

Analysis and Design of Algorithms

Lecture 11,12 **Backtracking Method**

Lecturer: Tong Minh Duc

Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán 8 hậu
3. Bài toán ngựa đi tuần
4. Trò chơi Sudoku
5. Liệt kê dãy nhị phân độ dài N
6. Liệt kê các hoán vị
7. Duyệt đồ thị

Nội dung

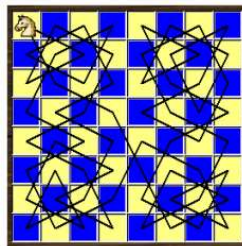
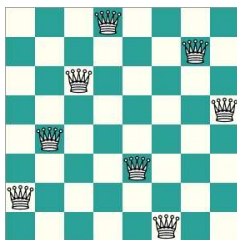
1. **Lược đồ chung**
2. Bài toán 8 hậu
3. Bài toán ngựa đi tuần
4. Trò chơi Sudoku
5. Liệt kê dãy nhị phân độ dài N
6. Liệt kê các hoán vị
7. Duyệt đồ thị

2/22/2023

3

Giới thiệu

- Phương pháp quay lui dùng để giải các bài toán mà lời giải của nó **X** là một tập các phần tử x_1, x_2, \dots, x_n .
- Ví dụ: Bài toán 8 hậu, Mã đi tuần ...



2/22/2023

4

Ý tưởng

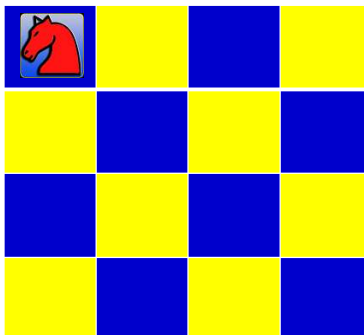
- Ý tưởng chính của phương pháp quay lui là các bước hướng tới lời giải cuối cùng của bài toán dựa trên việc **Thử-và-Sai**.
- Tại mỗi bước:
 - Nếu có 1 lựa chọn được chấp nhận thì ghi nhận lại lựa chọn này và tiến hành các bước thử tiếp theo;
 - Nếu tất cả các lựa chọn không được chấp nhận thì trở lại bước trước, xóa bỏ sự ghi nhận của ứng viên và chọn lựa ứng viên tiếp theo.

2/22/2023

5

Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))

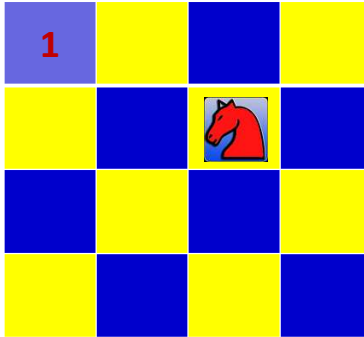


2/22/2023

6

Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))

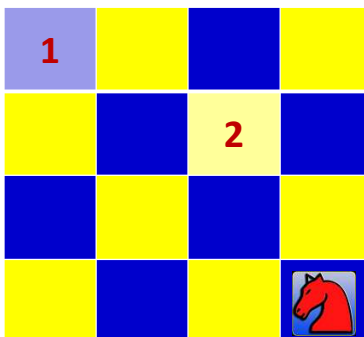


2/22/2023

7

Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))




2/22/2023

8

Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))

1	14	5	
8	11	2	
13	4	9	6
10	7	12	3

2/22/2023

9

Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))


1		5	
8	11	2	
13	4	9	6
10	7	12	3

2/22/2023

10

Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))


1		5	
8	11	2	
	4	9	6
10	7	12	3

2/22/2023

11

Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))

1		5	
8	11	2	
	4	9	6
10	7		3

2/22/2023

12

Ví dụ

- Mã đi tuần trên bàn cờ 4 x 4 (bắt đầu từ Ô(1,1))

1		5	
8	11	2	
	4	9	6
10	7	12	3

2/22/2023

13

Quay lui

- Khi quay lui điểm quan trọng của thuật toán là phải ghi nhớ tại mỗi bước đi để tránh trùng lặp khi quay lui.
- Dễ thấy cấu trúc ngăn xếp khá phù hợp để lưu trữ các thông cần ghi nhớ như đề cập ở trên.
- Đệ qui là kỹ thuật thường được sử dụng trong phương pháp quay lui.

2/22/2023

14

Lược đồ chung

- Lời giải bài toán có thể mô tả dạng 1 vector n chiều $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa mãn một điều kiện nào đó.
- Giả sử đã xây dựng được $i-1$ thành phần $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$, cần xác định thành phần thứ i :
 - Nếu khả năng k nào đó phù hợp \rightarrow lấy $x_i = k$, ghi nhận trạng thái đã dùng của k . Nếu $i = n \rightarrow$ có được 1 lời giải.
 - Nếu không có khả năng nào cho x_i thì quay lui và chọn lại x_{i-1} .

2/22/2023

15

Lược đồ chung ...

```

Try(i)  $\equiv$ 
  for ( j = 1  $\rightarrow$  k)
    If (  $x_i$  chấp nhận được khả năng j)
    {
      Xác định  $x_i$  theo khả năng j;
      Ghi nhận trạng thái mới;
      if( i < n)
        Try(i+1);
      else
        Ghi nhận nghiệm;
        Trả lại trạng thái cũ cho bài toán;
    }
  
```

2/22/2023

Nội dung

1. Lược đồ chung
- 2. Bài toán 8 hậu**
3. Bài toán ngựa đi tuần
4. Trò chơi Sudoku
5. Liệt kê dãy nhị phân độ dài N
6. Liệt kê các hoán vị
7. Duyệt đồ thị

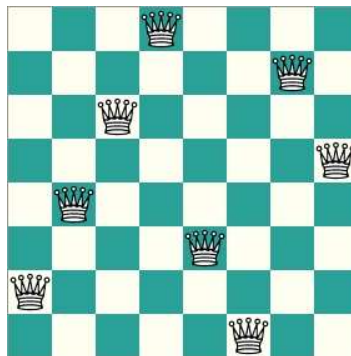
2/22/2023

17

Bài toán

- Hãy tìm cách xếp 8 con hậu trên một bàn cờ vua sao cho không con nào ăn được nhau.

- Ví dụ: Đây là 1 PA



2/22/2023

18

Ý tưởng thuật toán

Ý tưởng (**Thử và Sai**) bài toán 8 hậu

1. Lần lượt xếp các con hậu vào bàn cờ
2. Giả sử đã xếp được i con hậu (từ 1 đến i)
3. Xếp hậu thứ $i+1$
 - a. Nếu tìm được 1 ô hợp lệ (không bị các con hậu trước đó ăn) \rightarrow xếp hậu thứ $i+1$ vào vị trí vừa tìm thấy. Lặp lại bước 3.
 - b. Nếu không tìm được ô hợp lệ \rightarrow tìm vị trí phù hợp khác để đặt lại hậu thứ i .

2/22/2023

19

Phương án (nghiệm) của bài toán

- Nhận xét: Mỗi con hậu phải nằm trên 1 hàng
- Dùng mảng $x[1..8]$ để thể hiện một phương án của bài toán:
 - Chỉ số mảng i : dòng chứa con hậu thứ i (chỉ số dòng là cố định)
 - Giá trị $x[i]$ ($i=1..8$): là cột đặt con hậu thứ i
- Bài toán xếp hậu trở thành: Lần lượt xác định giá trị các thành phần của $x[i]$, $i=1..8$.

2/22/2023

20

Ví dụ

- Phương án nghiệm

$x[1]=4$

$x[2]=7$

$x[3]=3$

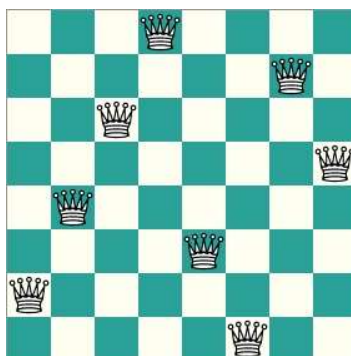
$x[4]=8$

$x[5]=2$

$x[6]=5$

$x[7]=1$

$x[8]=6$



2/22/2023

21

Ứng viên

- Tại bước i

- Cần xác định giá trị k , là chỉ số cột, cho $x[i]$, $k=\{1,\dots,8\}$.

- Nếu ứng viên được chọn là j , nghĩa là $x[i]=j$, khi đó cần “đánh dấu” là cột j đã được chọn để bước sau không chọn lại.

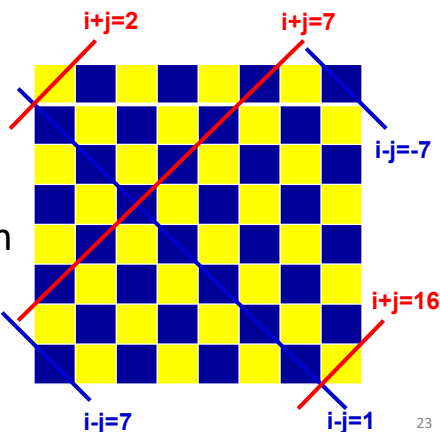
- Tổ chức mảng $a[j]$, $j=1..8$, để ghi nhận cột j đã được chọn hay chưa, $a[j]=1$ là cột j chưa được chọn và $a[j]=0$ là cột j đã được chọn.

2/22/2023

22

Tính hợp lệ

- Hậu ở dòng i , chỉ được đặt vào cột j nếu $i-1$ hầu đã đặt trước đó không “ăn” được hậu ở vị trí $[i,j]$ (dòng i , cột j).
- Trên đường chéo đỏ:
 - Giá trị $i+j$ là hằng số
 - Có giá trị từ **2** đến **16**
- Trên đường chéo xanh:
 - Giá trị $i-j$ là hằng số
 - Có giá trị từ **-7** đến **7**

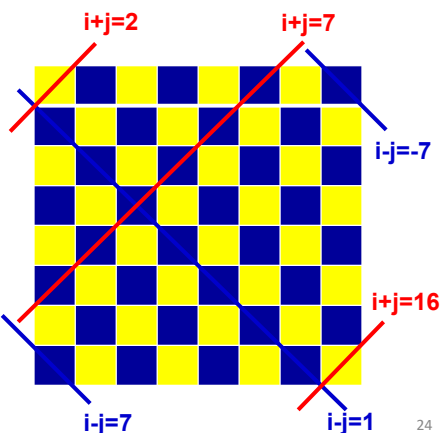


2/22/2023

23

Tính hợp lệ ...

- Mảng $b[k]$, $k=2..16$, nếu $b[k]=1$, được đặt ở đường chéo thuận k .
- Mảng $c[k]$, $k=-7..7$, nếu $c[k]=1$, được đặt ở đường chéo nghịch k .



2/22/2023

24

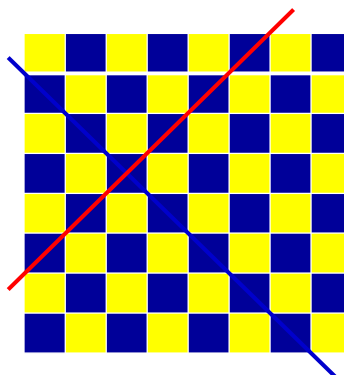
Tính hợp lệ ...

- Như vậy hậu i (dòng i) được đặt vào cột j nếu:

$$b[i+j] = 1$$

và

$$c[i-j] = 1$$



2/22/2023

25

Cài đặt

Khởi tạo

$a[j] = 1$

$b[i+j] = 1$

$c[i-j] = 1$

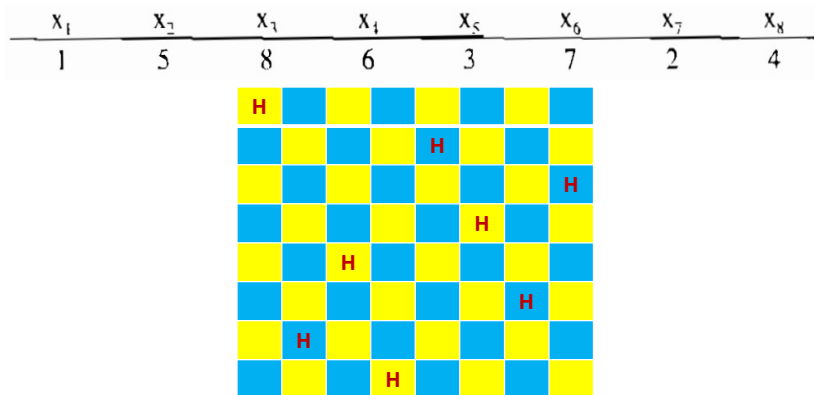
```

Try(i) ≡
{
  for (j = 1; j <= 8; j++)
    if (a[j] && b[i+j] && c[i-j])
    {
      x[i] = j; a[j] = 0;
      b[i+j] = 0; c[i-j] = 0;
      if (i < 8 )
        Try (i+1);
      else
        Xuất(x);
      /* Sau khi in 1 lời giải xong, trả lại
         tình trạng ban đầu còn trống cho hàng
         a[j], đường chéo i+j và đường chéo
         i-j, để tìm lời giải khác */
      a[j] = 1; b[i+j] = 1; c[i-j] = 1;
    }
}
  
```

2/22/2023

Minh họa

- Một lời giải của bài toán với $N=8$



2/22/2023

27

Kết quả

- Độ phức tạp thuật toán: $T(n) = ???$
- Viết hàm $Xuat(x)$: in phương án lựa chọn ra màn hình.
- Code, chạy thử và trình bày kết quả

2/22/2023

28

Nội dung

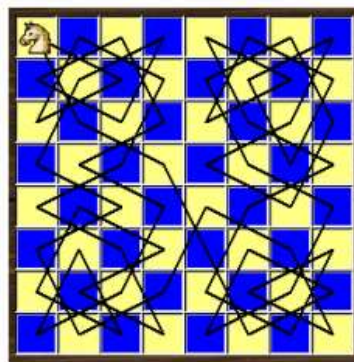
1. Lược đồ chung
2. Bài toán 8 hậu
- 3. Bài toán ngựa đi tuần**
4. Trò chơi Sudoku
5. Liệt kê dãy nhị phân độ dài N
6. Liệt kê các hoán vị
7. Duyệt đồ thị

2/22/2023

29

Bài toán

- Trên bàn cờ vua, con mã ở vị trí (x_0, y_0)
- Hãy chỉ ra hành trình để con mã đi qua tất cả các ô, mỗi ô 1 lần.
- Ví dụ: Đây là 1 PA trên bàn cờ 8x8 khi mã bắt đầu từ ô (1,1)



2/22/2023

30

Ý tưởng thuật toán

Ý tưởng (**Thử và Sai**) bài toán mã đi tuần

1. Đặt ngựa tại vị trí (x_0, y_0) di chuyển ngựa theo luật cờ vua.
2. Giả sử đã đi được $i-1$ bước.
3. Xét nước đi thứ i
 - a. Nếu tìm được 1 nước đi hợp lệ (và ngựa chưa qua lần nào) \rightarrow xếp nước đi thứ i của ngựa vào vị trí vừa tìm thấy. Lặp lại bước 3.
 - b. Nếu không tìm được ô hợp lệ \rightarrow tìm vị trí phù hợp khác để đặt lại bước đi thứ $i-1$ của ngựa.

2/22/2023

31

Phương án nghiệm

- Dùng mảng 2 chiều **$h[x,y]$** ($x=1..N, y=1..N$) với qui ước:
 - $h[x,y] = 0$** là ô (x,y) chưa có ngựa đi qua
 - $h[x,y] = k$** là ngựa đã qua ô (x,y) ở nước thứ k .
- Bài toán trở thành: Xác định giá trị mảng **h** là nước đi của mã trong hành trình đi qua tất cả các ô bắt đầu từ (x_0, y_0) . Khi $N \times N$ ô được đi qua ta có 1 phương án (nghiệm) thể hiện cách đi của mã.

2/22/2023

32

Ví dụ

- Một phương án để mã đi tuần trên bàn cờ 5x5 bắt đầu từ ô (1,1) là

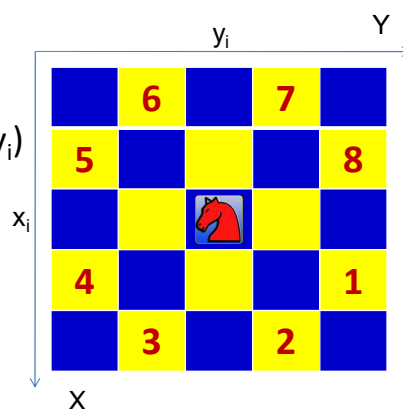
1	18	13	8	3
12	7	2	19	14
17	24	21	4	9
22	11	6	15	20
25	16	23	10	5

2/22/2023

33

Ứng viên

- Tại bước i
 - Vị trí mã đang đứng là (x_i, y_i)
 - Theo luật cờ vua mã có thể di chuyển tới nhiều nhất là 8 ô (hình bên)
 - Tọa độ 8 vị trí so với vị trí hiện tại (x_i, y_i) lần lượt là:
 $(x_i+1, y_i+2), (x_i+2, y_i+1), (x_i+2, y_i-1), (x_i+1, y_i-2)$
 $(x_i-1, y_i-2), (x_i-2, y_i-1), (x_i-2, y_i+1), (x_i-1, y_i+2)$

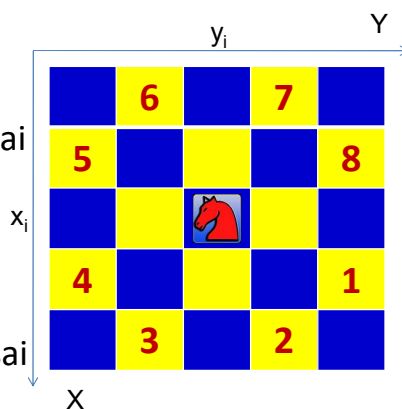


2/22/2023

34

Ứng viên

- Tại bước i
 - Dùng mảng $a[1..8]$ mô tả sai khác tọa độ X so với x_i , theo trên ta có:
 $a=(1,2,2,1,-1,-2,-2,-1)$
 - Dùng mảng $b[1..8]$ mô tả sai khác tọa độ Y so với y_i , theo trên ta có:
 $b=(2,1,-1,-2,-2,-1,1,2)$

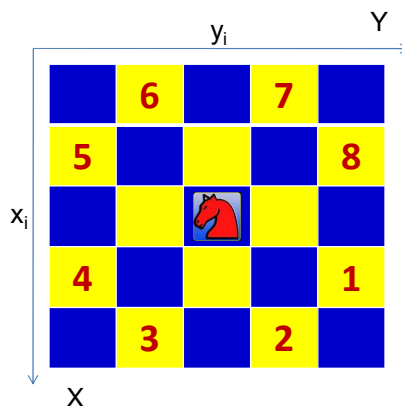


2/22/2023

35

Tính hợp lệ

- Tại bước i
 - Vậy ứng viên của bước $i+1$ được xác định tại tọa độ $(x_i+a[k], y_i+b[k])$ với $k=1..8$
- Tính hợp lệ:
 - Ứng viên tại tọa độ $(x_i+a[k], y_i+b[k])$ với $k=1..8$ được chấp nhận nếu $h[x_i+a[k], y_i+b[k]] = 0$.
 - Ngoài ra $(x_i+a[k], y_i+b[k])$ phải nằm trong bàn cờ



2/22/2023

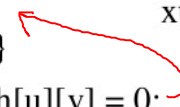
36

Cài đặt

```

Try(i, x, y) ≡
  for(k = 1; k <= 8; k++)
  {
    u = x + a[k];
    v = y + b[k];
    if (1 <= u , v <= n && h[u][v] == 0)
    {
      h[u][v] = i;
      if (i < n*n)
        Try(i+1, u, v);
      else
        xuất_h(); // In ma trận h
    }
    h[u][v] = 0;
  }

```



2/22/2023

37

Minh họa

- Với N=5, mã xuất phát tại (1,1)

1	6	15	10	21
14	9	20	5	16
19	2	7	22	11
8	13	24	17	4
25	18	3	12	23

2/22/2023

38

Minh họa

- Với $N=6$, mã xuất phát tại (2,3)

36	17	6	29	8	11
19	30	1	10	5	28
16	35	18	7	12	9
23	20	31	2	27	4
34	15	22	25	32	13
21	24	33	14	3	26

2/22/2023

39

Kết quả

- Độ phức tạp thuật toán: $T(n) = ???$
- Viết hàm `Xuat_h(x)`: in phương án lựa chọn ra màn hình.
- Code, chạy thử và trình bày kết quả
- Lưu ý: Tùy vào kích thước bàn cờ, bài toán chỉ có lời giải ở một số vị trí bắt đầu (x_0, y_0) nhất định.

2/22/2023

40

Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán 8 hậu
3. Bài toán ngựa đi tuần
- 4. Trò chơi Sudoku**
5. Liệt kê dãy nhị phân độ dài N
6. Liệt kê các hoán vị
7. Duyệt đồ thị

2/22/2023

41

Bài toán

- Trò chơi: Cho hình vuông được chia thành 9x9 ô, trên đó 1 số ô đã có sẵn các số từ 1 đến 9.



- Hãy đặt các số từ 1-9 vào các ô trống sao cho: 1 hàng, 1 cột, 1 vùng 3x3 đều có đủ các số từ 1-9.

2/22/2023

42

Ví dụ

Ban đầu

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

2/22/2023

43

Ý tưởng thuật toán

Ý tưởng (**Thử và Sai**) bài toán Sudoku

1. Cần xếp N ô trống
2. Giả sử đã xếp được đến ô thứ i.
3. Xét ô thứ i+1
 - a. Nếu tìm được 1 giá trị thích hợp -> xếp giá trị đó vào ô thứ i+1 vừa tìm thấy. Lặp lại bước 3.
 - b. Nếu không tìm được 1 giá trị hợp lệ -> tìm giá trị phù hợp khác để đặt lại cho ô thứ i.

2/22/2023

44

Phương án nghiệm

- Dùng mảng 2 chiều **S[x,y]** ($x=1..9$, $y=1..9$) để lưu giá trị số Sudoku:
 - S[x,y]** = 0 là ô (x,y) chưa được xử lý
 - S[x,y]** = k ($k=1..9$) là giá trị số Sudoku.
- Bài toán trở thành: Xác định giá trị mảng **S** là các số Sukodu. Khi tất cả các ô được đặt ta có 1 phương án (nghiệm) thể hiện 1 cách chơi Sukodu.

2/22/2023

45

Ứng viên

- Ứng viên (giá trị) có thể đặt cho ô có tọa độ (x_i, y_i) là giá trị k:

$$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

2/22/2023

46

Tính hợp lệ

- Ứng viên k được đặt vào ô (x_i, y_i) nếu
 - Trên hàng x_i chưa có giá trị k
 - Trên cột y_i chưa có giá trị k
 - Vùng 3×3 chứa (x_i, y_i) chưa có giá trị k

2/22/2023

47

Cài đặt

- Tính hợp lệ, hàm `FEASIBLE($S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x, y, k$)`
`FEASIBLE($S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x, y, k$):`

```

for  $i \leftarrow 1$  to 9
  if  $S[x][i] = k$ 
    return FALSE
for  $i \leftarrow 1$  to 9
  if  $S[i][y] = k$ 
    return FALSE
 $a \leftarrow \lfloor (x-1)/3 \rfloor, b \leftarrow \lfloor (y-1)/3 \rfloor$ 
for  $i \leftarrow 3a+1$  to  $3a+3$ 
  for  $j \leftarrow 3b+1$  to  $3b+3$ 
    if  $S[i][j] = k$ 
      return FALSE
return TRUE

```

2/22/2023

48


```

SUDOKU( $S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x, y$ ):
  if  $y = 10$ 
    if  $x = 9$ 
      print  $S$ 
    else
      SUDOKU( $S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x + 1, 1$ )
  else if  $S[x][y] = \emptyset$ 
    for  $k \leftarrow 1$  to 9
      if FEASIBLE( $S, x, y, k$ )
         $S[x][y] \leftarrow k$ 
        SUDOKU( $S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x, y + 1$ )
         $S[x][y] \leftarrow \emptyset$       [[for next branching]]
  else                                [[ $S[x][y]$  is given]]
    SUDOKU( $S[1, 2, \dots, 9][1, 2, \dots, 9], x, y + 1$ )

```

2/22/2023

49

Minh họa

9	1	3	6	5	2	8	7	4
7	5	8	9	4	1	6	2	3
6	2	4	7	3	8	5	1	9
2	9	7	3	8	5	4	6	1
1	3	6	4	2	9	7	5	8
8	4	5	1	6	7	3	9	2
3	7	1	8	9	6	2	4	5
4	6	2	5	1	3	9	8	7
5	8	9	2	7	4	1	3	6

2/22/2023

50

Minh họa ...

4	8	3	7	5	9	1	6	2
9	2	1	8	4	6	3	5	7
5	7	6	1	3	2	9	8	4
2	5	7	6	9	1	8	4	3
8	1	9	3	7	4	5	2	6
6	3	4	2	8	5	7	9	1
3	4	2	5	1	8	6	7	9
1	6	8	9	2	7	4	3	5
7	9	5	4	6	3	2	1	8

2/22/2023

51

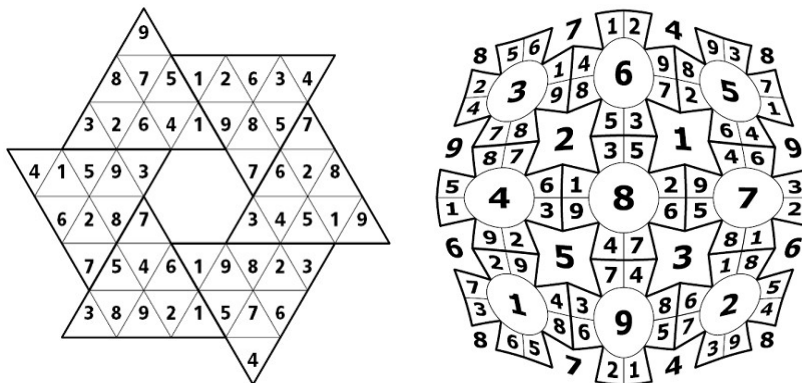
Minh họa ...

4	2	3	6	9	7	8	1	5
6	9	1	5	3	8	4	7	2
5	8	7	4	2	1	6	3	9
3	1	9	8	7	5	2	6	4
2	5	6	1	4	9	3	8	7
7	4	8	3	6	2	5	9	1
9	6	4	2	1	3	7	5	8
1	3	5	7	8	4	9	2	6
8	7	2	9	5	6	1	4	3

2/22/2023

52

Minh họa ...



2/22/2023

53

Bài tập

1. Thực hiện việc đặt 5 con hậu trên bàn cờ, thể hiện kết quả từng bước.
2. Thực hiện các nước đi của con ngựa trên bàn cờ 5x5 bắt đầu từ ô (1,2) thể hiện kết quả từng bước.

2/22/2023

54

Bài tập

3. Chơi trò sudoku (theo thuật toán) với các số đã cho như sau:

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

2/22/2023

55

Bài tập

4. Hoàn thiện cài đặt bài toán 8 hậu
5. Hoàn thiện cài đặt bài toán mã đi tuần.
6. Hoàn thiện cài đặt trò chơi Sukodu.
7. Giải bài toán cái túi theo giải thuật quay lui.

2/22/2023

56