• Ejercicio 8.32.

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot (x^2 + 1/2) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

A) Obtener el valor de k

Como $f(x)$ es la función de densidad, cumple la siguiente propiedad: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

(Omitimos los valores en los que la integral es 0)

$$\longrightarrow \int_0^1 k(x^2 + 1/2)\,dx = 1 \underset{k \text{ cte.}}{\Longrightarrow} k \cdot \int_0^1 (x^2 + 1/2)\,dx = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow k \cdot \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x \right]_0^1 = 1 \Rightarrow 1/3\,k + 1/2\,k = 1 \Rightarrow 5/6\,k = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{k = 6/5}$$

B) Calcular función de distribución ; +25% personas contactadas, -75% respondan

— La relación entre la función de densidad y distribución es : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

(Omitimos los valores en los que la integral es 0)

$$\longrightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x \frac{6}{5}(t^2 + 1/2)\,dt = 6/5\left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x\right) & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \int_0^1 \frac{6}{5}(x^2 + 1/2)\,dx = 1 & \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

(los tramos $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$ valen 0)

$$= \left[\frac{6}{5}\left(t^3 + \frac{1}{2}t\right)\right]_0^x = \frac{6}{5}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x\right)$$

$$\longrightarrow p(0{,}25 < x < 0{,}75) = p(x < 0{,}75) - p(x < 0{,}25) = F(0{,}75) - F(0{,}25) =$$

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{0{,}75^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot 0{,}75\right) - \frac{6}{5}\left(\frac{0{,}25^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot 0{,}25\right) = \frac{37}{80}$$

c) $p(|x-E(x)| > 0{,}1)$

— La media: $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$

$$E(x) = \int_0^1 x \cdot 6/5\,(x^2 + 1/2)\, dx = \frac{6}{5}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{6}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{5}$$

— $p(|x-E(x)| > 0{,}1) = p(|x-3/5| > 0{,}1) = \begin{cases} p(x - 3/5 > 0{,}1) = p(x > 0{,}7) \\ p(x - 3/5 < -0{,}1) = p(x < 0{,}5) \end{cases}$

— Como nos dan la función de densidad:

$$p(x > 0{,}7) + p(x < 0{,}5) = \int_{0{,}7}^{1} 6/5\,(x^2 + 1/2)\, dx + \int_0^{0{,}5} 6/5\,(x^2 + 1/2)\, dx =$$

$$= 6/5\left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x\right]_{0{,}7}^{1} + 6/5\left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x\right]_0^{0{,}5} = \underline{0{,}743}$$

— Comparamos con la desigualdad de Chebychev

Buscamos S:

$$S^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) - (E(x))^2 = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{6}{5}(x^2 + 1/2)\, dx - (3/5)^2 =$$

$$= \frac{6}{5}\left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{6}\right]_0^1 - 9/25 = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) - \frac{9}{25} = \frac{2}{25}$$

— $S^2 = 2/25 \Longrightarrow S = \frac{\sqrt{2}}{5}$

— $p(|x-E(x)| < k \cdot S) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

$k \cdot S = 0{,}1 \Rightarrow k \cdot \frac{\sqrt{2}}{5} = 0{,}1 \Rightarrow k = 0{,}3535$

— $p(|x-E(x)| < k \cdot S) \geq 1 - 1/k^2 \Longrightarrow p(|x-E(x)| > k \cdot S) \leq 1/k^2$ — $1/0{,}3535^2 \leq \gamma$

$$\left[p(|x-E(x)| > k \cdot S) \leq \gamma\right]$$