Large Eddy Simulation

Mohammad Reza Daneshvar Garmroodi

Dr. Ehsan Amani

Subject
Date

« جلسه سوم »

مقدمه‌ای از تنسورها را گفتیم:

a scalar

$\hat{a} = a_i \hat{e}_i = \sum_{i=1}^{3} a_{(i)} \hat{e}_{(i)}$ برداری

$\underline{a} = a_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{(i)(j)} \hat{e}_{(i)} \hat{e}_{(j)}$

$\underline{I} = \delta_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j$ ، $\delta_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \longrightarrow \underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

مثال

$\hat{a} \cdot \hat{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \cdot b_{mn} \hat{e}_m \hat{e}_n = a_{ij} b_{mn} \hat{e}_i \hat{e}_j \cdot \hat{e}_m \hat{e}_n = a_{ij} b_{mn} \hat{e}_i \delta_{jm} \hat{e}_n = a_{ij} b_{jn} \hat{e}_i \hat{e}_n$

suffix notation

همان بالایی است با این تفاوت که e ها را هم نمی‌نگاریم:

$a_{ij} b_{jl} = a_{ij} b_{jl} \hat{e}_i \hat{e}_l$

ضرب خارجی

$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k$

$\hat{a} \times \hat{b} = a_i \hat{e}_i \times b_j \hat{e}_j = a_i b_j \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k$

Subject
Date

double dot production

$\hat{a} \cancel{:} \hat{b}$

برای دو بردار امکان ندارد، چون حداقل باید هر طرف مرتبه ی دو باشند.

$$\underline{a} : \underline{b} = a_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j : b_{kl} \hat{e}_k \hat{e}_l = a_{ij} b_{kl} \delta_{jk} \delta_{il} = a_{lj} b_{jl}$$

diadic

$$\hat{a}\hat{b} = a_i \hat{e}_i b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \hat{e}_j$$

$$\underline{a}\,\underline{b} = a_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j b_{kl} \hat{e}_k \hat{e}_l = a_{ij} b_{kl} \hat{e}_i \hat{e}_j \hat{e}_k \hat{e}_l$$

Tensor calculus

$$\hat{\nabla} = \frac{\hat{e}_i}{h_i} \frac{\partial \bigcirc}{\partial x_i}$$

$h_i \to$ Scale Factor

* در مختصات کارتزین $h_i = 1$ است.

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{a} = \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot a_j \hat{e}_j = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} + \hat{e}_i a_j \cdot \cancel{\frac{\partial \hat{e}_j}{\partial x_i}} = \delta_{ij} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

$$\rightarrow \hat{\nabla} \cdot \hat{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

Transpos

$$\underline{a} = a_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \longrightarrow \underline{a}^T = a_{ji} \hat{e}_i \hat{e}_j$$

Subject

Date

Contraction or Trace

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \underline{a} : \underline{I} = Tr(a)$$

Some properties of Tensors

Symetric $\longrightarrow$ $\underline{a} = \underline{a}^T$

antisymetric $\longrightarrow$ $-\underline{a}^T = \underline{a}$

* هر تانسور مرتبه‌ی ۲ را به صورت جمع دو تانسور متقارن و پادمتقارن می‌توان نوشت.

$$\underline{a} = \underline{a}^s + \underline{a}^A \quad , \quad \underline{a}^s = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{a}^T) \quad , \quad \underline{a}^A = \frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{a}^T)$$

یا $\underline{a} = \frac{1}{3} Tr(a) \underline{I} + a^{s'} + a^T \quad , \quad a^{s'} = a^s - \frac{1}{3} Tr(a) \underline{I}$

خصوصیتی که ماتریس $a^{s'}$ دارا است که Tr آن برابر صفر است.

$$Tr(a^{s'}) = 0$$

P4PCO

Subject

Date

II.2 countinuty equation

Assuming continuum is derived as:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \hat{\nabla}\cdot(\rho \hat{U}) = 0 \quad \text{L} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i) = 0$$

For constant density flows (ρ=const), the velocity field is divergence free:

$$\hat{\nabla}\cdot\hat{U} = 0 \quad \text{L} \quad \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

II.3 momentum equation

In an inertial frame, the momentum equation is:

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -\hat{\nabla} p + \hat{\nabla}\cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \hat{g} \qquad (2.8)$$

viscous Term Tensor

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = \rho\left[\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \hat{U}\cdot\nabla\hat{U}\right]$$

with the aid of countinuty equation, the Left handside of Eq can be written in conservative form.

$$\rho\frac{D\hat{U}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\hat{U}) + \nabla\cdot(\rho\hat{U}\hat{U}) \qquad (2.9)$$

for incompresible flow $\longrightarrow \vec{\nabla}\cdot(\underset{①}{\vec{U}\vec{U}}) = (\underset{②}{\vec{U}}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}$

با نوشتن به‌راحتی ثابت می‌شود:

$$① \rightarrow \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot(U_j U_k \hat{e}_j \hat{e}_k) = \frac{\partial}{\partial x_j}(U_j U_k)\hat{e}_k = U_j \frac{\partial}{\partial x_j} U_k \checkmark$$

$$② \rightarrow (U_i \hat{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\hat{e}_j) U_k \hat{e}_k = U_j \frac{\partial}{\partial x_j} U_k e_k \checkmark$$

Subject
Date

By assuming a Newtonian fluid

for compresible flow

$$\underline{\tau} = 2\mu \underline{S} - \frac{2}{3}\mu(\hat{\nabla}\cdot\hat{U})\underline{I}$$

where $\underline{S}$ is the symetric part of $\hat{\nabla}\hat{U}$

$$\underline{S} = \frac{1}{2}\left[\hat{\nabla}\hat{U} + (\hat{\nabla}\hat{U})^T\right]$$

Rate of strain Tensor

the Tensor $\underline{\Omega}$, $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$ is called the rate of rotation Tensor and is used to measure the antisymetric part of the velocity gradient:

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2}\left[(\hat{\nabla}\hat{U})^T - (\hat{\nabla}\hat{U})\right]$$

It means that $\underline{\Omega}$ is antisymetric part of $(\nabla U)^T$, we defined it in this way, because by using this defination $\underline{\Omega}$ means the rotation Tensor of fluid flow.

$$\rightarrow (\nabla U) = \underline{S} - \underline{\Omega} \quad \text{or} \quad (\nabla U)^T = \underline{S} + \underline{\Omega}$$

✓**Exercise:** show that for incompresible flow with constant properties, $\nu = \frac{\mu}{\rho} = \text{const}$, Eq (2.8) can be simplified to:

$$\frac{D\hat{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\hat{U} \quad \text{where } p = P + \rho\psi \qquad (2.15)$$

ثابت

PAPCO

Subject
Date

II.4 Mechanical energy equation

the mechanical energy (per unit mass) of the flow is defined by:

$$E = \frac{1}{2}\hat{U}\cdot\hat{U} \qquad (2.16)$$

the Transport equation of E is derived by manipulation of the dot product of $\hat{U}$ and momentum equation.

$$\hat{U}\cdot \longrightarrow \hat{U}\cdot\frac{D\hat{U}}{Dt} = \left[\hat{U}\cdot\frac{\partial\hat{U}}{\partial t} + \hat{U}\cdot(\hat{U}\cdot\hat{\nabla})\hat{U}\right] = -\frac{\hat{U}\cdot\hat{\nabla}p}{\rho} + \frac{1}{\rho}\hat{U}\cdot(\hat{\nabla}\cdot\underline{\tau})$$

* حال معادله‌ها بالا را باید ساده کنیم:

- $\hat{U}\cdot\frac{D\hat{U}}{Dt} = U_i\hat{e}_i\cdot\frac{\partial U_j}{\partial t}\hat{e}_j = U_i\delta_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial t} = U_i\frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(U_iU_i)$ (B)

- $\hat{U}\cdot\cancel{(\hat{U}\cdot\hat{\nabla})}\hat{U} \xrightarrow{D.77}$

- $-\frac{\hat{U}\cdot\hat{\nabla}p}{\rho} \xrightarrow{D.71} -\nabla\cdot\frac{pU}{\rho} + \frac{p}{\rho}\underbrace{(\cancel{\nabla}\cdot U)}_{0} = -\hat{\nabla}\cdot\left(\frac{p\hat{U}}{\rho}\right)$ (A)

- $\frac{1}{\rho}\hat{U}\cdot\hat{\nabla}\cdot\underline{\tau} \xrightarrow{D.82} \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\tau\cdot U) - \frac{1}{\rho}\nabla U:\tau$ (C)

فرم نهایی $\longrightarrow$ $$\frac{DE}{Dt} + \nabla\cdot\left(\frac{p\hat{U}}{\rho} - \frac{\underline{\tau}\cdot\hat{U}}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho}\underline{\tau}:\hat{\nabla}\hat{U}$$

substituting $\underline{\tau} = 2\mu\underline{S}$, $\hat{\nabla}\hat{U} = \underline{S} - \underline{\Omega}$

Subject
Date

Note: double dot product of a symetric Tensor with an antisymetric Tensor equal zero (HW #7), one can show that: ✓

$$\rightarrow \underbrace{\frac{DE}{Dt}}_{\frac{\partial E}{\partial t}+\hat{\nabla}\cdot(E\hat{U})} + \nabla\cdot\left(\frac{P\hat{U}}{\rho} - 2\nu \underline{S}\cdot\hat{U}\right) = -2\nu\,\underline{S}:\underline{S} = -2\nu S_{ij}S_{ji} = -2\nu S_{ij}S_{ij} \qquad (2.17)$$

نکته در معادلات، جملات مربوط به $\nabla\cdot(x)$، x مربوط به جملات مرزی است به جای مرز تغییر با قضیه‌ی دیورژانس:

Divergence theoriom

$$\oint_S A\cdot ds = \int_{\forall} \hat{\nabla}\cdot\hat{A}\,d\forall$$

بنابراین این جملات مربوط به شار است که می‌توان آن‌ها را به حجم نیز تبدیل کرد طبق رابطه‌ی بالا.

* حال می‌خواهیم تغییرات انرژی یک المان به حجم $\forall$ را به دست بیاوریم. برای اینکار از رابطه‌ی 2.17 نسبت به حجم $\forall$ انتگرال می‌گیریم.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall} E\,d\forall + \underbrace{\int_S E\hat{U}\cdot\hat{ds}}_{\text{By convection}} + \underbrace{\int_S\left(\frac{P\hat{U}}{\rho} - 2\nu\underline{S}\cdot\hat{U}\right)\cdot\hat{ds}}_{\text{By work}} = \underbrace{-\int_{\forall} 2\nu S_{ij}S_{ij}\,d\forall}_{\text{a sink Term indicate the dissipation of Mechanical energy by viscosity}}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

« جلسه‌ی پنجم »

مثالی به کلی بررسی!

$$\hat{\nabla}\cdot(\hat{\nabla}\hat{u})^T = \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\left(\hat{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_k \hat{e}_k\right)^T$$

$$\rightarrow \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\left(\hat{e}_j \frac{\partial}{\partial x_k} u_j \hat{e}_k\right) = \hat{e}_i\cdot\hat{e}_j\hat{e}_k \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} u_j = \delta_{ij}\hat{e}_k \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} u_j$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\hat{e}_k$$

II.5) pressure poisson's pressure

* به کمک معادله‌ی پیوستگی و مومنتوم، یک معادله برای فشار بدست می‌آید در نتیجه از معادله‌ی پواسون فشار استفاده می‌کنند و به معادله‌ی پیوستگی کاری ندارند.

* برای محاسبه‌ی این معادله، برای حالتی که جریان تراکم ناپذیر است، از طرفین معادله‌ی مومنتوم دیورژانس می‌گیریم:

$$\left(\frac{D}{Dt} - \nu\nabla^2\right)(\hat{\nabla}\cdot\hat{u}) = -\frac{1}{\rho}\nabla^2 p - \hat{\nabla}\hat{u} : \hat{\nabla}\hat{u}$$

Exercise drive the above equation using cartesian Tensor suffix notation or directly by Eq (D.109.2), (D,103), (D.82), (D.109.1)

therefore:

$$\nabla^2 p = -\rho\hat{\nabla}\hat{u} : \hat{\nabla}\hat{u} \quad \text{or} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_j} = -\rho \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (2.21)$$

$$\text{or } \nabla^2 p = -\rho\hat{\nabla}\cdot(\hat{\nabla}\cdot(\hat{u}\hat{u}))$$

از اسلاید

$$(u\cdot\nabla)u = \nabla\cdot(uu) \; ?$$

incompressible

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i u_k) e_k \longrightarrow u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

PAPCO

Subject
Date

II.6) the non-linearity and chaos

chaos behavior: the acute sensivity of a system to initial condition, boundary condition or state of a system. this behavior is due to the presence of non-linear terms in the governing equation.

* در جریان‌های آشفته، با توجه به اینکه شرایط مرزی ما noise دارد، وجود جملات غیرخطی باعث می‌شود که این اغتشاشات کوچک تأثیر بسزایی در جواب نهایی داشته باشند و دائماً دچار نوسان شود.

* در آزمایش رینولدز chapter 2، با افزایش سرعت سیلندر، جریان bio fercate می‌شود و به تدریج با افزایش سرعت، فاصله‌ی بین لایه‌ها کمتر شده و تا به جایی می‌رسد که جریان آشفته خواهد شد و چون فاصله‌ی بین لایه‌ها کم است، جریان دارای نوسان خواهد بود.

Turbulence: in this case, the flow is unpredictable in the sense that a minute (unpredicted) perturbation in initial condition (boundary condition state) of the flow, which are always present and unavoidable, prodies a large change in the subsequent motion.

* مثال ۱.۳، کتاب pope آمده و نشان داده که معادله‌ی سه مجهولی، با تغییر پارامترها بررسی کرده و دیده که با تغییر کوچک در معادلات غیرخطی تأثیر دارد. (مطالعه شود)

متوسط‌گیری

مثلاً برای محاسبه‌ی سرعت در هر زمان، آزمایش را چندین بار انجام داده و سپس مقدار متوسط آن را بدست می‌آوریم:

Subject
Date

$$\langle U \rangle = \lim \frac{1}{N} \sum U^{(i)}(x_0,t)$$

Mathematical expectation

امید ریاضی

- جریان های stationary به این معنا هستند که در زمان های مختلف، متوسط سرعت ها در هر نقطه برابر خواهد ماند. جریان Homogenes هم به این معناست که متوسط سرعت ها در نقاط مختلف هر زمان دلخواه باهم برابر باشند.

$$\bar{U} = \langle U(x_0,t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} U(x_0,t')\,dt' \quad \Big| \quad \text{for stationary} \quad \lim_{T\to\infty} \bar{U} = \langle U \rangle$$

* اگر جریان stationary باشد می توانیم برای هر نقطه، متوسط گیری کنیم در زمان های مختلف تا متوسط را در آن نقطه بدست بیاوریم به جای اینکه آزمایش را چندین بار انجام دهیم.

$$\langle U(x_0,t) \rangle_L = \frac{1}{L^3}\iiint U(x',t)\,dx'_1\,dx'_2\,dx'_3 \quad \Big| \quad \text{for homogenes} \quad \lim_{L\to\infty} \langle U \rangle_L = \langle U \rangle$$

* اگر جریان homogenes باشد هم برای متوسط گیری در یک زمان مشخص، متوسط سرعت نقاط مختلف را بدست می آوریم.

* نکته مهم * برای مثال در یک لوله که مدت زیادی است جریان دارد، در دو جهت ما جریان همگن داریم، یکی در جهت عرضی کانال (در دو جهت گفتیم) یکی هم در طول کانال که جریان Fully-Developed است. جریان stationary هم هست.

PAPCO

III Mean flow equation

III.1 Reynolds averaging

$$\hat{U}(\hat{x},t) = \langle \hat{U}(\hat{x},t) \rangle + \hat{u}(\hat{x},t)$$

برخی خواص مهم متوسط‌گیری‌ها

$$\langle Q+R \rangle = \langle Q \rangle + \langle R \rangle \,, \quad \langle \langle Q \rangle \rangle = \langle Q \rangle$$

$$\langle \langle Q \rangle \langle R \rangle \rangle = \langle Q \rangle \langle R \rangle \,, \quad \langle \langle Q \rangle R \rangle = \langle Q \rangle \langle R \rangle$$

* حال از طرفین معادلات متوسط‌گیری می‌کنیم.

$$\hat{\nabla}\cdot\hat{U} = 0 \longrightarrow \langle \hat{\nabla}\cdot\hat{U} \rangle = 0 \longrightarrow \left\langle \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right\rangle = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}\langle U_i \rangle = 0$$

$$\longrightarrow \hat{\nabla}\cdot\langle \hat{U} \rangle = 0 \qquad (3.2)$$

For a differentiable random field, U, the expectation operator and Temporal or spatial differentation operators commut.

* معادله‌ی حاکم بر نوسانات جریان: با کم کردن معادله‌ی اصلی از معادله‌ی متوسط‌گیری شده‌ی 3.2 بدست می‌آید:

$$\hat{\nabla}\cdot\hat{U} - \hat{\nabla}\cdot\langle \hat{U} \rangle = \nabla\cdot(U - \langle U \rangle) = \nabla\cdot u = 0 \qquad (3.3)$$

Subject
Date

* حال متوسط‌گیری را روی مومنتوم انجام می‌دهیم:

$$\left\langle \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 U_i \right\rangle$$

* حال هر جمله را ساده می‌کنیم. با توجه به پیوستگی داریم:

از پیوستگی

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(U_i U_j) \quad , \; U_i = \langle U_i \rangle + u_i \; , \; U_j = \langle U_j \rangle + u_j$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j}\langle U_i U_j \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j}\langle \langle U_i\rangle\langle U_j\rangle + \cancel{u_i\langle U_j\rangle} + \cancel{u_j\langle U_i\rangle} + u_i u_j \rangle$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j}\langle U_i U_j \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\langle U_i\rangle\langle U_j\rangle\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_i u_j\rangle = \langle U_j\rangle \frac{\partial \langle U_i\rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_i u_j\rangle$$

نهایی

$$\rightarrow \frac{\partial \langle U_i\rangle}{\partial t} + \langle U_j\rangle \frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 \langle U_i\rangle}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \langle u_i u_j\rangle}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \langle P\rangle}{\partial x_i} \qquad (3.4)$$

* در نمایش تانسوری داریم:

$$\underbrace{\frac{\partial \langle \hat{U}\rangle}{\partial t} + \langle \hat{U}\rangle \cdot \hat{\nabla}\langle \hat{U}\rangle}_{\frac{\bar{D}\langle \hat{U}\rangle}{Dt}} = \nu \nabla^2 \langle \hat{U}\rangle - \nabla \cdot \langle \hat{u}\hat{u}\rangle - \frac{1}{\rho}\nabla\langle P\rangle \qquad (3.4)$$

Note: $\frac{\bar{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle \hat{U}\rangle \cdot \hat{\nabla}$ (3.5)

Note: $\left\langle \frac{DA}{Dt}\right\rangle = \frac{\bar{D}\langle A\rangle}{\bar{D}t} + \hat{\nabla}\cdot\langle \hat{u}\, a\rangle$ (3.6)

Note: $\langle AB\rangle = \langle A\rangle\langle B\rangle + \langle ab\rangle$

PAPCO

Subject
Date

* تانسور $\langle \hat{u}\hat{u} \rangle$ واضح است که متقارن است و به آن تانسور Reynolds stress می‌گویند.

✓Exercise: By averaging Eq (2.21), show that:

$$\nabla^2 \langle p \rangle = -\rho \nabla \langle \hat{U} \rangle : \hat{\nabla} \langle \hat{U} \rangle - \rho \hat{\nabla} \cdot (\hat{\nabla} \cdot \langle \hat{u}\hat{u} \rangle) \quad (3.8)$$

or

$$\frac{\partial^2 \langle p \rangle}{\partial x_j \partial x_j} = -\rho \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial^2 \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.8')$$

therefore, Eq. (3.4) and (3.8) are a system of equations for 10 independent variables $\langle U_i \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle u_i u_j \rangle$. six of them are additional and we should do something. $\overset{3}{}$ $\overset{1}{}$ $\underline{6}$

III.2 the decomposition of the kinetic energy

$$\langle E(\hat{x},t) \rangle = \langle \frac{1}{2} \hat{U} \cdot \hat{U} \rangle = \underbrace{\frac{1}{2} \langle \hat{U} \rangle \cdot \langle \hat{U} \rangle}_{\bar{E}(\hat{x},t)} + \underbrace{\frac{1}{2} \langle \hat{u} \cdot \hat{u} \rangle}_{K(\hat{x},t)}$$

→ $\langle E(\hat{x},t) \rangle = \bar{E}(\hat{x},t) + K(x,t)$

mean of the Kinetick Energy — Kinetic Energy of mean flow — Turbulent Kinetic Energy

$$\bar{E}(x,t) = \frac{1}{2} \langle \hat{U} \rangle \cdot \langle \hat{U} \rangle \quad (3.11)$$

$$K(x,t) = \frac{1}{2} \langle \hat{u} \cdot \hat{u} \rangle = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\langle \hat{u}\hat{u} \rangle) \quad (3.12)$$

★ از طرفین معادله 2.16 متوسط می‌گیریم:

$$\left\langle \frac{DE}{Dt} \right\rangle + \hat{\nabla}\cdot\left\langle \underbrace{\frac{p\hat{U}}{\rho} - 2\nu\,\underline{S}\cdot\hat{U}}_{T} \right\rangle = -2\nu\langle \underline{S}:\underline{S}\rangle = \langle S\rangle:\langle S\rangle + \langle s:s\rangle$$

$$\rightarrow \frac{\bar{D}\langle E\rangle}{\bar{D}t} + \hat{\nabla}\cdot\left[\langle \hat{u}e\rangle + \langle \hat{T}\rangle\right] = -\bar{\varepsilon} - \varepsilon \qquad (3.13)$$

$$\bar{\varepsilon} = 2\nu\langle \underline{S}\rangle:\langle \underline{S}\rangle \qquad (3.14)$$

↳ dissipation due to mean flow

$$\varepsilon = 2\nu\langle \underline{s}:\underline{s}\rangle \qquad (3.15)$$

Note that $\langle E\rangle = \bar{E} + K$

↳ Turbulent dissipation

$$\langle \underline{S}\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\hat{\nabla}\hat{U} + \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\hat{U})^T \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\hat{\nabla}\langle U\rangle + (\nabla\langle U\rangle)^T\right] \qquad (3.16)$$

$$s = S - \langle \underline{S}\rangle = \frac{1}{2}\left[\hat{\nabla}\hat{u} + (\hat{\nabla}\hat{u})^T\right] \qquad (3.17)$$

★ حال معادله‌ی متوسط‌گیری شده‌ی مومنتوم را در سرعت متوسط ضرب می‌کنیم:

$$\rightarrow \langle \hat{U}\rangle \cdot \frac{\partial\langle \hat{U}\rangle}{\partial t} + \langle \hat{U}\rangle\cdot\langle \hat{U}\rangle\cdot\hat{\nabla}\langle \hat{U}\rangle = \nu\langle \hat{U}\rangle\cdot\hat{\nabla}^2\langle \hat{U}\rangle$$

$$- \langle \hat{U}\rangle\cdot\hat{\nabla}\cdot\langle \hat{u}\hat{u}\rangle - \frac{1}{\rho}\langle \hat{U}\rangle\cdot\hat{\nabla}\langle p\rangle$$

Note: For incompresible flow:

$$\hat{\nabla}\cdot\underline{s} = \frac{1}{2}\left[\hat{\nabla}\cdot\hat{\nabla}\hat{U} + \underbrace{\hat{\nabla}\cdot(\overset{0}{\cancel{\hat{\nabla}}}\hat{U})^T}_{}\right] = \frac{1}{2}\nabla^2\hat{U} \qquad (3.17')$$

D.107.1

$\nabla(\hat{\nabla}\cdot\hat{U}) = 0$

Subject

Date

$$\hat{\nabla}\cdot\underline{\Omega} = -\frac{1}{2}\nabla^2\hat{U} \qquad (3.17'')$$

similary relations are held between $\langle\underline{S}\rangle, \langle\underline{\Omega}\rangle, \nabla^2\langle U\rangle$

$\underline{S}, \underline{\Omega}, \nabla^2 U$

* رابطه‌ها برای متوسط‌ها هم صدق می‌کنند چرا که خطی است، و متوسط می‌تواند از آن‌ها بگذرد.

$$\rightarrow \nu\langle\hat{U}\rangle\cdot\nabla^2\langle\hat{U}\rangle - \langle\hat{U}\rangle:\hat{\nabla}\cdot\langle\hat{u}\hat{u}\rangle - \frac{1}{\rho}\langle U\rangle\cdot\hat{\nabla}\langle p\rangle$$

$\downarrow (3.17')$

$2\nu\langle\hat{U}\rangle\cdot\hat{\nabla}\cdot\langle\underline{S}\rangle$

$\downarrow D.82$

$2\nu\hat{\nabla}\cdot(\langle\hat{U}\rangle\cdot\langle\underline{S}\rangle)$

$-2\nu\nabla\langle\hat{U}\rangle:\langle\underline{S}\rangle$

$\checkmark\downarrow (D.82)$

$\hat{\nabla}\cdot(\langle\hat{U}\rangle\langle\hat{u}\hat{u}\rangle)$

$-\hat{\nabla}\langle\hat{U}\rangle:\langle\hat{u}\hat{u}\rangle$

$\downarrow (D.71)$

$-\frac{1}{\rho}\left[\hat{\nabla}\cdot(\langle p\rangle\langle\hat{U}\rangle)\right.$

$\left.+p\cancel{\nabla\cdot\langle\hat{U}\rangle}_{0}\right]$

$$\rightarrow \frac{\bar{D}\bar{E}}{\bar{D}t} + \nabla\cdot\left(\langle\hat{U}\rangle\langle\hat{u}\hat{u}\rangle + \frac{\langle p\rangle\langle\hat{U}\rangle}{\rho} - 2\nu\langle\hat{U}\rangle\cdot\langle\underline{S}\rangle\right) = \underbrace{\langle\hat{u}\hat{u}\rangle:\hat{\nabla}\langle\hat{U}\rangle}_{-P} - \bar{\varepsilon} \qquad (3.18)$$

$$\langle E \rangle = \bar{E} + K$$

$$\frac{\bar{D}\bar{E}}{\bar{D}t} = \hat{\nabla}\cdot(\hat{T}) - p - \bar{\varepsilon} \qquad (3.18)$$

which p is defined by:

$$p = -\langle \hat{u}\hat{u} \rangle : \hat{\nabla}\langle \hat{U} \rangle \quad (3.19) \quad \text{or} \quad p = -\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \quad (3.19')$$

$$\langle E \rangle - \bar{E} = K$$

Exersice : show that the Transport equation of K can be derived by subTracting Eq. (3.4)' from Eq. (2.15)   3.18 , 3.13

نیست ؟

و کوئیر T' توجیم

$$\frac{\bar{D}K}{\bar{D}t} + \nabla\cdot\left[\frac{1}{2}\langle \hat{u}\hat{u}\cdot\hat{u} \rangle + \frac{\langle p\hat{u} \rangle}{\rho} - 2\nu\langle \hat{u}\cdot \underline{S} \rangle\right] = p - \varepsilon \qquad (3.21)$$

$$T' = \frac{1}{2}\langle u_i u_j u_j \rangle + \langle u_i p \rangle / \rho - 2\nu \langle u_j s_{ij} \rangle$$

Experimentally : it is observed that almost always p is a positive quantity and is called production of Turbulent Kinetic energy because it Transfers energy from the mean flow to fluctuating velocity field.

نکته: ε را قبلاً تعریف کردیم (3.15) که همواره مقدار مثبتی است و چون در اینجا علامت منفی دارد پس یعنی انرژی توربولانسی را کم می‌کند و همین دلیل است که به آن Turbulent dissipation می‌گوییم. این ناشی از کار نیروهای اصطکاک است.

نکته: ترم p نیز همواره مثبت است و انرژی از mean flow به سرعت‌های نوسانی منتقل می‌شود.

min 24

IV. Turbulence

۱) خلاصه‌ای از درس توربولانس ۱

IV.1. Energy cascade

– در شکل ۱ از chap 4 یک جریان را نشان می‌دهد که مانعی در ابتدای آن قرار گرفته است. بنابراین در ابتدا سرعت متوسط داریم که این باعث به وجود آمدن (P) (3.21) خواهد شد یعنی انرژی به سرعت نوسانی توربولانسی انتقال داده می‌شود.

– وقتی جریان آشفته می‌شود، eddy با سایزهای مختلف ایجاد می‌شود که ابتدا بزرگترین eddy ها رخ می‌دهند و سپس این eddy های بزرگ به eddy های کوچکتر تبدیل می‌شوند. (شکل 2)

– در شکل سوم هم توزیع انرژی را نشان می‌دهد که می‌گوید انرژی‌های بیشتری را eddy های بزرگتر دارا هستند و رفته رفته بر اثر ~~[illegible]~~ ناپایداری شکسته شده و در نهایت وقتی که خیلی ریز شدند از یک جایی به بعد به گرما تبدیل خواهند شد. در ابتدا P وارد می‌شود و در انتها ε خارج می‌شود.

IV.2. Two point corelation

the spatial corelation function is defined

$$R \equiv \langle \hat{u}_A \hat{u}_B \rangle = \langle u_{i,A}\, u_{j,B} \rangle\, \hat{e}_i \hat{e}_j$$

برای دو نقطه دلخواه در فضا

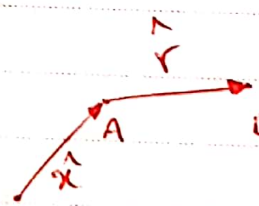
* حالت خاص A=B باشد همان تانسور رینولدز است برای یک نقطه است.

مختصات نقطه اول

$$R_{ij}(\hat{r}, \hat{x}, t) = \langle u_i(\hat{x}, t)\, u_j(\hat{x}+\hat{r}, t) \rangle$$

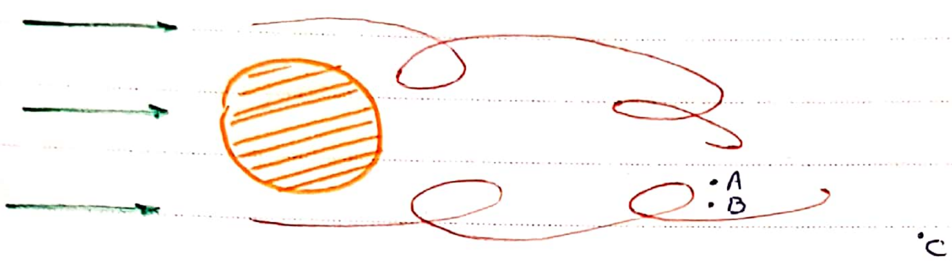
زمان

فاصله‌ی دو نقطه



Subject
Date

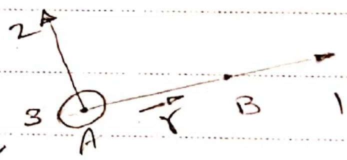
مثال این کمیت را برای دو نقطه در مثالی که جریان از روی یک استوانه می‌گذرد را بدست می‌آوریم:



نکته اگر نقاط به هم نزدیک‌تر باشند، مقدار two point غیرصفر می‌شود ولی اگر فاصله بین این دو نقطه زیاد شود، چون به همدیگر بی ربط می‌شوند، متوسط آنها صفر خواهد شد. در فصل‌های آینده اثبات خواهد شد. همچنین چون به هم بی ربط هستند، از هم دیگر مستقل هستند و می‌توان به صورت زیر نوشت:

$\langle \hat{u}_A \hat{u}_B \rangle \neq 0$

$$\langle \hat{u}_A \hat{u}_C \rangle = \langle \hat{u}_A \rangle \langle \hat{u}_C \rangle = 0$$



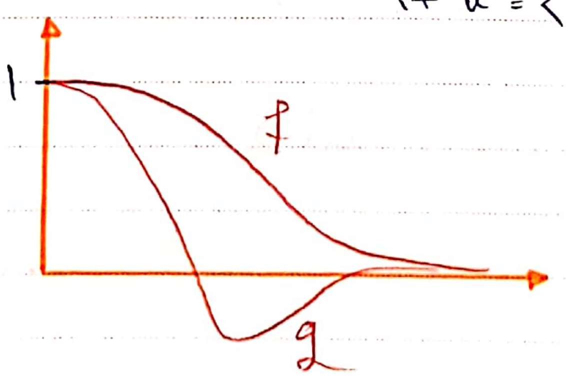
نکته درایه‌های تانسور به دستگاه مختصات بستگی دارد، بنابراین یک دستگاه مختصات مشخص برای راحتی شناسایی انتخاب می‌کنیم به این صورت که از نقطه‌ی اول (A) به (B) راستای 1، یک جهت عمود بر آن را 2 در نظر بگیریم و به صورت قاعده‌ی دست راست را 3 می‌گیریم.

$$f(r) = \frac{R_{11}(r\hat{e}_1)}{u'^2} \quad , \quad u'^2 = \langle u_1 u_1 \rangle = \langle u_1(\hat{x},t)\, u_1(\hat{x},t) \rangle \quad (\text{نقطه‌ی } A)$$

$$g(r) = \frac{R_{22}(r\hat{e}_1)}{u'^2}$$

if $u'^2 = \langle u_x^2 \rangle = \langle u_y^2 \rangle = \langle u_z^2 \rangle$

isotropic Turbulence



Subject
Date

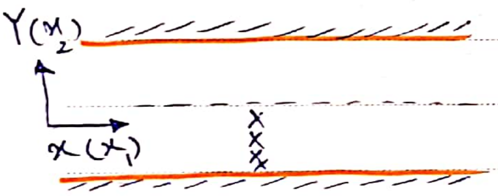
Integral length scale

$$L_{11} = \frac{\int_0^\infty f(r)\,dr}{}$$

$$L_{22} = \int_0^\infty g(r)\,dr$$

* نکته * مفهوم این کمیت‌ها این است که هرچقدر بزرگ‌تر باشند، یعنی اینکه مقدار f و g بزرگتر بوده. بنابراین گردابه‌ها بزرگتر بوده اند که دو نقطه با هم در آن گردابه بوده اند که به هم ربط داشته‌اند.

* توضیح تمرین عددی اول *



در یک کانال به صورت روبه‌رو داریم. در چهار نقطه، به ما دیتا داده در حسب زمان. با استفاده از این دیتاها باید کمیت‌های توربولانسی را بدست بیاوریم.

- یک تعریف دیگر شبیه Two point به صورت روبه‌رو است، با این تفاوت برای یک نقطه در زمان‌های مختلف با فاصله‌ی τ است.

$$B_{ij}(\tau, \hat{x}, t) = \langle u_i(\hat{x}, t)\, u_j(\hat{x}, t+\tau) \rangle$$

→ auto corelation

$$B_{ij}(\tau, \hat{x}, t) = B_{(i)(j)} / \langle u_{(i)} u_{(j)} \rangle$$

$$T_{ij} = \int_0^\infty B_{ij}^{(norm)}\, d\tau$$ (integral time scale)

PAPCO

Subject
Date

جلسه هشتم

* نکته: برای Auto corelation زمانی، مثلاً در سیگنالی که تمرین تحویلی زده، چون جریان Stationary است، فرقی نمی‌کند در چه زمانی شروع ما باشد. تنها باید آن فاصله‌ی زمانی ما درست انتخاب شود.

* نکته: در تمرین تحویلی، می‌توان Auto corelation مکانی را نیز درست آورد. باید در زمان‌های یکسان درهم ضرب کرد و جمع کرد و در نهایت متوسط گرفت.

V. RANS (Reynolds-Average-Navier-Stokes) مدل‌های RANS

از معادله‌ی مومنتوم Eq(3.4) که برای mean flow استخراج کردیم شروع می‌کنیم.

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 \langle U_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i}$$

* نکته: چون مدل RANS غالباً برای جریان‌های Stationary استفاده می‌شود، می‌توان متوسط‌ها را، متوسط زمانی در نظر گرفت. یعنی:

$$\langle \quad \rangle \longrightarrow \langle \quad \rangle_T$$

V.1 Turbulent viscosity models.

در این مدل از فرض روبه‌رو استفاده می‌شود: the Boussinesq's gradient diffusion

$$\langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} K \delta_{ij} = -\nu_T \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right)$$

$$\langle \hat{u}\hat{u} \rangle - \frac{2}{3} K I = -\nu_T \left(\hat{\nabla} \langle \hat{U} \rangle + (\hat{\nabla} \langle \hat{U} \rangle)^T \right) \qquad (5.11)$$

Turbulent viscousity

$$K = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle$$

* این مدل می‌گوید که می‌توان تنش‌های رینولدزی را به صورت بالا مدل کرد

Subject
Date

✓Exercise: What is the value of normal stress $\langle u_1^2\rangle$, $\langle u_2^2\rangle$ and $\langle u_3^2\rangle$ based on this assumption

دستگاه 3 معادله

3 مجهول

٧.١ K-ε model

درمدل eddy viscosity تنها مجهولی که باقی ماند است همان ν_T است. در مدل K-ε فرض می‌شود که می‌توان ν_T را تابعی از ε و K.

✓Exercise: using dimensional analysis show that:

$\varepsilon \sim \{l^2 t^{-3}\}$, $K \sim \{l^2 t^{-2}\}$. $\nu \sim \{l^2 t^{-1}\}$ From Experiment

$$\frac{\nu_t \varepsilon}{K^2} = c_\mu \rightarrow \nu_T = c_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}, \quad c_\mu \simeq 0.09$$

- تنها مقادیر K و ε را نیاز داریم. از معادلاتی که قبلاً بدست آوردیم استفاده می‌کنیم ولی همان معادلات هم closure نیاز دارند.

$$\text{Eq } 3.21 \rightarrow \frac{\bar{D}K}{\bar{D}t} + \hat{\nabla}\cdot\hat{T}' = p - \varepsilon$$

✓Exercise: substituting Eq.(5.11) in the Eq.(3.19)' and drive p in cartesian coordinate system. از معادله قبل K را می‌توانیم بدست بیاوریم. pope 371 صفحه

* ما بارها که درتمرین بالا انجام می‌دهیم، تنها دو چیز باقی می‌ماند یکی $\hat{T}'$ و دیگری ε.

$$\hat{T}' = \frac{-\nu_t}{\sigma_K}\hat{\nabla}K \quad (5.14), \quad \sigma_K \simeq 1 \text{ By Experiment}$$

$$\rightarrow \frac{\bar{D}K}{\bar{D}t} = \hat{\nabla}\cdot\left(\frac{\nu_T}{\sigma_K}\hat{\nabla}K\right) + p - \varepsilon \quad (5.15)$$

بعضی جاها $(\nu) + \frac{\nu_T}{\sigma_K}$

$\simeq 0$

Exercise: It can be shown that the Turbulent Kinetic energy equation, Eq (3.21) can be alternatively writen as:

$$\frac{\bar{D}K}{\bar{D}t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{1}{2}\langle u_i u_j u_j\rangle + \langle u_j p\rangle/\rho\right] = +\nu\nabla^2 K + P - \varepsilon \qquad (5.15')$$

$= 2\nu\langle u\cdot s\rangle$ ✗

using Eq (5.14) for $\hat{T}''$ and assuming $\tilde{\varepsilon} \sim \varepsilon$, the modeled K equation is obtained as Eq.(5.15) replacing ν_T/σ_K with $\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_K}$

Transport equation for ε

$$\varepsilon = 2\nu\langle s_{ij} s_{ij}\rangle, \quad s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

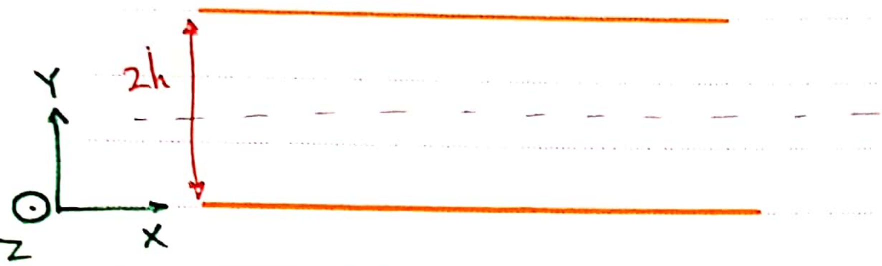
a modeled equation is also used for ε

$$\frac{\bar{D}\varepsilon}{\bar{D}t} = \nabla\cdot\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\hat{\nabla}\varepsilon\right) + C_{\varepsilon 1}\frac{P\varepsilon}{K} - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{K} \qquad (5.16)$$

* بنابراین در مدل K-ε درکل 5 تا مجهول داریم که ثابت هستند و برای هر کاربردی باید آزمایش شود تا بتوان آن ها را بدست آورد.

توضیحات تمرین شماره‌ی دوم

در یک کانال، حل DNS را داریم در شبکه‌بندی $96 \times 96 \times 96$.



* جریان stationary است. جهات همگن را قبلاً توضیح دادیم در چه جهاتی وجود دارند و با استفاده از آن‌ها می‌توان مقادیری که می‌خواهیم را به‌دست آورد.

* مسئله به ما آرایه‌هایی از اطلاعات به صورت $96 \times 49 \times 96$ داده است. که 49 داده مربوط به جهت Y است.

* همه‌ی داده‌ها بی‌بعد شده‌اند به صورت زیر:

non dimensional   dimensional

$$x_i = \frac{x_i^*}{h} \quad , \quad u_i = \frac{u_i^*}{u_\tau} \quad , \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

$$p = \frac{p^*}{\rho u_\tau^2} \quad , \quad Re = \frac{u_\tau h}{\nu} = 500$$

$$y^+ = \frac{y^* u_\tau}{\nu} = \frac{y^*}{h}\frac{h u_\tau}{\nu} = y\, Re$$

Subject

Date

تمرین برای اولین grid، y^+ را چک کنید $(y \times Re_\delta)$ و ببینید که درست است که می‌گوییم در نزدیکی دیواره، مقدار y^+ از order یک است یا نه.

VI. Large Eddy simulation (LES)

شبیه‌سازی با روش LES در چهار مرحله خواهد بود.

1- Filtering operation
2- Filtering equation
3- closure- subfilter model

} modeling step

4- Numerical soulotion ⇝ CFD of LES

* در روش قبلی یعنی RANS ما برای اینکه Noise را از متغیرهای نقطه‌ای حذف کنیم متوسط‌گیری انجام می‌دادیم، حال در روش LES، فیلتر می‌گیریم.

* بعد از مرحله اول هم مثل RANS این بار معادلات فیلترگیری شده را بدست می‌آوریم و مثل قبل باید closure نسبت بیاوریم تا بتوانیم مدل کنیم.

Filtering

VI.1.1 General defination and properties of filters

It will remove high frequensies

ما در این درس از یک مدل فیلترگیری به نام convolution Filter استفاده می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{U}(\hat{x},t) = \int_D G(\hat{r},\hat{x})\,\hat{U}(\hat{x}-\hat{r},t)\,d\hat{r} \qquad (6.1)$$

$d\hat{r} = dr_1 dr_2 dr_3$

G: Filter function (Kernel)

D: computined domain

اگر تابع G زوج باشد می‌توان به صورت زیر هم نوشت:

$$\bar{U}(\hat{x},t) = \int_D G(\hat{x}-\hat{r},\hat{x})\,\hat{U}(\hat{r},t)\,d\hat{r}$$

Subject

Date

$$U = \bar{\hat{U}} + U'$$

filtered (resolved)

subfilterd (residual)

* همهٔ توابع G باید خاصیتی به نام the normalization property را داشته باشند:

$$\int_D G(\hat{r}, \hat{x})\, d\hat{r} = 1 \; ; \text{ for each specific } \hat{x} \qquad (6.2)$$

Exersice: For a simple case of a uniform function, it is desirable that $\bar{U} = U(x) = U_0$. show that this is achived if Eq.(6.2) holds.

* Re part is defined by:

$$\hat{u}'(\hat{x},t) = \hat{u}(\hat{x},t) - \bar{\hat{u}}(\hat{x},t)$$

* نکتهٔ مهم *: در عمل متوسط‌گیری، اگر دوباره از یک متغیر متوسط‌گیری می‌کردیم هیچ تفاوتی ایجاد نمی‌شد. همچنین از fluctuation هم اگر متوسط می‌گرفتیم صفر می‌شد. درحالی که این روابط برای فیلترگیری صادق نیست:

یعنی:

$$\bar{\hat{U}} \neq \bar{\bar{\hat{U}}} \quad , \quad \bar{\hat{U}'} \neq 0 \qquad (6.5)$$

* این موضوع بدیهی است، چون هر بار که فیلترگیری می‌کنیم از داده‌های نمودار استفاده می‌کنیم و نمودار را smooth تر می‌کنیم. با فیلترگیری بعدی، از نمودار smooth شده استفاده می‌کنیم و باز هم آن را smooth می‌کنیم و به همین ترتیب ... . این نهایت فیلترگیری، نمودار اولیه را uniform می‌کنیم.

PAPCO

Subject
Date

* خواص زیر در فیلترگیری برقرار است :

$$\overline{\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial t} \qquad (6.6)$$

$$\overline{\langle \hat{U} \rangle} = \langle \overline{\hat{U}} \rangle \qquad (6.7)$$

$$\overline{\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)} \neq \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \qquad (6.8)$$

* نکته: علت اینکه روابط 6.6 و 6.7 برقرار هستند این است که فیلترگیری روی فضا رخ می‌دهد در صورتی که در این روابط مشتق‌گیری یا متوسط‌گیری روی زمان و تعداد آزمایش‌ها است پس نسبت به فیلترگیری که روی فضا رخ می‌دهد مستقل هستند در صورتی که رابطه‌ی 6.8 مشتق‌گیری هم روی فضا است.

Homogeneous filters

$$G(\hat{r}, \hat{x}) = G(\hat{r}) \qquad (6.9)$$

spherical symetric (isotropic) filters

$$G(\hat{r}) = G(|\hat{r}|) \qquad (6.10)$$

* اگر symetric باشه فیلتر، همگن هم خواهد بود.

Exersice: show that for homogeneous filters:

$$\overline{\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)} = \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \quad , \quad \overline{\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)} = \int_D G(\vec{r}) \frac{\partial U_i(\vec{x}-\vec{r})}{\partial x_j} d\vec{r}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\int_D G(\vec{r})\, U_i(\vec{x}-\vec{r})\, d\vec{r}\right] \checkmark$$

VI. 2 Filter Types

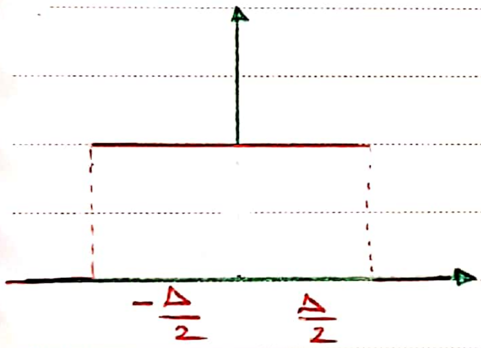
the box filter (Top hat filter)

$$G(\hat{r})=\prod_{i=1}^{3}\frac{1}{\Delta_{(i)}}H\left(\frac{1}{2}\Delta_{(i)}-|r_{(i)}|\right) \qquad (6.14)$$

$$\rightarrow \bar{\hat{U}}=\frac{1}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}\int_{0}^{0}\int_{0}^{0}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}}\hat{U}(\hat{x}')\,d\hat{x}' \qquad (6.15)$$

* It is equivalent to volume averaging in a cubic box of sides $\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3$.

* در حالت یک بعدی به صورت زیر است:



* نکته‌ی مهم * این فیلتر در حالت یک بعدی، فیلتر ایزوتروپیک است چون در یک جهت است و در $r=cte$ هم سمت راست و هم سمت چپ یک مقدار ثابت خواهد داشت. در حالی که در فیلتر چند بعدی این‌گونه نیست، چرا که این فیلتر در یک box است و اگر بخواهد ایزوتروپیک باشد باید به صورت کره باشد. به صورت زیر:

$$G(\hat{r})=\frac{6}{\pi\Delta^3}H\left(\frac{\Delta}{2}-|\hat{r}|\right) \qquad (6.16)$$

Exercise: آیا با استفاده از معادله‌ی 6.15 دو بار عمل فیلترینگ را در بازه‌ی $\frac{\Delta}{2}$ تا $-\frac{\Delta}{2}$ انجام دهیم، آیا این معادل این است که یک بار عمل فیلترینگ را در همین بازه انجام دهیم؟

از این فیلتر در پلیمر معمولاً استفاده نمی‌شه؟

Subject

Date

Exercise: if we use this filter: $G(\hat{r}) = \delta(\hat{r} - \hat{x})$

Find the relation between $\hat{\bar{U}}$ and $\hat{U}$? $\quad \vec{U} = \vec{U}(\cdot, t)$

$$\int G(\vec{r})\, U(\vec{x} - \vec{r})\, d\vec{r}$$

Gaussian Filter

$\delta(\vec{r}) \qquad \int u(x)\, \delta(\cdot)\, d\cdot$

$$G(r) = \left(\frac{6}{\pi \Delta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-6r^2}{\Delta^2}\right) \qquad (6.17) \qquad U(\vec{x})$$

VI.1.3 Implicit numerical filtering in physics space

ما در روش های عددی هم فیلترگیری را انجام می‌دهیم. در روش حجم محدود به مشخص است که فیلترگیری می‌کنیم ولی در روش Finite difference خیلی واضح نیست و در ادامه این را اثبات می‌کنیم.

$$\left.\frac{dU(x)}{dt}\right|_{x_0} = \frac{U(x_0+h) - U(x_0-h)}{2h}$$

math note: $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} F(x, x')\, dx' = \dfrac{db(x)}{dx} F(x, b(x)) - \dfrac{da(x)}{dx} F(x, a(x))$

$$+ \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F(x, x')}{\partial x}\, dx'$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} U(x')\, dx'\right]_{x_0} = \left.\frac{d}{dx}\bar{U}(x)\right|_{x_0}$$

پس ما در واقع جواب فیلترگیری شده را بدست می‌آوریم.

therefore: the finite difference discritization of a derivative is equivalent to derivitive of box filtered quantity.

PAPCO

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + \left(c\,\frac{d^2u}{dx^2} + \cdots\right)$$

numerical dissipation
(diffusion error)

* در تمام نرم افزارها explicit filter صحبت نمی‌شود. در نرم افزارها با همان در واقع implicit استفاده می‌کنند که Δ را در واقع همان سایز مش مشخص می‌کند. حال اگر بخواهیم فیلتری اعمال کنیم باید Δ آن با سایز مش تفاوت زیاد داشته باشد و باید نسبت به سایز مش بزرگ‌تر باشد.

VI.2 Filter equation

Eq (2.3) and (2.15)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (6.28)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \qquad (6.29)$$

* نکته از جلسه قبل: در حالتی که grid ها non uniform است یعنی filter ها هم غیر همگن‌اند، ما نمی‌توانیم مشتق زمانی را از فیلتر عبور دهیم. اما ما معادله را دست نمی‌زنیم اما سعی می‌کنیم grid تغییراتش آرام باشد و Jump نداشته باشد.

the non linear term $\overline{u_i u_j}$ arises the closure problem. this term is writen as:

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \tau^R_{ij} \quad \text{or} \quad \tau^R_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \qquad (6.30)$$

Subject

Date

where τ_{ij}^{R} is called resiqual-stress tensor or sub grid-scale Tensor.

$$\frac{\bar{D}\bar{U}_i}{\bar{D}t} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{R}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \quad (6.31)$$

$$\frac{\bar{D}}{\bar{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\bar{U}} \cdot \hat{\nabla}$$

• جلسه یازدهم •

VI.2.1 Decomposition of mechanical and turbulent Kinetic Energy

Turbulent Kinetic energy

$$\underbrace{K}_{\text{filtered}}=\overline{K}+\underbrace{K'}_{\text{sub filtered}} ,\quad \overline{K}=\frac{1}{2}\langle\overline{u_i u_i}\rangle ,\quad K'=\frac{1}{2}\langle u_i u_i-\overline{u_i u_i}\rangle \qquad (6.49')$$

* هیچ کدام از روابط بالا را نمی‌توان محاسبه کرد. از این رو یک فیلتر دیگر بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K=K^R+K^{SFS} ,\quad K^R=\frac{1}{2}\langle\bar{u}_i\bar{u}_i\rangle ,\quad K^{SFS}=\frac{1}{2}\langle u_i u_i-\bar{u}_i\bar{u}_i\rangle \qquad (6.50')$$

$$\overline{K}=K^R+K_r ,\quad K_r=\frac{1}{2}\langle\overline{u_i u_i}-\bar{u}_i\bar{u}_i\rangle \qquad (6.51')$$

$$K^{SFS}=K'+K_r$$

* K^R را می‌توان محاسبه کرد که در ادامه نشان خواهیم داد.

Kinetic Mechanical Energy (لحظه‌ای)

$$E=\overline{E}+E' ,\quad \overline{E}=\frac{1}{2}\overline{U_i U_j} ,\quad E'=\frac{1}{2}(U_i U_i-\overline{U_i U_i}) \qquad (6.49'')$$

$$E=E^R+E^{SFS} ,\quad E^R=\frac{1}{2}\bar{U}_i\bar{U}_i ,\quad E^{SFS}=\frac{1}{2}(U_i U_i-\bar{U}_i\bar{U}_i)$$

$$\overline{E}=E^R+E_r ,\quad E_r=\frac{1}{2}(\underbrace{\overline{U_i U_i}-\bar{U}_i\bar{U}_i}_{\tau^R_{ii}})$$

Subject

Date

$E^{SFS} = E' + E_r \rightsquigarrow K_R$

$\bar{K} = \frac{1}{2}\langle \bar{U}_i \rangle \langle \bar{U}_i \rangle \qquad (6.52'')$

*چرا K^R قابل محاسبه است:

$U_i = \langle U_i \rangle + u_i \xrightarrow{\text{filter}} \bar{U}_i = \langle \bar{U}_i \rangle + \bar{u}_i \rightarrow \bar{u}_i = \bar{U}_i - \langle \bar{U}_i \rangle$ ✓

✓ **Exercise:** show that:

✓ $U_i = \bar{U}_i + u'_i$, $\quad \bar{U}_i = \langle \bar{U}_i \rangle + \bar{u}_i$

$U_i = \langle \bar{U}_i \rangle + \bar{u}_i + u'_i \qquad (6.54'')$

✓ $U_i = \langle U_i \rangle + \bar{u}_i + u'_i \qquad (6.55'')$

$U_i = \langle U_i \rangle + u_i$, $\quad u_i = \bar{u}_i + u'_i$

✓ **Exercise:** show that

$\langle E^R \rangle = \frac{1}{2}\langle \bar{U}_i \bar{U}_i \rangle$ ، $\bar{K} = \frac{1}{2}\langle \bar{U}_i \rangle \langle \bar{U}_i \rangle$

$\langle E^R \rangle = \bar{K} + K^R$

$K^R = \frac{1}{2}\langle \bar{u}_i \bar{u}_i \rangle$

* ساختار کاری که قبلاً در RANS کردیم برای بدست آوردن معادلهٔ E^R با بردار مومنتوم شروع کنیم و ... اثبات آن در pope [1] وجود دارد.

$$\frac{\bar{D}E^R}{\bar{D}t} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{U}_i\left(2\nu \bar{S}_{ij} - \tau^r_{ij} - \frac{\bar{p}\,\delta_{ij}}{\rho}\right)\right) = -\varepsilon_f - P_r \qquad (6.37'')$$

$$\varepsilon_f = 2\nu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \qquad (6.58'')$$

$$P_r = -\tau^r_{ij} \bar{S}_{ij} \qquad (6.59'')$$

PAPCO

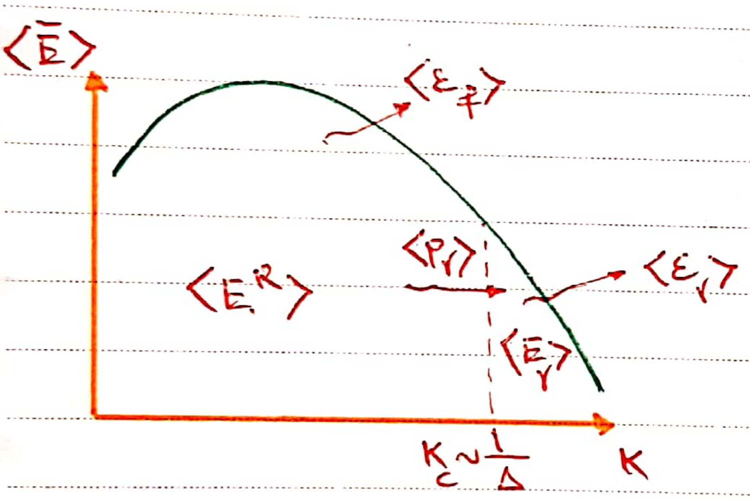
* معادله‌ی حاکم بر E_r به صورت زیر است که اثبات آن در فایل (dyn-keq.pdf) موجود است:

$$\frac{\bar{D} E_r}{\bar{D} t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{1}{2}\overline{u_i u_i u_j} - \frac{1}{2}\bar{u}_i \bar{u}_i \bar{u}_j + \frac{1}{\rho}\overline{u_j p} - \frac{1}{\rho}\bar{u}_j \bar{p} - \bar{u}_i \tau^r_{ij}\right]$$

$$- \nu \frac{\partial^2 E_r}{\partial x_j \partial x_j} = -\varepsilon_r + P_r$$

$$\varepsilon_r = \nu\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right) \qquad (6.61)$$

$$\langle \bar{E} \rangle = \langle E^R \rangle + \langle E_r \rangle$$



نکته شکل بالا برای هر تقسیمی است و تأثیر سایزهای مختلف را نشان می‌دهد که انرژی یک تقسیم را هم سایز eddy های روی آن اثر می‌گذارد.

پروژه‌ی شماره‌ی 1 حل DNS از تمرین شماره‌ی 2 را داریم. بنابراین می‌توانیم با استفاده از آن‌ها filter و subfilter را محاسبه کنیم.

VI.3 subgrid scale (SGS) modeling

VI.3.1 the smagorinsky model

شبیه معادلات RANS است. به مرور آن می پردازیم. این مدل هم شکل مدل های eddy viscosity است.

$$\underbrace{\langle u_i u_j\rangle - \frac{2}{3}K\delta_{ij}}_{\substack{\text{deviative part}\\ \langle u_i u_j\rangle}} = -2\nu_t \langle S_{ij}\rangle \qquad (5.11)$$

$$K \rightarrow \frac{1}{3}\langle u_K u_K\rangle$$

مشابه با RANS برای LES داریم:

$$\underbrace{\tau^R_{ij} - \frac{1}{3}\tau^R_{KK}\delta_{ij}}_{\tau^r_{ij}} = -2\underbrace{\nu_r}_{\substack{\text{SGS}\\ \text{eddy}\\ \text{viscosity}}} \bar{S}_{ij} \xrightarrow{} \text{Trace free} \qquad (6.40)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}\right) \qquad (6.41)$$

Exercise: subsituting Eq.(6.40) in Eq(6.31) show that the modeled filter equation is:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + 2\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu+\nu_r)\bar{S}_{ij}\right]$$

$$2\bar{\nabla}\cdot[\nu\bar{S}] = \nu\frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

* حال باید ν_r را مدل کنیم که محاسبه آسان شود!

Subject
Date

« جلسه‌ی دوازدهم »

برای شبیه‌سازی ν_t، بازگشتی به RANS انجام می‌دهیم:
$\nu_t \to \nu$ شبیه هم
این که چطور ν را برای سیال بدست بیاوریم به دیدگاه مولکولی می‌رویم:

Kinetic theory gases

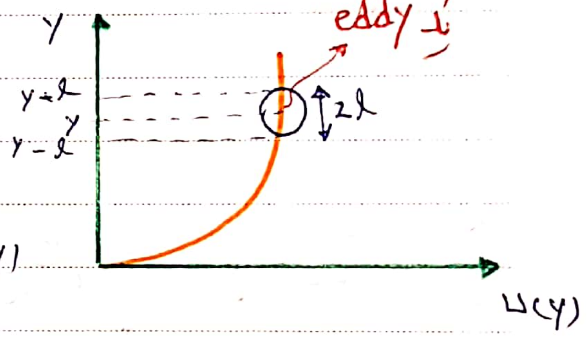
$$\nu = \bar{V}\,\ell \quad \ell \to \text{mean free path}$$

$\bar{V}$ → قدرت نوسان مولکول‌ها ((standard deviation of molecular velocity))

By analogy, prandtl assumed that for Turbulent flows, ν_t can be expressed

$$\nu_t = \bar{V}_m\,\ell_m \qquad (6.43)$$

(Free shear flow)



$$u(y) \sim = U(y \pm \ell) - U(y) \sim U(y) \pm \ell_m \frac{dU}{dy} - U(y)$$
$$= \pm \ell_m \frac{dU}{dy}$$

سرعت معیار را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\bar{V}_m = \langle u^2(y) \rangle^{\frac{1}{2}} \sim \langle |u(y)| \rangle$$

$$\nu_t = \ell_m \bar{V}_m = \ell_m^2 \left| \frac{d\langle U \rangle}{dt} \right| \qquad (6.44)$$

* smogorinsky used a similar relation for ν_r:

$$\nu_r = \ell_s V_s \qquad (6.45)$$

$$\ell_s \sim \Delta \longrightarrow \ell_s = C_s \Delta$$

با تبدیل ابعادی

$$\bar{S} = (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{\frac{1}{2}} \longrightarrow V_s = \ell_s \bar{S} = C_s \Delta \bar{S} \qquad (6.48)$$

$$\nu_r = l_s^2 \bar{S} = (C_s \Delta)^2 \bar{S} \qquad (6.48)$$

نکته: مشاهده می‌شود که هرچقدر Δ کوچکتر باشد، آنگاه دقت بالاتر می‌رود و قسمت ν_r حذف می‌شود.

Exercise: show that for free shear flow Eq. (6.48) is simplified to:

$$\nu_r = l_s^2 \left| \frac{d\bar{U}}{dy} \right|$$

VI.3.2 test of model performance

1) "A priory" Having DNS Data or Experimental results, and by using them and do some processes like filtering

- برای مثال در مدل Smagorinsky که ما به دنبال τ_{ij}^r هستیم، به صورت زیر است.

$$\tau_{ij}^r = \overline{U_i U_j} - \bar{U}_i \bar{U}_j - \frac{1}{3}\left[\overline{U_k U_k} - \bar{U}_k \bar{U}_k\right]\delta_{ij} \simeq -2 (C_s \Delta)^2 \bar{S} \bar{S}_{ij}$$

توضیح مهم: ما در حل LES نمی‌توانستیم سمت راست معادله را بدست بیاوریم و به همین دلیل از مدل سازی استفاده کردیم. اما ما در این مسئله داده‌های DNS را داریم و می‌توانیم هر دو سمت را محاسبه کنیم و سپس با هم مقایسه کنیم که مدل سازی ما چقدر به واقعیت نزدیک است و در واقع صحت مدل سازی را بررسی کنیم.

Subject
Date

* نکته: دقت شود باید مقدار متوسط (statistics) را باهم مقایسه کنیم. دقیقا مشابه کاری که در تمرین شماره‌ی دوم انجام دادیم. یعنی:

$$a \equiv b \longrightarrow \langle a\rangle \equiv \langle b\rangle \text{ یا } \langle ab\rangle \equiv \langle a^2\rangle \longrightarrow \frac{\langle ab\rangle}{\langle a^2\rangle} \equiv 1$$

$\frac{\langle ab\rangle}{\langle a^2\rangle}$ → corelation coeficient

* در واقع در بررسی‌ها اول باید ببینیم این corelation coeficient چقدر به عدد یک نزدیک است تا بتوانیم دقت را بدست بیاوریم.

2) "A posteriori" test

در این شبیه سازی، این بار برخلاف حالت قبل، حل LES را انجام می‌دهیم. آنگاه با حل DNS هم که داریم این شبیه سازی را انجام می‌دهیم به صورت دقیق (فیلترگیری از سرعت‌ها) و باهم مقایسه می‌کنیم. دقت شود که مشابه با چیزی که گفتیم باید مقادیر متوسط را با یکدیگر مقایسه کنیم.

$$\text{LES} \longrightarrow \bar{u}_i$$

$$\text{Experiment or DNS} \longrightarrow u_i \xrightarrow{\text{Filter}} \bar{u}_i$$

$\equiv$

- در نزدیکی دیواره، ضریب C_s به سمت صفر میل می‌کند در حالی که C_s در مدل Smogorisky ثابت است. به همین دلیل از مدل‌های دیگر استفاده می‌شود در حال حاضر

- بنابراین از مدل دینامیکی Smogorinsky استفاده می‌شود که در ادامه توضیح داده خواهد شد.

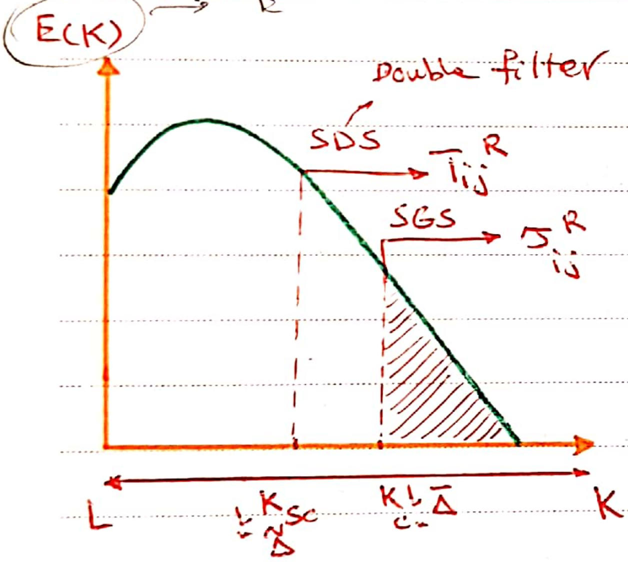
VI.3.3 the dynamic Smogorinsky model

- در مدل سازی دینامیک یک فیلتر اضافی هم می‌گیریم:

$(\bar{\ }) \longrightarrow$ first filter $\bar{u}_i$ $\quad (\bar{\Delta} = h) \rightarrow$ سایز شبکه

$(\tilde{\ }) \longrightarrow$ Second filter $\quad (\tilde{\bar{\Delta}} = 2\bar{\Delta})$.

نماد اینم $\rightarrow \tilde{\bar{\ }}$



* double filter هم به صورت $\tilde{\bar{\Delta}}$ است که می‌توان یک فیلتر معادل هم تعریف کرد چون هر دو فیلترگیری‌ها از یک نوع هستند (box filter).

* اینکه چرا دو بار فیلتر اعمال کرده‌ام را می‌توان با نمودار روبه‌رو نشان داد. هدف ما در مدل سازی LES این است که می‌خواهیم فقط قسمت فیلترگیری شده را مدل کنیم. اما مشکل ما مدل سازی τ_{ij}^R است.

$$u = \bar{u} + u' \longrightarrow u = \underbrace{\tilde{\bar{u}}}_{\text{Doubly filter field}} + \underbrace{\bar{u} - \tilde{\bar{u}}}_{\text{resolved subtest scales between } \bar{\Delta} \text{ and } \tilde{\bar{\Delta}}} + \underbrace{u'}_{\text{SGS (smaller than } \bar{\Delta})}$$

- در واقع وقتی ما فیلتر دوم را می‌گیریم، در subfilter دوم ما بعضی ترم‌ها را داریم، بنابراین می‌توانیم از تشابه بین ۲ فیلتری که این subfilter روی قسمت resolved می‌گذارد استفاده کنیم برای مدل سازی قسمت اول.

Subject

Date

Note: the double filter operation can be regarded as a single filter with an equivalent width of $\tilde{\bar{\Delta}}$.

Exercise: show that for Gaussian filter we have:

$$\tilde{\bar{\Delta}} = \left(\bar{\Delta}^2 + \tilde{\Delta}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (6.50)$$

* نکته * دقت شود که عرض فیلتر دوم حتماً بزرگتر از فیلتر اولی است. چرا که اگر کوچکتر باشد، ما اصلاً داده نداریم در یک عرض کوچکتر از آن، یعنی آنجا که بر بهترین عددی بخواهیم فیلتری کوچکتر از عرض شبکه در نظر بگیریم.

SGS stress: $\tau^R_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \qquad (6.30)$

SDS stress: $T^d_{ij} = \widetilde{\overline{u_i u_j}} - \tilde{\bar{u}}_i \tilde{\bar{u}}_j \qquad (6.51)$

Resolved part of SDS: $\mathcal{L}_{ij} = T^d_{ij} - \tilde{\tau}^R_{ij} = \widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \tilde{\bar{u}}_i \tilde{\bar{u}}_j \qquad (6.52)$

* قسمت 6.52 را کامل می‌توانیم بدست بیاوریم.

- Using modified Smogarinsky model for both SGS and SDS tensor:

$$\underbrace{\tau^R_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij}}_{\tau^r_{ij}} = -2 C_s \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}$$

$$\underbrace{T^d_{ij} - \frac{1}{3} T^d_{kk} \delta_{ij}}_{T^r_{ij}} = -2 C_s \tilde{\bar{\Delta}}^2 |\tilde{\bar{S}}| \tilde{\bar{S}}_{ij}$$

* هدف ما محاسبه‌ی آسانتر این خطاها بود که $\mathcal{L}_{ij}$ را.

PAPCO

Subject
Date

« جلسهٔ سیزدهم »

- جلسهٔ گذشته می‌توانیم با استفاده از l_{ij} ، C_s را بدست بیاوریم:

$$l_{ij}-\frac{1}{3}l_{kk}\delta_{ij}=T^{r}_{ij}-\tilde{T}^{r}_{ij}=-2C_s\tilde{\bar{\Delta}}^2|\tilde{\bar{S}}|\tilde{\bar{S}}_{ij}+2C_s\bar{\Delta}^2\widetilde{|\bar{S}|\bar{S}_{ij}}$$

* فرض می‌کنیم C_s ثابت باشد تا از فیلترگیری بتواند بیرون بیاید.

$$\rightarrow l_{ij}-\frac{1}{3}l_{kk}=C_sM_{ij},\quad M_{ij}=2\bar{\Delta}^2\widetilde{|\bar{S}|\bar{S}_{ij}}-2\tilde{\bar{\Delta}}^2|\tilde{\bar{S}}|\tilde{\bar{S}}_{ij}\qquad(6.53)$$

Exercise: show that M_{ij} is a symetric Tensor and $M_{kk}=0$. therefore, argue that there are only 5 independent equation in Eq (6.53).

$$eq=\sum_{i=1}^{9}(error)_i^2=\left(l_{ij}-\frac{1}{3}l_{kk}\delta_{ij}-C_sM_{ij}\right)\left(l_{ij}-\frac{1}{3}l_{kk}\delta_{ij}-C_sM_{ij}\right)$$

Exercise: By expanding eq and minimizing it with respect to C_s, ie. $\frac{\partial eq}{\partial C_s}=0$, determine that C_s is equall to:

$$C_s=\frac{(M_{ij}l_{ij})}{(M_{kl}M_{kl})}\qquad(6.55)$$

Note 1: Many deficiens of smagorinsky model are resolved by using the dynamic version. for example $C_s\rightarrow 0$ as $y\rightarrow$ near wall

Note 2: the local values of C_s, calculate by Eq. 6.55 has large fluctuations over the domain which results in unstable simulation. To over come this issue, the following formula is proposed by Germana et al.

P4PCO

Subject
Date

$$C_s = (M_{ij} l_{ij})_{ave} / (M_{kl} M_{kl})_{ave} \qquad (6.56)$$

* متوسط‌گیری در راستاهای بالا برای نواحی همگن انجام می‌شود مثل تمرین سر کلاس که متوسط‌گیری در سه راستا انجام دادیم.

* در پروژه‌ی ۳ شماره‌ی دوم، یک مسئله‌ی یک بعدی همگن است پس برای آن پروژه تنها یک C_s خواهیم داشت.

Note 3: In some references, the formulate of the dynamic models involve $\tilde{\Delta}$ in place of $\tilde{\bar{\Delta}}$.

- مدل‌های LES زیاد هستند، یک مدل که از مدل Smagorinsky بهتر است را اینجا توضیح می‌دهیم.

VI.3.4 Alternative SGS modeling

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \tau_{ij}^R \qquad (6.30)$$

- در قسمت‌های قبل از جداسازی بالا استفاده کردیم و سپس τ_{ij}^R را مدل‌سازی کردیم که تمام بحث‌ها هم همان بود. حال برای مدل‌سازی τ_{ij}^R می‌توان جور دیگری نوشت که بهتر است که توسط Germano ارائه شده است:

$$\tau_{ij}^R = \underbrace{\mathcal{L}_{ij}^{o}}_{\text{Leonard stress}} + \underbrace{C_{ij}^{o}}_{\text{cross stress}} + \underbrace{R_{ij}^{o}}_{\text{SGS Reynolds stress}}$$

$$\mathcal{L}_{ij}^{o} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j \qquad (6.58) \qquad \text{resolved}$$

$$C_{ij}^{o} = \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{u'_i \bar{u}_j} - \bar{\bar{u}}_i \bar{u}'_j - \bar{u}'_i \bar{\bar{u}}_j \qquad (6.59) \qquad \text{unresolved}$$

Subject
Date

$$R^{\circ}_{ij} = \overline{u'_i u'_j} - \overline{u'_i}\,\overline{u'_j} \qquad (6.60) \qquad \text{(unresolved)}$$

Exercise: show that for $\tilde{\Delta} = \bar{\Delta}$, the Leonard stress, $\mathcal{L}^{\circ}_{ij}$, is the same as the resolved SDS stress, ℓ_{ij}.

- Based on Germanov's decomposition, the unclosed term $\overline{u_i u_j}$ is devided into:

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \mathcal{L}^{\circ}_{ij} + \underbrace{C^{\circ}_{ij} + R^{\circ}_{ij}}_{\to\, \tau^K_{ij}} \quad \text{unresolved} \xrightarrow{\quad} \text{modeling}$$

eg. using Smagorinsky model for τ^K_{ij} instead of τ^R_{ij} (Bardina's

$$\tau^K_{ij} - \frac{1}{3}\tau^K_{\ell\ell}\,\delta_{ij} = -2C_s \bar{\Delta}^2 |\bar{S}|\,\bar{S}_{ij} \qquad (6.62)$$

- It can be shown that (HW#3), a dynamic version of Bardina model can be proposed (using Eq.(6.55) and Eq.(6.56)) for determining C_s with the only difference that ℓ_{ij} in Eq.(6.56) should be replaced with ℓ^B_{ij} where:

$$\ell^B_{ij} = \ell_{ij} - H_{ij} \qquad (6.63)$$

$$H_{ij} = \widetilde{\overline{\tilde{u}_i}\,\overline{\tilde{u}_j}} - \overline{\tilde{\tilde{u}}_i}\,\overline{\tilde{\tilde{u}}_j} - \left(\widetilde{\bar{u}_i\bar{u}_j} - \bar{\bar{\tilde{u}}}_i\bar{\bar{\tilde{u}}}_j\right) \qquad (6.63')$$

Subject
Date

Subject
Date

« جلسه‌ی چهاردهم »

VI.4 Numerical of LES in physical space

- Finite diference

VI.4.1 overview of CFD

goal: Navier_Stokes equation solution

Steps:

1) computitional grid
- structured mesh
- unstructured mesh = for complex geometries.

2) Solution algorithm
- a) density-based (High Mach)
- b) pressure-based (Low mach)

for pressure_based
- pressure-velocity decoupling
  - Simple
  - projection
  - ....
- odd-even decoupling
  - Staggered grid
  - Collocated

3) Discritization method
- FD (simple geometry)
- FV
- Finite element
- Spectral method

P4PCO

Subject
Date

4) Treating boundary conditions

5) Numerical solution of the set of algebric equations

- Gaus – Sidel
- TDMA
- pre – conditioning
- Multi – grid

VI.4.2 CFD considration for LES . LIS Vs RANS

Dimensions of the problem:
- → RANS: 2D stationary is possible but in LES: 3D and Transient.
- → LES: grid Fine but coarser than DNS

Discretization:
- → RANS: upwind – based
- → LES: high – order conservation

Boundary condition:
- → RANS: mean fields
- → LES: realization

VI.4.3 the properties of discretization scheme + cosnistency: stability and convergence

discretized equation $\xrightarrow{\text{consistency}}$ differential equation

$\Delta x \to 0$

$\Delta t \to 0$

PAPCO

Subject

Date

Error $\xrightarrow[\text{soulotion evolution}]{\text{stability}}$ boundary of Error

solution of disc. equation $\xrightarrow[\Delta x \to 0,\ \Delta t \to 0]{\text{convergence}}$ solution of diff eq

* اگر دو شرط اول برقرار باشند، شرط نهایی حتماً برقرار خواهد بود:

Consistency + Stability $\longrightarrow$ Convergence

- accuracy or order of discretization

Truncation Error $\longrightarrow$ Diff. Eq = Dis. Eq + Truncation error

$O(\Delta x^n, \Delta t^m)$

- monotonocity : to prevent instability due to the generation of oscilations in regions of high gradients.

- Conservativity : (High Reynolds) $\begin{cases} \to \text{DNS} \\ \to \text{LES} \end{cases}$

P4PCO

Subject

Date

VI.4.4 conservativity properties of differencial equation

ابتدا منظور از conservativity در خود معادلات دیفرانسیل را بیان می‌کنیم و سپس می‌خواهیم ببینیم معادلات گسسته سازی شده هم این خاصیت را داشته باشند.

- Consider the following diff equation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \overset{1}{Q}(\phi) + \overset{2}{Q}(\phi) + \cdots = 0 \qquad (6.76)$$

the Term $\overset{K}{Q}(\phi)$ is conservative if it can be written in divergence form, i.e.

$$\overset{K}{Q}(\phi) = \hat{\nabla} \cdot \left(\overset{K}{\hat{F}}(\phi) \right) = \frac{\partial \overset{K}{F}_j(\phi)}{\partial x_j} \qquad (6.77)$$

* این بدان معناست که این ترم‌ها روی مرز عمل می‌کنند مثل شار.

where $\hat{F}$ is called the Flux of ϕ. To see the conservativity property, Eq. (6.76) is integrated over a fixed domain.

$$\int_{\text{Domain}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \overset{K}{F}_j}{\partial x_j} + \cdots \right) d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_D \phi \, d\forall + \oint_S \overset{K}{F}_j(\phi) \, \underbrace{n_j \, d_S}_{d_A} + \cdots = 0$$

* نکته مهم: مشاهده می‌شود که در این معادله اثر تغییرات ϕ ناشی از جملاتی است که اثرشان دارند روی مرزها، Source Term در معادله نیست. وقتی در معادله Source Term نداشته باشیم، می معادله پایستار یا conservative است.

« جلسه‌ی پانزدهم »

Now consider Navier–Stokes equation

نکته ما در جلسه‌ی قبل conservative بودن یک معادله‌ی کلی را نشان دادیم. حال می‌خواهیم ببینیم که خود معادلات ناویر- استوکس هم این خاصیت را دارند یا خیر.

– از نوشتن بوم روا استفاده می‌کنیم:　　$(\text{Cont.}) = 0$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\text{Conv.})_i + (\text{pres.})_i + (\text{Diff.})_i = 0 \qquad (6.79)$$

$$(\text{cont.}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \ , \ (\text{press.})_i = \frac{\partial p}{\partial x_i} \ , \ (\text{Diff.})_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad (6.80)$$

*جمله‌ی ناوئلش را می‌توانیم به چند صورت بنویسیم:

$$(\text{Div})_i = \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \qquad (6.81)$$

$$(\text{Adv})_i = u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (6.82)$$

$$(\text{Skew})_i = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{2} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (6.83)$$

$$(\text{Rot.})_i = u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j u_j}{\partial x_i} \qquad (6.84)$$

نکته دقت شود که همه‌ی این معادلات برای ترم convection از لحاظ معادله دیفرانسیلی شبیه به هم هستند اما وقتی گسسته سازی انجام می‌دهیم هر کدام با دیگری فرق خواهد داشت از نظر خطا که به بررسی این موضوع خواهیم پرداخت.

نکته همه‌ی معادلات پیوستگی و مومنتم به صورت primary ، conservative هستند چرا که می‌توانیم به صورت دیورژانس کمیت بنویسیم. اگر انرژی جنبشی هم معادله‌اش conservative باشد آن‌گاه می‌گوییم ترم‌ها به صورت secondary هم conservative هستند.

PAPCO

Subject
Date

- Now consider the Transport equation of the Kinetic energy, $\frac{u_i u_i}{2}$,

$$u_i \cdot (\text{momentum})_i = \frac{\delta u_i u_i/2}{\delta t} + u_i \cdot (\text{conv})_i + u_i \cdot (\text{pres})_i + u_i (\text{Diff})_i = 0 \quad (6.85)$$

- حال باید ببینیم هر کدام از جملات conservative هستند یا نه :

$$u_i \cdot (\text{pres})_i = \frac{\delta p u_i}{\delta x_i} \quad p\,(\cancel{\text{cont.}})_{\to 0} \longrightarrow \text{conservative}$$

* همانطور که مشاهده می کنید جمله ی بالا را می توان به صورت دیورژانس نوشت $\nabla \cdot (pu)$ ، بنابراین این جمله conservative است.

$$u_i \cdot (\text{Diff})_i = \frac{\delta \tau_{ij} u_i}{\delta x_j} - \tau_{ij} \frac{\delta u_i}{\delta x_j} \longrightarrow \text{non-conservative}$$

$$u_i \cdot (\text{Div})_i = \frac{\delta u_j u_i u_i/2}{\delta x_j} - \frac{1}{2} u_i^2 \,(\cancel{\text{cont.}})^{0} \longrightarrow \text{conservative}$$

- بنابراین مشاهده می شود که ترم convection ، که سرعت هم در معادله ی مومنتوم و هم در معادله ی انرژی conservative است ، بنابراین می گوییم fully conservative است.

حال به سراغ معادلات discretize شده می رویم.

VI.4.5 conservativing properties of discretization scheme

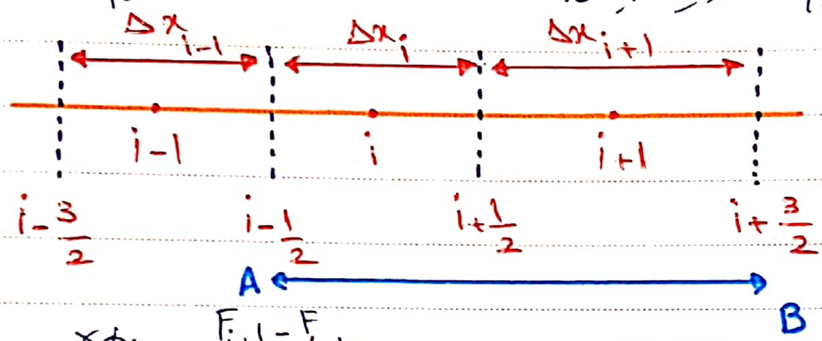
$$\frac{\delta \phi}{\delta t} + \frac{\delta F(\phi)}{\delta x} = 0 \quad (6.86)$$

P4PCO

Subject
Date

می‌دانیم که معادله‌ی 6.86 در حالت معادله دیفرانسیلی همانطور که قبلاً توضیح داده شد conservative، است. حالا می‌خواهیم در حالت گسسته سازی شده بررسی کنیم:

- ابتدا شبکه را مشخص می‌کنیم که ما از اینجا از یک شبکه non-uniform استفاده می‌کنیم:



$$[disc]_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-1/2}}{\Delta x_i} = 0 \qquad (6\text{-}87)$$

* دقت شود گسسته‌سازی بالا فعلاً فقط روی فضا (مکانی) گسسته سازی شده است. برای زمانی بعداً گسسته سازی انجام داده خواهد شد.

$$[disc]_{i+1} = \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial t} + \frac{F_{i+3/2} - F_{i+1/2}}{\Delta x_{i+1}}$$

نکته مهم برای اینکه معادله‌ی discrete شده هم conservative باشد باید اثر تغییرات ناشی از مرزها باشد. می‌خواهیم برای حجم کنترل نشان داده شده ببینیم تغییرات ناشی از چی است؟

- writing Eq.(6.87) for each cell in A-B and integrating the discrete equations on A-B yeilds:

نقاط مرزی

$$(disc)_i \Delta x_i + (disc)_{i+1} \Delta x_{i+1} = \frac{\partial}{\partial t}(\phi_i \Delta x_i + \phi_{i+1} \Delta x_{i+1}) = F_{i+\frac{3}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}$$

- همانطور که مشاهده می‌کنید این گسسته سازی، conservative است.

P4PCO

Subject
Date

- حال باید مثل گسسته‌سازی دیگری ببینیم که conservative وجود ندارد:

- Rewriting Eq.(6.86) as

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + a(\phi)\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 , \quad a(\phi) = \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi} \qquad (6.89)$$

- دقت شود که معادله‌ی بالا هم conservative است، فقط با استفاده از مشتق زنجیری به این فرم نوشته شده است. حال می‌بینیم که اگر از این شکل گسسته‌سازی را انجام دهیم، معادله‌ی تفاضلی conservative نخواهد شد:

$$(\text{disc})_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + a_i \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-1/2}}{\Delta x_i} \qquad (6.90)$$

Integrate Eq.(6.90) over region A-B yields:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_i \Delta x_i + \phi_{i+1}\Delta x_{i+1}\right) + a_{i+1}\left(\phi_{i+3/2}\right) - a_i\left(\phi_{i-\frac{1}{2}}\right) + \phi_{i+\frac{1}{2}}\left(a_i - a_{i+1}\right) = 0$$

- therefore, discretization Eq.(6.87) is primary conservative but Eq.(6.90) is not.

- if the discrete equation of $\phi^2/2$ which is directly derived from the discreted form of ϕ is conservative, the discretization scheme is called secondary conservative.

VI.4.6 Discrete operators

Finite difference operator with stencil n in x-direction is defined as:

Subject
Date

$$\left.\frac{\delta_n \phi}{\delta_n x_1}\right|_{(x_1, x_2, x_3, t)} = \left(\delta_{nx_1}\phi\right)_{i,j,k,m} = \delta_{nx_1}\phi = \frac{\overbrace{\phi(i+\frac{n}{2}, j, k, m)}^{\phi_{i+n/2}} - \overbrace{\phi(i-n/2, j, k, m)}^{\phi_{i-n/2}}}{x(i+\frac{n}{2}) - x(i-n/2)} \quad (6.91)$$

- the interpolation operator of stencil n is defined by:

$$\left.\overline{\phi}^{nx_1}\right|_{i,j,k,m} = \frac{\phi(i+n/2)+\phi(i-n/2)}{2} \quad (6.92)$$

- A special interpolation operator is also defined by:

$$\left.\widetilde{\phi\psi}^{nx_1}\right|_{i,j,k,m} = \frac{1}{2}\phi(i+n/2)\psi(i-n/2) + \frac{1}{2}\phi(i-n/2)\psi(i+n/2)$$

$$= 2\overline{\phi}^{nx_1}\,\overline{\psi}^{nx_1} - \overline{\phi\psi}^{nx_1} \quad (6.93)$$

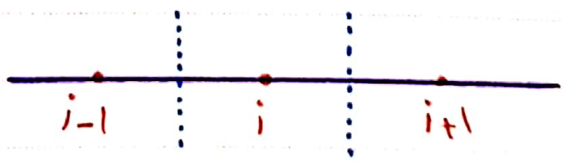
Exercise: show that

$$\delta_{nx_j}\widetilde{\phi\psi}^{nx_j} = \phi\,\delta_{2nx_j}\psi + \psi\,\delta_{2nx_j}\phi \quad (6.94)$$

$$\delta_{nx_j}\overline{\phi}^{nx_j} = \delta_{2nx_j}\phi \quad (6.95)$$

$$\phi\,\delta_{nx_j}\left(\psi\overline{\phi}^{nx_j}\right) = \frac{1}{2}\delta_{nx_j}\left(\psi\,\widetilde{\phi\phi}^{nx_j}\right) + \frac{1}{2}\phi\phi\,\delta_{nx_j}\psi \quad (6.96)$$

VI.4.7 2nd-order fully-conservative scheme on a regular grid



Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$(\text{cont.}) = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

$$(\text{cont}-R2) = \delta_{2x_i} u_i \qquad (6.97)$$

Regular ⟶ order of discret

Note:

$$\delta_{2x_i} u_i = \frac{\delta_2 u_i}{\delta_2 x_i} = \left(\frac{\delta_2 u_1}{\delta_2 x_1} + \frac{\delta_2 u_2}{\delta_2 x_2} + \frac{\delta_2 u_3}{\delta_2 x_3}\right) = \frac{u_1(i+1) - u_1(i-1)}{x_1(i+1) - x_1(i-1)}$$

$$+ \frac{u_2(j+1) - u_2(j-1)}{x_2(j+1) - x_2(j-1)} + \frac{u_3(K+1) - u_3(K-1)}{x_3(K+1) - x_3(K-1)}$$

Subject

Date

«جلسه‌ی شانزدهم»

$$(\text{Diff}-R2)_i = \delta_{2x_i} \tau_{ij} \qquad (6.98)$$

$$(\text{pres.}-R2)_i = \delta_{2x_i} P \qquad (6.99)$$

Using Eq. (6.99), the pressure term is the discrete kinetic-energy equation is:

$$u_i \cdot (\text{press}\_R2)_i = u_i \frac{\delta_2 P}{\delta_2 x_i}$$

$$\xrightarrow{\text{Eq. 6.94}} \delta_1 \frac{\widetilde{u_i P}^{1x_i}}{\delta_1 x_i} - P\,(\text{cont.}-R2) \quad \text{o due to Eq. (6.97)}$$

$$(\text{Div.}-RS2)_i = \delta_{2x_j}(u_i u_j) \qquad \text{primary conservative} \qquad (6.100)$$

- مشاهده می‌شود که جمله فشار، هم به صورت secondary conservative است در حالت discrete.
اما تانوکش این گونه نیست:

- the corresponding discrete term in the energy Eq is:

$$u_i \cdot (\text{Div.}-RS2)_i = u_i \frac{\delta_2 u_i u_j}{\delta_2 x_j} \xrightarrow{\text{Eq. 6.94}} \frac{\delta_1 \widetilde{u_i u_i u_j}^{1x_j}}{\delta_1 x_j} - u_i u_j \frac{\delta_2 u_i}{\delta_2 x_j}$$

- مشاهده می‌شود که این تقریب برای تانوکش به صورت secondary conservative نیست بنابراین به دنبال یک طرح تقریب با خاصیت secondary conservative بگردیم.

- It can be shown that a fully conservative 2nd order scheme can be proposed as:

$$(\text{Div.}-R2)_i = \delta_{1x_j}\left(\overline{u_j}^{1x_j}\, \overline{u_i}^{1x_j}\right) \qquad (6.101)$$

P4PCO

Subject
Date

- واضح است که معادله (6.101) primarly conservative است. در عملگر δ ظاهر شده
است. اما باید secondary بودنش هم اثبات شود:

Exercise show that the discretization Eq. (6.101) is secondary conservative. Hint: use the properties Eq. (6.95 and 6.96)

VI.4.8 4th order fully conservative scheme on a regular grid.

$$(\text{Cont.}\ R4)_i = \frac{4}{3}\delta_{2x_j} u_j - \frac{1}{3}\delta_{4x_j} u_j = 0 \qquad (6.102)$$

$$(\text{press.}\ R4)_i = \frac{4}{3}\delta_{2x_j} P - \frac{1}{3}\delta_{4x_j} P \qquad (6.103)$$

$$(\text{Diff.}\ R4)_i = \frac{4}{3}\delta_{2x_j} \tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{4x_j} \tau_{ij} \qquad (6.104)$$

$$(\text{Div.}\ R4)_i = \frac{4}{3}\delta_{1x_j}\left(\overline{u}_j^{1x_j}\,\overline{u}_i^{1x_j}\right) - \frac{1}{3}\delta_{2x_j}\left(\overline{u}_j^{2x_j}\,\overline{u}_i^{2x_j}\right) \qquad (6.105)$$

* روابط بالا قبل از اینکه در پروژه استفاده شود با مقاله حتماً چک شوند.

VI.4.9) 2nd-order fully conservative (in space and time)

poisson's pressure equation ⟶ Staggred grid

min30

VII. spectral description, modeling and simulation

Refrence: Eng. Num. Ana., Moin   chap 6.1–6.3

ابتدا بایستی یک تابع را با استفاده از بسط نوشت که جملات آن هم‌گرا به صفر باشد تا بتوانیم با چند جمله‌ی اول آن تابع را تخمین زد.

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_k \phi_k \qquad (7.1)$$

ϕ_k: set functions

* یکی از سری‌های معروف، سری فوریه است اما برای بعضی از توابع این جملات به تدریج به صفر میل می‌کنند؛ این توابع باید متناوب باشند. اگر توابع غیرمتناوب باشند از سری‌های چبیشف استفاده می‌کنند. در این درس فقط به توابع متناوب و سری فوریه اشاره خواهیم کرد.

VII.1.1

ابتدا بایستی set function های سری فوریه را تعریف کنیم:

$$\phi_k(x) = e^{ikx} \qquad (7.2)$$

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx \qquad (7.3)$$

این set functions خاصیت تعامد در بازه‌ی $(0, 2\pi)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi_k(x)\, \phi_{k'}^*(x)\, dx = \delta_{k,k'} = \begin{cases} 1 & ; k = k' \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases} \qquad (7.4)$$

✓ Exercise: using Eq (7.3) and first assuming $k = k'$ and then prove the orthogonality relation, Eq (7.4)

Subject

Date

using Eq. (7.2) and (7.1), the Fourier series of $f(x)$ is:

$$S f = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_K \phi_K = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_K e^{iKx} = f(x) \qquad (7.5)$$

Fourier coeficient

wave number

Fourier mode

* حال می‌خواهیم $\tilde{f}_K$ را محاسبه کنیم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (7.5)\, e^{-iK'x} d_x \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-iK'x} d_x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iK'x} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_K e^{iKx} d_x$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_K \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iKx} e^{-iK'x} d_x = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_K \delta_{K,K'} = \tilde{f}_{K'}$$

(فقط $K=K'$ صفر نمی‌شود)

$$\longrightarrow \tilde{f}_K = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-iKx} d_x = \underbrace{F\left\{ f(x) \right\}}_{\text{Forier Transform of } f(x)} \qquad (7.6)$$

* در واقع دامنه‌ی ما از بازه‌ی $(0, 2\pi)$ بوده است و با تبدیل فوریه به فضای K برده‌ایم که به آن فضای spectral می‌گوییم که فضای discrete است و به‌ازای هر K یک $\tilde{f}_K$ خواهیم داشت.

* اگر به جای x، زمان بود (t):

$$\underbrace{f(t)}_{\text{time domain}} \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} f_\omega, \omega$$

Frequency domain

* برای مثال در برنامه فصل 6 می‌توان مشاهده کرد که یک تابع را (سمت چپ) با استفاده از مجموع 4 تا تابع کسینوسی کشیده است. برای این کار تنها از 6 m استفاده کرده است.

An important property

if f is real valued:

$$\tilde{f}_{-K} = \tilde{f}_K^{*} \qquad (7.7)$$

Exercise: by using Eq (7.6) prove the above relation. you can see that in real part, there is no differe between $\tilde{f}_K$ and $\tilde{f}_{-K}$.

* For smooth periodic functions, $f(x)$ on $(0, 2\pi)$, the Fourier series expansion possesses the "spectral accuracy" property. therefore, the N-th order Trancated Fourier series is consider as:

$$P_N f = \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} \tilde{f}_K e^{iKx} = f(x) + \underbrace{T_n}_{\text{Trancation error}} \qquad (7.8)$$

* نکته: هر چقدر که تعداد مودهایی که نگه می‌داریم، بیشتر باشد، آنگاه جواب ما به $f(x)$ نزدیکتر بوده و T_n مقدار کوچکتری خواهد داشت.

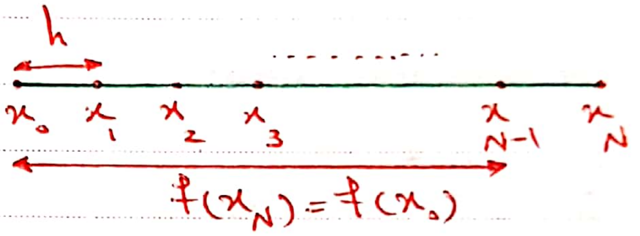
* نکته مهم: تا اینجا توانستیم یک تابع پیوسته را به فضای فوریه ببریم. اگر تابع ما ناپیوسته باشد، مشابه چیزی که در حل‌های عددی داریم باید چه کار کنیم. در قسمت بعد به این موضوع می‌پردازیم.

PAPCO

VII.1.2 Discrete Fourier series

If a periodic function f is defined only on a set of discrete set of N grid points (N is assumed even!)

uniform grid



$$x_j = jh = \left(\frac{2\pi}{N}\right) j \quad , \quad j = 0 \text{ تا } N-1$$

* دقت شود دامنه‌ی حل را ۰ تا 2π درنظر گرفته‌ایم و چون مقدار تابع در x_N و x_0 باهم برابر هستند (periodic)،
فقط نقاط x_0 تا x_{N-1} را بررسی می‌کنیم.

– the discrete Fourier series at this points is defined by:

$$f(x_j) = \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_K e^{iKx_j} \equiv f(x_j) = f_j \qquad (7.12)$$

نکته: کاری که می‌کنیم این است که در واقع ما یک interpolation انجام می‌دهیم و با استفاده از این کار ضرایب $\hat{f}_K$ را بدست می‌آوریم. درحالی که در روش قبلی برای تقریب پیوسته از رابطه‌ی 7.6 استفاده کردیم. حال با محاسبه‌ی ضرایب، می‌توانیم مقادیر تابع در نقاط غیر از gridها را هم بدست بیاوریم ولی مقدار دقیق نخواهد بود.

Note:

$$I_N f(x) = \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_K e^{iKx} = f(x) + \text{Error} \qquad (7.13)$$

for between grids.

برای روی خود Gridها
وجود ندارد.

* تمرین اضافی: در متلب کدی بنویسید که داده‌ها از فضای فوریه ببرد و سپس ضرایب مودهای بالا را حذف کند تا noise ها گرفته شوند. از آن دوباره فوریه معکوس بگیرد و به فضای فیزیکی باز گرداند.

$$I_n f(x) = \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_K e^{ikx} = f(x) + E(x)$$

$$x_j \,,\; j = 0, 1, \ldots, N-1 \quad , \quad \underbrace{K = -N/2, \ldots, N/2-1}_{N \text{ تا}}$$

* the orthogonality relation for discrete case is described by:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ipx_j} = \begin{cases} 1 \; ; & p = Nm \\ 0 \; ; & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (7.14)$$

* می‌توانیم ضرایب را به جای interpolation که باید n معادله، n مجهول حل کنیم، با استفاده از روشی که در ادامه می‌گوییم بدست بیاوریم.

✓ Exercise: show that

$$\hat{f}_K = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ikx_j} = F_N\{f_j\} \quad , K = -N/2, \ldots, N/2-1 \qquad (7.15)$$

* با استفاده از رابطه بالا می‌توانیم ضرایب سری فوریه را بدست بیاوریم، مشاهده می‌شود که تنها به مقدار نقاط (f_j) در نقاط مختلف نیاز داریم.

this is called Discrete Fourier Transform (DFT)

$$x_j \in \mathbb{R} \; ; \; j = 0, 1, \ldots, N-1 \; \underset{(7.12)}{\overset{DFT\,(7.15)}{\rightleftarrows}} \; K = -N/2, \ldots, N/2-1$$

Subject
Date

* در عملیات DFT عملیات محاسباتی زیاد است، به همین دلیل از FFT استفاده می‌کنیم که مشابه هم
از FFT (Fast Fourier Transform) استفاده می‌کنیم.

* یک سری محدودیت این کار دارد مثلاً $N = 2^n$ باید باشد.

* $\hat{f}_{-k} = \hat{f}_k^*$ if $\hat{f}_j$ are real.

* تا اینجا دامنه‌ی حل ما ۰ تا 2π بود. حال روابط کلی‌تر برای دامنه‌ی L را می‌نویسیم:

VII.1.3 Extension to general case of period lenght L

In this case, the base functions are defined as:

$$\phi(x) = e^{i(\frac{2\pi}{L})kx} \qquad (7.17) \quad , \quad \omega_k = \left(\frac{2\pi}{L}\right)k$$

wave number

* در این حالت دیگر wave number حتماً عدد صحیح نخواهد شد. در این حالت اگر گفتیم wave number برابر 2 است، منظور ω_2 است.

* All definitions of section VII.1.1 and VII.1.2 are valid replacing 2π with L and k with $(\frac{2\pi}{L})k$.

In Eq. (7.12), $x_j = jh = j\left(\frac{L}{N}\right)$

$$\rightarrow f_j = \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_K e^{i\left(\frac{2\pi}{L}\right)K\left(\frac{L}{N}\right)j} = \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_K e^{iK\left(\frac{2\pi}{N}\right)j} = \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_K e^{iKx_j}$$

* نکته مهم: همانطور که مشاهده می‌کنید این رابطه دقیقاً مشابه معادله‌ی (7.12) است. این دلیل آن است که مشتق هم از ما L نمی‌خواهد. فقط وقتی f_j را محاسبه کرد در بازه L تقسیم‌بندی را انجام خواهد داد.

* تا اینجا با چندین سری فوریه آشنا شدیم. اولی Sf بود که در آن مقدار دقیق را بدست می‌آوردیم. دومین $P_n f$ بود که برخی مودها را نگه داشتیم و بقیه را حذف کردیم پس یک Error داشت (7.8). در نهایت هم $I_n f$ را بدست آوردیم که این هم حتماً خطایی خواهد داشت.

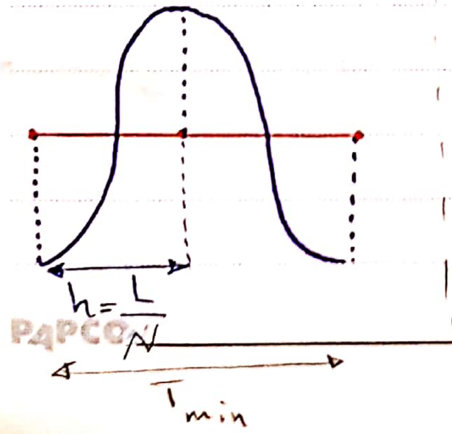
$$I_n f = P_n f + \underbrace{R_N}_{\text{alising Error}} = Sf + R_N + \underbrace{T_N}_{\text{Trancation Error}} \qquad (7.18)$$

* قبل از اینکه خطای alising را توضیح دهیم می‌خواهیم ببینیم که به صورت discrete داده داریم، وقتی به فضا فوریه می‌بریم، چه مودهایی را می‌توان نشان داد و چه مودهایی را نمی‌توان نشان داد.

Example 1: what is the maximum wave number, the Fourier mode with minimum period that can be represented a specific grid $\left(h = \frac{L}{N}\right)$?

$$e^{i\left(\frac{2\pi}{L}\right)Kx} = \cos\left(\frac{2\pi}{L}Kx\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{L}Kx\right) \xrightarrow{\text{period}} T_K = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{L}K} = \frac{L}{K}$$

$$\rightarrow T_{min} = \frac{L}{K_{max}} = 2h = \frac{2L}{N} \longrightarrow K_{max} = N/2 \qquad (7.19)$$



* مشاهده می‌شود که در یک grid خاص تا مود $K = N/2$ می‌توانیم داشته باشیم و بقیه حذف خواهند شد.

Subject
Date

Example 2: consider $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{8}\cos 6x$ is defined on N discrete points on interval $(0, 2\pi)$, where $x_j = \left(\frac{2\pi}{N}\right) j$, $j = 0, \dots, N-1$

* برای این مثال می‌توانیم ضرایب سری فوریه را به صورت دقیق محاسبه کنیم. با استفاده از معادلهٔ 7.12:

$$\rightarrow f_j = \cos x_j + \frac{1}{2}\cos 2x_j + \frac{1}{4}\cos 3x_j + \frac{1}{8}\cos 6x_j = \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_K (\cos K x_j + i \sin K x_j)$$

* ابتدا شبکه را به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیریم:

for $N/2 - 1 \geq 6 \rightarrow N \geq 14$

$$\hat{f}_K = \begin{cases} \frac{1}{2} \ ; & K = \pm 1 \\ \frac{1}{4} \ ; & K = \pm 2 \\ \frac{1}{8} \ ; & K = \pm 3 \\ \frac{1}{16} \ ; & K = \pm 6 \\ 0 \ ; & \text{otherwise} \end{cases}$$

* نکته: اگر که grid ما کوچکتر شود، آن‌گاه تراکم‌هایی داشتیم مثلاً $K=6$ را ممکن است نداشته باشد. در این حالت جمله‌ی آخر خود را در غیاب یکی از جملات که مود آن‌ها کمتر است خود را نشان خواهد داد که به این حالت که خطا ایجاد می‌کند، خطای Alising می‌گویند که در مثال بعدی نشان خواهیم داد.

* حال فرض می‌کنیم شبکه به صورت روبه‌رو باشد:

$N = 8$

$$\hat{f}_K = \begin{cases} \frac{1}{2} \ ; & K = \pm 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \ ; & K = \pm 2 \\ \frac{1}{8} \ ; & K = \pm 3 \\ 0 \ ; & \text{otherwise} \end{cases}$$

* نکته: دقت شود در این حالت نمی‌توانیم تحلیلی باهم مقایسه کنیم چون وقتی $N=8$ است، دیگر بیشترین K ما 4 خواهد بود. پس باید از معادلهٔ (7.15) استفاده کنیم که با استفاده از آن نتیجه‌ی روبه‌رو بدست خواهد آمد:

* در شکل برگه‌ی فصل هفتم، در قسمت دوم مشاهده می‌شود که این عامل باعث خطای تعدیه نمودار Alised تشبیه شده است که این نمودار smoth تر شده است که به خاطر این است که فرکانس بالا حذف شده است.

$x_j = 0 \longrightarrow K = -N/2$

$x_j = 1 \longrightarrow K = -N/2 + 1$

می‌دانیم چرا $-N/2$ داریم، $N/2$ نداریم. اگر با $N/2$ هم حساب کنیم چون باید دریا داریم f دقیق باشد.

Subject
Date

«جلسه‌ی نوزدهم»

در جلسه‌ی گذشته توضیح دادیم که ممکن است برخی مودها برای یک grid خاص قابل نمایش نباشند. حال این مودها خود را در قالب مودهایی که قابل نمایش هستند ظاهر می‌کنند. با استفاده از رابطه‌ی زیر می‌توان تشخیص داد کدام مود تحت تأثیر مود حذف شده قرار می‌گیرد:

قابل نمایش → $|K| \leq N/2$

$K' = K + mN$

* مثلاً در مثال قبل داشتیم: $K' = -6 \xrightarrow{2+(-1)\times 8} K = 2$

$K' = 6 \xrightarrow{-2+(1\times 8)} K = -2$

* رابطه‌ی بین $\tilde{f}_K$ و $\hat{f}_K$ که اولی حالت پیوسته است و دومی حالت گسسته است، تفاوت اینها همان خطای Alising است.

$$\text{Eq 7.15} \longrightarrow \hat{f}_K = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{f(x_j)}_{\text{Eq.7.5}} e^{-iKx_j} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left[\sum_{K'=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_{K'}\, e^{iK'x_j}\right] e^{-iKx_j}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{K'=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{K'}\,\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{i(K'-K)x_j}$$ ، $K'-K = mN \longrightarrow K' = K + mN$ از رابطه‌ی Eq 7.14

$$\longrightarrow \hat{f}_K = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_{K+mN} = \tilde{f}_K + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{+\infty} \tilde{f}_{K+mN} \qquad (7.20)$$

* رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد که ضریب مود Kام در حالت گسسته برابر ضریب Kام در حالت پیوسته به علاوه‌ی ضریب مودهای $\tilde{f}_{K+mN}$ حالت پیوسته است.

Note:

$$I_n f(x) = \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_K e^{iKx} = P_n(x) + \underbrace{\sum_{K=-N/2}^{N/2-1}\left(\sum_{\substack{-\infty \\ m\neq 0}}^{+\infty} \tilde{f}_{K+mN}\right) e^{iKx}}_{R_N}$$

* رابطه‌ی بالا به این صورت به وجود آمد که از طرفین معادله‌ی (7.20)، $\sum_{K=-N/2}^{N/2-1}$ گرفتیم و در e^{iKx} ضرب کردیم.

P4PCO

Subject

Date

VII.15 Discrete Fourier Transform of a product - Alaising

* برای اینکه خطای Alising را کم کنیم باید grid را ریزتر کرد تا جملات بیشتری بتوانیم نگه داریم اما شاید نتوانیم grid را ریزتر کنیم. در این قسمت می‌خواهیم جلوی انباشته شدن خطای Aliasing را بگیریم. مشابه کاری که برای غیر Conservative بودن معادلات کردیم.

* جمله غیرخطی عامل به وجود آمدن خطای Aliasing است به دلیل ضرب این دو جمله است. می‌توان نشان داد که ضرب در معادله می‌تواند باعث به وجود آمدن فرکانس‌های ریز شود که این فرکانس‌ها عامل به وجود آمدن خطای Aliasing هستند.

$$\left.\begin{matrix} f(x) \\ g(x) \end{matrix}\right\} \longrightarrow H(x) = f(x)\,g(x)$$

Example: consider $f(x) = \sin 2x$ and $g(x) = \sin 3x$ on a grid $N=8$, these functions are described on $N=8$ grid without aliasing becase

$$\tilde{f}_K = \begin{cases} -i/2 & K=2 \\ +i/2 & K=-2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \longrightarrow 2 \leqslant 3 \longleftrightarrow \boxed{N/2 - 1 = 3} \longleftrightarrow 3 \leqslant 3 \longleftarrow \tilde{g}_K = \begin{cases} -i/2 & K=3 \\ i/2 & K=-3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

But : $H(x) = f(x)\,g(x) = \sin 2x \cdot \sin 3x = 0.5(\cos x - \cos 5x)$ which can not be described on $N=8$

نکته * باید این صورت عمل کنیم که جملاتی مثل $\cos 5x$ را حذف کنیم تا خود را به عنوان Alaising در مودهای بزرگتر نشان ندهند و این صورت اگر حذف کنیم آن را به عنوان خطا قبول کرده‌ایم و این بهتر از این است که مخرب مودهای دیگر نیز اشتباه شوند.

$$\hat{H}_m = (\hat{fg})_m = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \overbrace{f_j g_j}^{\text{Eq 7.12}} \underbrace{e^{-imx_j}}_{} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} \sum_{K'=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_K \hat{g}_{K'} e^{iKx_j} e^{iK'x_j} e^{-imx_j}$$

Eq 7.12

$$= \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} \sum_{K'=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_K \hat{g}_{K'} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(K+K'-m)x_j}}_{(\mathrm{I})}$$

PAPCO

Subject
Date

(Eq. 7.14)

(I) is non zero if $K_r = K + K' - m - pN$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

* تنها جملاتی که غیر صفر هستند به ازای $p = 0, \pm 1$ هستند یعنی $K_r = 0, N, -N$. اما باید دقت شود که $|K_{max}| = N/2$ بنابراین باید جملات N و $-N$ را حذف کنیم و بدین ترتیب تنها جمله‌ای که باقی خواهد ماند $K = 0$ است. به این ترتیب دیگر خطای Alaising نخواهیم داشت.

$$\rightarrow \hat{H}_m = \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_K \hat{g}_{m-K} \qquad m = -N/2, \dots, N/2-1 \qquad (7.22)$$

$$|m-K| < N/2 \qquad O(N^2)$$

this is called convolution sum of the Fourier coefficient of f and g

* نکته: با توجه به اینکه رابطه‌ی (7.22) از مرتبه‌ی N^2 است، از روش‌هایی که مرتبه‌ی محاسباتی کمتری دارند استفاده می‌شود که در بخش بعدی به آن اشاره خواهیم کرد.

VII.1.6 pseudo-spectral transform - padding method

فلسفه‌ی این روش به این صورت است که می‌گوید قبل از اینکه حاصل ضرب را انجام بدهیم، به صورت مجازی grid را ریزتر کن تا بتوانی فرکانس‌های زیر خودشان را نشان بدهند و ضریب فوریه‌ی آن‌ها را بدست بیاور و سپس ضریب‌های مربوط به آن فرکانس‌های زیر را حذف کن. به این ترتیب این روش دارای مرتبه‌ی محاسباتی $O(N \log_2 N)$ خواهد بود.

this method simply uses more grids, M, to avoid alising. It can be shown that $M = 3N/2$ is sufficient. But when FFT is used for Transformation, we have to use $M = 2^N$.

Subject
Date

مراحل استفاده از این روش ها به صورت زیر است که در تمرین تحویلی باید اعمال شوند:

step (i): Transform $\hat{f}_K$ and $\hat{g}_K$ to physical space (f_j and g_j) on M grid Nodes. by using inverse FFT.

$\boxed{N = \text{even}}$ ، $\boxed{f \text{ and } g \text{ are real}}$

گفتیم که در این روش grid را ریزتر می‌کنیم بنابراین تعداد grid از تعداد مودها بیشتر است:

$\hat{g}_K \cdot \hat{H}_K = 0$

$$\underbrace{\underbrace{-M/2, \dots\dots,}_{\hat{f}_K, \hat{g}_K = 0} \; \underbrace{-N/2, \dots, N/2 - 1,}_{\text{initial } \hat{f}_K \text{ and } \hat{g}_K} \; \underbrace{\dots\dots, M/2 - 1}_{\hat{f}_K, \hat{g}_K = 0}}$$

$\xrightarrow{\text{Inverse FFT}}$ f_j and g_j , $j = 0, \dots, M-1$

step (ii): compute H_j on the Fine grid, i.e.

$H_j = f_j g_j \; : j = 0, \dots, M-1$

step (iii): we FFT to compute $\hat{H}_K$, i.e.

$H_j \xrightarrow{FFT} \hat{H}_K \; ; \; K = -M/2, \dots, M/2 - 1$

$\hat{H}_K = 0$

step (iV): Keep $\hat{H}_K$ for $K = -N/2, \dots, N/2 - 1$ and discard the others.

نکته هر وقت FFT گرفتیم، $\hat{f}_K$ و $\hat{g}_K$ را برای $-N/2$ برابر صفر بگیر

PAPCO

«جلسه‌ی بیست و [illegible] : توضیحات پروژه‌ی دوم»

project 2: A postoriory study - Burgerence

1D stochastic Burger equation (SBE)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta(x,t) \quad , \quad \eta(x,t) = \sqrt{\frac{2D_0}{\Delta t}}\, F^{-1}\left\{ |k|^{\beta/2} \hat{f}(k) \right\} , \ \beta = \frac{-3}{4}$$

* η یک source ترم است که لازم نیست بلدیم، با استفاده از دستور در هر تصلم می توانیم این را بدست بیاوریم.

* برای پروژه از فایل SBE-Template.m استفاده شود و سایر کدها با توجه به راهنمایی ها نوشته شوند.

$$\overset{\eta}{f} = \text{sqrt}\left(\frac{2D}{dt}\right) * \overset{\text{Transpose}}{\text{SBE-FBM}(\text{beta}, \text{NDNS})};$$

* این تابع f همان η است که با این دستور، مقدار η در همه‌ی نقاط domain به ما داده می شوند.

$j=0$	$x=0$	$k(N_x,1)$	F
⋮	⋮		⋮
$j=N_x-1$	$2\pi-d_x$		
$j=N_x$	2π		

* این قسمت برای کامل DNS بود.

Subject
Date

* برای قسمت LES، $N_x=512$ است و باید از مقادیر $\hat{f}$ که به ما می‌دهد فیلتر بگیریم چرا که در حالت اصلی ما 8192 تا grid داریم. مقادیر جدید $\hat{f}$ را در ff ذخیره می‌کنیم که در 512 نقطه است.

$$ff = \text{filter}(f)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \underbrace{\overbrace{-\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}}^{\text{conv}} + \overbrace{\nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}}^{\text{diff}} + \overbrace{\tilde{\eta}(x,t)}^{\text{ff}} - \overbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial \tau}{\partial x}}^{\text{RSG}}}_{\text{RHs}}$$

$$\text{for DNS} \longrightarrow \tau = 0$$

$$\text{for LES} \longrightarrow \tau = \tau_{11}^{R} = \widetilde{u^2} - \tilde{u}\tilde{u}$$

* با توجه به اینکه در پروژه از تجزیه فضایی مرتبه چهار استفاده می‌کنیم، بهتر است که برای ترم زمانی هم از تجزیه مرتبه‌ی چهار Range-Kuta استفاده کنیم. اما خود کد، اول از تجزیه Adam-Bashforth مرتبه‌ی دو استفاده کرده است. ابتدا با همین جواب را بدست بیاوریم، در پایان فقط ترم زمانی را هم مرتبه‌ی چهار Range-Kuta کنیم.

نکته در مسائل اگر C_s منفی شود، با اینکه می‌تواند Backscatter را بگیرد، اما حل را ناپایدار می‌کند. به همین دلیل فقط قسمت مثبت را در نظر می‌گیریم ولی نمی‌گذاریم از ۰ تا C_s تغییر کند.

$$\text{cliping} \longrightarrow C_s = \min(C_s, 0)$$

Subject
Date

Validation

* قبل از اینکه معادله‌ی Burger را حل کنیم، ابتدا برای حالت ساده‌تر حل کنیم که از حل مطمئن شویم.
این را در جریان Laminar حل می‌کنیم که برای این کار $\nu = 1$ قرار می‌دهیم.

$\eta(x,t)=0$ ، $\nu = 1$ ، $u(x,0)=10\sin x$

$N=128$ Example 6.8 moin ، Fig 6.10

* محاسبه انرژی جنبشی

$K^R = 0.5\langle \bar{u}\bar{u}\rangle$ ، versus time

ابتدا متوسط مکانی روی کل domain انجام می‌دهیم. به این ترتیب برای هر زمان روی کل domain، شما یک K^R خواهیم داشت. حال می‌توانیم برای زمان‌های مختلف K^R را رسم کنیم.

- دقت شود که برای هر زمان هم متوسط زمان‌های مختلف را استفاده می‌کنیم. برای مثال، برای زمان $t=5$، با توجه به اینکه با گام $0.1s$ ما سرعت‌ها را داریم، از ثانیه‌های $t=5, 5.1, 5.2, \ldots, 5.9$ را باهم جمع کرده و میانگین می‌گیریم.

PAPCO

Subject
Date

PAPCO

Subject
Date

« یادآوری محاسبات عددی »

Rung-kutta 4th order

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \ , \ x(t_0) = x_0 \quad , \ f(x,t) = 3x^{\frac{1}{2}} + t^3 \ , \ x(0.2) = 0.1 \ , \ \Delta t = 0.1$$

$$x(t_0+\Delta t) = x(t_0) + (\text{average slope})\,\Delta t$$

$$\text{average slope} = \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$K_1 = f(x_0, t_0)$

$K_2 = f(x_0 + K_1 \Delta t/2 \ , \ t_0 + \Delta t/2)$

$K_3 = f(x_0 + K_2 \Delta t/2 \ , \ t_0 + \Delta t/2)$

$K_4 = f(x_0 + K_3 \Delta t \ , \ t_0 + \Delta t)$

Solving:

$$K_1 = f(x(0.2), 0.2) = (3 \times 0.1^{\frac{1}{2}} + 0.2^3) = 0.95668$$

$$x_1(0.25) = x(0.2) + K_1 \Delta t/2 = 0.14784 = x_0 + K_1 \Delta t/2$$

$$\rightarrow K_2 = f(x_1(0.25), 0.25) = 3 \times (0.14784)^{1/2} + (0.25)^3 = 1.16912$$

$$\rightarrow x_2 = x(0.2) + K_2 \Delta t/2 = 0.158456$$

$$\rightarrow K_3 = f(x_2(0.25), 0.25) = 3 \times (0.158456)^{\frac{1}{2}} + (0.25)^3 = 1.20982$$

$$\rightarrow x_3(\underset{t_0+\Delta t}{0.3}) = x(0.2) + K_3 \Delta t = 0.220982$$

$$\rightarrow K_4 = f(x_3(0.3), 0.3) = 3 \times (0.220982)^{\frac{1}{2}} + (0.3)^3 = 1.43726$$

$$\rightarrow \text{ave. slope} = \frac{1}{6}\left[0.95668 + 2(1.16912) + 2(1.20982) + 1.43726\right] = 1.197$$

P4PCO $\rightarrow x(\ _0 + \Delta t) = x(t_0) + (\text{average slope})\Delta t = 0.1 + 0.1 \times 1.1917$

Subject
Date

« جلسه بیست و یکم »

برای محاسبات معادلات دیفرانسیل در حل spectral باید از مشتقات در فضای spectral استفاده کنیم
که در این جلسه توضیح داده خواهد شد.

VII.1.7 Transform of the derivatives.

Fourier series, Eq (7.13), (replacing K with $\frac{2\pi K}{L}$,

$$f(x) = I_N(x) + E(x) = \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_K \, e^{i\left(\frac{2\pi}{L}\right)Kx} + E(x)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} I_N(x) + \frac{d}{dx} E(x) = \frac{d}{dx} \sum f_K e^{\frac{i2\pi}{L}Kx} + \frac{d}{dx} E(x)$$

$$\rightarrow \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} i\frac{2\pi}{L} K \hat{f}_K e^{\frac{i2\pi}{L}x} + E'(x)$$

* پس در فضای فوریه تنها کافی است ضرایب سری فوریه در $i\frac{2\pi}{L}K$ ضرب شوند تا مشتق آن محاسبه شود.

$$\rightarrow \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_j} = \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} \left(i\frac{2\pi}{L} K \hat{f}_K\right) e^{i2\pi K \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}} \frac{j}{N}} + E'(x_j)$$

- therefore, the derivatives of f at $x=x_j$ is obtained by Eq.(7.12) where the Fourier coefficients are:

$$I_N\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j\right\} = \hat{f}'_K = \left(\frac{df}{dx}\right)_K = (D\hat{f})_K = \left(\frac{2\pi}{L}\right) iK \hat{f}_K \,,\; K = -N/2, \dots, N/2-1 \qquad (7.23)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j = \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} (Df)_K \, e^{iKx_j} \,,\; x_j = \frac{2\pi}{N} j \,,\; j = 0, \dots, N-1 \qquad (7.24)$$

Subject
Date

Exercise: show that ((مثل صفحه‌ی قبل))

$$I_N\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_j\right\} = \hat{f}''_K = (\widehat{D^2 f}) = -\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 K^2 \hat{f}_K \qquad (7.25)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_j = \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} (D^2 f)_K e^{iKx_j} \qquad (7.26)$$

VII.1.8 Discrete Fourier series in higher dimensions:

* ممکن است تابع ما دو متغیره باشد و در هر دو جهت یا حداقل یکی از آنها پریودیک باشد. می خواهیم این را بررسی کنیم.

$f(x) \to f(x,t)$

$f(x) \to f(x,y)$

* اگر که تابع دو متغیره باشد ولی فقط در یکی از آنها تابع پریودیک باشد و بخواهیم نسبت به آن تبدیل فوریه بگیریم، همه‌ی روابط مشابه آن چیزی است که تا الان گفته شد، با این تفاوت که $\hat{f}_K$ تابع دیگری نیز خواهد بود. مثلاً $f(x,t)$ که x پریودیک باشد

- when $f(x,y)$ is periodic in x and y directions, with N_1 points in x direction and N_2 points in y direction, the Two dimensional Fourier series is given by:

$$f_{m,l} = f(x_m, y_l) = \sum_{K_1=-N_1/2}^{N_1/2-1} \sum_{K_2=-N_2/2}^{N_2/2-1} \hat{f}_{K_1,K_2} e^{iK_1 x_m} e^{iK_2 y_l} \qquad (7.27)$$

$m = 0, \dots, N_1 - 1$

$l = 0, \dots, N_2 - 1$

Subject
Date

* in fact, $\hat{f}_{K_1,K_2}$ is obtained by Two times discrete Fourier Transforming of f each in one direction:

$$f(x,y) \xrightarrow{I_N \text{ on } x} \hat{f}_{K_1}(y) \xrightarrow{I_n \text{ on } y} \hat{f}_{K_1,K_2}$$

Similarly:

$$\hat{f}_{K_1,K_2} = \frac{1}{N_1}\frac{1}{N_2}\sum_{m=0}^{N_1-1}\sum_{\ell=0}^{N_2-1} f_{m,\ell}\, e^{-iK_1 x_m}\, e^{-iK_2 y_\ell} \qquad (7.28)$$

(از معادله 7.15)

$K_1 = -N_1/2, \dots, N_1/2-1$

$K_2 = -N_2/2, \dots, N_2/2-1$

* نکته * طبق نکته ای که در انتهای جلسه ی قبل گفته شد در محاسبات ضرایب $-N/2$ را صفر قرار می دهیم:

$$f_{K_1,-N_2/2} = f_{-N_1/2,K_2} = 0 \quad \text{for } N_1, N_2 \text{ are even.}$$

Exercise: for real valued functions:

$$\hat{f}_{-K_1,-K_2} = \hat{f}^*_{K_1,K_2} \qquad (7.29)$$

- In three dimensions,

$$\vec{f}(\hat{x}) = \sum_{\hat{K}} \vec{\hat{f}}_{\hat{K}}\, e^{i\hat{K}\cdot\hat{x}} \qquad \begin{cases} \hat{x} = (x_1, x_2, x_3) \\ \hat{K} = (K_1, K_2, K_3) \\ \sum_{\hat{K}} = \sum_{K_1}\sum_{K_2}\sum_{K_3} \end{cases} \qquad (7.30)$$

vector or Tensor

PAPCO

VII.1.8 Numerical solution of linear differential equation with periodic B.C

Convection – diffusion equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \qquad (7.36)$$

$0\leq x\leq L$ with periodic B.C in x ، $u(x,0)=u_0(x)$

$$I_n\left[\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\right\}_j\right]$$

* نکته * مسئله دو بعدی است (x,t) ولی تنها در راستای x پریودیک است.

$I_n\{u\}=u_K$

ابتدا از طرفین تبدیل فوریه می‌گیریم. برای حل عددی از I_n باید استفاده کنیم:

فقط تابع t شده بعد از تبدیل فوریه

$$\rightarrow \frac{d\hat{u}_K}{dt}+a\left(\frac{2\pi}{L}\right)iK\hat{u}_K=-\nu\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2K^2\hat{u}_K+\hat{f}_K(t)$$

* حال N تا معادله داریم اما معادلات دیگر PDE نیست، بلکه ODE است. همچنین این معادلات Decouple هستند و می‌توانیم آنها را جدا جدا حل کنیم:

$u_0(x)\xrightarrow{FFT}\hat{u}_K(0)$ (7.38) شرط اولیه

(7.41) * دقت شود که لازم نیست که N معادله حل کنیم، بلکه کافی است تنها $\frac{N}{2}$ یعنی ضرایب مثبت را بدست بیاوریم، چرا که

$$\hat{u}_{-K}=\hat{u}_K^*$$

Subject
Date

نکته برنامه متلب توانایی گرفتن مقادیر موهومی را دارد. اگر می‌خواستیم این معادله را با برنامه‌نویسی مثل C بنویسیم، باید قسمت حقیقی و موهومی را جدا کنیم:

$$u_K = a_K + i b_K$$

$$\rightarrow \frac{da_K}{dt} + i\frac{db_K}{dt} + a\left(\frac{2\pi}{L}\right)K\left[-\hat{b}_K + i\hat{a}_K\right] = -\nu\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 K^2\left[\hat{a}_K + i\hat{b}_K\right]$$

$$+ \mathrm{Re}\{\hat{f}_K(t)\} + i\,\mathrm{Im}\{\hat{f}_K(t)\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{da_K}{dt} = a\left(\dfrac{2\pi}{L}\right)K\hat{b}_K - \nu\left(\dfrac{2\pi}{L}\right)^2 K^2 \hat{a}_K + \mathrm{Re}\{f_K(t)\} \\ \dfrac{db_K}{dt} = -a\left(\dfrac{2\pi}{L}\right)K\hat{a}_K - \nu\left(\dfrac{2\pi}{L}\right)^2 K^2 \hat{b}_K + I_m\{f_K(t)\} \end{cases} \qquad (7.37)$$

VII.1.9 Numerical solution of non-linear Burgers equation with periodic B.C

the one dimensional Burger equation is:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (7.40)$$

$u(x,0) = u_0(x)$, $0 \leq x \leq L$ periodic

$$I_n\{Eq.(7.40)\} \Rightarrow \frac{d\hat{u}_K}{dt} + \hat{H}_K(t) = -\nu K^2\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \hat{u}_K(t) \text{ , } K = -N/2, \ldots, N/2 - 1 \qquad (7.41)$$

I.C. $\hat{u}_K(0) = I_n\{u_0(x_j)\}$

$$\hat{H}_K = I_N\{u\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{V}\} \xrightarrow{(7.22)} = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_l \hat{V}_{K-l} \qquad (7.42)$$

Subject
Date

$$\hat{V}_K = iK\left(\frac{2\pi}{L}\right)\hat{U}_K \qquad (7.43)$$

* معادله‌ی حاصل دارای مودهای مختلف هستند و معادلات به صورت کوپل باید حل شوند. این به خاطر ترم غیرخطی است که مشاهده می‌کنید.

2N coupled ODE

* برای حل این معادلات باید از روش sudo spectral و padding استفاده کنیم.

HW #4

PAPCO

Subject
Date

جلسه بیست و دوم

VII.2 spectral description of Turbulence

VII.2.1 Fourier series representation

* هدف ما این خواهد بود که معادلات ناویر استوکس را به فضای فوریه ببریم و در فضای فوریه معادله را حل کنیم. اگر خواستیم LES هم در فضای فوریه حل کنیم که در فصل آینده خواهیم خواند، کافی است یک ترم به معادله در فضای فوریه اضافه کنیم.

* دقت شود در این جا هم شرط پریودیک بودن را برای ناحیه حل داریم:

the velocity field to be periodic in a box of length $\mathcal{L} > \mathcal{L}_{11}$ in physical space, i.e.

$$\vec{U}(\vec{x},t) = \vec{U}(\vec{x}+\vec{N}L, t) \quad , \quad \vec{N} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$$

n_1, n_2, n_3 مضارب صحیح هستند

* $\mathcal{L}_{11}$ در واقع همان طول بزرگترین Eddy هایی که در ناحیه حل وجود دارد است.

- the Fourier series (Eq.(7-30))

$$\vec{U}(\vec{x},t) = \sum_{\vec{K}} \hat{\vec{U}}(\vec{K},t)\, e^{i\vec{K}\cdot\vec{x}} \quad , \vec{x} = x_i \vec{e}_i \qquad (7\text{-}44)$$

$$\underbrace{\vec{K}}_{\text{wave number}} = \frac{2\pi}{L}\vec{N} = \frac{2\pi}{L}(n_1\hat{e}_1 + n_2\hat{e}_2 + n_3\hat{e}_3) = \frac{2\pi}{L} n_i \hat{e}_i \quad , n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

همون wave number که گفتیم

Eq. 7.17

همون N ما هم K هستند!!

* $\vec{N}$ در واقع همان N در حالت یک بعدی است که در این جا 3 بعدی است چون برای هر جهت باید بنویسیم. در این جا سری فوریه ناپیوستهی داریم استفاده میکنیم. اما در حالت عددی میدانیم که N تا بی نهایت نخواهد بود و تا ... خواهد بود.

PAPCO

Subject

Date

Note: In (infinite) Fourier series we denoted the Fourier coefficient by $\tilde{u}$. Here after we use the notation $\hat{u}$ instead of $\tilde{u}$ to be consistent with Ref [1].

* اگر بخواهیم فضای حل ما پریودیک نباشد کافی است L را به بی‌نهایت میل کنیم

Note: For non-periodic, the wave number space become continus.

$$n \to \infty : \Delta K_i = K_{i,n+1} - K_{i,n} = \frac{2\pi}{L} \longrightarrow 0$$

- if $\langle \ \rangle_L$ defines the volume average over the cube $0 \leq x_i \leq L$ i.e

$$\langle \vec{f}(\vec{x}) \rangle_L = \frac{1}{L^3} \int_0^L \int_0^L \int_0^L \vec{f}(\vec{x}) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \qquad (7.46)$$

the orthogonality property is writen as

$$\langle e^{i\vec{K}\cdot\vec{x}} \, e^{-i\vec{K}'\cdot\vec{x}} \rangle_L = \delta_{\vec{K},\vec{K}'} \qquad (7.47)$$

Exercise: In one dimensional, this property was described by Eq. (7.4) (Replacing 2π with L). Using this and Eq. (7.46) and verify Eq. (7.47).

using orthogonality property, Eq. (7.47), the Fourier coefficients are obtained by (see also Eq. (7.6))

$$\hat{\vec{u}}(\vec{K},t) = \mathcal{F}_L\{\vec{u}(\vec{x},t)\} = \langle \vec{u}(\vec{x},t) \, e^{-i\vec{K}\cdot\vec{x}} \rangle_L = \frac{1}{L^3} \iiint_0^L \vec{u}(\vec{x},t) e^{-i\vec{K}\cdot\vec{x}} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \qquad (7.48)$$

P4PCO

Subject

Date

* دقت شود در این جا از F_L برای نمایش تبدیل فوریه در دامنه L و سه‌بعدی استفاده کرده‌ایم. در حالت‌های قبل از نمادهای دیگری نظیر F_N و ... استفاده کرده بودیم.

* نکته * همانطور مشخص است $\hat{U}$ تابع $\vec{K}$ و t است ولی برای سادگی در ادامه t را نمی‌نویسیم.

Exercise: For $\overset{\square}{A}(\vec{x})$, where $\overset{\square}{A}$ can be a scalar A, vector $\vec{A}$ or Tensor $\underline{\underline{A}}$, and

$\hat{\overset{\square}{A}} = F_L\{\overset{\square}{A}(\vec{x})\}$, prove the Following relations:

$\hat{\overset{\square}{A}}(-\vec{K}) = \hat{\overset{\square}{A}}^*(\vec{K})$; real valued $\overset{\square}{A}$ (each components of $\hat{A}^*$ is the complex conjugate of the same component of $\hat{\overset{\square}{A}}$)

$$F_L\left\{\frac{\partial \overset{\square}{A}(\vec{x})}{\partial x_j}\right\} = iK_j \hat{\overset{\square}{A}}(\vec{K})$$

* نکته * دقت شود $\frac{2\pi}{L}$ در خود K وجود دارد.

$$F_L\{\vec{\nabla}\cdot \overset{\square}{A}(\vec{x})\} = i\vec{K}\cdot \hat{\overset{\square}{A}}(\vec{K})$$

$$F_L\{\nabla^2 \overset{\square}{A}(\vec{x})\} = -K^2 \hat{\overset{\square}{A}}(\vec{K})$$

$$F_L\{\vec{\nabla}\times \overset{\square}{A}(\vec{x})\} = i\vec{K}\times \hat{\overset{\square}{A}}(\vec{K})$$

$$F_L\{\vec{\nabla}\overset{\square}{A}\} = i\vec{K}\hat{\overset{\square}{A}}(\vec{K})$$

$$e^{iK_jx_j}$$

$$A(\vec{x},t) = \sum_{\vec{K}=-\infty}^{\infty} \hat{A}(\vec{K},t)\, e^{i\vec{K}\cdot\vec{x}} = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \hat{A}(\vec{K},t)\, e^{iK_1x_1} e^{iK_2x_2} e^{iK_3x_3}$$

Subject
Date

VI.2.2 the Navier-Stokes equation Fourier space:

$$F_L\left\{\vec{\nabla}.\vec{U}=0\right\}$$

$$\rightarrow \vec{K}.\hat{\vec{U}}(\vec{K})=0 \qquad (7.49)$$

- Any vector $\hat{\vec{G}}$ can be decomposed into Two components, one of them parallel and the other one prependicular to wave number vector, $\vec{K}$. i.e

$$\hat{\vec{G}}=\hat{\vec{G}}^{\parallel}+\hat{\vec{G}}^{\perp}$$

$$\hat{\vec{G}}^{\parallel}=(\hat{e}.\hat{\vec{G}})\hat{e}=(\vec{K}.\hat{\vec{G}})\frac{\vec{K}}{K^2} \quad , e=\frac{\vec{K}}{|K|}$$

$$\text{or} \rightarrow \hat{G}^{\parallel}_j=\frac{K_jK_i}{K^2}\hat{G}_i \qquad (7.50)$$

$$\rightarrow \hat{\vec{G}}^{\perp}=\hat{\vec{G}}-\hat{\vec{G}}^{\parallel}=\hat{\vec{G}}-\frac{\vec{K}(\vec{K}.\hat{\vec{G}})}{K^2}=\underline{p}(\vec{K}).\hat{\vec{G}} \qquad (7.51)$$

$$\text{where: } p(\vec{K})=\delta-\frac{\vec{K}\vec{K}}{K^2} \quad \text{or} \quad P_{ij}(\vec{K})=\delta_{ij}-\frac{K_iK_j}{K^2} \qquad (7.52)$$

$p(\vec{K})$ is called projection Tensor. It projects a vector on the direction prependicular to $\vec{K}$.

- Fourier Transforming the momentum equation.

$$F_L\left\{\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\vec{\nabla}.(\vec{U}\vec{U})=\nu\nabla^2\vec{U}-\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right)\right\}$$

Subject

Date

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}\hat{\vec{U}}(\vec{K}) + \nu K^2 \hat{\vec{U}}(\vec{K}) = -i\vec{K}\hat{p}(\vec{K}) - \hat{\vec{G}}(\vec{K}) \qquad (7.53)$$

where $\hat{p}(\vec{K}) = F_L\left\{\frac{P}{\rho}\right\}$ (7.54)

$$\longrightarrow \hat{\vec{G}}(\vec{K}) = F_L\{\vec{\nabla}\cdot(\vec{U}\vec{U})\} = -i\vec{K}\cdot F_L\{\underbrace{\vec{U}\vec{U}}_{\text{see Eq.(7.22)}}\}$$

$$= -i\vec{K}\cdot\sum_{\vec{K}'}\hat{\vec{U}}(\vec{K}')\,\hat{\vec{U}}(\vec{K}-\vec{K}') = -i\vec{K}\cdot\sum_{\vec{K},\vec{K}''}\delta_{\vec{K},\vec{K}'+\vec{K}''}\,\hat{\vec{U}}(\vec{K}')\,\hat{\vec{U}}(\vec{K}'') \qquad (7.55)$$

P4PCO

the non linear convective term is non-local in spectral space and includes the interaction of all wave numbers.

– Taking the Fourier Transform of the poisson equation:

$$F_L\left\{\nabla^2\left(\frac{P}{\rho}\right) = -\vec{\nabla}\cdot\left[\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\,\vec{u})}_{\vec{G}}\right]\right\}$$

$$\longrightarrow -K^2\hat{p} = -i\vec{K}\cdot\hat{\vec{G}} \longrightarrow K^2\hat{p} = i\vec{K}\cdot\hat{\vec{G}} \qquad (7.56)$$

* معادله‌ی پواسون را قبلاً با استفاده از معادله‌ی مومنتوم و با گرفتن دیورژانس از طرفین بدست
به عنوان تمرین:

$$F_L^{-1}\left\{i\vec{K}\cdot\hat{\vec{u}}(K)\right\} \overset{\text{ص } 85}{=} \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

✓ **Exersise:** Derive Eq.(7.56) by the dot product of $i\vec{K}$ and Eq.(7.53), which is equivalent to taking divergence in physical space.

* در بخش CFD گفتیم، چون در معادلات پیوستگی ترم فشار وجود ندارد و ما در معادله‌ی مومنتوم به ترم فشار نیاز داریم با یک الگوی خاص پیاده شود که به آن pressure-velocity-Decoupling گفته می‌شود. اما در فضای فوریه این کار بسیار راحت است. می‌توانیم ترم فشار را بر حسب سرعت به صورت صریح بدست بیاوریم و در معادله‌ی مومنتوم جایگذاری کنیم تا معادله‌ی مومنتوم تنها فقط به سرعت‌ها بستگی داشته باشد.

$(-i\vec{k}p)$ ⟶ از (7.53) ترم فشار در معادله‌ی مومنتوم

$$\xrightarrow{(7.56)\times\frac{-i\vec{K}}{K^2}} -i\vec{K}\hat{p} = \frac{\vec{K}\cdot\hat{\vec{G}}}{K^2}\vec{K} \xrightarrow{(7.50)} \hat{\vec{G}}^{\parallel}$$

Inserting in Eq.(7.53) yields:

P4PCO

Subject
Date

$$\frac{d\hat{\vec{U}}(\vec{K})}{dt} + \nu K^2 \hat{\vec{U}}(\vec{K}) = -\hat{\vec{G}}^{\perp} = -\underline{P}\cdot\hat{\vec{G}} \qquad (7.57)$$

* مشاهده می‌شود که دیگر اثری از فشار نیست. می‌توانیم سرعت را بدست آورده و سپس P را بدست بیاوریم

VII.2.3 the kinetic energy of Fourier modes Assuming homogeneous Turbulence $(R_{ij}(\vec{x},\vec{r}) = R_{ij}(\vec{r}))$

the Fourier coefficients of R_{ij} is given by:

$$\hat{R}_{ij}(\vec{K}) = F_L\{R_{ij}(\vec{r})\}$$ Take $\vec{r}$ as space variable

- Remember $R_{ij}(\vec{r}) = \langle u_i(\vec{x})\, u_j(\vec{x}+\vec{r})\rangle$

* کمیت R_{ij} در فضای فوریه هم کمیت مهمی است که در ادامه توضیح خواهیم داد. اما اول باید ببینیم چگونه باید آن را حساب کنیم. چون الان در فضای فوریه ما در حال حل کردن هستیم، پس باید در حالت عادی اول $\hat{u}(\vec{K})$ ها را به فضای حقیقی برده، ضرب را انجام داده، متوسط گرفته و دوباره به فضای فوریه برگردانیم. اما روش آسان‌تری هم وجود دارد. می‌توان اثبات کرد که:

- Now consider the covariance of two Fourier coefficients: $\vec{K}$ and $\vec{K}'$:

$$\hat{u}(\vec{K}) = \hat{U}(\vec{K}) - \langle \hat{U}(\vec{K})\rangle$$

$$\rightarrow \langle \hat{u}_i(\vec{K}')\,\hat{u}_j(\vec{K})\rangle = \langle\left(\frac{1}{L^3}\iiint_0^L u_i(\vec{x})\, e^{-i\vec{K}'\cdot\vec{x}}\, d\vec{x}\right)\left(\frac{1}{L^3}\iiint u_j(\vec{x}')\, e^{-i\vec{K}\cdot\vec{x}'}\, d\vec{x}'\right)$$

change the variable $\vec{r} = \vec{x}' - \vec{x} \longrightarrow d\vec{r} = d\vec{x}'$
$(\vec{x} = cte)$

P4PCO

Subject
Date

$$= e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\rightarrow = \left(\frac{1}{L^3}\iiint_0^L R_{ij}(\vec{r})\, d\vec{r}\right) \frac{1}{L^3}\iiint_0^L e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'}\, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}}\, d\vec{x}$$

* با توجه به اینکه $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ و $e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}}$ در هر realization مقدارشان ثابت است، می‌توان آنها را از متوسط بیرون بیاوریم، همچنین با تغییر متغیری که گرفتیم، چون در انتگرالی که تغییر $\vec{x}'$ است، x ثابت است، می‌توانیم بیرون ببریمش و در نهایت رابطه‌ی بالا بدست آمد.

$\frac{1}{L^3}\iiint R_{ij}(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,d\vec{r}$

$$\rightarrow \mathcal{F}_L\{R_{ij}(\vec{r})\}\underbrace{\langle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}}\rangle_L}_{\text{Eq. (7.47)}} = \mathcal{F}_L\{R_{ij}(\vec{r})\}\,\delta_{-\vec{k},\vec{k}'}$$

Eq. (7.48)

$$\rightarrow \langle \hat{u}_i(\vec{k}')\,\hat{u}_j(\vec{k})\rangle = \begin{cases} \hat{R}_{ij}(\vec{k}) & ; \vec{k} = -\vec{k}' \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases} \qquad (7.59)$$

therefore: $\hat{R}_{ij}(\vec{k}) = \langle \hat{u}_i(-\vec{k})\,\hat{u}_j(\vec{k})\rangle$ or $\langle \hat{u}_i^*(\vec{k})\,\hat{u}_j(\vec{k})\rangle$ u real و (7.60)

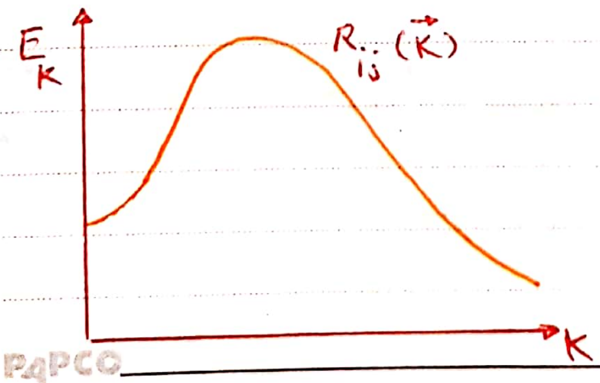
(از ویژگی مختصر u)

- using Fourier series (inverse Fourier Transform):

$$R_{ij}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \hat{R}_{ij}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad (7.61)$$

setting $\vec{r}=0 \longrightarrow R_{ij}(0) = \langle u_i u_j\rangle = \sum_{\vec{k}} \hat{R}_{ij}(\vec{k})$ (7.62)

thus, $\hat{R}_{ij}(\vec{k})$ can be interpreted as the contribution to Reynolds stress form the Fourier mode of wave number $\vec{k}$.



* نکته: دقت شود که اثبات که انجام دادیم با فرض توربولانس homogeneous انجام گرفته است که R_{ij} فقط برحسب r بود و به x ربطی نداشت.

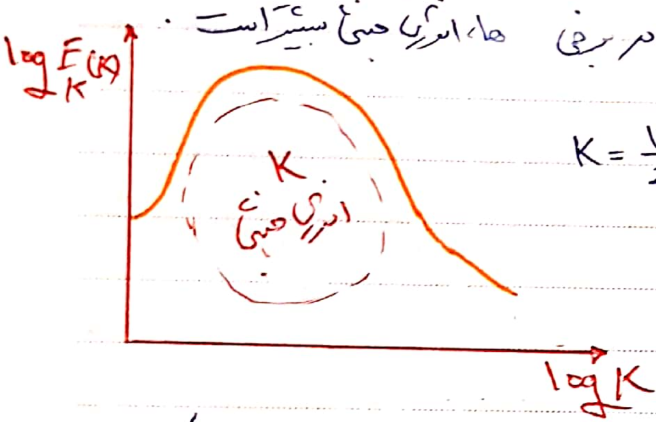
Scanned by CamScanner

Subject
Date

- the kinetic energy of fourier mode is defined by:

$$\hat{E}(\vec{K}) = \frac{1}{2}\hat{R}_{ii}(\vec{K}) = \frac{1}{2}\langle \hat{u}_i^*(\vec{K})\,\hat{u}_i(\vec{K})\rangle = \frac{1}{2}\langle |\hat{u}_i(\vec{K})|^2 \rangle$$

* از رابطه بالا می‌توان دریافت که مقدار انرژی جنبشی به اندازه به توان دو سرعت نوسانی در هر مود بستگی دارد. که در شکل پایین مشاهده می‌کنید که در برخی ها انرژی جنبشی بیشتر است.



$$K = \frac{1}{2}\langle u_i u_i \rangle \xrightarrow{Eq.(7.62)} = \sum_{K} \frac{1}{2} R_{ii}(\vec{K}) = \sum_{\vec{K}} \hat{E}(\vec{K})$$

* کمیت مهم دیگری که قبلاً داشتیم dissipation rate (ε) بود. می‌خواهیم ببینیم سهم کدام مودهای K در ε بیشتر است. انتظار داریم که برعکس انرژی جنبشی شود، چرا که در انرژی جنبشی زیاد چون سایز Eddy بزرگ است توانایی damp کردن ندارد و باید به سایزهای کوچکتر تبدیل شود.

- the dissipation rate, ε, is also related to $\hat{E}(\vec{K})$, consider the quantity $\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_\ell}\rangle$

$$\rightarrow \langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_\ell}\rangle = \langle \sum_{\vec{K}'} iK'_k \hat{u}_i(\vec{K}') e^{i\vec{K}'\cdot\vec{x}} \sum_{\vec{K}} iK_\ell u_j(\vec{K}) e^{i\vec{K}\cdot\vec{x}} \rangle$$

$$= -\sum_{\vec{K}}\sum_{\vec{K}'} K'_k K_\ell \langle u_i(\vec{K}')\, u_j(\vec{K})\rangle e^{i(\vec{K}+\vec{K}')\cdot\vec{x}}$$

تمام 3 بعدی
from Eq.(7.59) $\rightarrow \vec{K}' = -\vec{K}$

$$\rightarrow -\sum_{\vec{K}} -K_k K_\ell \langle \hat{u}_i(-\vec{K})\,\hat{u}_j(\vec{K})\rangle e^{0} \xrightarrow{Eq.7.60} \hat{R}_{ij}(\vec{K})$$

PAPCO

$$\rightarrow \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right\rangle = \sum_{\vec{k}} k_l k_k \hat{R}_{ij}(\vec{k}) \qquad (7.65)$$

* نکته‌ی مهم: فرق بین توربولانس همگن با توربولانس isotropic چیست؟! در توربولانس همگن خواص آماری که حساب می‌کنیم، در همه‌ی نقاط با هم برابرند. این یعنی مثلاً R_{ij} فقط تابع $\vec{r}$ است و دیگر تابعی از x نیست:

$$R_{ij}(\vec{x}, \vec{r}) = R_{ij}(\vec{r})$$

در توربولانس ایزوتروپیک علاوه بر این خاصیت یعنی همگن بودن، خواص با تغییر دستگاه مختصات نیز عوض نشوند. یکی از شرایط مهم آن این است که متوسط سرعت برابر صفر باشد:

$$\langle \vec{u} \rangle = 0$$

«جلسه بیست و چهارم» 10 min اول درباره فرض توربولانس iso, homo

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right\rangle = \sum_{\vec{K}} K_l K_k \hat{R}_{ij}(\vec{K}) \qquad (7.65)$$

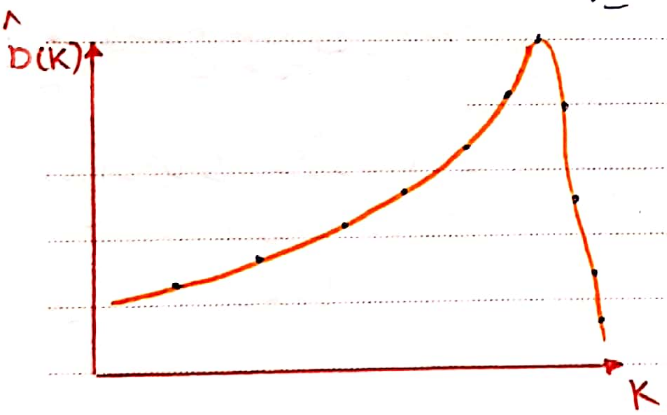
For homogeneous Turbulence (HW#1)

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} = \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle$$

using Eq.(7.65)

$$\varepsilon = \nu \sum_{\vec{K}} \underbrace{K_j K_j}_{K^2} \underbrace{\hat{R}_{ii}}_{2\hat{E}(K)} = \sum_{\vec{K}} \underbrace{2\nu K^2 \hat{E}(K)}_{D(\vec{K})} \qquad (7.66)$$

* ملاحظه می‌شود که سهم dissipation برای Kهای بزرگتر یعنی فرکانس‌های بزرگتر و در نتیجه سازه‌های کوچکتر بیشتر است که همین انتظار را هم داشتیم.



$D(\vec{K}) = 2\nu K^2 \hat{E}(K)$ is regarded as the contribution to the dissipation from the Fourier mode of wave number $\vec{K}$

- Now assuming $\langle \vec{u} \rangle = 0$, e.g. for isotropic Turbulence, the evolution equation of $\hat{E}(K)$ can be denied as:

Exercise: Assuming $\langle \vec{u} \rangle = 0$, show that $\langle \hat{\vec{u}}_K \rangle = 0$

PAPCO

Subject
Date

* بنابراین برای Turbulence در حالت isotropic داریم:

$$\frac{d\hat{E}(K)}{dt} = \hat{T}(\vec{K}) - 2\nu K^2 \hat{E}(\vec{K})$$

$Re\{ab^*\} = Re\{ba^*\}$

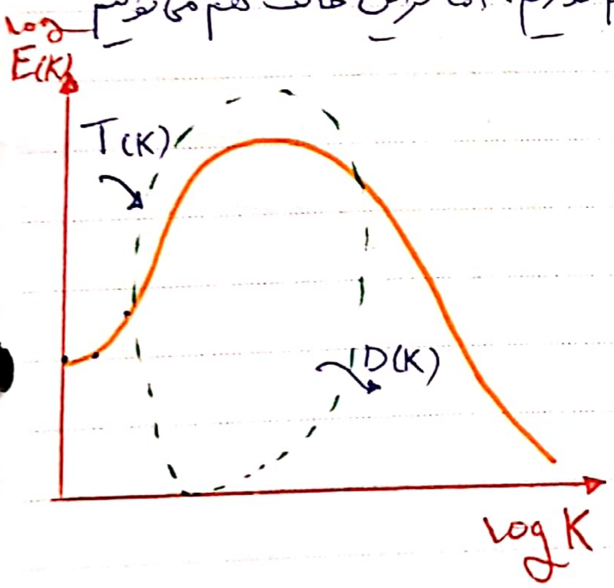
$(ab)^* = a^* b^*$

$$\hat{T}(\vec{K}) = K_\ell P_{jK}(\vec{K})\, Re\left\{ i \sum_{\vec{K}'} \langle \hat{u}_j(\vec{K})\, \hat{u}^*_k(\vec{K}')\, \hat{u}^*_\ell(\vec{K}-\vec{K}') \rangle \right\} \qquad (7.68)$$

Exercise: derive Eq. 7.68 in pope.

Hint: Assuming $\langle \vec{U} \rangle = 0$, show that $\langle \vec{\hat{U}}_K \rangle = 0$, then you can write Eq. 7.57 replacing $\vec{\hat{U}}_K$ with $\hat{u}_K$. Using the expression $\vec{\hat{u}}^*_K \cdot$ Eq. (7.57) + $\vec{\hat{u}}_K \cdot [\text{Eq. (7.57)}]^*$, derive Eq. 7.67 and Eq. 7.68

* در این شرایط ما، چون $\langle \vec{U} \rangle = 0$ است، production نداریم. اما در این حالت هم می‌توانیم آبشار انرژی را داشتیم، به این صورت که از اسکیل‌های دیگر انرژی وارد می‌شود و با نرخ D(K) هم هر اسکیل می‌تواند dissipate کند و انرژی کم شود. شکل روبه‌رو نشان می‌دهد این پدیده را:



Subject
Date

- $\hat{T}(\vec{K})$ represents the Transfer of Energy between modes.

* ازاین معادله، می توانیم انرژی جنبشی در فضای حقیقی را بدست بیاوریم، اگر آن را برای همهٔ اسکیل ها با هم جمع بزنیم:

$$\frac{d}{dt}\overbrace{\sum_{\vec{K}}\hat{E}(\vec{K})}^{K}=\sum_{\vec{K}}\hat{T}(\vec{K})-\overbrace{\sum_{\vec{K}}2\nu K^2\hat{E}(K)}^{\varepsilon}$$

$$\sum_{K}T(\vec{K})=0 \qquad (7.70)$$

* $T(\vec{K})$ آبشار اسکیل های مختلف است پس مثل نیروی داخلی می ماند! بنابراین جمع آن در کل domain برابر صفر خواهد بود.

$$\rightarrow \frac{dK}{dt}=-\varepsilon$$

* جملات product و convect در معادله حذف نشده است. چرا که فرض isotropic را انجام داده ایم.

* نکته: تاکنون از تبدیل فوریه های مختلفی استفاده کردیم که آخری F_L بود که برای بازه ای L که در آن تابع periodic بود استفاده شد. در ادامه آخرین شکل را توضیح خواهیم داد که برای حالت جنرال و Non-periodic است:

VII.2.4 Velocity spectrom function

Now consider a general case of Non-periodic velocity field
For this case, the Fourier Transform is defined as: App. D Pope

$$\hat{\vec{u}}(K)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\vec{u}(\vec{x})e^{-i\vec{K}\cdot\vec{x}}d\vec{x}=F\{\vec{u}(\vec{x})\}$$

$$\vec{u}(\vec{x})=\iiint_{-\infty}^{+\infty}\hat{\vec{u}}(\vec{K})e^{i\vec{K}\cdot\vec{x}}d\vec{K}=F^{-1}\{\hat{\vec{u}}(\vec{K})\} \qquad (7.72)$$

مشاهده می شود که در این جا $\vec{K}$ پیوسته است برخلاف F_L حالت قبل

Subject
Date

* as we said before, In homogeneous Turbulence we have:

$$R_{ij}(\vec{x},\vec{r}) = R_{ij}(\vec{r})$$

$$\phi_{ij}(\vec{K}) = F\{R_{ij}(\vec{r})\} \qquad (7.73)$$

$$R_{ij}(\vec{K}) = F^{-1}\{\phi_{ij}(\vec{K})\} \qquad (7.74)$$

$\phi_{ij}(K)$ is called velocity spectrom function (Tensor)

Note: Remember that for periodic fields, we defined $\hat{R}_{ij}(\vec{K})$ instead of $\phi_{ij}(\vec{K})$ wher $\vec{K}$ was a discrete-valued vector. for periodic case, the velocity spectrum Tensor is defined by:

$$\phi_{ij}(\vec{K}) = \sum_{\vec{K}'} \delta(\vec{K}-\vec{K}')\hat{R}_{ij}(\vec{K}') \qquad (7.75)$$

where $\vec{K}$ is a continuus wave number vector, all properties which will be obtained in this section for $\underbrace{\phi_{ij}(\vec{K})}_{\text{Non-periodic}}$ is also valid for $\underbrace{\phi_{ij}(\vec{K})}_{\text{periodic}}$

Exercise: using corresponding properties of $R_{ij}(\vec{r})$, show that:

$$\phi_{ij}(\vec{K}) = \phi_{ji}(-\vec{K}) = \phi^{*}_{ji}(+\vec{K}) \qquad (7.76)$$

$\phi_{(i)(i)}$ is real and non-negative $\qquad (7.77)$

PAPCO

Subject
Date

$$\vec{K}\cdot\phi(\vec{K}) = \phi(\vec{K})\cdot\vec{K} \qquad (7.78)$$

* نکته *: در حالت periodic که ما $\hat{R}_{ij}(K)$ تعریف کردیم، مشاهده کردیم که مفهوم آن contribution تنش رینولدز بود. بنابراین $\phi(\vec{K})$ که معادل آن در فضای Non-periodic است نیز باید ارتباطی با تنش رینولدز داشته باشد. یعنی همین معنی فقط در فضای Non-periodic

$$\xrightarrow[\text{Eq.}(7.73)]{\text{Eq.}(7.72)} R_{ij}(\vec{r}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \phi_{ij}(\vec{K})\, e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}}\, d\vec{K}$$

setting $\vec{r}=0$

$$\rightarrow \vec{R}_{ij}(0) = \langle u_i u_j \rangle = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \phi_{ij}(\vec{K})\, d\vec{K} \qquad (7.79)$$

* مشاهده می‌شود که همان مفهوم را دارد، با این تفاوت که این جا K پیوسته است و انتگرال داریم.

- the Energy spectrom function, $E(K)$, is obtained from $\phi_{ij}(K)$ by removing all directional information as:

$$E(K) = \oint \frac{1}{2}\phi_{ii}(\vec{K})\, dS_{(K)} \qquad (7.80)$$

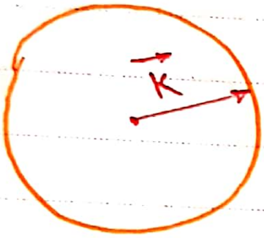
$$\text{or}\quad E(K) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\phi_{ii}(\vec{K}')\, \delta(|\vec{K}'| - |\vec{K}|)\, d\vec{K}' \qquad (7.81)$$

$$\text{or}\quad E(K) = \sum_{\vec{K}'} \delta(|\vec{K}'| - K)\, \hat{E}(\vec{K}')$$

PAPCO

Subject
Date

Note: The integral $\oint (\quad) \, ds_{(k)}$ is taken over all wavenumber $\vec{k}$ with magnitude $k = |\vec{k}|$, i.e. a spherical surface in wavenumber space



- Note from Appendix c) [1] delta function

$$\delta(\vec{x}-\vec{y}) = \delta(x_1-y_1)\cdot\delta(x_2-y_2)\cdot\delta(x_3-y_3)$$

the "sifting property" is

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{y})\,d\vec{x} = g(\vec{y}) \qquad (7.84)$$

$$F\{\delta(\vec{x}-\vec{y})\} = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{K}\cdot\vec{y}}$$ Exercise ✓

- the inverse Transform is the orthogonality property:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{K}-\vec{K}')}\,d\vec{x} = \delta(\vec{K}-\vec{K}') \qquad (7.85)$$ Exercise

* حال با استفاده از این خاصیت‌های فوق می‌خواهیم ببینیم جمع $E(K)$ ها چقدر می‌شود که قبلاً تعریف کردیم. این کار را برای تبدیل فوریه F_L در جلسه‌ی بیست و ششم انجام دادیم و دیدیم که جمع $\hat{E}(K)$ ها در آن‌جا برابر انرژی جنبشی شد. حال مشابه این کار را برای $E(K)$ انجام می‌دهیم که با انتگرال فوریه F استفاده کرده‌ایم به جای F_L. دقت شود در این‌جا نمی‌گوییم هر مود K، بلکه ما با انرژی مود کار داریم و با جهت کاری نداریم.

داریم!؟

$$\longrightarrow \int_0^{\infty} E(K)\,dK \xrightarrow{Eq.(7.81)} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\phi_{ii}(\vec{K}')\Big(\underbrace{\int_0^{\infty}\delta(|\vec{K}'|-\vec{K})\,d\vec{K}}_{=1}\Big)$$

$$\longrightarrow \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\phi_{ii}(\vec{K})\,d\vec{K} \xrightarrow{Eq.(7.79)} \frac{1}{2}\langle u_i u_i\rangle = K$$

$$\longrightarrow K = \int_0^{\infty} E(K)\,dK \qquad (7.82)$$

Subject
Date

- similarly (HW#5)

$$\varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle$$

$$\varepsilon = \iiint_{-\infty}^{+\infty} 2\nu K^2 \frac{1}{2} \phi_{ii}(\vec{K})\, d\vec{K} = \int_0^{\infty} 2\nu K^2 E(K)\, dK \qquad (7.83)$$

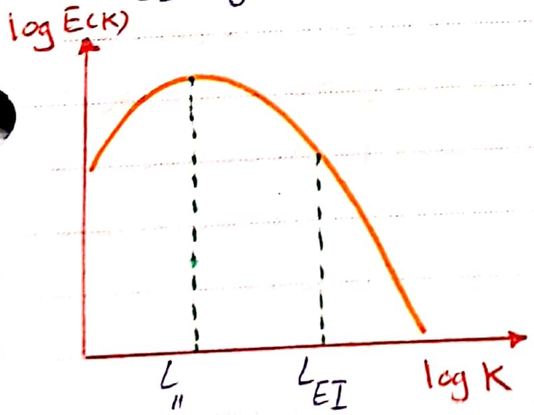
Exercise: similar to the periodic case (Eq.(7.59)) prove the following property for the general non-periodic case (Hint: you oght to use Eq.(7.71), Eq.(7.85))

$$\phi_{ij}(\vec{K}) = \langle \hat{u}_i^*(\vec{K})\, \hat{u}_j(\vec{K}) \rangle \qquad \text{(Non-periodic case)} \quad (7.86)$$

$$\hat{R}_{ij}(K) = \langle \hat{u}_i^*(\vec{K})\, \hat{u}_j(\vec{K}) \rangle \qquad \text{(periodic case)}$$

VII.2.5 Kolmogrov spectra

the first similarity hypothesis suggest that for $l \ll l_e \sim L_{11}$ or ($l < l_{EI} \sim \frac{1}{6} l_{11}$), which $l \sim \frac{2\pi}{K}$ wave number



$$E(K) = f(K, \varepsilon, \nu), \quad K \gg K_0 = \frac{2\pi}{l_0} \quad \text{or}$$

$$K > K_{EI} = \frac{2\pi}{l_{EI}}$$

* نتیجه: در اسکیل های کوچک E(K) تنها وابسته به این پارامترها است و دیگر به عواملی همچون Boundary condition بستگی ندارد.

Subject

Date

Exercise: using Dimensional analysis and show that:

$$E(K) = (\varepsilon \nu^5)^{\frac{1}{4}} \rho(K\eta) \qquad (7.91)$$

or
$$E(K) = \varepsilon^{\frac{2}{3}} K^{-\frac{5}{3}} \psi(K\eta) \qquad (7.92)$$

where $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$ ، $\psi(K\eta) = (K\eta)^{5/3} \rho(K\eta)$

- similarly the second similarity hypothesis results in ($\eta \ll l \ll l_0$ ، $l_{DI} < l < l_{EI}$)

$$E(K) = f(K, \varepsilon) \xrightarrow{\text{dim. Analysis}}$$

$\nu \sim l^2 t^{-1}$

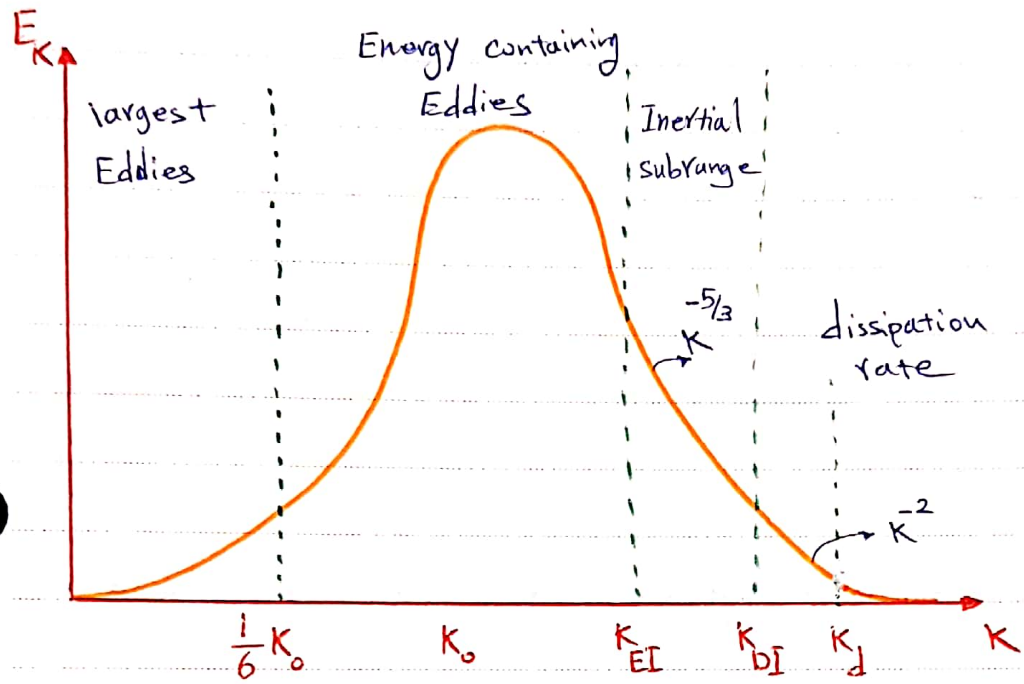
$$E(K) = C \varepsilon^{2/3} K^{-5/3} \qquad (7.93)$$

$\varepsilon \sim l^2 t^{-3}$ نمی‌خونه ابعادا!!

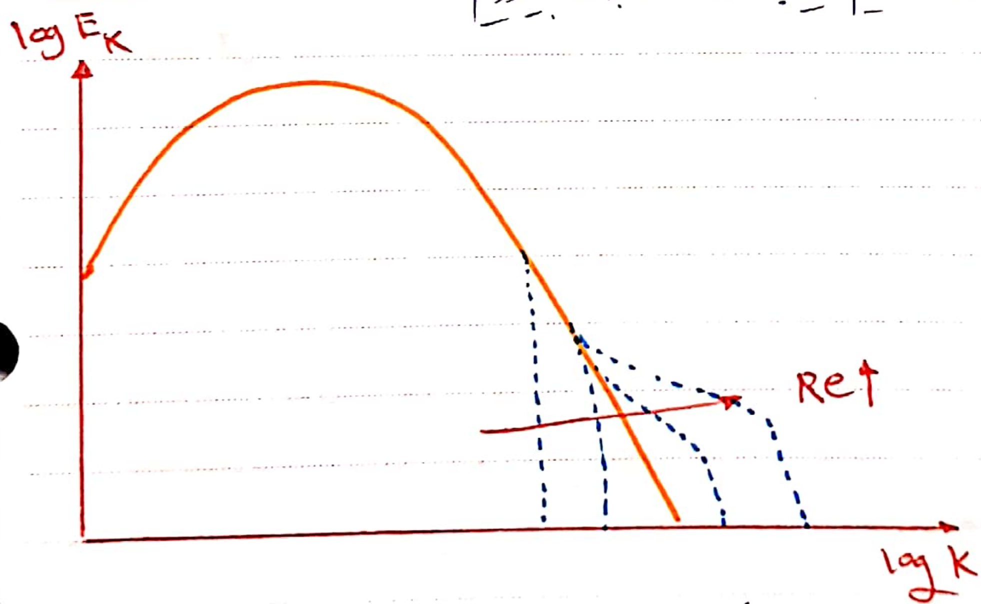
$K \sim l^{-1}$ $\rightsquigarrow$ $E \sim l^3 t^{-2}$

$$\frac{2\pi}{l_{EI}} = K_{EI} < K < K_{DI} = \frac{2\pi}{l_{DI}}$$

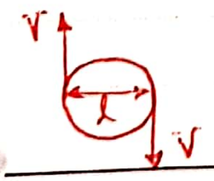
* تکلیف مهم * رابطه‌ی 7.93 برای قسمتی از طیف انرژی است که دیگر production خیلی نداریم و همچنین dissipation هم خیلی نداریم و به همین دلیل است که E دیگر تابع ν نیست. برای قسمت دیگر روابط در حال تجربه اندازه‌های بزرگتر هستند که در شکل صفحه‌ی قبل نشان می‌دهیم:



نکته‌ی مهم عرض فیلترگیری باید در سمت Inertial subrange بیفتد. چون باید بتوانیم Energy را ببریم و باید وقتی که طیف انرژی را کشیدیم شیب $-5/3$ را بدست بیاوریم.



نکته مهم هرچقدر Re بیشتر شود، مقدار ویسکوزیته کمتری شود و اگر بخواهیم همان مقدار dissipation را داشته باشیم، با توجه به رابطه‌ی $2\nu\langle S_{ij}S_{ij}\rangle$ باید $\langle S_{ij}S_{ij}\rangle$ بیشتر باشد که باید Eddy کوچکتر وجود داشته باشد که گرادیان‌ها بیشتر شود.



Subject

Date

* دقت شود production به شرایط مرزی بستگی دارد و اگر آن ها ثابت باشند آنگاه مقدار dissipation نیز باید ثابت باقی بماند.

* با توجه به اینکه ما اگر مسئله را LES حل کنیم تنها می توانیم E(K) را تا ناحیه Inertial subrange بسته به اندازه ی grid داشته باشیم، برای قسمت های زیر ترم dissipation می توانیم از برخی مدل ها استفاده کنیم.

pao's model

$$E(K) = f_L(KL)\, C \varepsilon^{\frac{2}{3}} K^{-5/3} f_\eta(K\eta)$$

$$f_L(KL) = \left(\frac{KL}{(KL)^2 + L^{\frac{1}{2}}}\right)^{5/3} + P_0 \quad , \; P_0 = 2 \text{ or } 4$$

$$f_\eta(K\eta) = \exp\left(-\beta (K\eta)^{4/3}\right) \quad , \; \beta = \frac{3}{2} C$$

$C \longrightarrow$ Kolmogrov , const $\simeq 1.5$

$L = L_{11}$, $\eta = \left(\frac{\nu^3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$

HW #5

PAPCO

Subject
Date

« جلسه‌ی بیست و ششم »

VII.3 LES modeling in spectral space

VII.3.1 spectral representation

$$\hat{\vec{U}}(\vec{K}) = F\{\vec{U}(\vec{x})\}$$

$$\hat{\bar{\vec{U}}}(\vec{K}) = F\{\bar{\vec{U}}(\vec{x})\}$$

* در حالت کلی دیدیم که فیلترینگ در فضای حقیقی از طریق رابطه‌ی 6.1 بدست می‌آید که کانولوشن فیلتر است. در فضای فوریه اثبات می‌شود که کانولوشن به ضرب تبدیل می‌شود:

- using convolution theorem, Appendix D [1] Eq.(D.15)

$$\hat{\bar{\vec{U}}}(K) = \underbrace{\hat{G}(\vec{K})}_{\text{Transfer function}}\hat{\vec{U}}(\vec{K})$$

$$\hat{G}(\vec{K}) = (2\pi)^3 F\{G(\vec{r})\} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} G(r)\, e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}\, d\vec{r} \qquad (7.95)$$

For discrete periodic case replace 2π with L

$$\hat{U}_i(\vec{K}) = F\{\bar{U}_i(\vec{x})\} = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\vec{x})\, e^{-i\vec{K}\cdot\vec{x}}\, d\vec{x}$$

$$\bar{U}(\vec{x}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{r})\, U_i(\vec{x}-\vec{r})\, d_r$$

Note: $\hat{G}(0) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{r})\, d\vec{r} \xrightarrow{\text{Eq.(6.2)}} = 1 \qquad (7.96)$

$$\rightarrow \hat{U}(\vec{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} U(x-r)\, G(\vec{r})\, e^{-iK\cdot(x-r)} \cdot e^{i\vec{K}\vec{r}}\, d_x d_{\vec{r}}$$

P4PCO

Subject
Date

* معروف‌ترین فیلتر در فضای spectral ، sharp spectral نام دارد که در واقع مودهای بزرگتر از $|K_c|$ را حذف می‌کند.

– the sharp cut-off filter is defined by:

$$\hat{G}(\vec{K}) = H(K_c - |\vec{K}|)$$

– همچنین این فیلتر isotropic است چرا که فقط به اندازه K بستگی دارد نه جهات آن:

– the filter width

$$\Delta = \frac{\pi}{K_c}$$ because:

* در واقع تعیین برای اینکه بتوانیم مود K_c بزرگترین مودی باشد که داشته باشیم باید domain ما N_c تا نقطه باشد که بزرگترین مودی که ما می‌توانیم بگیریم یعنی K_c، باید در رابطه‌ی 7.19، $\frac{N_c}{2}$ قرار دهیم.

Eq.(7.19)

$$K_c = \frac{2\pi}{L} \times \frac{N_c}{2} = \pi \times \frac{N_c}{L} = \pi \times \frac{1}{\Delta} \rightarrow \Delta = \frac{\pi}{K_c}$$

– Remember

$$u_i = U_i - \langle U_i \rangle \qquad \bar{u}_i = \bar{U}_i - \langle \bar{U}_i \rangle \qquad (6.19)$$

$$R_{ij}(\vec{r}) = \langle u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x}+\vec{r}) \rangle \qquad R^R_{ij} = \langle \bar{u}_i(\vec{x}) \bar{u}_j(\vec{x}+\vec{r}) \rangle \qquad (6.20)$$

$$\phi_{ij}(\vec{K}) = F\{R_{ij}(r)\} = \langle \hat{u}_i^*(\vec{K}) \hat{u}_j(\vec{K}) \rangle \qquad \phi^R_{ij}(\vec{K}) = F\{R^R_{ij}(\vec{r})\} = \langle \hat{\bar{u}}_i^*(\vec{K}) \hat{\bar{u}}_j(\vec{K}) \rangle \qquad (7.98)$$

Subject
Date

$$E(\vec{K}) = \oint \frac{1}{2}\phi_{ii}(\vec{K})\, ds_K \qquad E^R(\vec{K}) = \oint \frac{1}{2}\phi^R_{ii}(\vec{K})\, ds_K \qquad (7.99)$$

* قسمت راستی یعنی $E^R(\vec{K})$ قسمت resolved شده ی fluctuation را به ما می دهد که نیازی به مدل سازی ندارد. اگر از فیلتر sharp استفاده کنیم با توجه به معادله ی (7.97)، اگر نمودار $E(\vec{K})$ و $E^R(\vec{K})$ را رسم کنیم، قسمت هایی که $K<K_c$ است چون ما به آن فضا دست نزده ایم دقیقا برابر مقدار DNS خواهد شد، اما قسمت $K>K_c$ صفر می شوند و قادر به بدست آوردن آن فضا نیستیم.

* برای ما مهم است که مدل ما چند درصد از انرژی را resolved می کند و LES ای خوب است که بتواند 80% را مدل کند.

$$K = \frac{1}{2}\langle u_i u_i \rangle = \int_0^\infty E(K)\, dK \qquad K^R = \frac{1}{2}\langle \bar{u}_i \bar{u}_i \rangle = \int_0^\infty E^R(K)\, dK \qquad (7.99'')$$

- For Homogeneous flow and homogeneous filters, it can be shown that (HW #6):

$$\phi^R_{ij}(\vec{K}) = |\hat{G}(K)|^2 \phi_{ij}(\vec{K}) \qquad (7.98')$$

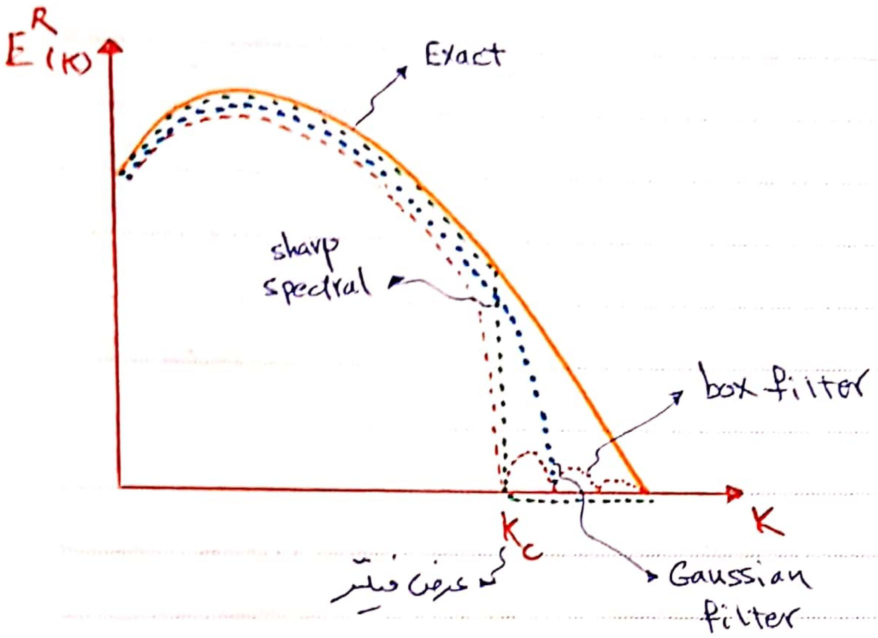
- and for isotropic filter (HW #6)

$$E^R(\vec{K}) = \hat{G}^2(\vec{K})\, E(\vec{K}) \qquad (7.99')$$

* با توجه به روابط بالا، و $\hat{G}(K)$ برای هر کدام از انواع فیلترها که در گذشته وجود دارد، می توانیم $E^R(\vec{K})$ را رسم کنیم در صفحه ی بعد کشیده شده اند.

P4PCO

Subject
Date



* فیلتری برای ما مناسب است که بتواند ۸۰٪ انرژی کل را به ما بدهد.

VII.3.2 Filtered equation

معادله ناویر استوکس در فضای فوریه را قبلاً بدست آورده‌ایم:

$$\text{Eq.}(7.57) \quad \frac{d\vec{\hat{u}}(K)}{dt} + \nu K^2 \vec{\hat{u}}(\vec{K}) = -p(\vec{K}) \cdot \hat{G} \longrightarrow \text{"Eq. 7.55"}$$

- معادله بالا حالت DNS است. در فضای حقیقی برای اینکه معادلات فیلترشده را بدست بیاوریم، باید فیلتر می‌زدیم، در اینجا اما کار راحت است و کافی است که با توجه به چیزهایی که در ابتدای جلسه گفتیم، در یک Transfer function ضرب کنیم.

- multiplying by $\hat{G}(\vec{K})$ yields (using $\hat{\bar{u}} = \hat{G}\hat{u}$). assuming sharp spectral filter ($N_c = \frac{l}{\pi} K_c$)

Subject

Date

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{d}{dt}+\nu k^2\right)\hat{U}_j(k) = i k_l P_{jk}(\vec{k}) \displaystyle\sum_{\vec{k}'}\sum_{\vec{k}''} \delta_{\vec{k},\vec{k}'+\vec{k}''} H(k_c-k)\,\hat{U}_k(\vec{k}')\,\hat{U}_l(\vec{k}'') \\
\qquad ;\ k_i=\left(\dfrac{2\pi}{L}\right)n_i ,\ n_i=0,\pm1,\pm2,\dots,-\dfrac{N_c}{2} \\
\qquad (n_1^2+n_2^2+n_3^2\leq N_c) \qquad \text{(7.100a)} \\
\hat{U}_j=0 \qquad ;\ \text{otherwise} \qquad \text{(7.100b)}
\end{cases}
$$

— معادله 7.100a مسئله‌ی closure تشکیل می‌دهد، چون که در معادله خود سرعت ظاهر شده است، نه سرعت فیلتر شده. بنابراین نمی‌توانیم آن را حساب کنیم.

P4PCO

در جلسه‌ی گذشته معادلات فیلتر شده در فضای فوریه را بدست آوردیم. در این جلسه می‌خواهیم ببینیم ترم closure را چگونه باید مدل کنیم.

VII.3.3 subgrid scale (SGS) modeling

VII.3.3.i the filtered rate of strain

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \qquad (7.101)$$

characteristic of strain rate which is one of invariants:

$$\bar{S} = \left(2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (7.102)$$

* دقت شود در بدست آوردن روابط در ادامه از فرض ساده‌کننده توربولانس isotropic استفاده می‌کنیم که در این حالت چون متوسط سرعت برابر صفر می‌شود ($\langle U\rangle = 0$) آنگاه $\bar{S}_{ij} = S_{ij}$ چرا که $\vec{U} = \vec{u}$.

Note: Note that, replacing $\bar{s}_{ij}$ with $\bar{S}_{ij}$ or $\bar{s}$ with $\bar{S}$ in models is based on the simplification of isotropic turbulence ($\vec{U} = \vec{u}$). these are key quantities in SGS models. therefore it is instructive to study the effect of filter type and width on them.

ـ تشابهات بین سرعت اصلی و فیلتر شده: (6.19)، (6.20)، (7.98) – (7.99)

$$u_i = U_i - \langle U_i\rangle \qquad \bar{u}_i = \bar{U}_i - \langle \bar{U}_i\rangle$$

Subject
Date

R_{ij} R^R_{ij}

$K = \frac{1}{2}\langle u_i u_i \rangle$ $K^R = \frac{1}{2}\langle \bar{u}_i \bar{u}_i \rangle = \int_0^\infty E^R(K)\, d_K$

- from Eq. (3.15)

$$\varepsilon = 2\nu \langle S_{ij} S_{ij} \rangle \xrightarrow{Eq.(7.83)} \int_0^\infty 2\nu K^2 E(K)\, d_K$$

Now define:

$$\langle \varepsilon_f \rangle = 2\nu \langle \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \rangle = \int_0^\infty 2\nu K^2 E^R(K)\, d_K \qquad (7.103)$$

- با توجه به تعریف بالا، invarient تانسور $\bar{S}_{ij}$ برابر خواهد بود با:

$$\langle \bar{S}^2 \rangle = 2\langle \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \rangle = \int_0^\infty 2K^2 E^R(K)\, d_K$$

- برای جریان isotropic و فیلتر isotropic می‌توانیم بنویسیم:

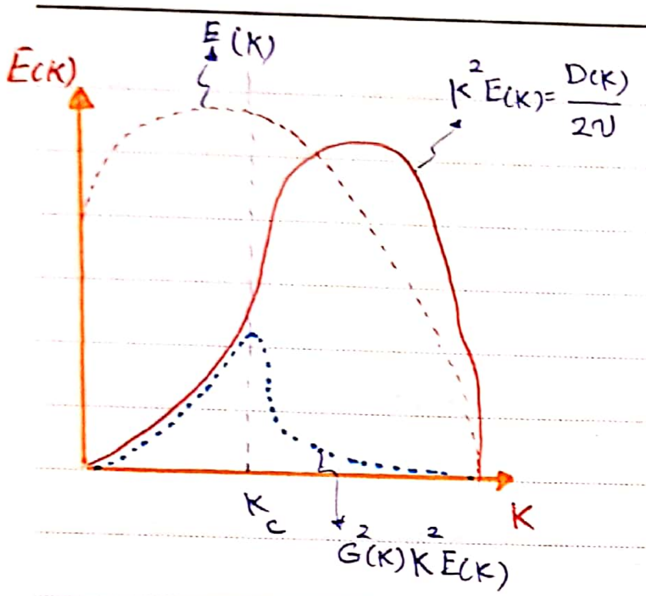
$$K^2 E(K) = \frac{D(K)}{2\nu}$$

$$\rightarrow \int_0^\infty 2K^2 E^R(K)\, d_K \xrightarrow[filter]{isotropic} 2\int_0^\infty K^2 \hat{G}^2(K)\, E(K)\, d_K \qquad (7.104)$$

- بنابراین تأثیر فرکانس‌های مختلف را روی invarient می‌توانیم بدست بیاوریم با استفاده از رابطه‌ی بالا.

PaPCO

Subject
Date



- ما برای مدل‌سازی LES باید بدانیم تأثیر انرژی‌ای که از flow اصلی به subgrid انتقال پیدا می‌کند
حقیقت است که انرژی دقیقاً در نزدیکی K_c رخ می‌دهد
بنابراین دانستن مقدار $G^2(K)K^2E(K)$ بسیار مهم است.

- thus, it is expected that contributions to $\langle \bar{S}^2 \rangle$ are predominatly from wave number around K_c.

- می‌توانیم توضیح کلی هم بدهیم که چرا پارامتر $\langle \bar{S}^2 \rangle$ پارامتر مهمی است.

- Assuming high Re number and K_c (or Δ), $\Delta = \frac{\pi}{K_c}$, being in inertial subrange.

- علت اینکه Δ باید در inertial subrange باشد این است که می‌تواند 80% انرژی را بگیرد و همچنین بیشتر معادلات که به دست آمده، با این فرض بوده است. بنابراین تعریف داریم:

$$\langle \bar{S}^2 \rangle \sim 2\int_0^\infty K^2 \hat{G}^2(K)\left[C\varepsilon^{2/3}K^{-5/3}\right]dK = a_f C \varepsilon^{\frac{2}{3}} \Delta^{-4/3} \qquad (7.105)$$

$$a_f = 2\int_0^\infty (K\Delta)^{\frac{1}{3}} \hat{G}^2(K)\,\Delta\, dK$$

تأثیر نوع فیلتر که $\hat{G}(K)$ تغییر می‌کند.

تأثیر عرض فیلتر

★نکته: دقت شود در معادله 7.105 از تقریب Kolmogrov استفاده کردیم چون $E(K)$ در صفر و ∞ تقریباً برابر صفر است و در ناحیه inertial subrange معادله را نوشتیم.

Subject

Date

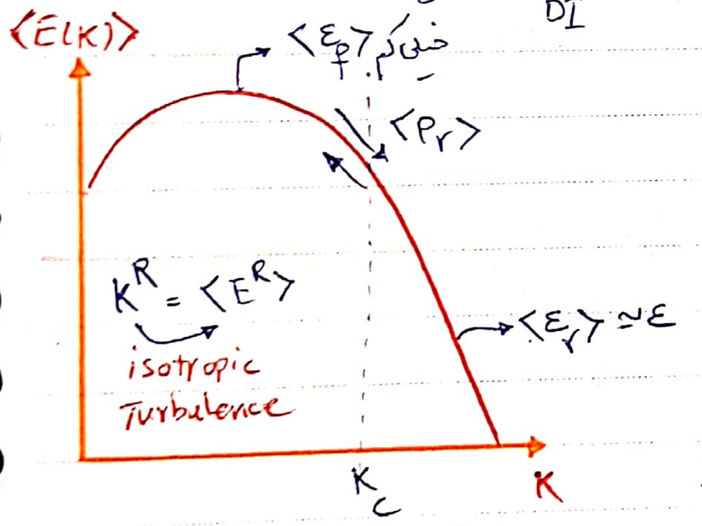
Exercise: using the appropriate relations for $\hat{G}(k)$, show that:

$$a_f = \begin{cases} 6.9 \; ; \text{ for sharp spectral filter } G(k) = H(K_c - |k|) \\ 7.1 \; ; \text{ for Gaussian filter } G(k) = \exp\left(-\frac{k^2\Delta^2}{24}\right) \quad (7.107) \end{cases}$$

$$\Delta = \frac{\pi}{K_c}$$

VII.3.3.2 Determining the Smagorinsky constant

– Assuming isotropic turbulence at high Re numbers with filter width in inertial subrange ($\ell_{DI} < \Delta < \ell_{EI}$)



$$P_r = -\tau^R_{ij}\bar{S}_{ij} = -\tau^r_{ij}\bar{S}_{ij} \; , \; \bar{S}_{ii} = 0 \quad \text{(continuity)} \qquad (6.59'')$$

$$\langle P_r \rangle = \langle -\tau^R_{ij}\bar{S}_{ij} \rangle \simeq \varepsilon \qquad (7.108)$$

$$\varepsilon \sim P_r = -\langle \tau^r_{ij}\bar{S}_{ij} \rangle = \langle 2\nu_r \bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij} \rangle = \langle \nu_r \bar{S}^2 \rangle = \ell_s^2 \langle \bar{S}^3 \rangle \qquad (7.109)$$

$$\nu_r = \ell_s^2 \bar{S} \qquad (6.48)$$

$$\rightarrow \ell_s = \left(\frac{\varepsilon}{\langle \bar{S}^3 \rangle}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\langle \bar{S}^2 \rangle^{3/4}} \left(\frac{\langle \bar{S}^2 \rangle^{3/4}}{\langle \bar{S}^3 \rangle^{\frac{1}{2}}}\right) \qquad (7.110)$$

PAPCO

– Now two additinal approximation are incorporated, First $\langle \bar{S}^2 \rangle$ is subsituted from Eq. (7.105). then $\langle \bar{S}^3 \rangle \sim \langle \bar{S}^2 \rangle^{3/2}$ is used (Lilly 1967)

$$l_s = \frac{\Delta}{(C a_f)^{4/3}} \qquad (7.111)$$

Knowing $(l_s = C_s \Delta) \longrightarrow C_s = \dfrac{1}{(C a_f)^{4/3}}$ (7.112)

از ثابت Kolmogrov

– For sharp spectral filter, $a_f = 6.9$ and $C \sim 1.5$: $C_s \simeq 0.17$

VII.3.3.3 Modeling in spectral space

باید ترم 7.100a که موجب مسئلهٔ closure می‌شد را مدل کنیم:

$$TI = \sum_{\vec{K}'} \sum_{\vec{K}''} \delta_{\vec{K}, \vec{K}' + \vec{K}''} H(K_c - K)\, \hat{u}_k(\vec{K}')\, \hat{u}_l(\vec{K}'') = F_l \{ \overline{u_k u_l} \} \qquad (7.113)$$

– در فضای حقیقی هم به این صورت عمل کردیم که چون $\overline{u_k u_l}$ را نمی‌توانستیم حساب کنیم، آمدیم و به دو بخش تقسیم کردیم که یک قسمت را می‌توانستیم بدست بیاوریم و بخش دیگر را نیز مدل کردیم:

$$\overline{u_k u_l} = \bar{u}_k \bar{u}_l + \tau_{ij}^R \qquad (6.30)$$

– therefore all LES models in physical space can be used to calculate $\overline{u_k u_l}$ and then it can be Transformed to spectral space.

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \tau_{ij}^R$$

- Germano's decomposition Eq. (6.61)

$$\overline{u_i u_j} = \underbrace{\bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j + \mathcal{L}_{ij}}_{\text{Resolved}} + \underbrace{\tau_{ij}^K}_{\text{unresolved}} \rightarrow C_{ij}^o + R_{ij}^o$$

- when we use sharp spectral filter $(\bar{\bar{u}} = \bar{u})$

- علت هم واضح است چون فیلتر اول همه‌ی $K > K_c$ را حذف می‌کند، دومی هم همین کار را می‌کند و تغییری ایجاد نخواهد کرد.

Exercise: prove that:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \tau_{ij}^K \qquad (7.114)$$

$$\tau_{ij}^K = \underbrace{\overline{u'_i \bar{u}_j} + \overline{u'_j \bar{u}_i}}_{C_{ij}^o} + \underbrace{\overline{u'_i u'_j}}_{R_{ij}^o}$$

- حال می‌خواهیم اثبات کنیم که تجزیه Germano بهتر است. برای اثبات این موضوع بازه‌ی فرکانسی هر کدام از ترم‌ها را می‌نویسیم:

$$\overline{u_i u_j} \longrightarrow K < K_c$$

$$\bar{u}_i \bar{u}_j \longrightarrow 0 < K < 2K_c$$

$$\tau_{ij}^R \longrightarrow K_c < K < 2K_c$$

$$\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} \longrightarrow K < K_c$$

Subject
Date

- ملاحظه می‌شود که برای مدل‌سازی ترم $\overline{u_i u_j}$ بهتر است از تجربه Germano استفاده شود که می‌توان فرکانس‌های مشابه تولید کند.

- Filtered momentum equation Eq. 7.100a

$$\left(\frac{d}{dt}+\nu K^2\right)\hat{u}_j(\vec{K},t)=\underbrace{F_j^{<}(\vec{K})}_{\text{resolved}}+\underbrace{F_j^{>}(\vec{K})}_{\text{unresolved}}$$

$$F_j^{<}(\vec{K})=-iK_l P_{jk}(\vec{K})\underbrace{\overset{(|\vec{K}'|,\,|\vec{K}''|<K_c)}{\sum_{\vec{K}'}\sum_{\vec{K}''}\delta_{\vec{K},\vec{K}'+\vec{K}''}H(K_c-K)\,\hat{u}_k(\vec{K}')\,\hat{u}_l(\vec{K}'')}}_{\hookrightarrow F_l[\overline{\bar{u}_k\bar{u}_l}]}$$

$$F_j^{>}(\vec{K})=-iK_l P_{jk}(\vec{K})\underbrace{\overset{\max(K',K'')>K_c}{\sum_{\vec{K}'}\sum_{\vec{K}''}\delta_{\vec{K},\vec{K}'+\vec{K}''}H(K_c-K)\,\hat{u}_k(\vec{K}')\,\hat{u}_l(\vec{K}'')}}_{\hookrightarrow F_L\{\tau_{ij}^{K}\}}$$

- این جا هم از مدل Eddy viscosity برای مدل‌سازی ترم استفاده می‌کنیم:

- similar to viscous term in Eq. (7.115)

$$F_j^{>}(\vec{K})=-\nu_e K^2\,\hat{u}(\vec{K}) \qquad (7.118)$$

- مدل‌های مختلفی برای ν_e وجود دارد که پرکاربردترین آن را مثال می‌زنیم:

$$\nu_e=\nu_e^{+}\sqrt{\frac{E(K_c)}{K_c}} \qquad (7.119)$$

$$\nu_e^{+}=C^{-3/2}\left\{a+b\exp\left[-d\left(\frac{K_c}{K}\right)^{p}\right]\right\} \qquad (7.120)$$

Subject
Date

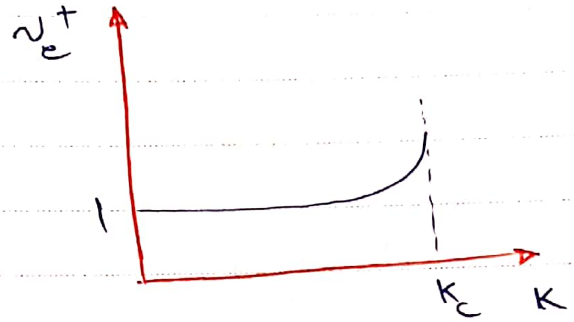
- the Kolmogorov constant $c \sim 1.5$ and for 3D flows:

$a = 0.441$

$b = 15.2$

$d = 3.03$

$p = 1$



پایان

۱- ابتدا از حل گام قبلی (در شروع شرایط اولیه) معکوس فوریه گرفته و در فضای فیزیکی توزیع را بدست می‌آوریم

2- C_s را در فضای فیزیکی بدست می‌آوریم

3- تنش τ_{ij}^R را بدست آورده و سپس از آن تبدیل فوریه می‌گیریم.

۴- در نهایت با داشتن تمام ترم‌های معادله مزبور در فضای طیفی، مقدار $\bar{u}$ در گام بعدی حساب می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\bar{u}}(k) + I_N\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) = -k^2\hat{\bar{u}}(k) - \frac{1}{2} i k \hat{\tau}(k)$$

Subject

Date

Exercise: show that

$$\langle u^2\rangle = \langle U^2\rangle - \langle U\rangle^2$$

$$\langle u^2\rangle = \langle (U-\langle U\rangle)^2\rangle = \langle U^2 + \langle U\rangle^2 - 2U\langle U\rangle\rangle = \langle U^2\rangle + \langle U\rangle^2 -$$

$$2\langle U\rangle\langle U\rangle = \langle U^2\rangle - \langle U\rangle^2$$

Exercise: show that:

$$\langle u_i u_j\rangle^2 \leq \langle u_i^2\rangle\langle u_j^2\rangle \quad (i \neq j)$$

$$\left[\frac{u_i}{\langle u_i^2\rangle^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{u_j}{\langle u_j^2\rangle^{\frac{1}{2}}}\right]^2 \geq 0 \longrightarrow \frac{u_i^2}{\langle u_i^2\rangle} + \frac{u_j^2}{\langle u_j^2\rangle} \pm 2\frac{u_i u_j}{\langle u_i^2\rangle^{\frac{1}{2}}\langle u_j^2\rangle^{\frac{1}{2}}} \geq 0$$

$$\longrightarrow \left\langle \frac{u_i^2}{\langle u_i^2\rangle} + \frac{u_j^2}{\langle u_j^2\rangle} \pm 2\frac{u_i u_j}{\langle u_i^2\rangle^{\frac{1}{2}}\langle u_j^2\rangle^{\frac{1}{2}}} \right\rangle \geq 0$$

$$\longrightarrow \underbrace{\frac{\langle u_i^2\rangle}{\langle u_i^2\rangle} + \frac{\langle u_j^2\rangle}{\langle u_j^2\rangle}}_{1+1} \pm \frac{2u_i u_j}{\langle u_i^2\rangle^{\frac{1}{2}}\langle u_j^2\rangle^{\frac{1}{2}}} \geq 0$$

$$\longrightarrow -1 \leq \frac{\langle u_i u_j\rangle}{\langle u_i^2\rangle^{\frac{1}{2}}\langle u_j^2\rangle^{\frac{1}{2}}} \leq 1 \xrightarrow{\text{توان 2}} \frac{\langle u_i u_j\rangle^2}{\langle u_i^2\rangle\langle u_j^2\rangle} \leq 1$$

Subject
Date

Exercise: Reynolds stress tensor, $\langle \vec{u}\vec{u} \rangle$, can be devided into isotropic and anisotropic parts

$$\underline{a} = \langle \vec{u}\vec{u} \rangle - \frac{2}{3} K \underline{I}$$

where $\underline{a}$ is called the turbulence anisotropic (Tensor) and is above relation. show that only the anisotropic part of the Reynolds stress and the symetric part of the mean velocity gradient affect the rate of production of turbulent kinetic Energy:

$$\underline{P} = -\underline{a} : \langle \underline{S} \rangle$$

$$\underline{a} = \langle \vec{u}\vec{u} \rangle - \frac{1}{3} \langle \vec{u}.\vec{u} \rangle I \quad , \quad \underline{S} = \frac{\nabla U}{2} + \frac{(\nabla U)^T}{2}$$

$$\rightarrow S_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right] \xrightarrow{\text{for mean flow}} \langle S_{ij} \rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i}\right]$$

$$\rightarrow P = -\underline{a} : \langle \underline{S} \rangle = -\left[\langle u_i u_j \rangle \hat{e}_i \hat{e}_j - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j\right] : \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_\ell} + \frac{\partial \langle U_\ell \rangle}{\partial x_m}\right] \hat{e}_m \hat{e}_\ell$$

$$\rightarrow P = -\left[\langle u_\ell u_m \rangle - \cancel{\frac{1}{3} u_p u_p \delta_{\ell m}}\right] \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_\ell} + \frac{\partial \langle U_\ell \rangle}{\partial x_m}\right]$$

Continuity

$$\rightarrow P = -\langle u_\ell u_m \rangle \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_\ell} + \frac{\partial \langle U_\ell \rangle}{\partial x_m}\right] \overset{\text{dummy index}}{=} -\langle u_\ell u_m \rangle \frac{\partial \langle U_\ell \rangle}{\partial x_m}$$

PAPCO

Subject

Date

Exercise: turbulence dissipation, ε, is sometimes estimated by the quantity:

$$\tilde{\varepsilon} = \nu \langle \vec{\nabla}\vec{u} : (\nabla u)^T \rangle = \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle$$

which is called pseudo-dissipation. First verify the following relations

$$2\underline{S}:\underline{S} = \vec{\nabla}\vec{u} : (\vec{\nabla}\vec{u})^T + \vec{\nabla}\vec{u} : \vec{\nabla}\vec{u}$$

$$2\underline{\Omega}:\underline{\Omega} = -\vec{\nabla}\vec{U} : (\vec{\nabla}\vec{U})^T + \vec{\nabla}\vec{U} : \vec{\nabla}\vec{U}$$

then with the aid of first relation, show that for an incompresible flow:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \nu\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla}\cdot\langle\vec{u}\,\vec{u}\rangle\right] = \varepsilon - \nu \frac{\partial^2 \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$2\underline{S}:\underline{S} = \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla}\vec{U} + (\vec{\nabla}\vec{U})^T\right]:\left[\vec{\nabla}\vec{U} + (\vec{\nabla}\vec{U})^T\right]$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right]\hat{e}_i\hat{e}_j : \left[\frac{\partial U_m}{\partial x_n} + \frac{\partial U_n}{\partial x_m}\right]\hat{e}_m\hat{e}_n$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_n}{\partial x_m} + \frac{\partial U_m}{\partial x_n}\right]\left[\frac{\partial U_m}{\partial x_n} + \frac{\partial U_n}{\partial x_m}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U_m}{\partial x_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_m}\right)^2 + 2\frac{\partial U_m}{\partial x_n}\frac{\partial U_n}{\partial x_m}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{dummy index}} = \left(\frac{\partial U_m}{\partial x_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_m}\right)^2$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

سمت راستم همین طوری اثبات می‌شود.

PAPCO

Subject

Date

$$\tilde{\varepsilon} = \nu \left\langle \vec{\nabla}\vec{u} : (\vec{\nabla}\vec{u})^T \right\rangle = \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle$$

$$\varepsilon = 2\nu \langle S : S \rangle , \quad \vec{\nabla}\vec{u} : (\vec{\nabla}\vec{u})^T = 2 S : S - \vec{\nabla}\vec{u} : \vec{\nabla}\vec{u}$$

$$\rightarrow \tilde{\varepsilon} = \nu \left\langle 2 \underline{S} : \underline{S} - \vec{\nabla}\vec{u} : \vec{\nabla}\vec{u} \right\rangle = 2\nu \langle S : S \rangle - \nu \left\langle \vec{\nabla}\vec{u} : \vec{\nabla}\vec{u} \right\rangle$$

$$\rightarrow \tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \nu \left\langle \vec{\nabla}\vec{u} : \vec{\nabla}\vec{u} \right\rangle , \quad \vec{\nabla}\vec{u} : \vec{\nabla}\vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_i \cancel{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{0} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]$$

$$= \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \longrightarrow \left\langle \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial^2 \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i \partial x_j} = \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\rangle$$

$$\longrightarrow \tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \nu \frac{\partial^2 \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i \partial x_j}$$

Subject
Date

Exercise: showing τ^R_{ij} is Galilean invarient:

$$\overline{w_i w_j} - \bar{w}_i \bar{w}_j = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad , \quad \vec{w}(x,t) = \vec{u}(x,t) + \vec{u}_0$$

$$\rightarrow \overline{(u_i+u_0)(u_j+u_0)} = \overline{u_iu_j + u_iu_0 + u_0u_j + u_0u_0} = \overline{u_iu_j} + \bar{u}_i u_0 + u_0 \bar{u}_j + u_0^2$$

به همین ترتیب بقیه رو می‌نویسیم!!

Exercise: verify Germano's decomposition:

$$L^o_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j$$

$$C^o_{ij} = \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{u'_i \bar{u}_j} - \bar{\bar{u}}_i \bar{u}'_j - \bar{u}'_i \bar{\bar{u}}_j \quad , \quad u' = u - \bar{u}$$

$$R^o_{ij} = \overline{u'_i u'_j} - \bar{u}'_i \bar{u}'_j$$

$$\rightarrow L^o_{ij} + C^o_{ij} + R^o_{ij} = \tau^R_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$$

با جاگذاری به راحتی:

Exercise: show Germano's decompositions are Galilean invarient

$$L^o_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j \longrightarrow \overline{\bar{w}_i \bar{w}_j} - \bar{\bar{w}}_i \bar{\bar{w}}_j \quad , \checkmark$$

با جاگذاری به راحتی.

PAPCO

Subject

Date

Exercise: verify C_s in Bardina model

$$\tau^K_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j - L^{\circ}_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j$$

$$\xrightarrow{\text{SOS}} T^d_{ij} = \widetilde{\overline{u_i u_j}} - \tilde{\bar{u}}_i \tilde{\bar{u}}_j - \widetilde{\overline{\tilde{\bar{u}}_i \tilde{\bar{u}}_j}} + \widetilde{\overline{\tilde{\bar{u}}}}_i \widetilde{\overline{\tilde{\bar{u}}}}_j$$

$$\rightarrow l^B_{ij} = T^d_{ij} - \widetilde{\tau^K_{ij}} = -\tilde{\bar{u}}_i \tilde{\bar{u}}_j - \widetilde{\overline{\tilde{\bar{u}}_i \tilde{\bar{u}}_j}} + \widetilde{\overline{\tilde{\bar{u}}}}_i \widetilde{\overline{\tilde{\bar{u}}}}_j - \widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \widetilde{\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j}} + \widetilde{\bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j}$$

ما شبیه‌سازی برای Smagorinsky کردیم:

$$\tau^K_{ij} - \frac{1}{3}\tau^K_{kk}\delta_{ij} = -2C_s\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}$$

$$T^d_{ij} - \frac{1}{3}T^d_{kk}\delta_{ij} = -2C_s\tilde{\bar{\Delta}}^2|\tilde{\bar{S}}|\tilde{\bar{S}}_{ij}$$

$$\rightarrow l^B_{ij} - \frac{1}{3}l^B_{kk}\delta_{ij} = -2C_s\tilde{\bar{\Delta}}^2|\tilde{\bar{S}}|\tilde{\bar{S}}_{ij} + 2C_s\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}$$

$$M_{ij} = -2\tilde{\bar{\Delta}}^2|\tilde{\bar{S}}|\tilde{\bar{S}}_{ij} + 2\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij} \longrightarrow l^B_{ij} - \frac{1}{3}l^B_{kk}\delta_{ij} = M_{ij}C_s$$

با ثابت فرض کردن C_s:

$$\rightarrow eq = \sum_{i=1}^{9}(\text{error})_i^2 = l^B_{ij} - \frac{1}{3}l^B_{kk}\delta_{ij} - M_{ij}C_s$$

$$\rightarrow \frac{\partial eq}{\partial C_s} = 0 \longrightarrow C_s = \frac{M_{ij}l^B_{ij}}{M_{kl}M_{kl}} \xrightarrow{\text{averaging}} C_s = \frac{(M_{ij}l^B_{ij})_{ave}}{(M_{kl}M_{kl})_{ave}}$$

Subject
Date

Exercise page 5 :

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}} \quad , \quad \underline{\underline{\tau}} = \mu\left(\nabla V + \nabla V^{T}\right) \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}} = \mu \underbrace{\nabla\cdot\nabla V}_{①} + \mu \underbrace{\nabla\cdot(\nabla V)^{T}}_{②}$$

$$① \longrightarrow \mu \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial V_k}{\partial x_j}\hat{e}_k \hat{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_j}\hat{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\cancel{\frac{\partial V_k}{\partial x_k}}}_{0}\hat{e}_j \Rightarrow$$

$$② \longrightarrow \mu \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial V_k}{\partial x_j}\hat{e}_j \hat{e}_k = \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial V_k}{\partial x_j}\hat{e}_k = \mu \nabla^2 V \quad \checkmark$$

Exercise page 8 :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{U}$$

$$\xrightarrow{\text{دیورژانس}} \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\nabla p) + \nu\vec{\nabla}\cdot(\nabla^2 U)$$

با توجه به اینکه اپراتور خطی است :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{U}) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla^2 p + \nu\nabla^2(\vec{\nabla}\cdot\vec{U})$$

$$\longrightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu\nabla^2\right]\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{U}\right] = -\frac{1}{\rho}\nabla^2 p - \vec{\nabla}\cdot(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}$$

$$(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{U}\vec{U})$$ اثبات هم کردیم که

Subject

Date

Exercise page 13:

$$-\rho\left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\rangle , \quad U=\langle U\rangle+u \longrightarrow -\rho\left\langle\left[\frac{\partial\langle U_j\rangle}{\partial x_i}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]\left[\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]\right\rangle$$

$$=-\rho\left\langle \frac{\partial\langle U_j\rangle}{\partial x_i}\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_j}+\cancelto{0}{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_j}}+\cancelto{0}{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial\langle U_j\rangle}{\partial x_i}}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\rangle$$

$$=-\rho\left\langle \frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_i}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\rangle=-\rho\,\frac{\partial\langle U_j\rangle}{\partial x_i}\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_j}$$

$$-\rho\left\langle\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\rangle$$

$$\frac{\partial^2\langle u_i u_j\rangle}{\partial x_i\,\partial x_j}=\left\langle\frac{\partial^2(u_i u_j)}{\partial x_i\partial x_j}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]\right\rangle$$

$$=\left\langle\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\rangle$$ برابر بالا شد

مطابق $\longrightarrow$ $$\frac{\partial^2\langle p\rangle}{\partial x_K\partial x_K}=-\rho\,\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_j}\frac{\partial\langle U_j\rangle}{\partial x_i}-\rho\,\frac{\partial^2\langle u_i u_j\rangle}{\partial x_j\,\partial x_i}$$

P4PCO

Subject
Date

Exercise page 41 :

$$M_{ij} = \overbrace{2\bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}} - 2\tilde{\bar{\Delta}}^2 |\tilde{\bar{S}}| \tilde{\bar{S}}_{ij}$$

$$S_{ij} = S_{ji} \longrightarrow M_{ij} = M_{ji} \checkmark$$

$$l_{ij} - \frac{1}{3} l_{KK} \delta_{ij} = C_s M_{ij} \xrightarrow{i=j} l_{ii} - \frac{1}{3} l_{KK} \delta_{ii} \quad , \delta_{ii} = 3$$

$$\longrightarrow l_{ii} - \frac{1}{3} \times 3 l_{KK} = 0 = C_s M_{ii} \longrightarrow M_{ii} = 0$$

$$\frac{\partial e_q}{\partial C_s} = 0 \longrightarrow -M_{ij} \left(l_{ij} - \frac{1}{3} l_{KK} \delta_{ij} - C_s M_{ij} \right) = 0$$

$$\longrightarrow -M_{ij} l_{ij} + \underbrace{\frac{1}{3} M_{ij} l_{KK} \delta_{ij}}_{A} + C_s M_{ij} M_{ij} = 0$$

$$\text{if } i=j \longrightarrow A = M_{ii} l_{KK} = 0$$ ((از رابطه بالا))

$$\text{if } i \neq j \longrightarrow \delta_{ij} = 0 \longrightarrow A = 0$$

$$\longrightarrow + M_{ij} l_{ij} = C_s M_{ij} M_{ij} \longrightarrow C_s = \frac{M_{ij} l_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}$$

Subject

Date

Exercise: show that

$$\hat{f}_K = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-iKx_j}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x) e^{-iK'x_j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} f_K e^{iKx} e^{-iK'x} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{K=-N/2}^{N/2-1} f_K e^{ix(K-K')}$$

$$\longrightarrow K = K' \longrightarrow p = Nm = 0 \ (Eq. 7.14) \longrightarrow \hat{f}_K = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x) e^{-iKx_j} = F_N\{f_j\}$$

Exercise: 3D orthogonality Eq (7.47)

$$\frac{1}{L^3} \int_0^L \int_0^L \int_0^L e^{iK_1x_1} e^{iK_2x_2} e^{iK_3x_3} e^{-iK'_1x_1} e^{-iK'_2x_2} e^{-iK'_3x_3} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

بنابرا (Eq. 7.4) ثابت می‌شود.

Exercis: D.15 pape

P4PCO

Subject

Date

Exercise: for incompressible flow show that Eq. (2.8) can be written in:

فشار

$$\frac{D\hat{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \hat{U} \quad \text{where} \quad p = \hat{p} + \rho\psi$$

$$\hat{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}} = \mu\hat{\nabla}\cdot\left[\nabla V + (\nabla V)^T\right] = \mu\hat{\nabla}\cdot\underbrace{\nabla V}_{1} + \mu\hat{\nabla}\cdot\underbrace{(\nabla V)^T}_{2}$$

$$1 \to \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{e}_i\cdot\frac{\partial V_k}{\partial x_j}\hat{e}_j\hat{e}_k = \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial V_k}{\partial x_j}\delta_{ij}\hat{e}_k = \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial V_k}{\partial x_i}\hat{e}_k$$

$$= \mu\nabla^2 V$$

$$2 \to \mu\hat{\nabla}\cdot(\nabla V)^T = \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{e}_i\cdot\frac{\partial V_k}{\partial x_j}\hat{e}_k\hat{e}_j = \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial V_k}{\partial x_j}\delta_{ik}\hat{e}_j$$

$$= \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\hat{e}_j = \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\cancel{\frac{\partial V_i}{\partial x_i}}^{\,0}}_{\text{continuity}} e_j = 0$$

Exercise: For homogeneous Flows and filter, show that:

$$\phi^R_{ij}(\vec{K}) = F\left\{R^R_{ij}(\vec{r})\right\} = \hat{G}^2(\vec{K})\,\phi_{ij}(\vec{K})$$

$$\to \left\langle \hat{G}(\vec{K}')\hat{u}_i(\vec{K}')\hat{G}(\vec{K})\hat{u}_j(\vec{K})\right\rangle = \left\langle\left(\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint \bar{u}_i(x)\, e^{-i\vec{K}'\cdot\vec{x}}\, d_x\right)\right($$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint \bar{u}_j(x')\, e^{-i\vec{K}\cdot\vec{x}'}\, d_{x'} \,, \quad \vec{r} = \vec{x}' - \vec{x} \,, \quad e^{-i\vec{K}\cdot\vec{x}'} = e^{-i\vec{K}\cdot\vec{x}}\, e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}$$

$$\to \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\left\langle \bar{\bar{u}}_i(x)\,\bar{\bar{u}}_j(\vec{x}+\vec{r})\right\rangle e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}\, d_{\vec{r}} \times \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\vec{K}\cdot\vec{x}}\, e^{-i\vec{K}'\cdot\vec{x}}\, d_{\vec{x}}$$

Subject
Date

$$= F\{R^R_{ij}(\vec{r})\}\, \langle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \rangle = F\{R^R_{ij}(\vec{r})\}\, \delta_{\vec{-K}-\vec{K}'}$$

$$\rightarrow \langle \hat{G}(\vec{K}')\hat{u}_i(\vec{K}')\, \hat{G}(\vec{K})\hat{u}_j(\vec{K}) \rangle = \phi^R_{ij}(\vec{K}) \quad , \; K' = -K$$

$$\rightarrow \langle \hat{G}(-\vec{K})\hat{u}_i(-\vec{K})\hat{G}(\vec{K})\hat{u}_j(K) \rangle \xrightarrow[\text{filter}]{\text{homogeneous}} \hat{G}(-\vec{K})\hat{G}(\vec{K})\underbrace{\langle \hat{u}_i(-\vec{K})\hat{u}_j(\vec{K}) \rangle}_{\phi_{ij}(\vec{K})}$$

$$\cdot\ \hat{G}(\vec{K}) = H(K_c - |\vec{K}|) \rightarrow G(-\vec{K}) = G(\vec{K})$$

$$\rightarrow \hat{G}^2(\vec{K})\,\phi_{ij}(\vec{K}) = \phi^R_{ij}(\vec{K})$$

- for isotropic filter:

$$E^R(\vec{K}) = \oint \frac{1}{2}\phi^R_{ii}(K)\, d_{S_K} \quad , \; \phi^R_{ii}(K) = \hat{G}^2(\vec{K})\phi_{ij}(\vec{K})$$

$$\rightarrow E^R(\vec{K}) = \oint \frac{1}{2}\hat{G}^2(\vec{K})\,\phi_{ij}(\vec{K})\, d_{S_{\vec{K}}} \xrightarrow[\text{filter}]{\text{isotropic}} \hat{G}^2(\vec{K}) \times \oint \frac{1}{2}\phi_{ij}(\vec{K})\, d_{S\vec{K}}$$

$$= \hat{G}^2(\vec{K}) \times E(\vec{K})$$

Exercise: show that

$$\hat{R}_{ij}(\vec{K}) = \hat{R}_{ji}(-\vec{K}) = \hat{R}^*_{ji}(\vec{K})$$

and from in ompresiblity:

$$\vec{K} \cdot \hat{R}(\vec{K}) = 0$$

$$\hat{R}_{ij}(\vec{K}) = \langle \hat{u}_i(-\vec{K}) \hat{u}_j(\vec{K}) \rangle$$

$$\rightarrow R_{ji}(\vec{K}) = \langle \hat{u}_j(-K) \hat{u}_i(\vec{K}) \rangle \rightarrow R_{ji}(-\vec{K}) = \langle \hat{u}_j(\vec{K}) \hat{u}_i(-\vec{K}) \rangle$$

$$\rightarrow \hat{R}_{ij}(\vec{K}) = \hat{R}_{ji}(-\vec{K})$$

b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \longrightarrow F\{\vec{\nabla} \cdot \vec{U}\} = i\vec{K} \cdot \hat{\vec{U}}(\vec{K}) = 0 \longrightarrow K_i \hat{U}_i(K) = 0$

for isotropic Turbulence: $\langle U \rangle = 0 \rightarrow U = u \rightarrow K_i \hat{u}_i(\vec{K}) = 0$

$$\hat{R}_{ij}(\vec{K}) = \langle \hat{u}_i(-\vec{K}) \hat{u}_j(\vec{K}) \rangle \rightarrow K_i R_{ij} = \langle K_i u_i(-\vec{K}) u_j(\vec{K}) \rangle = 0$$

$$\rightarrow -\langle \underbrace{-k_i u_i(-\vec{K})}_{0} u_j(\vec{K}) \rangle = 0$$

Subject

Date

Exercise page 79:

$$\hat{f}_{-K_1,-K_2} = \frac{1}{N_1}\frac{1}{N_2}\sum_{m=0}^{N_1-1}\sum_{l=0}^{N_2-1} \underbrace{f_{m,l}\, e^{iK_1 x_m}\, e^{iK_2 y_l}}_{A}$$

$$A = f_{m,l}\left[\cos K_1 x_m + i\sin K_1 x_m\right]\left[\cos K_2 y_l + i\sin K_2 y_l\right]$$

$$= f_{m,l}\left[\left(\cos K_1 x_m \cdot \cos K_2 y_l - \sin K_1 x_m \cdot \sin K_2 y_l\right) + i\left(\cos K_1 x_m \cdot \sin K_2 y_l + \sin K_1 x_m \cos K_2 y_l\right)\right]$$

for $\hat{f}_{K_1,K_2}$ we can calculate:

$$\hat{f}_{K_1,K_2} = \frac{1}{N_1}\frac{1}{N_2}\sum_{m=0}^{N_1-1}\sum_{l=0}^{N_2-1} \underbrace{f_{m,l}\, e^{-iK_1 x_m}\, e^{-iK_2 y_l}}_{B}$$

$$B = f_{m,l}\left[\cos K_1 x_m - i\sin K_1 x_m\right]\left[\cos K_2 y_l - i\sin K_2 y_l\right]$$

$$\rightarrow B^{*} = A \longrightarrow \hat{f}^{*}_{K_1,K_2} = \hat{f}_{-K_1,-K_2}$$

Exercise page 88:

$$i\vec{K}\cdot\left[\frac{d}{dt}\hat{\vec{U}}(\vec{K}) + \nu K^2 \hat{\vec{U}}(\vec{K}) = -i\vec{K}\hat{p}(\vec{K}) - \hat{\vec{G}}(\vec{K})\right]$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(i\vec{K}\cdot\hat{\vec{U}}(K)\right) = \frac{d}{dt} F_L\left\{\vec{\nabla}\cdot U(\vec{x},t)\right\} = 0$$

$$\rightarrow -\nu\left[i\vec{K}\cdot\left(-K^2\hat{\vec{U}}(\vec{K})\right)\right] = -\nu F_L\left\{\nabla\cdot\left(\nabla^2\vec{U}(x,t)\right)\right\} = 0$$

با اتحاد زیر:

$$\nabla^2 V = \nabla(\cancel{\nabla\cdot V}) - \vec{\nabla}\times(\cancel{\vec{\nabla}\times\vec{V}}) = 0$$

continuity $\quad$ 0

Subject
Date

$$\rightarrow i\vec{K} \cdot \left[-i\vec{K}\, \hat{p}(\vec{K}) - \hat{\vec{G}}(\vec{K}) \right] = 0$$

$$\rightarrow K^2 \hat{p}(\vec{K}) - i\vec{K} \cdot \hat{\vec{G}}(\vec{K}) = 0 \longrightarrow K^2 \hat{p}(\vec{K}) = i\vec{K} \cdot \hat{\vec{G}}(\vec{K})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} i K'_k \hat{u}_i(\vec{K}') e^{i\vec{K}' \cdot \vec{x}} d\vec{K}' \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_l}$$

$$i K_l \hat{u}_j(\vec{K}) e^{i\vec{K} \cdot \vec{x}} d\vec{K}$$

PAPCO