Modelos de probabilidad

Apellidos, nombre: Garcia Salinas, Daniel *Grupo de prácticas:*
DNI: 71188618F

Notas:

1) Esta práctica se realizará los d as 7, 8, 9 y 10 de noviembre de 2023.
2) La <u>fecha límite </u>de entrega de esta práctica, que debe presentarse en el Campus Virtual UVa, son las <u>14 horas del miércoles 15 de noviembre de 2023</u>.

EJERCICIO 1

En una tienda de consumibles informáticos, se dispone de $(n + 1)$ cajas iguales. En la primera hay n discos CD, en la segunda $(n - 1)$ discos CD y un disco DVD, en la tercera $(n - 2)$ discos CD y dos discos DVD, y así sucesivamente, hasta la última que tiene n discos DVD. De una caja elegida al azar se extraen tres discos.

1.1 Calcular la probabilidad de que los tres discos sean DVD.

<u>Indicación</u>: $\displaystyle\sum_{i=3}^{n} i(i-1)(i-2) = \frac{n(n^2-1)(n-2)}{4}$

1.1.)

C_i = caja i-ésima ⇒ i discos DVD y $n-i$ discos CD $(i = 0,1,\dots,n)$

→ B = extraer 3 discos que sean DVD ⇝ $P_r(B)$?

→ $P_r(C_i) = \frac{1}{n+1}$; $P_r(B/C_i) = \begin{cases} \frac{\binom{i}{3}}{\binom{n}{3}} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{i(i-1)(i-2)}{n(n-1)(n-2)} & i \geq 3 \\ 0 & i = 0,1,2,\dots \end{cases}$

→ $P_r(B) \underset{\text{T. probabilidad total}}{=} \sum_{i=0} p(C_i)\cdot p(B/C_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{i(i-1)(i-2)}{n(n-1)(n-2)} \underset{\text{Anotación}}{=}$

$= \frac{\cancel{n}(n^2-1)\cancel{(n-2)}}{4(n+1)\cancel{n}(n-1)\cancel{(n-2)}} = \frac{\cancel{(n-1)}\cancel{(n+1)}}{4\cancel{(n+1)}\cancel{(n-1)}} = 1/4 \Rightarrow \boxed{P_r(B) = 1/4}$

1.2 Para $n = 4$, ¿cuál es la composición más probable de la caja si se han obtenido dos discos DVD y un disco CD?

1.2)

$n = 4$

→ A = extraer 2DVD y 1CD

→ $Pr(C_0/A) = 0$ → imposible porque en caja i=0 solo hay CDs

→ $Pr(C_1/A) = 0$ → imposible porque en caja i=1 solo hay 1 DVD

→ $Pr(C_2/A) \underset{\text{T. Bayes}}{=} \dfrac{Pr(A/C_2)\cdot Pr(C_2)}{Pr(A)}$ → $pr(A/C_2) = \dfrac{\binom{2}{2}\binom{4-2}{1}}{\binom{4}{3}} = 1/2$

→ $pr(C_2) = \dfrac{1}{5}$

→ $Pr(A) = \sum_{i=0}^{n} p(C_i)\cdot p(A/C_i)$

→ $Pr(C_3/A) \underset{\text{T. Bayes}}{=} \dfrac{Pr(A/C_3)\cdot Pr(C_3)}{Pr(A)}$ → $pr(A/C_3) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{4-3}{1}}{\binom{4}{3}} = 3/4$

→ $pr(C_3) = 1/5$

→ $pr(A) = \sum_{i=0}^{n} p(C_i)\cdot p(A/C_i)$

composición + probable i=3 (C_3)

→ $pr(A) = 1/2\cdot 1/5 + 3/4 \cdot 1/5 = 0{,}25$; $Pr(C_2/A) = \dfrac{1/2\cdot 1/5}{0{,}25} = 0{,}4$; $\boxed{Pr(C_3/A) = \dfrac{3/4\cdot 1/5}{0{,}25} = 0{,}6}$

EJERCICIO 2

La distribución de rentas en la ciudad de Mambo se puede modelar mediante una variable aleatoria continua X cuya función de distribución (x en miles de euros) es

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{13}{2x}\right)^2 & \text{si } x \geq k \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcular:

2.1 El valor de k.

2.1.) X = miles de euros renta ; k?

→ La función de distribución es una función continua:

$\lim_{x\to k^-} F(x) = \lim_{x \to k^+} F(x) \Rightarrow 1 - \left(\dfrac{13}{2k}\right)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{13}{2k}\right)^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{13}{2k} = 1 \Rightarrow 2k = 13 \Rightarrow \underline{k = 6{,}5}$

2.2 La media y la mediana de X. Interpretar los valores obtenidos.

2.2.) $E(x)$? ; $Me(x)$?

→ 1º calculamos la función de densidad : $f(x) = F'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \left(1-\left(\frac{13}{2x}\right)^2\right)' & x \geq 6{,}5 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} 169/2x^3 & x \geq 6{,}5 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\to E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{169}{2x^3} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{169}{2x^2} = \left[\frac{169}{2x}\right]_{13/2}^{\infty} =$$

$$= \frac{169}{2}\left[-1/x\right]_{13/2}^{\infty} = \underline{\underline{13}} \text{ miles de euros de renta media}$$

cuando sustituimos $x = \infty$, da 0

$$\to Me(x) \Rightarrow \int_{13/2}^{Me} \frac{169}{2x^3}\, dx = 0{,}5 \Rightarrow \frac{169}{2}\int_{13/2}^{Me} 1/x^3\, dx = 0{,}5 \Rightarrow \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_{13/2}^{Me} = \frac{1}{169} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2Me^2} = -\frac{1}{169} \Rightarrow 169 = 2Me^2 \Rightarrow \boxed{Me = \underline{9{,}1924} \text{ miles de euros}}$$

2.3 La media de los valores superiores a la media. Interpretar el resultado.

2.3)

y = rentas superiores a la media → $E(y)$?

→ Buscamos función de densidad $f_{x/x>13}$, mediante el cálculo de la $F_{x/x>13}$

→ $F_{x/x>13} = \frac{P_r(13<X<x)}{P_r(x>13)} = \frac{F(x)-F(13)}{1-F(13)} =$

$= \frac{1-(\frac{13}{2x})^2-\left(1-(\frac{13}{2\cdot 13})^2\right)}{1-\left(1-(\frac{13}{26})^2\right)} = \frac{1-(\frac{13}{2x})^2-\frac{3}{4}}{1-3/4} =$

$= \frac{1/4-(\frac{13}{2x})^2}{1/4}$ → para $x>13$; 0 en el resto

→ $f_{x/x>13} = F'_{x/x>13} = \frac{0\cdot 2\left(\frac{13}{2x}\right)\left(-\frac{13\cdot 2}{(2x)^2}\right)\cdot 1/4 \; \cancel{-\left(1/4-(\frac{13}{2x})^2\right)\cdot 0}}{1/4^2} =$

derivada cociente

$= \frac{\left(-\frac{26}{2x}\right)\left(-\frac{26}{4x^2}\right)}{1/4} = \frac{\frac{169}{2x^3}}{1/4} = \frac{338}{x^3}$ → para $x>13$; 0 en el resto

→ $E(x/x>13) = \int_{13}^{+\infty} x\cdot\frac{338}{x^3} = 338\cdot\int_{13}^{+\infty} x^{-2} = 338\left[-\frac{1}{x}\right]_{13}^{\infty} =$

$= 338\cdot\left[\frac{1}{13}\right] = \underline{\underline{26}}$ miles de euros

2.4 El porcentaje de rentas que se encuentran entre 9750 y 19500 euros y la <u>distribución</u> de esas rentas.

2.4.) $P_r(9{,}75 < x < 19{,}6) = \int_{9{,}75}^{19{,}5} 1-\frac{169}{2x^3}\,dx = \frac{169}{2}\int_{9{,}75}^{19{,}5} x^{-3}\,dx =$

$= \frac{169}{2}\left[\frac{-2}{x^2}\right]_{9{,}75}^{19{,}5} = \frac{169}{2}\left(-\frac{2}{19{,}6^2}+\frac{2}{9{,}75^2}\right) = 1{,}333\ldots$ → 33,33% vecinos renta entre 9750 y 10500 euros

2.5 El coeficiente de variación de las rentas que se encuentran entre 9750 y 19500 euros.

2.5.) CV_x ?

→ Calculamos función de distribución $F_{X/9,75<x<19,5} =$

$$= P(X/_{9,75<x<19,5}) = \frac{P(9,75<X\le x)}{P(9,75\le X\le 19,5)} = \frac{F(x)-F(9,75)}{F(19,5)-F(9,75)} =$$

$$= \frac{F(x)-5/9}{1/3} = \frac{1-\left(\frac{13}{2x}\right)^2-5/9}{1/3} = \frac{4/9-\left(\frac{13}{2x}\right)^2}{1/3} \text{ en } 9,75<x<19,5 \text{ ;}$$

0 en el resto

→ Calculamos función de densidad $f_{X/9,75<x<19,5} =$

$$= \frac{0-\left(\frac{26}{2x}\right)\cdot\left(-\frac{26}{4x^2}\right)}{1/3} = \frac{\frac{676}{8x^3}}{1/3} = \frac{\frac{169}{2x^3}}{1/3} = \frac{507}{2x^3} \text{ en } 9,75<x<19,5$$

→ $CV_r = \frac{var(x)}{E(x)}$, → $E(x) = \int_{9,75}^{19,5} x \cdot \frac{507}{2x^3}dx = \frac{507}{2}\cdot\int_{9,75}^{19,5} x^{-2}\,dx =$

$$= \frac{507}{2}\left[-\frac{1}{x}\right]_{9,75}^{19,5} = 13 \text{ mil euros renta media}$$

→ $var(x) = \int_{9,75}^{19,5} x^2\cdot\frac{507}{2x^3}\,dx - 1 = \frac{507}{2}\int_{9,75}^{19,5}\frac{1}{x}\,dx - 1 = \frac{507}{2}\left[\ln x\right]_{9,75}^{19,5} - 13^2 =$

$$= \frac{507}{2}\cdot\left(\ln(19,5)-\ln(9,75)\right) - 169 = 6,7128$$

→ $\left[CV_r = \frac{\sqrt{6,71}}{13} \simeq 0,2\right]$

EJERCICIO 3

En la fábrica *Marcasinley* se empaquetan los rodillos para impresoras láser en cajas de 80 unidades, y se sabe que en cada una de ellas el número de defectuosos es 5.

3.1 Si se seleccionan al azar diez rodillos de una caja, ¿qué ley tiene la variable aleatoria X = número de rodillos defectuosos?

3.1.) X = número de rodillos defectuosos entre 10

$\longrightarrow H(N = 80,\ n = 10,\ p = 5/80)$

└→ hipergeométrica $\begin{cases} N = \text{población} \\ p = \text{probabilidad característica} \\ n = \text{nº ensayos} \end{cases}$

3.2 ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos rodillos defectuosos de los diez seleccionados?

3.2.) $Pr(X=2) \longrightarrow 0{,}102467$

Probabilidad de Masa (=)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
2	0,102467				
1	0,381404				
0	0,503453				

3.3 ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos dos rodillos defectuosos?

3.3.) $Pr(X \geq 2) = 1 - p(x=0) - p(x=1) = 1 - 0{,}503453 - 0{,}381404 =$

$= 0{,}115143$

3.4 Suponiendo ahora que las cajas contuviesen 2000 rodillos, y que cada una tuviese 125 rodillos defectuosos, ¿qué ley tendrá la variable aleatoria Y = número de rodillos defectuosos de diez seleccionados?

3.4.) Y = número de rodillos defectuosos entre 10

$\longrightarrow H(N = 2000,\ n = 10,\ p = 125/2000)$

3.5 Calcular exactamente, y mediante la aproximación que se considere más adecuada, las probabilidades $\Pr\{Y = 1\}$ y $\Pr\{Y <= 2\}$. Justificar la respuesta.

3.5.) EXACTAMENTE

$P_r(y=1) = \underline{0{,}350798}$

$P_r(y \leq 2) = P_r(y=0) + P_r(y=1) + P_r(y=2) = 0{,}523672 + 0{,}350798 + 0{,}104845 =$

$= \underline{0{,}979315}$

APROXIMACIÓN

Aproximamos a distribución binomial $\sim B(10;\ 0.0625)$

$P_r(B_{(10,\ 0.0625)} = 1) = \underline{0{,}34964}$

$P_r(B_{(10,\ 0.0625)} \leq 2) = P_r(B_{(10,\ 0.0625)} = 0) + P_r(B_{(10,\ 0.0625)} = 1) + P_r(B_{(10,\ 0.0625)} = 2) =$

$= 0{,}52446 + 0{,}34964 + 0{,}104892 = \underline{0{,}978992}$

Probabilidad de Masa (=)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
2	0,102467				
1	0,381404				
0	0,503453				

Probabilidad de Masa (=)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
0	0,52446				
1	0,34964				
2	0,104892				

EJERCICIO 4

En el municipio de *Ciudad Vieja*, con una población envejecida formada por 6000 hombres y 8000 mujeres, la probabilidad de contraer la enfermedad OOD es del $2{:}5$ por mil.

4.1 Sea T el número de hombres del municipio de *Ciudad Vieja* que contraen la enfermedad. ¿Cuál es la ley de probabilidad de la variable aleatoria T? ¿Y su función de probabilidad?

4.1) $T =$ nº hombres con enfermedad $\sim B(6000,\ 0.0025)$
↳ Binomial

Función de probabilidad: $P_r(T=k) = \binom{6000}{k}\ 0{,}0025^k \cdot (1-0{,}0025)^{6000-k}$

4.2 ¿Qué es más probable, que veintisiete hombres de *Ciudad Vieja* contraigan la enfermedad OOD o que lo hagan al menos treinta y seis mujeres de ese municipio?

4.2.) $P_r(T=27) = \binom{6000}{27} \cdot 0.0025^{27} \cdot (1-0{,}0025)^{6000-27} =$ (statgraphics)

$= \underline{0{,}00158058}$

$M =$ nº mujeres con enfermedad $\to B(8000,\ 0.0025)$

Función de probabilidad: $P_r(M=k) = \binom{8000}{k}\ 0{,}0025^k \cdot (1-0{,}0025)^{8000-k}$

$P_r(M=36) = \binom{8000}{36}\ 0{,}0025^{36} \cdot (1-0{,}0025)^{8000-36} =$ (Statgraphics)

$= \underline{0{,}000375546}$

$P_r(M \geq 36) = P_r(M=36) + P_r(M>36) = 0{,}000375546 + 0{,}000415333 =$
↳ statgraphics

$= \underline{0{,}000790879}$

* Más probable que contraigan la enfermedad 27 hombres que al menos 36 mujeres

Probabilidad de Masa (=)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
27	0,00158058				

Probabilidad de Masa (=)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
36	0,000375546				

Área Cola Superior (>)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
36	0,000415333				

4.3 ¿A qué modelo de probabilidad discreto se puede aproximar la variable aleatoria T? Justificar la respuesta.

4.3.) Como n es mayor que 50 y p menor de 0,10, aproximamos a una Poisson $\sim P(n \cdot p)$ — $P(6000 \cdot 0.0025) = P(15)$

4.4 Calcular, utilizando el modelo indicado en el apartado anterior, la probabilidad asociada a la variable aleatoria T del apartado 4.2.

4.4.) $P(T=27) = 0{,}00159611$

↳ statgraphics

Probabilidad de Masa (=)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
27	0,00159611				

4.5 Repetir el apartado anterior, pero aproximando ahora a un modelo continuo de probabilidad. Justificar la respuesta.

4.5.) Aproximamos a una distribución normal

$$B(6000,\ 0.0025) \simeq N\left(6000 \cdot 0{,}025,\ \sqrt{6000 \cdot 0{,}0025 \cdot (1-0{,}0025)}\right) =$$

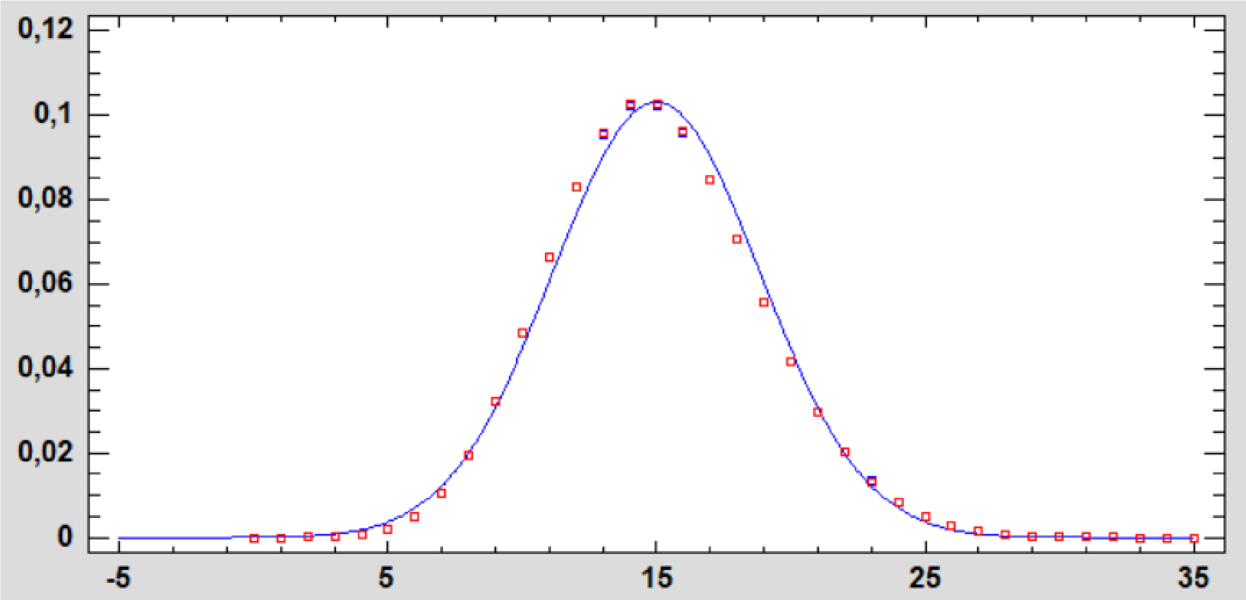
$$= N(15,\ 3.868)$$

$$p(T=27) = p(26{,}5 < T < 27{,}5) = p(T<27{,}5) - p(T<26{,}5) =$$

$$= 0{,}999385 - 0{,}998526 = \underline{0{,}000859}$$

porque estamos pasando de variable discreta a continua → corrección por continuidad

4.6 Sea X una variable aleatoria con la distribución utilizada en el apartado 4.3. Comparar gráficamente las funciones de probabilidad de las variables aleatorias T y X y la función de densidad de la variable aleatoria utilizada en el apartado anterior. ¿Qué distribución se aproxima mejor a la de la variable T? Razonar la respuesta.



El modelo que mejor se aproxima a la distribución binomial es el modelo discreto de Poisson

4.7 ¿Cuál es la probabilidad de que al menos treinta y cinco personas del municipio de *Ciudad Vieja* contraigan la enfermedad? Calcular esta probabilidad exactamente y mediante dos aproximaciones. Comentar los resultados obtenidos.

4.7.) y = nº personas contraen enfermedad $\sim B(14000, 0.0025)$

$p(y \geq 35) = p(y = 35) + p(y > 35) = 0{,}0673574 + 0{,}455208 = \underline{0{,}5225654}$

statgraphics

APROXIMACIONES:

$P(35) \longrightarrow p(y \geq 35) = 0{,}0672732 + 0{,}455208 = \underline{0{,}5224812}$

statgraphics

$N(35, 5.90868) \longrightarrow p(y \geq 35) = 0{,}067518 + 0{,}5 = \underline{0{,}567518}$

statgraphics

BINOMIAL

Probabilidad de Masa (=)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
35	0,0673574				

Área Cola Superior (>)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
35	0,455208				

POISSON

Probabilidad de Masa (=)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
35	0,0672732				

Área Cola Superior (>)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
35	0,455208				

NORMAL

Probabilidad de Densidad

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
35	0,067518				

Área Cola Superior (>)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
35	0,5				

EJERCICIO 5

El consumo de gas natural para usos industriales en un determinado polígono industrial varía diariamente entre 2000 y 12500 m^3. Se ha detectado que de seguir el consumo como hasta ahora, puede haber restricciones de gas. Por este motivo se ha elaborado un estudio en el que se concluye que no habrá problemas de suministro de gas natural si el consumo para uso industrial no supera diariamente los 11000 m^3.

5.1 ¿Cuál es la probabilidad de que en un determinado d a haya problemas de suministro para el polígono industrial?

Indicación: Como de la variable aleatoria X = consumo diario de gas natural para usos industriales (en m^3) s se sabe que varía entre 2000 y 12500, se puede asumir que X tiene una distribución uniforme en el intervalo 2000 a 12500.

5.1.) $X \rightarrow$ consumo diario de gas natural en $m^3 \rightarrow U(2000, 12500)$

distribución uniforme

Función de distribución:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12500 - 2000} & \text{si } 2000 \leq x \leq 12500 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$\rightarrow$ Problemas de distribución $X > 11000 \rightarrow p(X > 11000) = \int_{11000}^{12500} \frac{1}{10500} \, dx =$

$$= \frac{1}{10500} \cdot [x]_{11000}^{12500} = \frac{12500 - 11000}{10500} = \underline{0{,}142857}$$

5.2 Sea Y la variable aleatoria número de d as con restricciones en una semana, determinar su función de probabilidad.

5.2.) $Y \rightarrow$ nº días con restricciones en una semana

$$B(\underbrace{n = 7}_{\text{días semana}},\ p = 0{,}142857) \Rightarrow p(Y = k) = \binom{7}{k} \cdot 0{,}142857^{k} (1 - 0{,}142857)^{7-k}$$

5.3 ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana existan restricciones en al menos tres días?

5.3.) $p(y \geq 3) = p(y=3) + p(y>3) = 0{,}55079 + 0{,}0101498 = \underline{0{,}5609298}$

Statgraphics

Probabilidad de Masa (=)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
3	0,055079				

Área Cola Superior (>)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
3	0,0101498				

5.4 ¿Cuál es la probabilidad de que en un año existan restricciones en al menos 60 d as? Calcular esta probabilidad también de forma aproximada, justificando la respuesta.

5.4.) Z – nº días con restricciones en un año $\longrightarrow B(n=365,\ 0{,}142857)$

$$Pr(Z \geq 60) = Pr(Z=60) + Pr(Z>60) = 0{,}0289681 + 0{,}10725 =$$

$$= \underline{0{,}1362181}$$

Probabilidad de Masa (=)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
60	0,0289681				

Área Cola Superior (>)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
60	0,10725				

EJERCICIO 6

El tiempo T (en segundos) que tarda un procesador en ejecutar un algoritmo de optimización tiene una distribución exponencial con tiempo esperado de 15 segundos. Calcular:

6.1 La probabilidad de que el procesador tarde en ejecutar el algoritmo, con un conjunto de valores seleccionado al azar, a lo más medio minuto.

6.1.) ⟶ distribución exponencial: $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$

⟶ nos dicen que el tiempo esperado es 15 $\Rightarrow E(x) = 15$ ⟶ $E(x) = \frac{1}{\lambda}$ ⟶

⟶ $\lambda = 1/15$

T → tiempo que tarda un procesador en ejecutar un algoritmo de optimización (s)

$T \to Exp(1/15)$

$$P(T<30) = \int_0^{30} \frac{1}{15} \cdot e^{-1/15 x}\,dx = \left[-e^{-1/15 x}\right]_0^{30} = \underline{-e^{-2} + \overset{1}{e^{0}}}$$

6.2 La probabilidad de que el procesador tarde en una ejecución seleccionada al azar al menos el tiempo medio.

$$6.2.)\quad P(T>15) = \int_{15}^{+\infty} \frac{1}{15} \cdot e^{-1/15x}\,dx = \left[-e^{-1/15x}\right]_{15}^{\infty} = \underline{\cancel{-e^{-\infty}} + e^{-1}}$$

6.3 La probabilidad de que el procesador tarde entre el tiempo medio y un minuto en la próxima ejecución del algoritmo de optimización.

$$6.3.)\quad P(15<T<60) = \int_{15}^{60} \frac{1}{15} \cdot e^{-1/15x}\,dx = \left[-e^{-1/15x}\right]_{15}^{60} = \underline{-e^{-4} + e^{-1}}$$

6.4 ¿Para qué valor de t se veri ca que $\Pr\{T > t\}$ = 4=5? Justificar la respuesta.

6.4.) $Pr(T>t) = 4/5$ ⟶ $\int_t^{\infty} \frac{1}{15} \cdot e^{-1/15x}\,dx = 4/5$ ⟶ $\left[-e^{-1/15x}\right]_t^{\infty} = 4/5$ ⟶

⟶ $\cancel{-e^{-\infty}} + e^{-1/15t} = 4/5$ ⟶ $\ln e^{-1/15t} = \ln(4/5)$ ⟶

⟶ $-\frac{1}{15}t = \ln(4/5)$ ⟶ $t = \frac{\ln(4/5)}{-1/15}$ ⟶ $\underline{t = 3{,}35 \text{ segundos}}$

EJERCICIO 7

Una empresa que fabrica discos compactos está muy preocupada porque sus ventas han bajado por el problema del canon digital. Por este motivo está pensando en cerrar una de sus fábricas. En un estudio elaborado por una empresa consultora se ha establecido que la demanda diaria de los discos compactos fabricados por esa empresa se distribuye normalmente, y se sabe que el 12% de los d as la demanda es inferior a 7060 discos y el 8% de los d as supera los 9124 discos.

7.1 Determinar la distribución de la demanda diaria, teniendo en cuenta que tanto como son números enteros.

7.1.) $X \rightarrow$ demanda diaria discos $\rightarrow N(\mu, \sigma)$

$p(x > 9124) = 0{,}08 \rightarrow p\left(z > \frac{9124-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}08 \xrightarrow[\text{TABLA 4}]{} \frac{9124-\mu}{\sigma} = 1{,}40507$

$p(x < 7060) = 0{,}12 \rightarrow p\left(z > \frac{7060-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}88 \xrightarrow[\text{TABLA 4}]{} \frac{7060-\mu}{\sigma} = -1{,}17499$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{7060-\mu}{\sigma} = -1{,}17499 \\ \frac{9124-\mu}{\sigma} = 1{,}40507 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{7060-\mu}{-1{,}17499} = \sigma \\ \frac{9124-\mu}{1{,}40507} = \sigma \end{array} \rightarrow \frac{7060-\mu}{-1{,}17499} = \frac{9124-\mu}{1{,}40507} \rightarrow$$

$\rightarrow 20640{,}403 = 2{,}58006\,\mu \rightarrow$

$\rightarrow \underline{\mu = 8000}$

$\rightarrow \frac{7060-8000}{\sigma} = -1{,}17499 \rightarrow \underline{\sigma = 800}$

$$\left[X \rightarrow N(8000, 800)\right]$$

7.2 Para no cerrar la fábrica, la empresa exige que la demanda semanal sea superior a 51500 discos, ¿cuál es la probabilidad de que la empresa cierre? Razonar la respuesta.

7.2.) $Y \rightarrow$ demanda semanal discos $\rightarrow N(8000 \cdot 7, \sqrt{7} \cdot 800) = N(56000, 2116)$

$p(Y < 51500) \underset{\text{Statgraphics}}{=} \underline{0{,}0167243}$

Área Cola Inferior (<)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
51500	0,0167243				

7.3 Se toma una muestra aleatoria de las demandas de 16 d as. ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda media en ese periodo está comprendida entre 7750 y 8250 discos?

7.3.) $\bar{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow N\left(8000, \frac{500}{\sqrt{16}}\right)$

n → 16 días

$p(7750 < \bar{X} < 8250) = p(\bar{X} < 8250) - p(\bar{X} < 7750) = 0{,}894351 - 0{,}105649 = 0{,}788702$

statgraphics

Área Cola Inferior (<)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
7750	0,105649				
8250	0,894351				

7.4 El comité de empresa ha protestado enérgicamente ante la propuesta de la patronal y ha sugerido a la dirección que cierre s lo en el caso de que el número de d as, durante una semana, en que no se supere una demanda de 7750 discos sea superior a dos. ¿Ha actuado de manera correcta el comité de empresa para defender los derechos de los trabajadores? Razonar la respuesta.

7.4.) Z – nº días donde demanda menor 7750 → $B(n, p)$

n → 7 días

$p = p(X < 7750) = 0{,}377328$ → statgraphics

$p(Z > 2) = 0{,}529891$ → statgraphics

Área Cola Inferior (<)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
7750	0,377328				

Área Cola Superior (>)

Variable	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3	Dist. 4	Dist. 5
2	0,529891				