;
```

Thuật toán vét cạn

```
quy ước   0 ứng với toán tử +
          1 ứng với toán tử –
1. gtmin = +∞
2. while !stop
        a)  sinh dãy nhị phân b = (b_2, b_3, .., b_n);
        b) tính giá trị gt của biểu thức ứng với
        dãy NP b;
        c) if (gt>0) & gt< gtmin)
            {gtmin = gt; x = b;}
3. output  x;
```

Chi phí của TTQHĐ: $O(nT)$, với $T = (A_1+ A_2 +\_ ...+ A_n)/2$

Chi phí của TT vét cạn: $O(2^n)$

Rõ ràng khi T nhỏ có thể dùng quy hoạch động.

Khi T có giá lớn, TTQHĐ tốn bộ nhớ và có chi phí thời gian rất lớn.

Quy hoạch động

1. **Bài toán ba lô (knapsack 0-1)**
2. **Nguyên lý tối ưu Belman**
3. **Đánh giá thuật toán**
4. **Bài toán dãy con chung dài nhất**
5. **Bài toán dãy con đơn diệu dài nhất**
6. **Bài tập**

4. Dãy con chung dài nhất (1)

Phát biểu bài toán

Cho dãy có 10 phần tử X = (**2**, 4, 6, **X**, 8, B, 2, 3, **7**, **A**)

Dãy S = (2, X, 7, A) là một dãy con của X, S $\subseteq$ X.

Cho 2 dãy X, Y. Nếu S $\subseteq$ X và S $\subseteq$ Y thì nói rằng S là dãy con chung của X và Y. Nếu S có nhiều phần tử nhất trong số các dãy con chung của X và Y thì nói rằng S là dãy con chung dài nhất của X và Y.

Ví dụ, với

X = (**2**, 4, 6, **X**, 8, B, 2, 3, **7**, **A**)

Y = (**2**, M, **X**, **7**, 4, **A**)

thì **S = (2, X, 7, A)** là dãy con chung dài nhất của X và Y.

Bài toán:

Cho hai dãy X và Y, lần lượt có độ dài (số phần tử) là *n* và *m*.

Tìm dãy con chung dài nhất của X và Y.

4. Dãy con chung dài nhất (2)

<u>Trạng thái khởi tạo, quyết định ban đầu</u>

Kí hiệu $X^{(k)} = (X_1, X_2, ..., X_{k-1}, X_k)$ dãy con gồm *k* phần tử đầu tiên của dãy X.

Kí hiệu B(i,j) là độ dài dãy con chung dài nhất của 2 dãy $X^{(i)}$ và $Y^{(j)}$.

Hiển nhiên, B(0, j) = 0, với j = 0, 1, ..., *n*.

B(i, 0) = 0, với i = 0, 1, ..., *m*..

X			2	4	6	X	8	B	2	3	7	A
Y		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0										
M	2	0										
X	3	0										
7	4	0										
4	5	0										
A	6	0										

4. Dãy con chung dài nhất (3)

và B(1, j) = 0 nếu $X_1 \notin \{Y_1, Y_2, ..., Y_{j-1}, Y_j\}$,

B(1, j) = 1 nếu $X_1 \in \{Y_1, Y_2, ..., Y_{j-1}, Y_j\}$.

B(i,1) = 0 nếu $Y_1 \notin \{X_1, X_2, ..., X_{i-1}, X_i\}$,

B(i,1) = 1 nếu Y1 $\in \{X_1, X_2, ..., X_{i-1}, X_i\}$.

X			2	4	6	X	8	B	2	3	7	A
Y		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	2	0	1									
X	3	0	1									
7	4	0	1									
4	5	0	1									
A	6	0	1									

4. Dãy con chung dài nhất (4)

<u>Chiến lược tối ưu</u>

a) $X_i \neq Y_j$

Có thể xảy ra các khả năng:

$S^{(i,j)} = S^{(i-1,j-1)}$

$S^{(i,j)} = S^{(i-1,j-1)} \cup (X_i)$

$S^{(i,j)} = S^{(i-1,j-1)} \cup (Y_j)$

ứng với:

$B(i,j) = B(i-1,j-1)$
$B(i,j) = B(i,j-1)$
$B(i,j) = B(i-1,j)$

Do $B(i-1,j-1) \leq \min \{ B(i-1,j), B(i,j-1) \}$

Suy ra:

$B(i,j) = \max \{ B(i-1,j), B(i,j-1) \}$

X			2	4	6	X	8	B	2	3	7	A
Y		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X	3	0	1	1	1							
7	4	0	1	1								
4	5	0	1									
A	6	0	1									

4. Dãy con chung dài nhất (5)

b) $X_i = Y_j$

Kí hiệu $S^{(i-1,j-1)} = LCM\{ X^{(i-1)}, Y^{(j-1)}\}$

Thêm X_i (Y_j) vào xâu con chung: $S^{(i,j)} = S^{(i-1,j-1)} \cup (X_i)$

Suy ra: $B(i,j) = B(i-1,j-1) + 1$

X			2	4	6	X	8	B	2	3	7	A
Y		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X	3	0	1	1	1	2						
7	4	0	1	1								
4	5	0	1									
A	6	0	1									

4. Dãy con chung dài nhất (6)

$X_i \neq Y_j$:

$$B(i,j) = \max \{ B(i-1,j), B(i,j-1) \}$$

X			2	4	6	X	8	B	2	3	7	A
Y		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X	3	0	1	1	1	2	2					
7	4	0	1	1								
4	5	0	1									
A	6	0	1									

4. Dãy con chung dài nhất (7)

$X_i = Y_j$ $B(i,j) = B(i-1,j-1) + 1$

$X_i \neq Y_j$: $B(i,j) = \max\{B(i-1,j), B(i,j-1)\}$

X			2	4	6	X	8	B	2	3	7	A
Y		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X	3	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
7	4	0	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
4	5	0	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3
A	6	0	1	2	2	2	2	2	2	2	3	4

4. Dãy con chung dài nhất (8)

<u>Chi tiết thuật toán</u>:

```
1) for ( i=0; i≤m; i++ ) B(i,0) = 0;
2) for ( j=0; j≤n; j++ )  B(0,j) = 0;
3) for ( i=1;  i≤m; j++)
        for ( j=1; j≤n; j++)
            if (X_i = Y_j)
                    B(i,j) = B(i-1,j-1) + 1;
            else
                    B(i,j) = max { B(i-1,j), B(i,j-1)};
```

4. Dãy con chung dài nhất (9)

Xác định dãy con chung dài nhất

i = m; j= n;

Nếu $X_i = Y_j$ đưa Xi vào dãy con chung, giảm i, j;

Nếu Xi $\neq$ Yj:

B(i,j-1) > B(i-1,j): j-- (vì Y_j không tham gia vào LCS)

ngược lại: i-- (vì X_i không tham gia vào LCS)

4. Dãy con chung dài nhất (9)

Xác định dãy con chung dài nhất

i = m; j= n;

Nếu $X_i = Y_j$ đưa Xi vào dãy con chung, giảm i, j;

Nếu $Xi \neq Yj$:

B(i,j-1) > B(i-1,j): j-- (vì Y_j không tham gia vào LCS)

ngược lại: i-- (vì X_i không tham gia vào LCS)

```
4)  k = B(m,n);   i=m;   j=n;
5)  while (i>1)& (j>1)
        a) if (X_i = Y_j)   { S_k=X_i;  i--;j--; k =  k – 1;}
              else
                    {  if  (B(i,j-1) > B(i-1,j))   j--;
                              else              i--;   }
```

4. Dãy con chung dài nhất (10)

4) k = B(m,n); i=m; j=n;
5) while (i>1)& (j>1)
   a) if (X_i = Y_j) { S_k=X_i; i--;j--; k = k – 1;}
      else { if (B(i,j-1) > B(i-1,j)) j--;
             else i--; }

X			2	4	6	X	8	B	2	3	7	A
Y		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X	3	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
7	4	0	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
4	5	0	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3
A	6	0	1	2	2	2	2	2	2	2	3	4

i=10, j = 6, k = 4;

$X_{10} = Y_6$ = "A" $\Rightarrow$ S_4 = "A"; k = 3, i = 9, j = 5

4. Dãy con chung dài nhất (11)

4) k = B(m,n);   i=m;   j=n;
5) while (i>1)& (j>1)
   a) if (X_i = Y_j)   { S_k=X_i; i--;j--; k = k – 1;}
      else   { if (B(i,j-1) > B(i-1,j))   j--;
         else   i--;   }

X			2	4	6	X	8	B	2	3	7
Y		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X	3	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2
7	4	0	1	1	1	2	2	2	2	2	3
4	5	0	1	2	2	2	2	2	2	2	3

i = 9, j= 5

$X_9 \neq Y_5$, B(i-1, j) = 2 < 3 = B(i, j-1) $\Longrightarrow$ j = 5 – 1 = 4

4. Dãy con chung dài nhất (12)

4) k = B(m,n); i=m; j=n;

5) while (i>1)& (j>1)

a) if (X_i = Y_j) { S_k=X_i; i--;j--; k = k – 1;}

else { if (B(i,j-1) > B(i-1,j)) j--;

else i--; }

X			2	4	6	X	8	B	2	3	7
Y		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X	3	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2
7	4	0	1	1	1	2	2	2	2	2	3

i = 9, j= 4

$X_9 = Y_4, \Rightarrow$ S3 = "7"; k = 2, i = 8, j = 3

4. Dãy con chung dài nhất (12)

4) k = B(m,n); i=m; j=n;

5) while (i>1)& (j>1)

a) if (X_i = Y_j) { S_k=X_i; i--;j--; k = k – 1;}

else { if (B(i,j-1) > B(i-1,j)) j--;

else i--; }

X			2	4	6	X	8	B	2	3
Y		0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
M	2	0	1	1	1	1	1	1	1	1
X	3	0	1	1	1	2	2	2	2	2

i = 8, j= 3

$X_8 \neq Y_3$, B(i-1,j) = 2 > 1 = B(i, j-1) $\Rightarrow$ i = 8 – 1 = 7

4. Dãy con chung dài nhất (13)

4) k = B(m,n);   i=m;   j=n;
5) while (i>1)& (j>1)
   a) if (X_i = Y_j)   { S_k=X_i; i--;j--; k = k – 1;}
      else   { if (B(i,j-1) > B(i-1,j))   j--;
                 else   i--;   }

X			2	4	6	X	8	B	2
Y		0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1	1	1	1
M	2	0	1	1	1	1	1	1	1
X	3	0	1	1	1	2	2	2	2

i = 7, j= 3

$X_7 \neq Y_3$, B(i-1,j) = 2 > 1 = B(i, j-1) $\Rightarrow$ i = 7 – 1 = 6

4. Dãy con chung dài nhất (14)

4) k = B(m,n); i=m; j=n;
5) while (i>1)& (j>1)
a) if (X_i = Y_j) { S_k=X_i; i--;j--; k = k – 1;}
else { if (B(i,j-1) > B(i-1,j)) j--;
else i--; }

X			2	4	6	X	8	B
Y		0	1	2	3	4	5	6
	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1	1	1
M	2	0	1	1	1	1	1	1
X	3	0	1	1	1	2	2	2

i = 6, j= 3

$X_6 \neq Y_3$, B(i-1,j) = 2 > 1 = B(i, j-1) $\Rightarrow$ i = 6 – 1 = 5

4. Dãy con chung dài nhất (15)

4) k = B(m,n); i=m; j=n;
5) while (i>1)& (j>1)
   a) if (X_i = Y_j) { S_k=X_i; i--;j--; k = k – 1;}
      else { if (B(i,j-1) > B(i-1,j)) j--;
             else i--; }

X			2	4	6	X	8
Y		0	1	2	3	4	5
	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1	1
M	2	0	1	1	1	1	1
X	3	0	1	1	1	2	2

i = 5, j= 3

$X_5 \neq Y_3$, B(i-1,j) = 2 > 1 = B(i, j-1) $\Rightarrow$ i = 5 – 1 = 4

4. Dãy con chung dài nhất (16)

4) k = B(m,n); i=m; j=n;
5) while (i>1)& (j>1)
a) if (X_i = Y_j) { S_k=X_i; i--;j--; k = k – 1;}
else { if (B(i,j-1) > B(i-1,j)) j--;
else i--; }

X			2	4	6	X
Y		0	1	2	3	4
	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1
M	2	0	1	1	1	1
X	3	0	1	1	1	2

i = 4, j= 3

X_4 = Y_3, $\Rightarrow$ S2 = "X"; k = 1, i = 4-1=3, j = 3-1=2

4. Dãy con chung dài nhất (17)

4) k = B(m,n); i=m; j=n;
5) while (i>1)& (j>1)
a) if (X_i = Y_j) { S_k=X_i; i--;j--; k = k – 1;}
else { if (B(i,j-1) > B(i-1,j)) j--;
else i--; }

X			2	4	6
Y		0	1	2	3
	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1
M	2	0	1	1	1

i = 3, j= 2

$X_3 \neq Y_2$, B(i-1,j) = 1 ≤ 1 = B(i,j-1) $\Rightarrow$ j = 2 – 1 = 1

4. Dãy con chung dài nhất (18)

X			2	4	6
Y		0	1	2	3
	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1

i = 3, j= 1

$X_3 \neq Y_1$, B(i-1,j) = 1 > 0 = B(i,j-1) $\Rightarrow$ i = 3 – 1 = 2

4. Dãy con chung dài nhất (19)

X			2	4
Y		0	1	2
	0	0	0	0
2	1	0	1	1

i = 2, j= 1

$X_2 \neq Y_1$, B(i-1,j) = 1 > 0 = B(i,j-1) $\Rightarrow$ i = 2 – 1 = 1

4. Dãy con chung dài nhất (20)

X			2
Y		0	1
	0	0	0
2	1	0	1

i = 1, j= 1

$X_1 = Y_1$, $\Rightarrow$ S1 = "2"; k = 0, i = 0, j = 0.

STOP!

output S = (2, X, 7, A).

4. Dãy con chung dài nhất (21)

Tính đúng đắn của thuật toán

Mệnh đề

Kí hiệu $S^{(k)} = (S_1, S_2, \ldots, S_k) = LCS\,(X^{(r)}, Y^{(t)})$. Khi đó

(1) Nếu $X_r = Y_t$, thì $S_k = X_r = Y_t$ và $S_{k-l} = LCS(X^{(r-l)}, Y^{(t-1)})$.

(2) Nếu $X_r \neq Y_t$ và $S_k \neq X_r$ thì $S = LCS(X^{(r-1)}, Y)$.

(3) Nếu $X_r \neq Y_t$ và $S_k \neq Y_t$ thì $S = LCS(X, Y^{(t-1)})$.

4. Dãy con chung dài nhất (22)

Tính đúng đắn của thuật toán

Mệnh đề

Kí hiệu $S^{(k)} = (S_1, S_2, \ldots, S_k) = LCS(X^{(r)}, Y^{(t)})$. Khi đó

(1) Nếu $X_r = Y_t$, thì $S_k = X_r = Y_t$ và $S_{k-l} = LCS(X^{(r-l)}, Y^{(t-1)})$.

(2) Nếu $X_r \neq Y_t$ và $S_k \neq X_r$ thì $S = LCS(X^{(r-1)}, Y)$.

(3) Nếu $X_r \neq Y_t$ và $S_k \neq Y_t$ thì $S = LCS(X, Y^{(t-1)})$.

(1) $X_r = Y_t$

Nếu $S_k \neq X_r \Rightarrow$ thêm $X_r = Y_t$ vào $S^{(k)} \Rightarrow S' = S^{(k)} + (X_r) = LCS(X^{(r)}, Y^{(t)})$,

$|S'| = k+1 > |S^{(k)}| = k$. Mâu thuẫn với giả thiết là $S^{(k)} = LCS(X^{(r)}, Y^{(t)})$.

Suy ra $S_k = X_r = Y_t$

Chứng minh: $S^{(k-1)} = LCS(X^{(r-1)}, Y^{(t-1)})$

Giả thiết có $W = LCS(X(^{r-l)}, Y^{(t-l)})$, $|W| > k-1$.

Đặt $W^* = W + (X_r) \Rightarrow W^* = LCS(X^{(r)}, Y(t))$, và $|W^*| > k$.

Mâu thuẫn với giả thiết $S^{(k)} = LCS(X^{(r)}, Y^{(t)})$, $|S^{(k)}| = k$.

4. Dãy con chung dài nhất (23)

Tính đúng đắn của thuật toán

Mệnh đề

Kí hiệu $S^{(k)} = (S_1, S_2, \ldots, S_k) = LCS(X^{(r)}, Y^{(t)})$. Khi đó

(1) Nếu $X_r = Y_t$, thì $S_k = X_r = Y_t$ và $S_{k-l} = LCS(X^{(r-l)}, Y^{(t-1)})$.

(2) Nếu $X_r \neq Y_t$ và $S_k \neq X_r$ thì $S^{(k)} = LCS(X^{(r-1)}, Y)$.

(3) Nếu $X_r \neq Y_t$ và $S_k \neq Y_t$ thì $S^{(k)} = LCS(X, Y^{(t-1)})$.

(2) $X_r \neq Y_t$ và $S_k \neq X_r$

Giả sử có $W = LCS(X^{(r-l)}, Y^{(t)})$, $|W| > k \Rightarrow W = LCS(X^{(r)}, Y^{(t)})$, $|W| > k$

Mâu thuẫn với giả thiết là

$$S^{(k)} = LCS(X^{(r)}, Y^{(t)}),\ |S^{(k)}| = k$$

(3) CM tương tự.

Bài tập

Câu hỏi ôn tập và bài tập tự làm:

1. Dãy con chung dài nhất của 3 dãy X, Y, Z.
2. Một xâu gọi là xâu đối xứng nếu đem đảo ngược xâu đó ta lại nhận được xâu ban đầu. Cho xâu S, hãy tìm số kí tự ít nhất cần thêm vào S để S trở thành xâu đối xứng.Giả thiết các thao tác chèn kí tự tốn kém thời gian không đáng kể.
3. Cho hai xâu A và B. Xâu S được gọi là bao A và B nếu A và B là các xâu con liên tiếp của S. Tìm xâu bao ngắn nhất của A và B.