

Analysis and Design of Algorithms

Lecture 9,10 **Dynamic Programming**

Lecturer: Tong Minh Duc

Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán tính số Fibonacci
3. Bài toán cái túi
4. Bài toán dãy con có tổng lớn nhất
5. Bài toán tìm chuỗi con chung dài nhất
6. Đường đi ngắn nhất - TT Floyd
7. Cây nhị phân tìm kiếm tối ưu

Nội dung

1. **Lược đồ chung**
2. Bài toán tính số Fibonacci
3. Bài toán cái túi
4. Bài toán dãy con có tổng lớn nhất
5. Bài toán tìm chuỗi con chung dài nhất
6. Đường đi ngắn nhất - TT Floyd
7. Cây nhị phân tìm kiếm tối ưu

2/22/2023

3

Chia để trị

- Khi chia bài toán thành các bài toán con, trong nhiều trường hợp, các bài toán con khác nhau lại chứa các bài toán con hoàn toàn giống nhau.
- Ví dụ: Tính số **Fibonacci** thứ **n**, **$F(n)$** :
 - $F(0)=0$, $F(1)=1$
 - $F(n)=F(n-2)+F(n-1)$ với $n>1$
 - $F(2)=1$, $F(3)=2$, $F(4)=3$, $F(5)=5$, $F(6)=8$...

2/22/2023

4

Chia để trị ...

- Fib(n): Tiếp cận theo hướng chia để trị

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Function Fib(n)

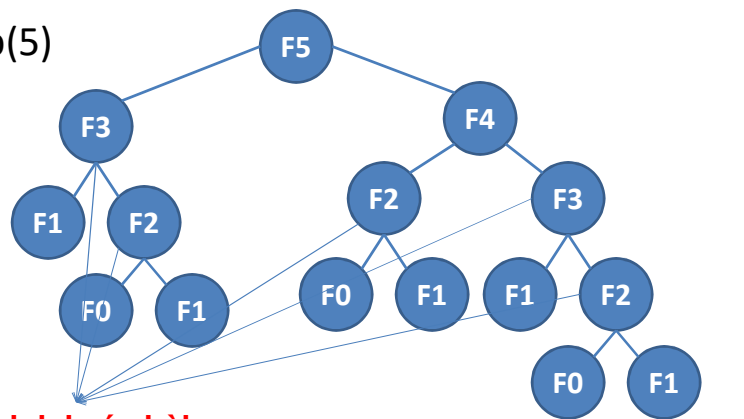
```
{
    If n<2 then
        return n;
    else
        return Fib(n-1) + Fib(n-2);
}
```

2/22/2023

5

Chia để trị ...

- Fib(5)



Tính lại các bài
toán con nhiều lần

Khắc phục?

Quy hoạch động

2/22/2023

6

Qui hoạch động

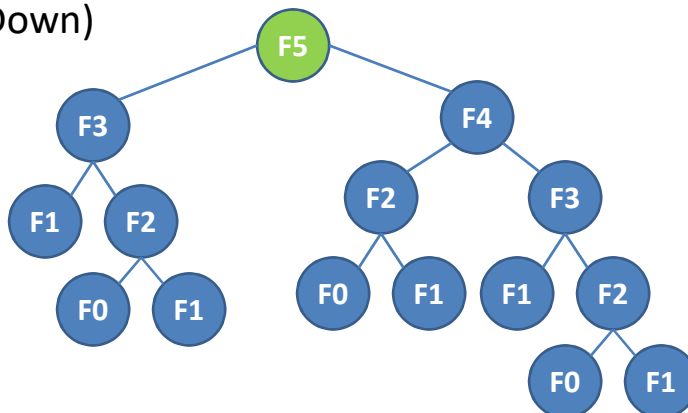
- Là một kĩ thuật thiết kế thuật toán theo kiểu chia bài toán lớn thành các bài toán con, sử dụng lời giải của các bài toán con để tìm lời giải cho bài toán ban đầu.
- Khác với chia để trị, quy hoạch động, thay vì gọi đệ quy, sẽ **tính trước** lời giải của các bài toán con và lưu vào bộ nhớ (thường là một mảng), và sau đó lấy lời giải của bài toán con ở trong mảng đã tính trước để giải bài toán lớn

2/22/2023

7

Qui hoạch động vs Chia để trị

- Chia để trị: Tiếp cận từ trên xuống (Top-Down)

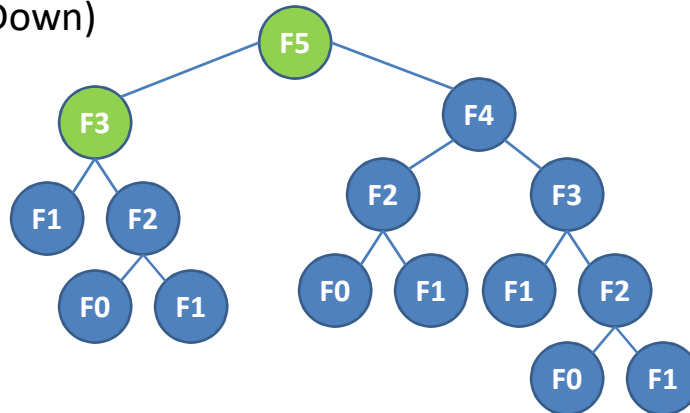


2/22/2023

8

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Chia để trị: Tiếp cận từ trên xuống (Top-Down)

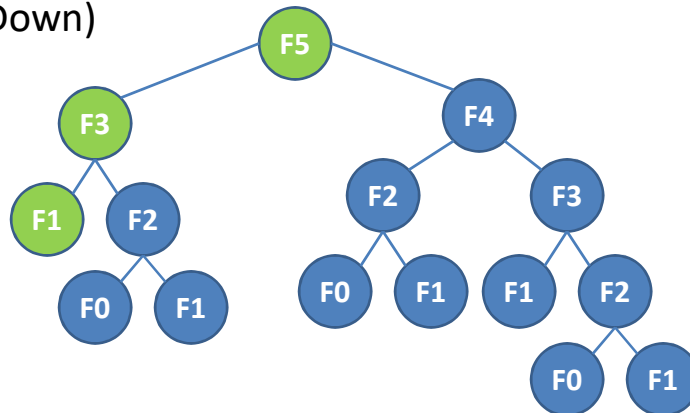


2/22/2023

9

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Chia để trị: Tiếp cận từ trên xuống (Top-Down)

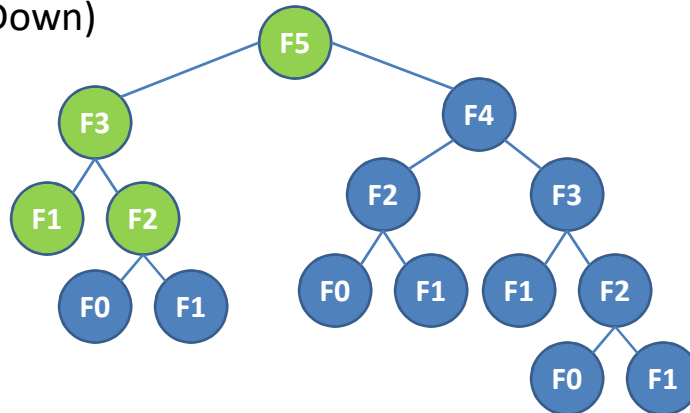


2/22/2023

10

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Chia để trị: Tiếp cận từ trên xuống (Top-Down)

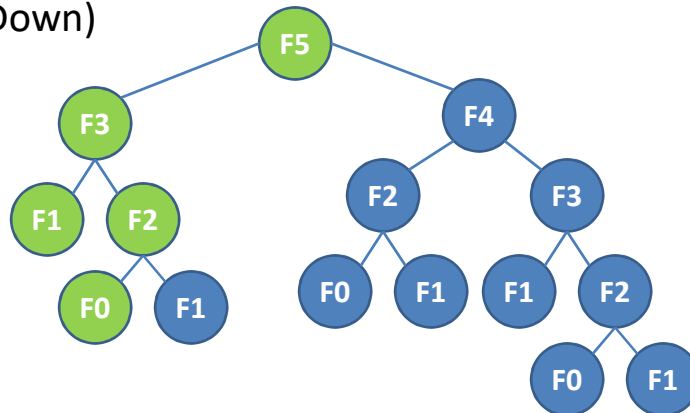


2/22/2023

11

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Chia để trị: Tiếp cận từ trên xuống (Top-Down)

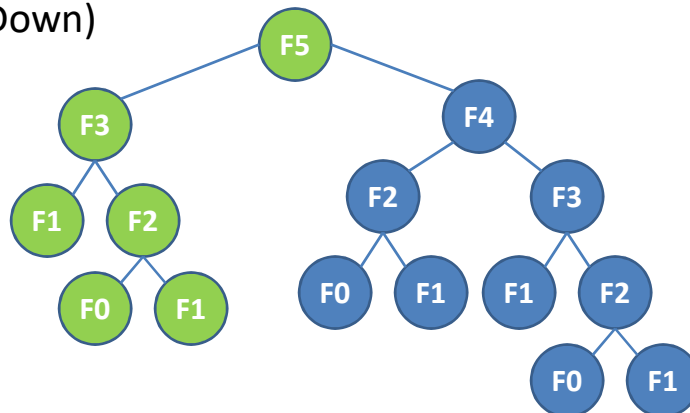


2/22/2023

12

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Chia để trị: Tiếp cận từ trên xuống (Top-Down)

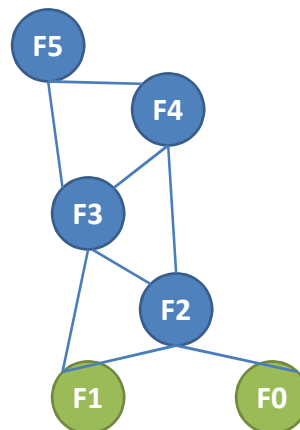


2/22/2023

13

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Quy hoạch động: Tiếp cận từ dưới lên (Bottom-up)

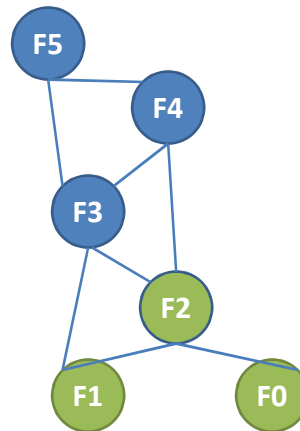


2/22/2023

14

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Quy hoạch động: Tiếp cận từ dưới lên (Bottom-up)

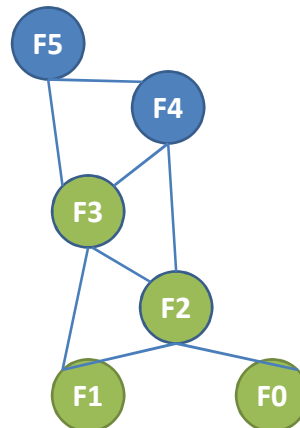


2/22/2023

15

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Quy hoạch động: Tiếp cận từ dưới lên (Bottom-up)

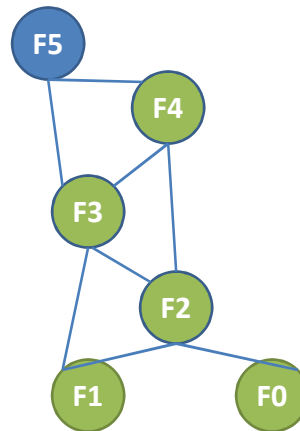


2/22/2023

16

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Quy hoạch động: Tiếp cận từ dưới lên (Bottom-up)

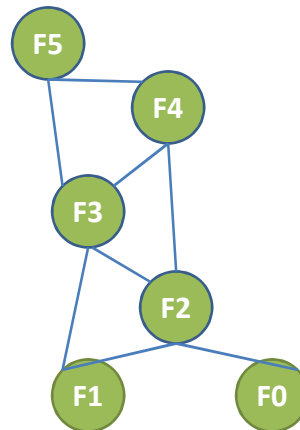


2/22/2023

17

Qui hoặc động vs Chia để trị

- Quy hoạch động: Tiếp cận từ dưới lên (Bottom-up)



2/22/2023

18

Lược đồ chung

- **Phân rã:** Chia bài toán cần giải thành những bài toán con nhỏ hơn đến mức có thể giải trực tiếp được hay không?? -> Nếu được
- **Giải các bài toán con và ghi nhận lời giải:** Lưu trữ lời giải của các bài toán con vào một bảng để sử dụng về sau.
- **Tổng hợp lời giải:**
 - Tổng hợp lời giải các bài toán con kích thước nhỏ hơn thành lời giải bài toán lớn hơn.
 - Tiếp tục cho đến khi thu được lời giải của bài toán xuất phát (là bài toán con có kích thước lớn nhất)

2/22/2023

19

Nội dung

1. Lược đồ chung
2. **Bài toán tính số Fibonacci**
3. Bài toán cái túi
4. Bài toán dãy con có tổng lớn nhất
5. Bài toán tìm xâu con chung dài nhất
6. Đường đi ngắn nhất - TT Floyd
7. Cây nhị phân tìm kiếm tối ưu

2/22/2023

20

Tính số Fibonacci bằng QHD

- Phân rã:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

- Giải bài toán con

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = 1$$

- Tổng hợp

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

2/22/2023

21

Cài đặt

Function DPFib(n)

```
{
  F[0] = 0; F[1] = 1;
  If (n>1)
  {
    For k = 2 to n { F[k] = F[k-1] + F[k-2];}
  }
  return F[n];
}
```

2/22/2023

22

Minh họa

- Tính DPfib(5) = 5

Function DPfib(n)

```

{
    F[0] = 0; F[1]=1;
    If (n>1)
    {
        For k = 2 to n
        {
            F[k] = F[k-1] + F[k-2];
        }
    }
    return F[n];
}

```

k=2: $F(2)=F(1)+F(0)=1+0=1$
 K=3: $F(3)=F(2)+F(1)=1+1=2$
 K=4: $F(4)=F(3)+F(2)=2+1=3$
 K=5: $F(5)=F(4)+F(3)=3+2=5$

2/22/2023 23

Cài đặt khác

Function DPfib2(n)

```

{
    Fk2 = 0; Fk1 = 1; k=2
    While (k<=n)
    {
        tg = Fk1;
        Fk1 = Fk1 + Fk2;
        Fk2 = tg; k = k+1;
    }
    return Fk1;
}

```

2/22/2023 24

Đánh giá

- Thuật toán 1 DPFib(n)
 - Bộ nhớ ??
 - Thời gian ??
- Thuật toán 2 DPFib2(n)
 - Bộ nhớ ??
 - Thời gian ??

```
Function DPFib(n)
{
    F[0] = 0; F[1] = 1;
    If (n>1)
    {
        For k = 2 to n
        { F[k] = F[k-1] + F[k-2]; }
    }
    return F[n];
}
```

```
Function DPFib2(n)
{
    Fk2 = 0; Fk1 = 1; k=2
    While (k<=n)
    {
        tg = Fk1;
        Fk1 = Fk1 + Fk2;
        Fk2 = tg;
        k = k+1;
    }
    return Fk1;
}
```

2/22/2023

25

Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán tính số Fibonacci
- 3. Bài toán cái túi**
4. Bài toán dãy con có tổng lớn nhất
5. Bài toán tìm xâu con chung dài nhất
6. Đường đi ngắn nhất - TT Floyd
7. Cây nhị phân tìm kiếm tối ưu

2/22/2023

26

Bài toán



(Knapsack Problem)

- Có **n** đồ vật, đồ vật i có trọng lượng **w_i** và giá trị **c_i** , $i = 1, 2, \dots, n$.
- Tìm cách chắt các đồ vật này vào cái túi có dung lượng là **b** sao cho tổng trọng lượng của các đồ vật được chắt vào túi là không quá b, đồng thời tổng giá trị của chúng là lớn nhất.

2/22/2023

27

Bài toán



(Knapsack Problem)

- Có **n** đồ vật, đồ vật i có trọng lượng **w_i** và giá trị **c_i** , $i = 1, 2, \dots, n$.
- Tìm cách chắt các đồ vật này vào cái túi có dung lượng là **b**

PP Tham lam



Kết quả nhận
được thường là
không tối ưu

2/22/2023

28

Giải bằng QHD ???

- Có: **n** - Số đồ vật, **b** - trọng lượng túi (nguyên)
- **Phân rã**: Với các giá trị **i** (**0..n**) và **L** (**0..b**) Gọi **MaxV(i,L)** là tổng giá trị lớn nhất có thể chọn trong **i** đồ vật (từ 1 đến i) với trọng lượng tối đa của túi là **L**. Khi đó **MaxV(n,b)** là giá trị lớn nhất mang đi được.
- Giải bài toán con: $\text{MaxV}(0,L) = 0$ với $\forall L$, và $\text{MaxV}(i,0) = 0$ với $\forall i$.

2/22/2023

29

Giải bằng QHD ???

- Tổng hợp:
 - Đã có $\text{MaxV}(i-1,L)$: Giá trị lớn nhất mang đi được với $i-1$ đồ vật khi trọng lượng túi là L .
 - Xét đồ vật thứ i khi trọng lượng túi vẫn là L :
 - Chỉ mang thêm đồ vật thứ i khi giá trị của túi lúc mang $i-1$ đồ vật ở trọng lượng túi là $L-w[i]$ (như thế mới đảm bảo mang thêm được đồ vật i có trọng lượng $w[i]$ khi trọng lượng túi là L) cộng với giá trị của đồ vật thứ i , $c[i]$, lớn hơn khi không mang đồ vật thứ i , $\text{MaxV}(i-1,L)$.
 - Nghĩa là

$$\text{MaxV}(i, L) = \text{Max}\{\text{MaxV}(i-1, L-w[i]) + c[i], \text{MaxV}(i-1, L)\}$$

2/22/2023

30

Cài đặt

Procedure Bag_best

```
{
  For L= 0 to b do MaxV[0,L] =0 ;
  For i= 0 to n do MaxV[i,0] =0 ;
  For i = 1 to n do
    For L = 1 to b do
      MaxV[i,L] = MaxV[ i-1,L];
      If [(L ≥ w[i]) && (MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i] > MaxV[i-1, L])]
        MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i] ;
    return MaxV(n, b) ;
}
```

2/22/2023

31

Minh họa

- Cho 6 đồ vật ($n = 6$), và túi có trọng lượng $b = 19$. Các đồ vật có trọng lượng và giá trị như sau:

i	c	w
1	7	3
2	10	4
3	20	5
4	19	7
5	13	6
6	40	9

2/22/2023

32

Khởi tạo

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c	w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	1	0																		
10	4	2	0																		
20	5	3	0																		
19	7	4	0																		
13	6	5	0																		
40	9	6	0																		

2/22/2023

33

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c	w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	1	0																		
10	4	2	0																		
20	5	3	0																		
19	7	4	0																		
13	6	5	0																		
40	9	6	0																		

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If [(L ≥ w[i]) && (MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i] > MaxV[i-1, L])]

MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/22/2023

34

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c	w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	1	0	0																	
10	4	2	0																		
20	5	3	0																		
19	7	4	0																		
13	6	5	0																		
40	9	6	0																		

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/22/2023

35

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c	w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	1	0	0	0																
10	4	2	0																		
20	5	3	0																		
19	7	4	0																		
13	6	5	0																		
40	9	6	0																		

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/22/2023

36

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0	0	7																
10 4	2	0																			
20 5	3	0																			
19 7	4	0																			
13 6	5	0																			
40 9	6	0																			

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/22/2023

37

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0	0	7	7															
10 4	2	0																			
20 5	3	0																			
19 7	4	0																			
13 6	5	0																			
40 9	6	0																			

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/22/2023

38

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c	w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	1	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10	4	2	0																		
20	5	3	0																		
19	7	4	0																		
13	6	5	0																		
40	9	6	0																		

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1,L-w[i]]+c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/22/2023

39

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c	w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	1	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10	4	2	0	0	7																
20	5	3	0																		
19	7	4	0																		
13	6	5	0																		
40	9	6	0																		

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1,L-w[i]]+c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/22/2023

40

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c	w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	1	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10	4	2	0	0	7	10															
20	5	3	0																		
19	7	4	0																		
13	6	5	0																		
40	9	6	0																		

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1,L-w[i]]+c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/22/2023

41

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c	w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	1	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10	4	2	0	0	7	10	10														
20	5	3	0																		
19	7	4	0																		
13	6	5	0																		
40	9	6	0																		

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1,L-w[i]]+c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/22/2023

42

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c	w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	1	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10	4	2	0	0	7	10	10	10													
20	5	3	0																		
19	7	4	0																		
13	6	5	0																		
40	9	6	0																		

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1,L-w[i]]+c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/22/2023

43

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c	w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	1	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10	4	2	0	0	7	10	10	10	?												
20	5	3	0																		
19	7	4	0																		
13	6	5	0																		
40	9	6	0																		

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1,L-w[i]]+c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/22/2023

44

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c	w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	1	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10	4	2	0	0	7	10	10	10	17												
20	5	3	0																		
19	7	4	0																		
13	6	5	0																		
40	9	6	0																		

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

MaxV[i, L] = MaxV[i-1, L-w[i]] + c[i];

2/22/2023

45

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c	w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	1	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10	4	2	0	0	7	10	10	10	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17
20	5	3	0																		
19	7	4	0																		
13	6	5	0																		
40	9	6	0																		

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If $[(L \geq w[i]) \ \&\& \ (\text{MaxV}[i-1, L-w[i]] + c[i] > \text{MaxV}[i-1, L])]$

MaxV[i, L] = MaxV[i-1, L-w[i]] + c[i];

2/22/2023

46

Lặp ...

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10 4	2	0	0	0	7	10	10	10	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17
20 5	3	0	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	30	37	37	37	37	37	37	37	37
19 7	4	0	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	30	39	39	39	46	49	49	49	56
13 6	5	0	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	33	39	39	40	46	49	49	52	56
40 9	6	0	0	0	7	10	20	20	20	27	40	40	40	40	50	60	60	60	67	70	70

MaxV[i,L] = MaxV[i-1,L];

If [(L ≥ w[i]) && (MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i] > MaxV[i-1, L])]

MaxV[i, L] = MaxV[i-1,L-w[i]]+c[i];

2/22/2023

47

Kết thúc

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 3	1	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10 4	2	0	0	0	7	10	10	10	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17
20 5	3	0	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	30	37	37	37	37	37	37	37	37
19 7	4	0	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	30	39	39	39	46	49	49	49	56
13 6	5	0	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	33	39	39	40	46	49	49	52	56
40 9	6	0	0	0	7	10	20	20	20	27	40	40	40	40	50	60	60	60	67	70	70

Những vật được mang đi:

Tổng trọng lượng vật:

Tổng giá trị:

2/22/2023

48

Kết thúc

- $n = 6, b = 19$

	i/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c	w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	1	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10	4	2	0	0	7	10	10	10	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17
20	5	3	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	30	37	37	37	37	37	37	37	37
19	7	4	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	30	39	39	39	46	49	49	49	56
13	6	5	0	0	7	10	20	20	20	27	30	30	33	39	39	40	46	49	49	52	56
40	9	6	0	0	7	10	20	20	20	27	40	40	40	50	60	60	60	67	70	70	70

Những vật được mang đi: **{2, 3, 6}**

Tổng trọng lượng vật: **18**

Tổng giá trị: **70**

2/22/2023

49

Nội dung

1. Lược đồ chung
2. Bài toán tính số Fibonacci
3. Bài toán cái túi
- 4. Bài toán dãy con có tổng lớn nhất**
5. Bài toán tìm chuỗi con chung dài nhất
6. Đường đi ngắn nhất - TT Floyd
7. Cây nhị phân tìm kiếm tối ưu

2/22/2023

50

Bài toán

- Cho mảng N số: $A[1..N]$
- Hãy tìm dãy con các phần tử liên tiếp của A có tổng lớn nhất.
- Ví dụ: 13, -15, 2, 18, 4, 8, 0, -5, -8
Thì dãy con cần tìm là $A(3)-A(6)$
13, -15, **2, 18, 4, 8**, 0, -5, -8
(Đã giải quyết theo phương pháp chia để trị)

2/22/2023

51

Tiếp cận qui hoặ động

- Phân rã:
 - Gọi $\text{MaxS}[i]$ là tổng lớn nhất của dãy con liên tiếp có i phần tử $a[1]..a[i]$.
 - Khi đó $\text{MaxS}[N]$ là giá trị lớn nhất của dãy con liên tiếp cần tìm
- Bài toán cơ sở:
 - Với $i = 1$ ta có $\text{MaxS}[i] = a[i]$

2/22/2023

52

Tổng hợp

- Giả sử $i > 1$ và $\text{MaxS}[k]$ là đã biết với $k = 1, \dots, i-1$. Ta cần tính $\text{MaxS}[i]$ là tổng của dãy con liên tiếp lớn nhất của dãy $a[1], \dots, a[i-1], a[i]$.
- Các dãy con liên tiếp của dãy này có thể là một trong hai trường hợp:
 - Các dãy con liên tiếp có chứa $a[i]$
 - Các dãy con liên tiếp không chứa $a[i]$

2/22/2023

53

Tổng hợp ...

- Gọi **MaxE[i]** là tổng lớn nhất của các dãy con liên tiếp của dãy $a[1]..a[i]$ chứa chính $a[i]$.
- Tổng lớn nhất của các dãy con liên tiếp của dãy $a[1]..a[i]$ không chứa $a[i]$ chính là tổng lớn nhất của các dãy con của dãy $a[1]..a[i-1]$, nghĩa là $\text{MaxS}[i-1]$.



$$\text{MaxS}[i] = \max\{\text{MaxS}[i-1], \text{MaxE}[i]\}$$

2/22/2023

54

Tính MaxE[i]

- Để tính MaxE[i], $i = 1, 2, \dots, n$, ta cũng có thể sử dụng công thức đệ quy như sau:
 - Với $i=1$ thì $\text{MaxE}[i] = a[1]$;
 - Với $i > 1$, Gọi C là dãy con kế tiếp lớn nhất của dãy $a[1]..a[i]$ có chứa $a[i]$. Có hai khả năng:
 - Nếu C chứa $a[i-1]$ thì tổng lớn nhất là $\text{MaxE}[i-1] + a[i]$;
 - Nếu C không chứa $a[i-1]$ thì C chỉ gồm $a[i]$ và tổng lớn nhất là $a[i]$

 **$\text{MaxE}[i] = \max \{a[i], \text{MaxE}[i-1] + a[i]\}, i > 1$**

2/22/2023

55

Cài đặt

- s - chỉ số đầu
- e - chỉ số cuối
- s1 - chỉ số đầu tạm

```

Procedu subMax
{
  MaxS=a[1]; MaxE= a[1];
  s=1; e=1; s1=1;
  For i = 2 to n do
  {
    if MaxE>0 then MaxE=MaxE+a[i]
    else {MaxE = a[i]; s1=i; }
    if (MaxE > MaxS) then {
      MaxS = MaxE;
      e=i; s=s1; }
  }
}

```

2/22/2023

56

Minh họa

- Dãy $a[1..9] = 13, -15, 2, 18, 4, 8, 0, -5, -8$

i	a[i]	MaxE	sI	MaxS	s	e	Dãy con tổng lớn nhất
1	13	13	1	13	1	1	13,
2	-15	-2	1	13	1	1	13,
3	2	2	3	13	1	1	13,
4	18	20	3	20	3	4	2, 18,
5	4	24	3	24	3	5	2, 18, 4,
6	8	32	3	32	3	6	2, 18, 4, 8,
7	0	32	3	32	3	6	2, 18, 4, 8,
8	-5	27	3	32	3	6	2, 18, 4, 8,
9	-8	19	3	32	3	6	2, 18, 4, 8,

2/22/2023

57

Bài tập

- Thực hiện từng bước bài toán cái túi với dữ liệu:
 - Trọng lượng túi $b=10$
 - Số lượng đồ vật $n=6$
 - Các vật $w\{6, 3, 3, 7, 4, 3\}$
giá trị $v\{12, 1, 8, 1, 10, 3\}$
- Cho dãy $A = \{-98, 54, 67, 65, -879, 78, 65, 21, -6, 67\}$, tìm dãy con có tổng lớn nhất theo phương pháp qui hoạch động.

2/22/2023

58

Bài tập

3. Cài đặt thuật toán giải bài toán cái túi theo phương pháp qui hoạch động. Đánh giá độ phức tạp bằng thực nghiệm và so sánh với lý thuyết.
4. Cài đặt thuật toán tìm dãy con lớn nhất theo phương pháp qui hoạch động. Đánh giá độ phức tạp bằng thực nghiệm và so sánh với lý thuyết.