
Modelos de probabilidad

Apellidos, nombre:

Grupo de prácticas:

DNI:

Notas:

- 1) Esta práctica se realizará los días 7, 8, 9 y 10 de noviembre de 2023.
- 2) La fecha límite de entrega de esta práctica, que debe presentarse en el Campus Virtual UVa, son las 14 horas del miércoles 15 de noviembre de 2023.

EJERCICIO 1

En una tienda de consumibles informáticos, se dispone de $(n + 1)$ cajas iguales. En la primera hay n discos CD, en la segunda $(n - 1)$ discos CD y un disco DVD, en la tercera $(n - 2)$ discos CD y dos discos DVD, y así sucesivamente, hasta la última que tiene n discos DVD. De una caja elegida al azar se extraen tres discos.

- 1.1 Calcular la probabilidad de que los tres discos sean DVD.

Indicación:
$$\sum_{i=3}^n i(i-1)(i-2) = \frac{n(n^2-1)(n-2)}{4}$$

- 1.2 Para $n = 4$, ¿cuál es la composición más probable de la caja si se han obtenido dos discos DVD y un disco CD?

EJERCICIO 2

La distribución de rentas en la ciudad de Mambo se puede modelar mediante una variable aleatoria continua X cuya función de distribución (x en miles de euros) es

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{13}{2x}\right)^2 & \text{si } x \geq k \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcular:

2.1 El valor de k .

2.2 La media y la mediana de X . Interpretar los valores obtenidos.

2.3 La media de los valores superiores a la media. Interpretar el resultado.

2.4 El porcentaje de rentas que se encuentran entre 9750 y 19500 euros y la distribución de esas rentas.

2.5 El coeficiente de variación de las rentas que se encuentran entre 9750 y 19500 euros.

EJERCICIO 3

En la fábrica *Marcasinley* se empaquetan los rodillos para impresoras láser en cajas de 80 unidades, y se sabe que en cada una de ellas el número de defectuosos es 5.

3.1 Si se seleccionan al azar diez rodillos de una caja, ¿qué ley tiene la variable aleatoria $X =$ número de rodillos defectuosos?

3.2 ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos rodillos defectuosos de los diez seleccionados?

3.3 ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos dos rodillos defectuosos?

3.4 Suponiendo ahora que las cajas contuviesen 2000 rodillos, y que cada una tuviese 125 rodillos defectuosos, ¿qué ley tendría la variable aleatoria $Y =$ número de rodillos defectuosos de diez seleccionados?

3.5 Calcular exactamente, y mediante la aproximación que se considere más adecuada, las probabilidades $\Pr\{Y = 1\}$ y $\Pr\{Y \leq 2\}$. Justificar la respuesta.

EJERCICIO 4

En el municipio de *Ciudad Vieja*, con una población envejecida formada por 6000 hombres y 8000 mujeres, la probabilidad de contraer la enfermedad *OOD* es del 2.5 por mil.

- 4.1 Sea T el número de hombres del municipio de *Ciudad Vieja* que contraen la enfermedad. ¿Cuál es la ley de probabilidad de la variable aleatoria T ? ¿Y su función de probabilidad?
- 4.2 ¿Qué es más probable, que veintisiete hombres de *Ciudad Vieja* contraigan la enfermedad *OOD* o que lo hagan al menos treinta y seis mujeres de ese municipio?
- 4.3 ¿A qué modelo de probabilidad discreto se puede aproximar la variable aleatoria T ? Justificar la respuesta.
- 4.4 Calcular, utilizando el modelo indicado en el apartado anterior, la probabilidad asociada a la variable aleatoria T del apartado 4.2.
- 4.5 Repetir el apartado anterior, pero aproximando ahora a un modelo continuo de probabilidad. Justificar la respuesta.
- 4.6 Sea X una variable aleatoria con la distribución utilizada en el apartado 4.3. Comparar gráficamente las funciones de probabilidad de las variables aleatorias T y X y la función de densidad de la variable aleatoria utilizada en el apartado anterior. ¿Qué distribución se aproxima mejor a la de la variable T ? Razonar la respuesta.

- 4.7 ¿Cuál es la probabilidad de que al menos treinta y cinco personas del municipio de *Ciudad Vieja* contraigan la enfermedad? Calcular esta probabilidad exactamente y mediante dos aproximaciones. Comentar los resultados obtenidos.

EJERCICIO 5

El consumo de gas natural para usos industriales en un determinado polígono industrial varía diariamente entre 2000 y 12500 m³. Se ha detectado que de seguir el consumo como hasta ahora, puede haber restricciones de gas. Por este motivo se ha elaborado un estudio en el que se concluye que no habrá problemas de suministro de gas natural si el consumo para uso industrial no supera diariamente los 11000 m³.

- 5.1 ¿Cuál es la probabilidad de que en un determinado día haya problemas de suministro para el polígono industrial?

Indicación: Como de la variable aleatoria X = consumo diario de gas natural para usos industriales (en m³) sólo se sabe que varía entre 2000 y 12500, se puede asumir que X tiene una distribución uniforme en el intervalo 2000 a 12500.

- 5.2 Sea Y la variable aleatoria número de días con restricciones en una semana, determinar su función de probabilidad.

- 5.3 ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana existan restricciones en al menos tres días?

- 5.4 ¿Cuál es la probabilidad de que en un año existan restricciones en al menos 60 días? Calcular esta probabilidad también de forma aproximada, justificando la respuesta.

EJERCICIO 6

El tiempo T (en segundos) que tarda un procesador en ejecutar un algoritmo de optimización tiene una distribución exponencial con tiempo esperado de 15 segundos. Calcular:

- 6.1 La probabilidad de que el procesador tarde en ejecutar el algoritmo, con un conjunto de valores seleccionado al azar, a lo más medio minuto.
- 6.2 La probabilidad de que el procesador tarde en una ejecución seleccionada al azar al menos el tiempo medio.
- 6.3 La probabilidad de que el procesador tarde entre el tiempo medio y un minuto en la próxima ejecución del algoritmo de optimización.
- 6.4 ¿Para qué valor de t se verifica que $\Pr\{T > t\} = 4/5$? Justificar la respuesta.

EJERCICIO 7

Una empresa que fabrica discos compactos está muy preocupada porque sus ventas han bajado por el problema del canon digital. Por este motivo está pensando en cerrar una de sus fábricas. En un estudio elaborado por una empresa consultora se ha establecido que la demanda diaria de los discos compactos fabricados por esa empresa se distribuye normalmente, y se sabe que el 12 % de los días la demanda es inferior a 7060 discos y el 8 % de los días supera los 9124 discos.

- 7.1 Determinar la distribución de la demanda diaria, teniendo en cuenta que tanto μ como σ son números enteros.
- 7.2 Para no cerrar la fábrica, la empresa exige que la demanda semanal sea superior a 51500 discos, ¿cuál es la probabilidad de que la empresa cierre? Razonar la respuesta.

- 7.3 Se toma una muestra aleatoria de las demandas de 16 días. ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda media en ese periodo esté comprendida entre 7750 y 8250 discos?
- 7.4 El comité de empresa ha protestado enérgicamente ante la propuesta de la patronal y ha sugerido a la dirección que cierre sólo en el caso de que el número de días, durante una semana, en que no se supere una demanda de 7750 discos sea superior a dos. ¿Ha actuado de manera correcta el comité de empresa para defender los derechos de los trabajadores? Razonar la respuesta.