
Estudo de Fenómenos de Interferência Ótica e Aplicações

Laboratório de Física III

Departamento de Física e Astronomia da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Índice

1. <i>Objetivos</i>	3
2. <i>Introdução</i>	3
2.1 Interferência	3
2.2 Difração	5
3. <i>Interferómetro de Michelson</i>	7
3.1 Interferência de duas ondas esféricas	8
3.2 Evolução das franjas de interferência com a variação do caminho ótico	11
3.2.1 Determinação do índice de refração do ar (método 1)	12
3.2.1 Determinação do índice de refração do ar (método 2)	14
3.2.3 Determinação do índice de refração do vidro	15
4. <i>Difração da Luz</i>	17
4.1 Introdução	17
4.2 Padrão de difração por uma fenda	19
4.3 Padrão de difração de um fio	21
4.4 Padrão de difração de uma abertura circular	22
5. <i>Execução do Trabalho</i>	29
5.1 Interferómetro de Michelson	29
5.1.1 Determinação do índice de refração do ar (método 1)	29
5.1.2 Determinação do índice de refração do ar (método 2)	30
5.1.3 Determinação do índice de refração do vidro	31
5.2 Difração	32
5.2.1 Determinação da abertura de uma fenda linear	32
5.2.2 Determinação do diâmetro de um fio	33
5.2.3 Determinação do diâmetro de um orifício circular	33
6. <i>Referências</i>	34

1. Objetivos

Como objetivo geral pretende-se a compreensão dos fenómenos de interferência ótica associados, i) à sobreposição de ondas (em particular, o caso importante da interferência de duas ondas relativa à configuração identificada como interferómetro de Michelson) e, ii) os que resultam da presença de obstáculos parciais/aberturas no percurso de propagação de frentes de onda (difração).

Como objetivos específicos apontam-se: i) a partir da sua quantificação, aplicar esta fenomenologia em aplicações que envolvem a medida do índice de refração do ar e do vidro, a determinação de larguras de aberturas lineares estreitas, assim como a medição dos diâmetros de orifícios circulares microscópicos e de fios finos; ii) contacto com a área da metrologia ótica, que constitui um exemplo importante do conceito da medição de dimensões sem contacto.

2. Introdução

2.1 Interferência

A interferência é um fenómeno muito comum no dia-a-dia, ocorrendo naturalmente sob diversas formas e em situações variadas envolvendo a sobreposição de ondas. A geração destas ondas está sempre associada a elementos que oscilam quando situados num meio onde há forças de ligação entre as suas partes constituintes (e isto independentemente da sua natureza, isto é, o meio pode ser sólido, líquido, gasoso ou um plasma). As ondas decorrentes das oscilações desses elementos propagam-se no meio com características descritas pela designada equação de onda, que é uma equação às derivadas parciais de segunda ordem, linear e homogénea. Como consequência, as soluções desta equação satisfazem o princípio da sobreposição, isto é, numa região do meio onde se propagam duas ondas, a ação aí observada corresponde à que decorre da soma vetorial dessas duas ondas¹.

¹ Num meio material (sólido, líquido, gasoso, plasma), a propagação de uma onda tem a interpretação física do acoplamento do movimento oscilatório de um elemento do meio ao(s) elementos adjacentes por efeito das colisões e/ou das forças de ligação entre eles. O caso da propagação da luz no vácuo (em geral, da radiação eletromagnética) levanta outras questões, pois não há matéria que possa suportar a propagação dessas oscilações como no caso de um meio material. Habitualmente, o que se encontra nos textos para tornar esta questão é a afirmação de que há um campo eletromagnético que se propaga, mas de facto este é um argumento circular pois a questão mantém-se: propaga-se como? Maxwell introduziu o conceito do “éter”, como um meio com propriedades muito especiais que impregna todo o espaço e que constitui o suporte para a propagação das ondas eletromagnéticas. No entanto, um conjunto muito vasto de experiências provou que não há movimento do éter em relação à matéria, indicando que esse meio não existe ou, expresso de outra forma, não há forma de distinguir entre éter e *vácuo*.

Neste ponto é importante salientar que na física atual o conceito de “*vácuo*” não é idêntico ao conceito filosófico de “vazio”. “*Vácuo*” não é definido como ‘*não existência*’, antes, é definido como a ausência de matéria e radiação. Na realidade, “*vácuo*” é uma entidade com propriedades observáveis específicas, como o seu número de dimensões, as constantes eletromagnéticas que evidencia, a sua curvatura, a sua interação com a matéria através da curvatura, e assim por diante. É, pois, uma entidade complexa, que alguns autores designam de “*dimensão profunda*”, cuja natureza, na verdade, se desconhece, sendo que manifestações dessa entidade na nossa realidade são descritas pelas duas teorias que são o alicerce da física atual, a Teoria da Relatividade (a partir da curvatura do espaço-tempo) e a Mecânica Quântica (a partir do princípio da incerteza). Um exemplo dessas manifestações é o designado efeito de *Fulling-Davies-Unruh*, descoberto nos anos de 1970, que indica que se um observador inercial se situar no vácuo, isto é, não está rodeado de matéria e de radiação, quando acelerado observa a presença no espaço de radiação, ou seja, deixa de estar numa situação de vácuo. Essa radiação eletromagnética é a correspondente à emitida por um corpo com temperatura $T = \hbar a / 4\pi^2 k c$, onde a é a aceleração do observador, sendo \hbar , k , c , respetivamente, a constante de Planck, a constante de Boltzmann e a velocidade da luz (como exemplo numérico, para um valor para a aceleração idêntico ao da gravidade à superfície da Terra, tem-se $T = 4 \times 10^{-20} \text{ K}$).

A propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo poderá, eventualmente, envolver a “oscilação” de alguma(s) das suas propriedades, assunto que essencialmente se encontra em aberto pela simples razão de que ainda não entendemos o que é essa “*dimensão profunda*”, que se manifesta decisivamente na nossa realidade em escalas temporais tornadas indetetáveis pelo princípio da incerteza.

Em geral, a interferência é um fenômeno que envolve a sobreposição de múltiplas ondas, sendo que no caso mais simples trata-se da sobreposição de duas ondas numa dada região e num certo intervalo de tempo. As ondas interferentes poderão ser ondas mecânicas (ondas em sólidos, líquidos e gases, sônicas ou ultrassônicas, etc.), ondas eletromagnéticas (raios X e raios gama, luz, rádio, micro-ondas, etc.), ondas quânticas (uma partícula com quantidade de movimento p tem associada uma onda de comprimento de onda $\lambda = h / p$, sendo h a constante de Planck), ou ondas gravitacionais.

As ondas eletromagnéticas correspondem à propagação no espaço (com ou sem matéria) de oscilações acopladas de um campo elétrico e de um campo magnético, geradas por cargas elétricas aceleradas. A sua existência resulta diretamente das equações fundamentais do Eletromagnetismo, as equações de Maxwell².

Nos casos mais simples, essas ondas eletromagnéticas serão planas (isto é, com amplitude e fase constantes em planos normais à direção de propagação), monocromáticas (ou seja, a onda é descrita por uma função periódica sinusoidal no tempo), e com polarização linear (entendendo-se por isso que o vetor campo elétrico \vec{E} tem orientação constante).

Por exemplo, como ilustrado na Fig. 1, para uma onda plana monocromática propagando-se segundo x e polarizada segundo y , tem-se:

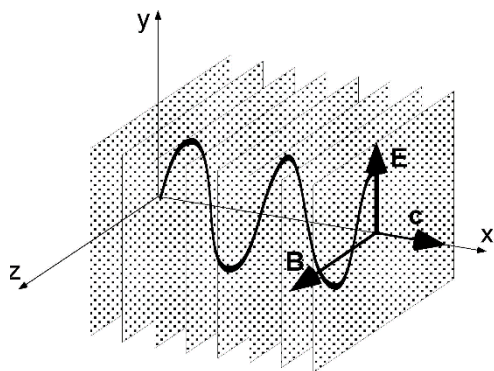


Figura 1. Onda plana monocromática propagando-se segundo x e polarizada segundo y .

$$\vec{E} = E_y(x, t) \hat{j} = E_{0y} \hat{j} \cos(\omega t - kx + \phi) \quad (1)$$

sendo: $E_{0y} \rightarrow$ amplitude da onda; $\omega \rightarrow$ frequência angular ($\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$; $\nu \rightarrow$ frequência; $T \rightarrow$ período temporal); $k \rightarrow$ número de onda ($k = 2\pi/\lambda$; $\lambda \rightarrow$ comprimento de onda); $\phi \rightarrow$ fase inicial.

O comprimento de onda está relacionado com o período pela velocidade de propagação da onda (velocidade de fase), v , isto é, $\lambda = vT$ (no vácuo, $v = c \cong 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$).

Em meios isotrópicos, como o vidro, a velocidade v é dada por

$$v = \frac{c}{n} \quad (2)$$

² **James Clerk Maxwell** (1831-1879) foi um físico escocês mundialmente conhecido por ter formulado a teoria eletromagnética, agregando num conjunto de equações, que ficaram conhecidas como as *Equações de Maxwell*, a eletricidade e o magnetismo (também a ótica). Foi o resultado de um trabalho de muitos anos que publicou, na sua versão final em 1873, no livro "*Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo*". A investigação que realizou estendeu-se a outros domínios da física, muito em particular à Termodinâmica, sendo considerado que com a publicação, em 1870, do seu livro "*A Teoria do Calor*" ficou estabelecida a forma final da termodinâmica moderna. É reconhecido como sendo o cientista do século XIX que mais influência teve sobre a física do século XX, tendo Albert Einstein em 1931, por altura da comemoração do centenário do seu nascimento, proferido as seguintes palavras: "O mais profundo e frutífero que a física descobriu desde Newton".

em que n é o índice de refração do meio. De notar que quando a radiação de comprimento de onda λ_0 no vazio se propaga num meio de índice de refração n , neste o comprimento de onda toma o valor $\lambda = \lambda_0 / n$. Para a ótica (banda visível do espectro eletromagnético), $\lambda_0 \in [400 - 700] \text{ nm}$, aproximadamente.

De notar que as ondas planas e monocromáticas constituem uma solução particular da equação de onda, apelativa pela sua simplicidade, mas também porque qualquer outro tipo de onda pode ser considerado a sobreposição de ondas planas com frequências, amplitudes e fases bem definidas³.

2.2 Difração

A propagação da luz através de aberturas ou obstáculos de reduzidas dimensões torna evidente fenómenos que não são explicáveis com base nos princípios da ótica geométrica.

O primeiro trabalho publicado (em 1665) sobre esta anomalia relativa à propagação retilínea da luz teve como autor Francesco Grimaldi⁴, que se lhe referiu como “*diffraction*”, sendo, pois, o autor da palavra que se associa a estes fenómenos.

Estes efeitos, que ocorrem exclusivamente com fenómenos ondulatórios (de qualquer tipo), verificam-se sempre que uma parte de uma frente de onda for de algum modo obstruída; verifica-se com ondas acústicas, luminosas e mesmo com ondas materiais. Na Fig. 2 apresenta-se uma ilustração deste fenómeno para o caso ótico.

A difração acontece sempre que a fase ou a amplitude de parte da frente de onda se altera, após interação com obstáculos, transparentes ou opacos (a difração associada a obstáculos transparentes não é normalmente considerada, embora o fenómeno seja familiar; um bom exemplo disso é o que se observa quando à noite se olha para uma lâmpada de iluminação pública através de uma janela com gotas de água da chuva).

Não existe uma distinção física significativa entre interferência e difração. No entanto, é frequente falar-se de interferência quando se considera a sobreposição de um número reduzido de ondas, reservando-se o termo difração para os casos em que o número de ondas é conceitualmente infinito.

³ Esta característica resulta da linearidade e da invariância temporal da equação de onda.

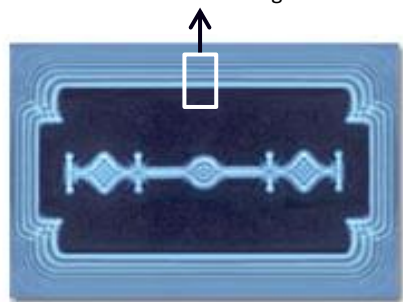
No contexto das propriedades desta equação pode-se colocar a questão: uma onda com a forma de uma função delta é solução da equação de onda? Colocando de outra forma, considere-se um meio e um ponto P com coordenada radial $r = 0$ onde, no instante $t = 0$, se aplica uma perturbação instantânea (função delta) $\delta(t = 0, r = 0)$; será que a equação de onda permite uma solução de propagação do tipo $\delta(t, vt - r)$, onde v é a velocidade de propagação no meio, ou seja, o impulso delta a propagar-se em todas as direções a partir do ponto P?

A resposta a esta questão depende das dimensões do espaço onde se situa o ponto P. Se as dimensões do espaço forem em número ímpar e no mínimo três esta propagação é possível. Isto significa que no caso do nosso espaço tridimensional, a ocorrência de um estalido (ou um *flash*) num ponto (representações razoáveis – sonora e luminosa – de uma perturbação delta) origina um impulso sonoro (luminoso) que se propaga a partir desse ponto, ficando este “livre” do estalido e do “*flash*”. Esta afirmação pode parecer óbvia pois está de acordo com a experiência do dia-a-dia, mas na realidade não acontece a duas dimensões. Isso pode ser verificado vendo o que acontece quando uma pedra cai num lago na vertical; as ondas radiam a partir do ponto do impacto, sendo que uma observação mais cuidadosa mostra que, mesmo depois da pedra desaparecer, as ondas *ainda são emitidas* a partir do ponto em que entrou na água. Portanto, o impulso delta não é solução da equação de onda num espaço a duas dimensões.

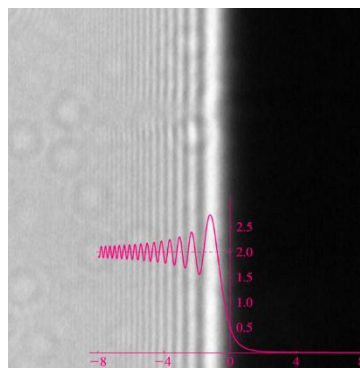
Este aparentemente singelo resultado tem profundas implicações. É pelo facto de vivermos num espaço com três dimensões espaciais que nos possibilita ouvir rádio, falarmos, num desfiladeiro emitir um som e depois esperar pelo seu eco, ou um quarto ficar imediatamente às escuras quando se desliga a iluminação.

⁴ **Francesco Maria Grimaldi** (1618-1663) foi um padre Jesuíta, físico e matemático italiano. A sua principal contribuição para a ciência foi a identificação do fenómeno ótico que ocorre quando arestas de objetos são iluminadas, a que deu o nome de *difração*, contribuindo assim para tornar mais evidente a natureza ondulatória da luz.

Padrão de intensidade na figura ao lado



a)



b)

Figura 2. Ilustração de efeitos de difração ótica: sombra projetada por uma lâmina (a) com visualização da flutuação da intensidade óptica na área indicada (b). (*NIST Handbook of Mathematical Functions*, 2010)

É importante salientar que os instrumentos óticos só utilizam parte da frente de onda incidente. Como tal os efeitos da difração são de grande importância para analisar o desempenho dos equipamentos que incluem lentes, diafragmas, fendas, espelhos, etc. Na ausência de aberrações, a qualidade da imagem formada por um sistema óptico é limitada apenas por difração.

A difração, assim como outros fenômenos ondulatórios, pode ser compreendida através de um mecanismo que Christiaan Huygens⁵ estabeleceu em 1678. Segundo ele, cada ponto de uma frente de onda possui a funcionalidade de uma nova fonte pontual, isto é, em cada instante a própria frente de onda gera novas ondas infinitesimais a partir de cada um dos seus pontos, as quais, por interferência, originam uma nova frente de onda no instante seguinte. Este princípio (que tinha algumas limitações, por exemplo, não explica a razão de cada uma das novas frentes de onda só se propagar para a frente e não para trás), foi complementado em 1816 por Fresnel⁶, estabelecendo o que ficou conhecido como princípio de Huygens-Fresnel:

Princípio de Huygens-Fresnel

Cada ponto de uma frente de onda não obstruída constitui, em qualquer instante, uma fonte de ondas esféricas secundárias (com a mesma frequência da onda primária); a amplitude do campo ótico em qualquer ponto do espaço resulta da sobreposição de todas essas ondas (tendo em conta as suas amplitudes e fases relativas).

⁵ **Christiaan Huygens** (1629 -1695) foi um físico, matemático e astrônomo holandês. É conhecido pelos seus estudos no domínio da ótica, estabelecendo a teoria ondulatória da luz, tendo conseguido através do princípio que tem o seu nome explicar satisfatoriamente fenômenos como a propagação retilínea da luz, a reflexão e a refração. Em 1678 apresentou à Academia Real de Ciências da França o livro *“Tratado sobre a Luz”*, publicado em 1690, no qual detalha o seu trabalho nesta área. Na matemática tem contribuições significativas no domínio da teoria das probabilidades, sendo que na astronomia a ele se deve a descoberta dos anéis de Saturno e do seu satélite Titã. Menos conhecidos são os seus importantes contributos no campo da horologia, que identifica a área da ciência (e da arte) relacionada com os instrumentos de medição de tempo.

⁶ **Augustin-Jean Fresnel** (1788-1827) foi um físico francês (engenheiro civil de formação), considerado o fundador da ótica moderna. Contribuiu significativamente para o estabelecimento da teoria da ótica ondulatória, tendo estudado as suas propriedades nas vertentes teórica e experimental. Em particular, são célebres as designadas *Equações de Fresnel* que determinam as ondas refletida e transmitida quando a onda incidente atinge a interface de dois meios. Ao expressar em termos quantitativos o princípio de ondas secundárias de Huygens e o princípio de interferência de Young, e colocando como hipótese que as cores simples consistam em ondas sinusoidais, Fresnel deu a primeira explicação satisfatória da difração por arestas e da propagação retilínea baseada em ondas. Como consequência do seu trabalho, no final da década de 1820 (por altura do seu falecimento aos 38 anos, devido a uma pneumonia) era já unânime a aceitação da teoria ondulatória da luz em oposição à teoria corpuscular de Newton. Para além dos seus trabalhos teóricos, Fresnel ficou também conhecido pela invenção do que se veio a designar como *Lente de Fresnel*, com enorme impacto na melhoria do desempenho dos faróis.

A fundamentação teórica do princípio de Huygens-Fresnel surgiu com Kirchhoff⁷ em 1883, quando a partir das equações de síntese do eletromagnetismo estabelecidas por Maxwell alguns anos antes derivou o que veio a ser conhecido como o “*Integral de Difração de Kirchhoff*”. Esta abordagem, apesar de tratar a luz como um campo escalar, sendo, pois, aproximada, proporciona resultados que estão em boa sintonia com a realidade quando a dimensão das aberturas é muito maior do que o comprimento de onda da luz.

Tendo por base a teoria eletromagnética da luz, obter de modo rigoroso o padrão de difração de uma determinada configuração é, em geral, um problema muito complexo, não sendo possível de concretização na maior parte das situações de interesse prático. Assim, os tratamentos aproximados de Huygens-Fresnel e de Kirchhoff constituem, efetivamente, os únicos mecanismos disponíveis.

3. Interferômetro de Michelson

Os interferômetros são instrumentos ou dispositivos que permitem a realização controlada da interferência entre duas ou mais ondas para aplicações diversas (espectroscopia, medição de ângulos e comprimentos, determinação da geometria de superfícies, etc.).

Uma das configurações mais conhecidas designa-se por interferômetro de Michelson⁸ estando ilustrada na Fig. 3.

Uma fonte luminosa origina uma onda que se propaga na direção do divisor de onda, O . Este divide a amplitude desta onda, gerando duas ondas que se propagam em direções perpendiculares. As ondas são refletidas pelos espelhos M_1 e M_2 e regressam novamente ao divisor. Parte da onda refletida em M_1 é refletida pelo divisor de onda em direção ao detetor, sendo que parte da onda refletida em M_2 atravessa o divisor de onda, sobrepondo-se à anterior no ramo de saída D . Existindo sobreposição, em princípio estão criadas as condições para se observar interferência.

⁷ **Gustav Robert Kirchhoff** (1824 -1887) foi um físico alemão cujas contribuições científicas se situaram nos domínios da eletricidade, da emissão de radiação pelos corpos, da espectroscopia e da ótica. Muito novo derivou as leis fundamentais que descrevem o funcionamento dos circuitos elétricos, universalmente conhecidas como as *Leis de Kirchhoff*. Em 1859 propôs a lei da emissão de radiação térmica, comprovando-a experimentalmente logo de seguida, sendo da sua autoria a designação “*radiação do corpo negro*”. Em parceria com Robert Bunsen, inventou o espectrómetro, que utilizaram para identificar riscas espectrais dos elementos, também as existentes na radiação solar (Fraunhofer muitos anos antes tinha verificado a existências dessas riscas), permitindo concluir a existência de sódio no Sol. Na sequência destes trabalhos, em 1861 identificaram dois novos elementos químicos, que ficaram conhecidos como Césio e Rubídio. Na ótica obteve uma equação que permite determinar, com boa aproximação, os detalhes da difração da luz por objetos, estabelecendo uma fundamentação teórica para o princípio de Huygens-Fresnel.

⁸ **Albert Abraham Michelson** (1852 -1931) nasceu na Alemanha. Com apenas dois anos de idade a família de Michelson imigrou para os Estados Unidos, onde obteve a nacionalidade americana. Devido a problemas económicos da sua família procurou realizar os seus estudos superiores na Marinha, o que conseguiu, tendo-se mantido ligado a esta instituição ao longo da sua vida profissional. Foi um experimentalista de enorme talento. Em 1878 determinou um valor mais preciso para a velocidade da luz, 300 154 Km/s, que foi padrão por mais de 45 anos, posteriormente melhorado pelo próprio Michelson. Em 1887, em colaboração com Edward Morley, concebeu e concretizou uma técnica interferométrica muito precisa (mais tarde identificada como *Interferómetro de Michelson*) destinada a averiguar se existia, ou não, movimento do éter em relação à matéria (admitia-se que o éter seria o meio “material” de suporte físico à propagação das ondas eletromagnéticas). Como reconhecimento da importância do seu trabalho nesta área, Michelson recebeu, em 1907, o Prémio Nobel da Física, o primeiro americano a conseguir esta distinção. Como nota adicional, referir que com esta configuração interferométrica em 1920 Michelson conseguiu medir o diâmetro angular da estrela *Betelgeuse*, uma das estrelas de Inverno mais brilhantes, situada na constelação de Órion.

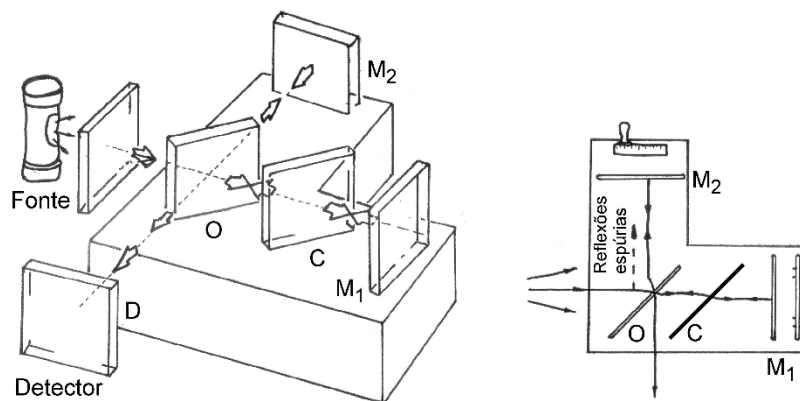


Figura 3. Interferômetro de Michelson para operação na zona ótica (O – divisor de onda; M_1 e M_2 – espelhos; C – lâmina de compensação).

Isto acontece porque as ondas que atingem o detetor provêm da mesma fonte ótica; assim, caso os percursos independentes de cada uma delas não sejam demasiado diferentes em tempo de propagação, as duas ondas sobrepostas no plano detetor terão um certo grau de semelhança, originando-se franjas de interferência⁹.

O divisor de ondas consiste numa película muito fina de material refletor (algumas dezenas de nanómetros) que está depositada numa face duma lâmina de vidro por razões de estabilidade mecânica e facilidade de manuseamento. Observando a figura, constata-se que uma das ondas atravessa três vezes a lâmina de vidro, enquanto a outra apenas a atravessa uma vez. Desta forma, para que cada onda atravessasse a mesma espessura de vidro de modo a resultar no mesmo tempo de propagação (para braços do interferómetro de igual comprimento), é necessário introduzir uma lâmina de compensação, C, no braço OM_1 do interferómetro, sendo que a espessura dessa lâmina deverá ser igual à da lâmina onde está depositado o filme refletor. Para garantir o mesmo tempo de propagação, essa lâmina adicional deve estar colocada também com uma inclinação de 45 graus relativamente ao eixo do braço OM_1 . Assim, a lâmina de compensação garante que qualquer variação de tempo de propagação entre as duas ondas (ou seja, a diferença de percursos óticos) depende apenas de alterações da geometria dos dois braços do sistema.

Refira-se que em muitas situações o efeito da espessura da lâmina onde está depositado o filme refletor não é importante, podendo, pois, ser dispensada a utilização da lâmina de compensação. É o que acontece no caso da experiência proposta neste trabalho, em que se utiliza uma fonte ótica com elevada coerência temporal, significando isso que a diferença de caminho óptico entre as duas ondas que interferem devida a um número diferente de passagens dessas ondas pela lâmina onde está o filme refletor não degrada o padrão de interferência que se observa no plano onde está o detetor.

3.1 Interferência de duas ondas esféricas

Se o interferómetro de Michelson for iluminado por uma fonte pontual S, o resultado do arranjo dos espelhos e divisor de amplitude é equivalente, do ponto de vista da observação no ramo de saída D, ao da interferência das ondas esféricas provenientes das fontes pontuais S_1 e S_2 (que são as imagens virtuais de S dadas pelo sistema ótico, ou seja, pelas reflexões sucessivas nos espelhos M_1 e M_2 e no divisor O). Esta situação está ilustrada na Fig. 4.

⁹ Diz-se que as ondas que interferem no plano do detetor têm coerência suficiente para gerarem um padrão de interferência, significando isso que têm uma dependência temporal muito semelhante, existindo apenas uma diferença de fase entre elas (a qual surge devido aos diferentes tempos de propagação até ao alvo).

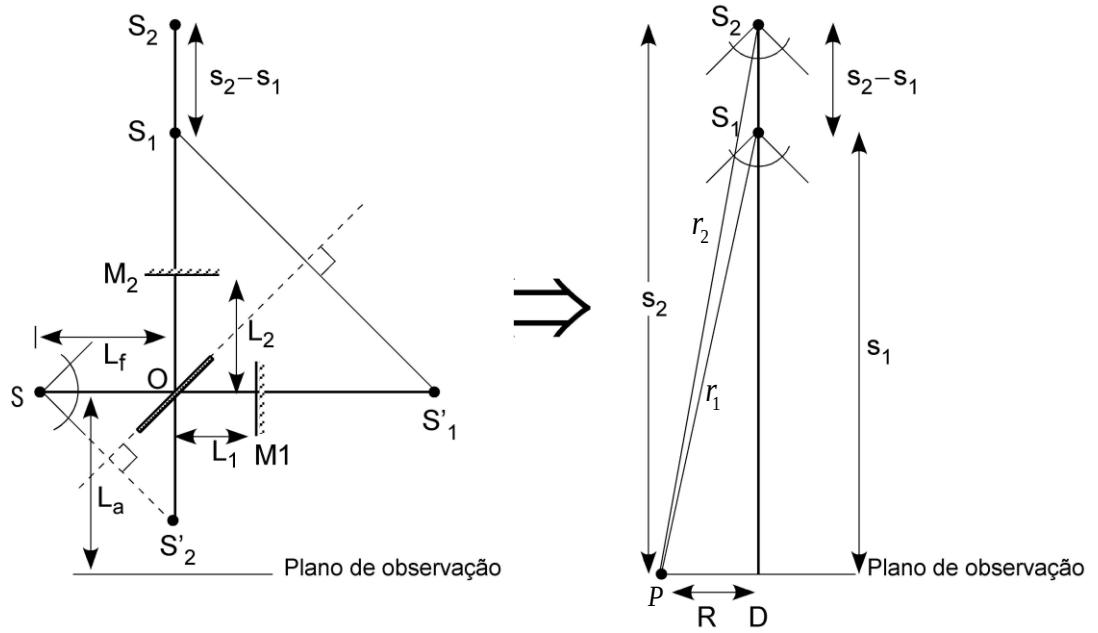


Figura 4. Esquematização geométrica do interferômetro de Michelson, com a indicação das fontes pontuais S_1 e S_2 que são as imagens virtuais de S .

Da geometria desta figura decorre que os percursos percorridos pelos feixes refletidos em M_1 e M_2 são, respetivamente:

$$s_1 = 2L_1 + L_f + L_a \quad (3)$$

$$s_2 = 2L_2 + L_f + L_a \quad (4)$$

Na sequência do exposto na eq. (1), as ondas esféricas provenientes de S_1 e S_2 podem escrever-se como:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(r_1, t) &= \vec{E}_{01}(r_1) \cos(\omega t - kr_1 + \phi_1) \\ \vec{E}_2(r_2, t) &= \vec{E}_{02}(r_2) \cos(\omega t - kr_2 + \phi_2) \end{aligned} \quad (5)$$

No plano D ocorre a sobreposição destas duas ondas, resultando num campo total

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (6)$$

Admitindo que os campos elétricos \vec{E}_1 e \vec{E}_2 têm a mesma orientação (hipótese razoável caso a diferença de percurso entre eles não seja demasiado elevada), pode-se escrever simplesmente $E = E_1 + E_2$, ou seja, é adotada uma formulação escalar do problema.

Considere-se a onda E_1 . O vetor de Poynting¹⁰ desta onda, \vec{P}_1 (que se representará simplesmente por P_1 atendendo ao tratamento escalar que foi adotado), o qual representa a quantidade de energia que a onda transporta por unidade de tempo e por unidade de área de um plano normal à direção de propagação, é dado por $P_1 = v\epsilon E_1^2$, onde v e ϵ são, respetivamente, a velocidade da luz e a permitividade elétrica do meio. No

¹⁰ **John Henry Poynting** (1852 -1914) foi um físico inglês. Quando estudante foi aluno de James Clerk Maxwell. Em 1880 tornou-se o primeiro professor de física da Universidade de Birmingham. Em 1884 publicou um dos seus trabalhos mais famosos, nomeadamente o teorema que estabelece analiticamente a forma como a energia eletromagnética se propaga. Poynting e Thomson (Prémio Nobel da Física pela descoberta do eletrão) publicaram um famoso livro de texto para o ensino da física ao nível da licenciatura. Essa obra teve múltiplas edições, sendo a referência para os estudantes do primeiro ciclo dos cursos de física até aos anos de 1950.

espectro visível a frequência ótica situa-se no intervalo $[4,3-7,5] \times 10^{14} \text{ Hz}$, ou seja, correspondente a um período da ordem das milésimas do picossegundo, portanto indetetável com os fotodetetores atuais. Assim, o que estes detetam são valores médios temporais do campo ótico, isto é, o valor médio de P_1 que se designa por intensidade, I_1 . Assim, $I_1 \equiv \langle P_1 \rangle = v\varepsilon \langle E_1^2 \rangle$. De igual forma, $I_2 \equiv \langle P_2 \rangle = v\varepsilon \langle E_2^2 \rangle$.

Na situação experimental em análise o que é relevante são as intensidades relativas, donde por conveniência considera-se $I_1 \equiv \langle E_1^2 \rangle$ e $I_2 \equiv \langle E_2^2 \rangle$, entendendo-se que estes valores de I_1 e I_2 estão normalizados por $v\varepsilon$.

A intensidade total no plano de observação é

$$I = \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle = \langle E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2 \langle E_1 E_2 \rangle \quad (7)$$

Atendendo à eq. (5) tem-se:

$$\begin{aligned} \langle E_1^2 \rangle &= \frac{E_{01}^2(r_1)}{2} = I_1(r_1) \\ \langle E_2^2 \rangle &= \frac{E_{02}^2(r_2)}{2} = I_2(r_2) \\ 2 \langle E_1 E_2 \rangle &= E_{01}(r_1) E_{02}(r_2) \cos[k(r_1 - r_2) + (\phi_1 - \phi_2)] \end{aligned} \quad (8)$$

A parcela $2 \langle E_1 E_2 \rangle$ é designada de *termo de interferência*. Atendendo a que $E_{01}(r_1) = \sqrt{2I_1(r_1)}$ e $E_{02}(r_2) = \sqrt{2I_2(r_2)}$, das eqs. (7) e (8) obtém-se:

$$I = I_1(r_1) + I_2(r_2) + 2\sqrt{I_1(r_1)I_2(r_2)} \cos[k(r_1 - r_2) + (\phi_1 - \phi_2)] \quad (9)$$

Admitindo que as amplitudes $E_{01}(r_1)$ e $E_{02}(r_2)$ são aproximadamente constantes numa região central de D (identificada como tendo diâmetro $R \ll r_1, r_2$ na Fig. 4), donde $I_1(r_1) \approx I_2(r_2) = I_0$, a relação anterior fica:

$$I \cong 2I_0 [1 + \cos[k(r_1 - r_2) + (\phi_1 - \phi_2)]] \quad (10)$$

Considerando a relação trigonométrica $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, obtém-se finalmente:

$$I \cong 4I_0 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right); \quad \delta = k(r_1 - r_2) + (\phi_1 - \phi_2) \quad (11)$$

Esta relação indica que:

$$\begin{aligned} I_{\text{maximo}} &\cong 4I_0 \leftarrow \delta = 2\pi m \\ I_{\text{minimo}} &\cong 0 \leftarrow \delta = (2m + 1)\pi; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Conforme ilustrado na Fig.5, a condição de máximo (ou mínimo) corresponde a uma família de hiperboloides de revolução, cujas secções por um plano de observação D normal a $\overline{S_1 S_2}$ são circunferências.

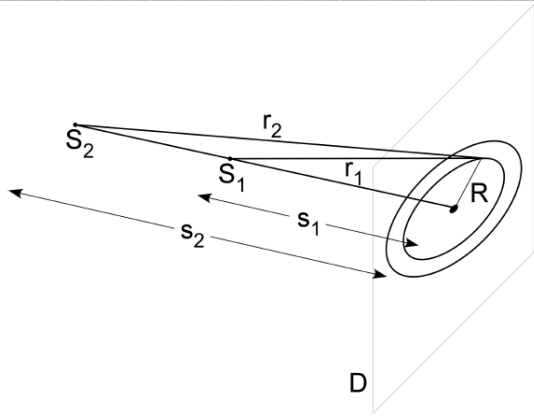


Figura 5. Figuras de interferência no plano de observação.

A eq. 9 pode ser escrita da forma seguinte

$$I_p = [I_1(r_1) + I_2(r_2)] \times \left(1 + \frac{2\sqrt{I_1(r_1)I_2(r_2)}}{I_1(r_1) + I_2(r_2)} \right) \cos \delta \quad (13)$$

onde I_p é a intensidade num ponto P do alvo com valores r_1 e r_2 relativamente às fontes virtuais S_1 e S_2 , respetivamente (Fig. 4). Definindo:

$$\begin{aligned} I_{p_0} &\equiv I_1(r_1) + I_2(r_2) \\ V &\equiv \frac{2\sqrt{I_1(r_1)I_2(r_2)}}{I_1(r_1) + I_2(r_2)} \end{aligned} \quad (14)$$

tem-se

$$I_p = I_{p_0} (1 + V) \cos \delta \quad (15)$$

O parâmetro V é designado visibilidade das franjas de interferência, que é uma medida do nível de interferência entre as duas ondas, no caso apenas dependente das suas intensidades relativas. O valor máximo de V é 1, o que acontece quando essas intensidades são iguais¹¹.

3.2 Evolução das Franjas de Interferência com a Variação do Caminho Ótico

Na eq. (11), admitindo para simplificar que $\phi_1 = \phi_2$, a diferença de fase δ tem a dependência seguinte

$$\delta = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) = \frac{2\pi m}{\lambda_0} (r_1 - r_2) \quad (16)$$

¹¹ A visibilidade das franjas de interferência depende também do grau de semelhança das duas ondas quando se sobrepõem no alvo, a qual depende da diferença de tempo de percurso entre elas. Esse grau de semelhança é quantificado por um parâmetro designado por Grau de Coerência, $\gamma_{12}(r_1, r_2)$, que varia entre 0 e 1. A visibilidade depende também da polarização relativa das duas ondas através do fator $\cos \theta(t)$, onde $\theta(t)$ é o ângulo entre os vetores campo elétrico das duas ondas, normalmente variável no tempo. Assim, a expressão geral para a visibilidade das franjas de interferência é:

$$V = \frac{2\sqrt{I_1(r_1)I_2(r_2)}}{I_1(r_1) + I_2(r_2)} \gamma_{12}(r_1, r_2) \cos \theta(t)$$

onde λ é o comprimento de onda da luz no meio de índice de refração n (λ_0 no vázio). Assim, pela determinação de δ para uma determinada variação $(r_1 - r_2)$ obtém-se o índice de refração do meio, processo que irá ser utilizado neste trabalho para determinar o índice de refração do ar e do vidro. Também, mantendo constante a diferença de caminho geométrico entre as duas ondas, mas alterando o índice de refração do meio, isso irá também traduzir-se numa variação de δ , sendo que a medição desta permite determinar essa variação de índice.

3.2.1 Determinação do Índice de Refração do Ar (Método 1)

A Fig. 6 ilustra a configuração interferométrica de Michelson indicada na Fig.4, mas agora num formato mais adequado à análise que se apresenta nesta secção.

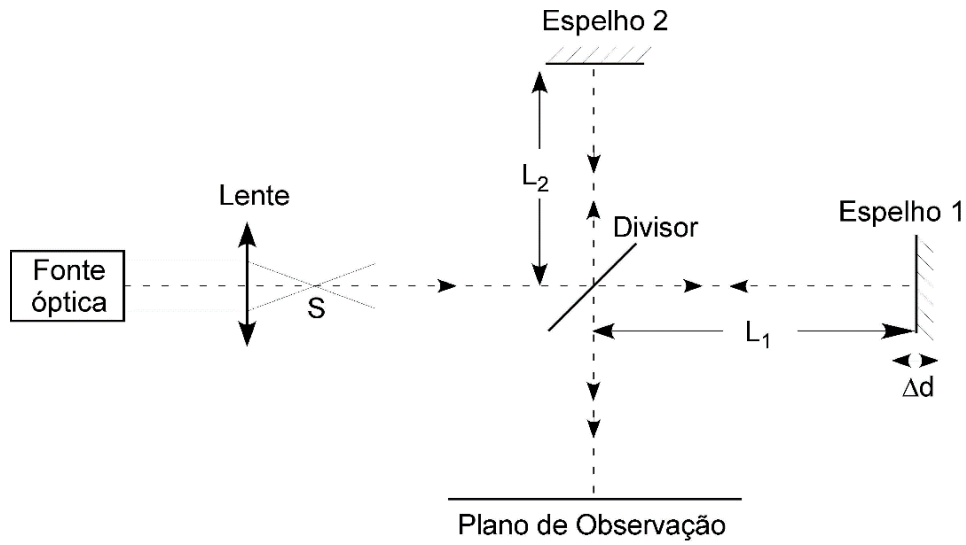


Figura 6. Esquema do interferómetro de Michelson (o espelho 1 pode deslocar-se segundo o eixo do braço 1).

A lente é utilizada para, a partir da radiação emitida pela fonte óptica (que no caso presente é um laser de He-Ne), gerar uma onda esférica, obtendo-se assim no plano de observação franjas circulares, alternadamente brilhantes e escuras, com transição gradual entre elas.

Considerando o ponto P na Fig. 4 próximo do eixo de simetria do sistema e atendendo a que a reflexão nos espelhos duplica o percurso de propagação da luz em cada um dos braços do interferómetro, tem-se $r_1 - r_2 \approx s_1 - s_2 = 2(L_1 - L_2) = 2\Delta L$, donde a fase δ na eq.16 fica:

$$\delta = \frac{4\pi n_a}{\lambda_0} \Delta L \quad (17)$$

onde no caso n_a é o índice de refração do ar. No centro do padrão de interferência, se aí a intensidade for máxima então $\delta = 2m\pi$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), isto é, está-se numa situação de interferência construtiva; se a intensidade for mínima, então $\delta = (2m+1)\pi$, a que corresponde interferência destrutiva. A passagem de um máximo a outro máximo adjacente (ou vice-versa) significa uma variação de fase $\delta = 2\pi$, a qual é induzida por uma variação na posição do espelho 1 de $\Delta d|_{2\pi} = \lambda_0 / 2n_a$.

Assim, o índice de refração do meio pode ser obtido a partir da relação seguinte:

$$2\pi = \frac{4\pi n_a}{\lambda_0} \Delta d_{|2\pi} \rightarrow n_a = \frac{\lambda_0}{2\Delta d_{|2\pi}} \quad (18)$$

Desta equação, se o número de passagens de máximos (ou mínimos, se na situação inicial se tiver um mínimo no centro da figura) for N , correspondente a um deslocamento $\Delta d_{|N}$ do espelho 1, então:

$$\boxed{n_a = \frac{N\lambda_0}{2\Delta d_{|N}}} \quad (19)$$

É esta relação que irá ser utilizada para determinar o índice de refração do ar.

A relação (17) indica que quando o não-balanceamento geométrico do interferómetro, ΔL , se altera o mesmo acontece à fase δ , pelo que, pela eq. (15), vai acontecer uma variação na intensidade I_p . Coloca-se, assim, a questão de saber qual é a mínima variação que pode ser detetada em ΔL , a qual depende da mínima variação discernível em I_p , condicionada pelo nível de ruído presente na deteção. Utilizando técnicas não demasiado complicadas essa mínima variação discernível em I_p é da ordem da induzida por uma variação de δ em torno do micro-radiano. Se assim for, da eq. 17 resulta:

$$(\Delta L)_{\min} = \frac{\lambda_0}{4\pi n_a} (\delta = 1 \times 10^{-6} \text{ rad}) \quad (20)$$

Sendo $n_a \approx 1$ e $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ (o comprimento de onda da radiação emitida por um laser de He-Ne), tem-se:

$$(\Delta L)_{\min} \approx 5 \times 10^{-14} \text{ m} \quad (21)$$

Este valor é cerca de mil vezes inferior ao valor para o raio de Bohr ($\approx 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$), que indica aproximadamente o raio do átomo de hidrogénio no estado fundamental¹². Constata-se, pois, que os interferómetros óticos permitem a determinação com elevada sensibilidade de grandezas físicas cuja ação resulta numa variação da diferença de percurso ótico dos dois braços do interferómetro¹³.

¹²Como os espelhos do interferómetro são constituídos por átomos, os quais devido à agitação térmica e a outros fatores têm oscilações na sua posição com amplitudes bem superiores ao valor encontrado para $(\Delta L)_{\min}$, pode-se questionar que sentido tem apresentar um número desta ordem de grandeza para a mínima deslocação detetável de um dos espelhos do interferómetro. O que acontece é que esta deslocação afeta por igual todos os átomos do espelho, isto é, trata-se de um movimento coletivo, o qual se torna observável quando a medida acontece num período de tempo suficientemente longo, já que nestas circunstâncias a integração das oscilações leva à sua atenuação, tornando-se detetável o deslocamento médio $(\Delta L)_{\min}$.

¹³Foi com um interferómetro de Michelson muito especial que, em 2015, se detetou pela primeira vez ondas gravitacionais, cuja existência tinha sido prevista 100 anos antes, por Albert Einstein. Esse interferómetro, situado nos Estados Unidos e com a designação de LIGO-*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*, tem braços com cerca de 4 km de extensão. Esta característica, conjugada com a utilização de técnicas óticas e de processamento optoeletrónico na fronteira do conhecimento, permitiram conseguir um $(\Delta L)_{\min} \approx 1,6 \times 10^{-19} \text{ m}$, ou seja, um deslocamento cerca de 10 000 inferior às dimensões do protão, tornando detetável a variação do comprimento de um dos braços do interferómetro, em relação ao outro, quando o instrumento é atravessado por ondas gravitacionais, com intensidade e orientação adequadas. Logo no ano seguinte a esta descoberta (o que é inédito) foi atribuído o Prémio Nobel da Física a Rainer Weiss, Barry Barish e Kip Thorne pelas suas contribuições ao nível da conceção e desenvolvimento deste interferómetro.

3.2.2 Determinação do Índice de Refração do Ar (Método 2)

Este método baseia-se na determinação da variação do índice de refração do ar com a pressão. Considere-se uma célula com paredes de vidro e ar no seu interior, cuja pressão, p , pode ser alterada a partir de uma posição de quase vácuo ($p \approx 0$) até à pressão atmosférica ($p = p_{atm}$). Devido a essa variação de pressão o índice de refração do ar dentro da célula também se altera passando a ser função de p , isto é, $n_a = n_a(p)$, com $n_a(p \approx 0) \approx 1$ e $n_a(p = p_{atm}) = n_{a|atm}$.

É conhecido que para pressões não muito elevadas o índice de refração do ar aumenta linearmente com o aumento da pressão, o que permite escrever:

$$n_a(p) = n_a(p \approx 0) + \left(\frac{\Delta n_a}{\Delta p} \right) p \approx 1 + \left(\frac{\Delta n_a}{\Delta p} \right) p \quad (22)$$

Assim, o índice de refração do ar à pressão atmosférica (nas condições do laboratório), é dado por:

$$n_{a|atm} \approx 1 + \left(\frac{\Delta n_a}{\Delta p} \right) p_{atm} \quad (23)$$

Para esta relação poder ser utilizada é necessário determinar o declive $\Delta n_a / \Delta p$ quando $p = p_{atm}$. Verifica-se que a dependência do índice de refração do ar com a pressão é essencialmente linear para pressões não muito elevadas, pelo que o correspondente declive é constante desde a situação de pressão nula até à pressão atmosférica.

Desta forma, para se determinar o declive coloca-se a célula (de espessura d_c) no braço 1 do interferómetro, perpendicularmente ao seu eixo. Faz-se vácuo na célula e, atuando no espelho desse braço, coloca-se o interferómetro num estado que corresponde a uma franja brilhante no centro do plano de observação. Gradualmente, aumenta-se a pressão na célula até à pressão atmosférica e conta-se o correspondente número N de passagens *claro-escuro-claro*. Isso significa que devido à alteração $\Delta p = p_{atm} - 0 = p_{atm}$ da pressão do ar na célula, o caminho ótico da luz no braço 1 do interferómetro aumentou de¹⁴

$$\Delta x = N \lambda_0 \rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{N}{p_{atm}} \lambda_0 \quad (24)$$

Esta variação de caminho ótico resultou do aumento do índice de refração do ar com a pressão, isto é,

$$\Delta x = 2d_c \Delta n_a \rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta p} = 2d_c \frac{\Delta n_a}{\Delta p} \quad (25)$$

onde o fator 2 decorre da dupla passagem da luz pela célula. Combinando estas duas relações encontra-se a expressão pretendida para o declive $\Delta n_a / \Delta p$, a qual inserida na eq. 23 permite obter

$$\boxed{n_{a|atm} \approx 1 + \frac{\lambda_0 N}{2d_c}} \quad (26)$$

¹⁴ Em rigor, nesta equação deve-se considerar o comprimento de onda da luz na célula, isto é, $\lambda = \lambda_0 / n_a$. Por outro lado, n_a varia com a pressão, que está a ser alterada. No entanto, para estes valores de variação de pressão irá verificar-se que é reduzido o correspondente impacto no valor do índice de refração do ar, donde é razoável considerar a aproximação $\lambda \approx \lambda_0$.

3.2.3 Determinação do Índice de Refração do Vidro

Na Fig. 6, colocando entre o divisor e o espelho 1 uma lâmina de vidro de modo que esta fique paralela ao espelho, ao rodar a lâmina o caminho da luz no interior do vidro é alterado. A geometria para a análise desta situação está representada na Fig. 7.

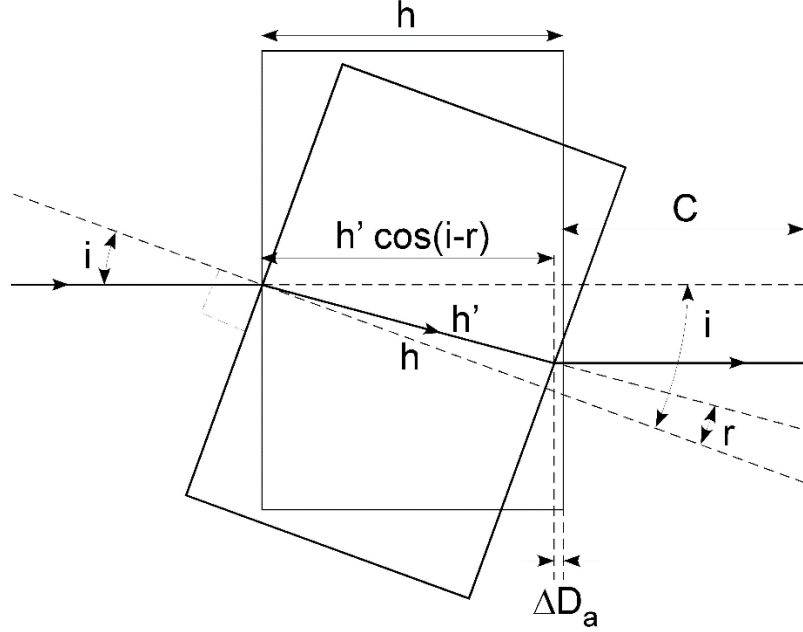


Figura 7. Geometria para determinar a variação do percurso óptico na lâmina de vidro quando esta é rodada.

Considere-se que inicialmente a incidência da luz na lâmina é perpendicular à superfície desta, isto é, $i = 0^\circ$. Nesta situação, o percurso percorrido pela luz desde o ponto de entrada na lâmina tem as componentes h no vidro e C no ar. Quando o ângulo de incidência aumenta o percurso percorrido também aumenta, passando a ser h' na lâmina e $C + \Delta D_a$ no ar.

No vidro, a diferença de caminho é dada por $\Delta D_v = h' - h$ ou, em função do ângulo de refração r da espessura da lâmina:

$$\Delta D_v = h \left(\frac{1}{\cos r} - 1 \right) \quad (27)$$

Considerando as relações:

$$\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} \quad (28)$$

$$\sin r = \frac{n_a}{n_v} \sin i \quad (29)$$

onde n_v é o índice de refração do vidro, tem-se sucessivamente:

$$\Delta D_v = h \left(\frac{1}{\cos r} - 1 \right) = h \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_a}{n_v} \sin i \right)^2}} - 1 \right] \approx \frac{h}{2} \left(\frac{n_a}{n_v} \right)^2 \sin^2 i \quad (30)$$

sendo que na aproximação se manteve apenas o termo de primeira ordem no desenvolvimento em série de Taylor de $1/\sqrt{1-x^2}$.

Considerando $\Delta D = \Delta D_v$ na eq.(19), o número de alternâncias *claro-escuro-claro*, N_v , que se observa acontecer na parte central do plano de observação devido à variação ΔD_v do percurso da luz na lâmina é dado por:

$$N_v = \frac{h}{\lambda_0} \frac{n_a^2}{n_v} \sin^2 i \quad (31)$$

No ar, a diferença de caminho ΔD_a é dada por:

$$\Delta D_a = h - h' \cos(i - r) = h \left[1 - \frac{\cos(i - r)}{\cos r} \right] \quad (32)$$

A razão dos cossenos pode ser processada da forma seguinte:

$$\frac{\cos(i - r)}{\cos r} = \frac{\cos i \cos r + \sin i \sin r}{\cos r} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 i} \sqrt{1 - \sin^2 r} + \sin i \sin r}{\sqrt{1 - \sin^2 r}} \quad (33)$$

Desenvolvendo em série de Taylor as raízes quadradas, mantendo apenas os termos de primeira ordem, e tendo em consideração a eq.29, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(i - r)}{\cos r} &= \left[\left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 r \right) + \sin i \sin r \right] \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 r \right) \\ &\cong 1 - \frac{1}{2} \sin^2 i - \frac{1}{2} \sin^2 r + \sin i \sin r + \frac{1}{2} \sin^2 r = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 i + \sin i \sin r = 1 + \left(\frac{n_a}{n_v} - \frac{1}{2} \right) \sin^2 i \end{aligned} \quad (34)$$

Substituindo esta relação na eq.32 resulta:

$$\Delta D_a = h \left(\frac{1}{2} - \frac{n_a}{n_v} \right) \sin^2 i \quad (35)$$

Considerando agora $\Delta D = \Delta D_a$ na eq.19, o número de alternâncias *claro-escuro-claro*, N_a , que se observa acontecer na parte central do plano de observação devido à variação ΔD_a do percurso da luz no ar é dado por:

$$N_a = \frac{h}{\lambda_0} \left(n_a - \frac{2n_a^2}{n_v} \right) \sin^2 i \quad (36)$$

Assim, quando a lâmina de vidro é inclinada do ângulo i relativamente ao eixo do braço 1 do interferómetro observa-se que na parte central do plano de observação acontece um número total, N , de alternâncias *claro-escuro-claro*:

$$N = N_a + N_v = \frac{h}{\lambda_0} \left(n_a - \frac{n_a^2}{n_v} \right) \sin^2 i \quad (37)$$

Nesta equação, resolvendo em ordem a n_v tem-se o resultado pretendido:

$$\boxed{n_v = \frac{h n_a^2 \sin^2 i}{h n_a \sin^2 i - N \lambda_0}} \quad (38)$$

É esta relação que irá ser utilizada para determinar o índice de refração do vidro.

4. Difração da Luz

Nesta secção será apresentada uma análise que permite compreender as principais propriedades da difração da luz por uma abertura linear estreita e por uma abertura circular, obtendo-se expressões que possibilitam obter as dimensões destes elementos a partir da observação do seu padrão de difração. Será também demonstrado que o padrão de difração de uma abertura linear estreita é idêntico ao que se observa quando a luz ilumina um fio fino com as mesmas dimensões.

4.1 Considerações Gerais

Considere-se a configuração representada na Fig. 8, onde uma onda plana monocromática que se propaga ao longo do eixo dos x incide numa abertura. Pretende-se determinar a intensidade luminosa no ponto P , o que pode ser conseguido utilizando-se o já mencionado *Integral de Difração de Kirchhoff*. O problema pode ser substancialmente simplificado quando esse ponto se encontra distante da abertura, situação identificada como *Regime de Difração de Fraunhofer*¹⁵, a qual será aqui considerada.

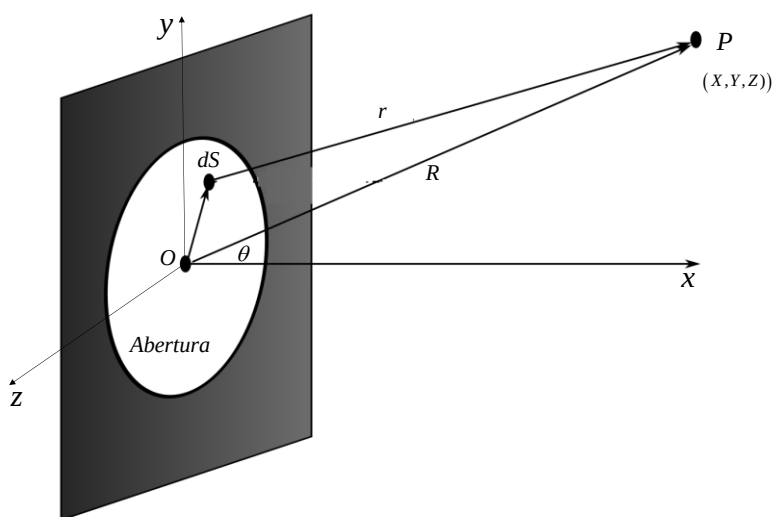


Figura 8. Geometria para determinar o padrão de difração da luz originado por uma abertura de forma arbitrária.

Segundo o princípio de Huygens-Fresnel, um pequeno elemento de superfície da abertura, dS , pode ser considerado como fonte de uma onda esférica com energia proporcional a dS , que se propaga até ao ponto P , originando aí um campo elétrico, dE , dado por¹⁶:

¹⁵ **Joseph von Fraunhofer** (1787-1826) foi um investigador alemão conhecido por ter descoberto riscas escuras no espectro solar, as quais mais tarde vieram a ser conhecidas como linhas de absorção de Fraunhofer (anos depois, Gustav Kirchhoff e Robert Bunsen compreenderam que essas riscas eram devidas à absorção da luz emitida pelo Sol por elementos existentes nas suas camadas mais externas). Tendo ficado órfão muito cedo, beneficiou da ajuda de um nobre da Baviera (Maximiliano I José da Baviera) para conseguir estudar e trabalhar no Instituto de Ótica de Benediktbeuern. A sua genialidade e perícia levou-o a descobrir como fabricar os melhores vidros do mundo (particularmente no que respeita à sua baixa atenuação), tendo inventado instrumentação ótica de elevada qualidade. Em consequência da sua atividade, a Baviera tomou o lugar da Inglaterra como o centro mundial da indústria ótica. Chegou a ser diretor do instituto acima referido, tendo falecido muito cedo (com 39 anos), possivelmente como consequência da toxicidade dos vapores de metais pesados que integravam certos tipos de vidros.

¹⁶ dE é aqui expresso na forma fasorial, em geral conveniente para os cálculos, sendo que o seu conteúdo físico está na parte real, $dE_r = (E_a / r) \cos(\omega t - kr) dS$, ou na parte imaginária $dE_i = (E_a / r) \sin(\omega t - kr) dS$, de facto duas expressões essencialmente equivalentes pois diferem apenas por um fator de fase constante ($\pi / 2$). Por razões históricas, no domínio das engenharias é habitual considerar-se a parte real dos fasores, enquanto que na física a tradição aponta para a parte imaginária.

$$dE = \left(\frac{E_a}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} dS \quad (39)$$

onde E_a é a amplitude (escalar) do campo elétrico na abertura (que se admite constante sobre toda a abertura).

O elemento dS e o ponto P têm coordenadas $(0, y, z)$ e (X, Y, Z) . Assim, a distância r entre eles é:

$$r = \left[X^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 \right]^{1/2} \quad (40)$$

Na aproximação de Fraunhofer o ponto P está distante da abertura, donde r não é muito diferente de R , o que sugere considerar $r \approx R$. Isso pode ser feito no que respeita ao “ r ” que aparece no denominador da eq. 39, mas não no caso do que aparece na combinação $kr = (2\pi / \lambda) r$, pois $2\pi / \lambda$ é um número elevado, o que significa que considerar $r \approx R$ introduz um erro significativo em kr .

Na eq.40, expandindo os quadrados e atendendo a que:

$$R = \left[X^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{1/2} \quad (41)$$

tem-se:

$$r = R \left[1 + \frac{y^2 + z^2}{R^2} - 2 \frac{Yy + Zz}{R^2} \right]^{1/2} \approx R \left[1 - 2 \frac{Yy + Zz}{R^2} \right]^{1/2} \quad (42)$$

pois a observação é feita a grande distância, donde R é muito superior às dimensões da abertura, daí o poder-se desprezar a contribuição $(y^2 + z^2) / R^2$. Sendo $\sqrt{1 - x} \approx 1 - (1/2)x \leftarrow x \ll 1$, tem-se

$$r \approx R \left[1 - \frac{Yy + Zz}{R^2} \right] \quad (43)$$

Substituindo este valor no expoente da eq.39

$$dE = \left(\frac{E_a}{R} \right) e^{i(\omega t - kR)} e^{ik \frac{(Yy + Zz)}{R}} dS \quad (44)$$

Integrando sobre toda a abertura, o campo no ponto P fica

$$E(P, t) = \frac{E_a e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int_{abertura} e^{ik \frac{(Yy + Zz)}{R}} dS \quad (45)$$

Esta é a expressão que permite determinar o campo elétrico (escalar) da luz difratada no regime de Fraunhofer. Nas secções seguintes será utilizada para determinar o padrão de difração provocado por uma fenda e por um círculo.

4.2 Padrão de Difração de uma Fenda

Considere-se uma fenda com orientação vertical (relativamente ao plano do papel), comprida e com abertura b , iluminada por uma onda plana que se propaga segundo x (Fig. 9). A interação da luz com a fenda origina um padrão de difração que se projeta num plano de observação, que consiste num padrão de faixas paralelas, alternadamente escuras e claras, em torno de uma faixa central clara.

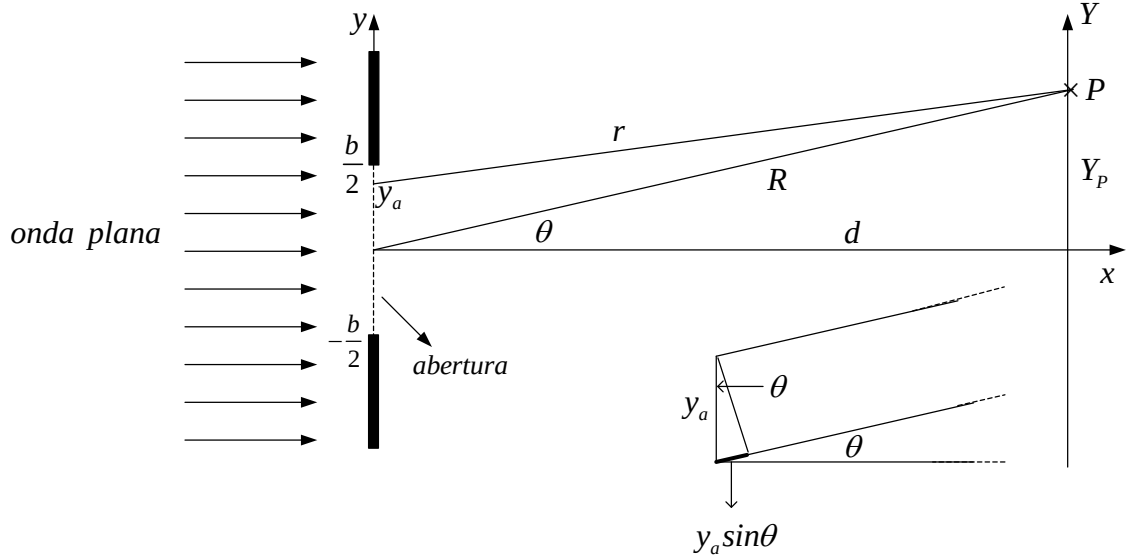


Figura 9. Geometria para determinação de características do padrão de difração originado por luz que incide numa fenda.

Para determinar o campo elétrico (escalar) no ponto P , $E(P, t)$, pode-se utilizar a expressão geral (45). No entanto, neste caso é mais vantajoso partir da eq. 39 para determinar o campo em P devido ao elemento infinitesimal dy_a de fontes secundárias em torno da coordenada y_a , isto é,

$$dE = \left(\frac{E_a}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} dy_a \quad (46)$$

Pelos argumentos que levaram à eq. (45), a variável r no denominador pode ser razoavelmente aproximada por R . Quanto à sua presença no expoente, a aproximação $r \approx R$ é demasiado grosseira. A análise da Fig. 9 permite concluir que, caso o alvo esteja a uma distância suficientemente elevada de modo a ser razoável admitir que as linhas que definem r e R são aproximadamente paralelas, então $r \approx R - y_a \sin \theta$. Assim, considerando a parte imaginária da exponencial complexa em termos da relação de Euler (ver nota 16), tem-se

$$dE = \left(\frac{E_a}{R} \right) \sin[\omega t - k(R - y_a \sin \theta)] dy_a \quad (47)$$

Integrando sobre toda a abertura, obtém-se:

$$E(P, t) = \frac{E_a}{R} \int_{-b/2}^{+b/2} \sin[\omega t - k(R - y_a \sin \theta)] dy_a \quad (48)$$

A avaliação deste integral permite obter

$$E(P, t) = \frac{E_a b}{R} \frac{\sin\left[k \frac{b}{2} \sin \theta\right]}{k \frac{b}{2} \sin \theta} \sin(\omega t - kR) \quad (49)$$

Definindo β como:

$$\beta \equiv k \frac{b}{2} \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{2} \sin \theta = \frac{\pi n b}{\lambda_0} \sin \theta \quad (50)$$

onde, como anteriormente, λ_0 é o comprimento de onda da luz no vácuo e n o índice de refração do meio, a relação (49) fica:

$$E(P, t) = \frac{E_a b}{R} \frac{\sin \beta}{\beta} \sin(\omega t - kR) \quad (51)$$

A intensidade da radiação é dada por $I(P) = v \varepsilon \langle E^2(P, t) \rangle$, onde v e ε são, respetivamente, a velocidade da luz e a permissividade elétrica do meio. Sendo $\langle \sin^2(\omega t - kR) \rangle = 1/2$, obtém-se:

$$I(P) = \frac{1}{2} \left(\frac{E_a v \varepsilon b}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 = I_0 \text{sinc} \beta \quad (52)$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{E_a v \varepsilon b}{R} \right)^2 \quad (53)$$

Quando $\theta = 0 \rightarrow \beta = 0$ e $\text{sinc} \beta = 1$, o seu valor máximo. Assim, $I(P)_{\theta=0} = I(Y=0) = I_0$, ou seja, I_0 é o valor máximo da intensidade luminosa no alvo (que acontece para $Y = 0$).

Por seu turno, pela eq. 52 os pontos P no alvo para os quais $\text{sinc} \beta = 0$, ou seja, atendendo também à eq. 50, os ângulos θ para os quais isso acontece,

$$\beta = \frac{\pi n b}{\lambda_0} \sin \theta = m\pi \rightarrow \sin \theta = \frac{\lambda_0}{n b} m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (54)$$

correspondem a pontos de intensidade nula.

Estas características são ilustradas na figura seguinte que representa o padrão de difração (de Fraunhofer) da luz originado por uma fenda estreita.

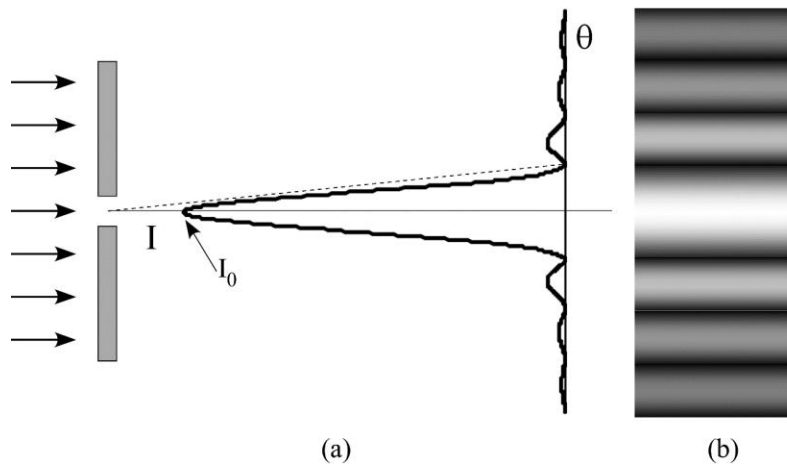


Figura 10. Difração da luz por uma fenda estreita. (a) distribuição da intensidade luminosa; (b) fotografia do padrão de difração.

Pela eq. 54, os primeiros mínimos acontecem para θ correspondente a $m = \pm 1$, ou seja, $\sin \theta_{\pm 1} = \pm \lambda_0 / n b$. Se $\theta_{\pm 1} = \pm 90^\circ$ deixa de se observar mínimos de difração, isto é, quando $\lambda_0 / n b = 1 \rightarrow \lambda_0 = n b$. Em síntese,

$$\text{Para } \lambda_0 \geq n b \rightarrow \text{deixa de se observar padrão de difração} \quad (55)$$

A observação da Fig. 9 indica que $tg\theta = Y_p / d$. Para pequenos ângulos, $tg\theta \approx \sin\theta \approx \theta \approx Y_p / d$. Assim, atendendo à eq. 54 os valores de Y correspondentes a mínimos de intensidade, Y_{\min} , são dados por:

$$Y_{\min|m} = \frac{d\lambda_0}{nb} m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (56)$$

donde

$$b = m \frac{d\lambda_0}{nY_{\min|m}}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (57)$$

É esta relação que será utilizada para determinar a abertura da fenda.

O racional que levou a esta relação ilustra o princípio geral da **metrologia**. Há um fenómeno físico, neste caso a difração da luz, cujo padrão observacional depende das propriedades da luz e das características do objeto que origina a difração. Existindo uma descrição teórica desse fenómeno, são estabelecidas dependências analíticas entre elementos desse padrão observacional e essas propriedades/características da luz/objeto. Determinando experimentalmente esses elementos e sendo conhecidas as propriedades da luz, essas dependências analíticas permitem determinar (“medir”) as características do objeto. No caso da ótica, está-se no domínio da **metrologia ótica**, intrinsecamente muito precisa pois as escalas (“régua”) de tempo e de espaço envolvidas são aquelas do período da luz (em torno de 20 picossegundos para o espectro visível) e do comprimento de onda (em torno de 0,5 micrómetros), o que proporciona um elevado detalhe na medição.

4.3 Padrão de Difração de um Fio

Pretende-se agora encontrar as características do padrão de difração que resulta da interação da radiação com um fio de diâmetro b , segundo a geometria indicada na figura seguinte.

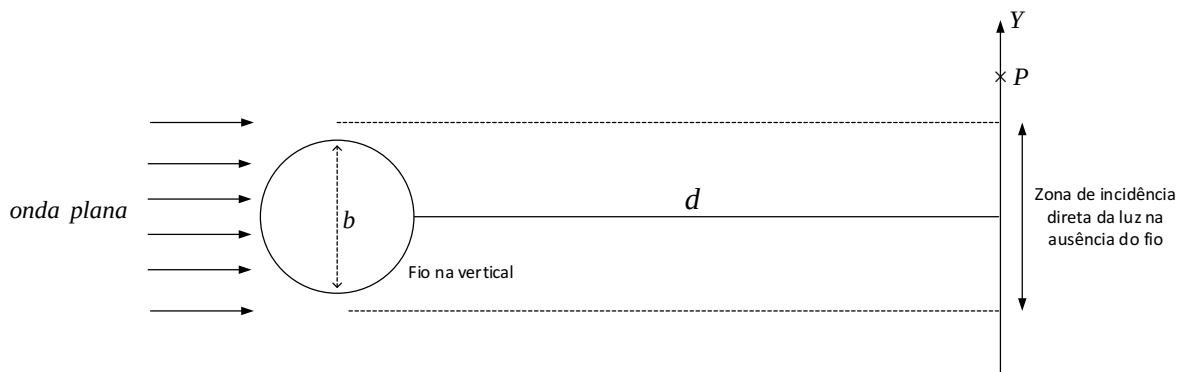


Figura 11. Geometria relativa à difração da luz por um fio de diâmetro b .

Um argumento simples leva a concluir que, neste caso, se reproduzem os resultados obtidos para o caso de uma fenda com uma abertura de largura igual ao diâmetro do fio.

Considere-se dois écrans com aberturas A_1 e A_2 . Esses écrans dizem-se complementares quando as regiões transparentes de um correspondem exatamente às regiões opacas do outro e vice-versa (a sobreposição dos dois écrans complementares gera um écran totalmente opaco que bloqueia a passagem da luz). Considere-se um ponto P e seja $E_0(P)$, $E_1(P)$ e $E_2(P)$ o campo elétrico (escalar) nesse ponto quando, respetivamente, nenhum écran está presente, está só presente o écran com abertura A_1 , ou só está presente o écran com

abertura A_2 . Se as aberturas desses écrans pudessem estar simultaneamente presentes, pelo princípio da sobreposição o campo em P seria $E_1(P) + E_2(P)$. Mas estando as duas aberturas presentes significa que não há obstáculo nenhum, ou seja, o campo em P deverá ser $E_0(P)$. Assim, concluiu-se que:

$$E_1(P) + E_2(P) = E_0(P) \quad (58)$$

Se o ponto P for tal que $E_0(P) = 0$ (no caso representado na Fig.10, o ponto P está fora da zona de incidência direta da luz na ausência do fio), então pela relação (58) obtém-se:

$$E_1(P) = -E_2(P) \quad (59)$$

que se traduz no seguinte (designado **Princípio de Babinet**¹⁷):

Num alvo, fora da zona de incidência direta da luz, o campo difratado gerado por uma determinada abertura é idêntico em amplitude e com uma diferença de fase de 180° relativamente ao campo difratado gerado pela abertura complementar

Sendo a intensidade luminosa $I(P) = \langle E^2(P, t) \rangle$, do resultado (59) decorre $I_1(P) = I_2(P)$, isto é, as intensidades são iguais nas duas situações.

Na situação experimental considerada neste trabalho utiliza-se a radiação emitida por um laser de He-Ne, a qual é colimada e com um diâmetro de feixe de alguns milímetros. Assim, referindo à Fig.11, $E_0(P)$ só será diferente de zero muito próximo de $Y = 0$, pelo que noutras regiões é válida a relação (59). Como tal, pode ser utilizada a relação (57) para obter o diâmetro do fio, isto é:

$$b = m \frac{d\lambda_0}{nY_{\min_m}}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (60)$$

4.4 Padrão de Difração de uma Abertura Circular

O estudo desta configuração é particularmente relevante pela importância que se reveste nos domínios que envolvem a utilização de lentes ou espelhos (como na astronomia e na fotografia), pois estes elementos coletam luz segundo uma certa abertura, a qual, sendo finita, gera fenómenos de difração que limitam a capacidade de resolução angular dos instrumentos que os incluem.

A simetria de uma abertura circular sugere a utilização de coordenadas polares esféricas, tanto no plano de abertura, como no plano de observação. Considerando o representado na Fig. 12, tem-se:

¹⁷ **Jacques Babinet** (1794-1872) foi um cientista francês com contribuições reconhecidas no domínio da física (principalmente na ótica), astronomia e geografia. Na ótica, para além de ser o autor do hoje designado *Princípio de Babinet*, estudou o fenómeno da anisotropia em cristais, devendo-se a ele a invenção de um dispositivo, posteriormente referenciado como compensador de Babinet, muito utilizado em instrumentação ótica. No domínio da astronomia, as suas investigações dirigiram-se principalmente para a determinação da massa de Mercúrio. Quanto à geografia, os seus trabalhos contribuíram para prever a direccionalidade do curso dos rios (segundo a designada lei de Baer-Babinet) e para melhorar as técnicas de projeção da superfície do globo terrestre em mapas bidimensionais. De referir que Babinet foi um excelente comunicador de ciência, autor prolífero de artigos sobre ciência dirigidos ao grande publico, também muito apreciado pela sua personalidade generosa e atenta ao próximo.

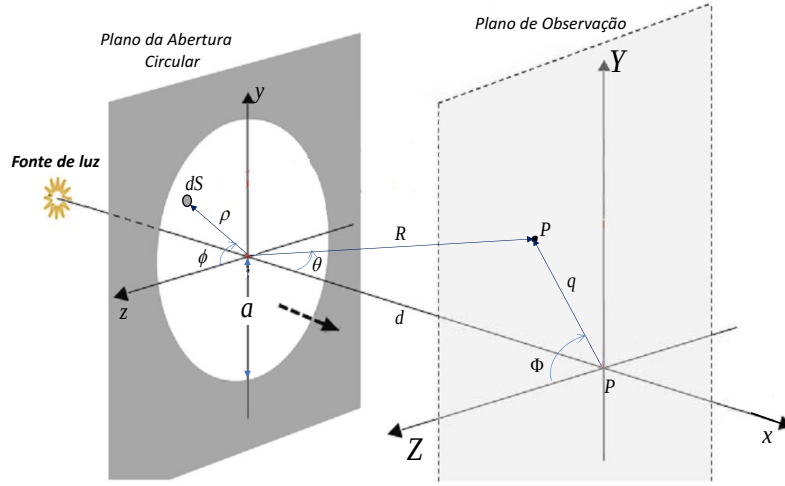


Figura 12. Geometria relativa à difração da luz por uma abertura circular de diâmetro $2a$.

$$\begin{aligned} z &= \rho \cos \phi & Z &= q \cos \Phi \\ y &= \rho \sin \phi & Y &= q \sin \Phi \end{aligned} \quad (61)$$

Neste sistema de coordenadas, o elemento infinitesimal de superfície é:

$$dS = \rho d\rho d\phi \quad (62)$$

Estas mudanças de variável permitem escrever a Eq.45 na forma seguinte:

$$E(P, t) = \frac{E_a e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int_{\rho=0}^a \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{i \frac{k\rho q}{R} \cos(\phi - \Phi)} \rho d\rho d\phi \quad (63)$$

O problema tem simetria axial, logo no plano de observação a solução deve ser independente da coordenada Φ . Assim, é vantajoso escolher um valor para Φ que permita simplificar os cálculos. Colocando $\Phi = 0$, o que significa determinar o campo nos pontos P no semi-eixo positivo do eixo dos Z, tem-se:

$$E(P_{|\Phi=0}, t) = \frac{E_a e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int_{\rho=0}^a \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{i \frac{k\rho q}{R} \cos \phi} \rho d\rho d\phi \quad (64)$$

À variável azimutal ϕ no plano de abertura está associada o integral:

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} e^{i \frac{k\rho q}{R} \cos \phi} d\phi \quad (65)$$

que ocorre com muita frequência em física. Trata-se de uma função que não se pode decompor em formas mais simples, como acontece com as funções hiperbólicas, exponenciais ou trigonométricas. A função definida por:

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iu \cos v} dv \quad (66)$$

designa-se de *Função de Bessel* de primeira espécie de ordem zero¹⁸. Assim, a eq. 64 pode ser expressa como:

¹⁸ Generalizando, a função de Bessel de primeira espécie de ordem m define-se como

$$J_m(u) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(mv + u \cos v)} dv$$

$$E(P_{|\Phi=0}, t) = \frac{E_a e^{i(\omega t - kR)}}{R} 2\pi \int_{\rho=0}^a J_0\left(\frac{k\rho q}{R}\right) \rho d\rho \quad (67)$$

O integral pode ser avaliado de modo mais expedito considerando uma relação de recorrência que caracteriza as funções de Bessel de primeira ordem, nomeadamente:

$$\frac{d}{du} [u^m J_m(u)] = u^m J_{m-1}(u) \quad (68)$$

donde para $m=1$,

$$u J_1(u) = \int_0^u \bar{u} J_0(\bar{u}) d\bar{u} \quad (69)$$

onde \bar{u} é uma variável muda. Considerando a mudança de variáveis:

$$\chi = \frac{kq}{R} \rho \rightarrow d\rho = \frac{R}{kq} d\chi \quad (70)$$

o integral na eq. 67 fica:

$$\int_{\rho=0}^a J_0\left(\frac{k\rho q}{R}\right) \rho d\rho \rightarrow \int_{\chi=0}^{\chi=\frac{kaq}{R}} J_0(\chi) \left(\frac{R}{kq}\right) \left(\frac{R}{kq}\right) \chi d\chi = \left(\frac{R}{kq}\right)^2 \int_{\chi=0}^{\chi=\frac{kaq}{R}} J_0(\chi) \chi d\chi \quad (71)$$

Tendo agora em consideração a eq. 69 obtém-se:

$$\left(\frac{R}{kq}\right)^2 \int_{\chi=0}^{\chi=\frac{kaq}{R}} J_0(\chi) \chi d\chi = \left(\frac{R}{kq}\right)^2 \frac{kaq}{R} J_1\left(\frac{kaq}{R}\right) = \frac{Ra}{kq} J_1\left(\frac{kaq}{R}\right) = a^2 \left[\frac{J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)}{\frac{kaq}{R}} \right] \quad (72)$$

Inserindo este resultado na eq. 67 para $E(P_{|\Phi=0}, t)$, resulta:

$$E(P_{|\Phi=0}, t) = \frac{E_a e^{i(\omega t - kR)}}{R} 2\pi a^2 \left[\frac{J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)}{\frac{kaq}{R}} \right] = \frac{2AE_a e^{i(\omega t - kR)}}{R} \left[\frac{J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)}{\frac{kaq}{R}} \right] \quad (73)$$

onde $A = \pi a^2$ é a área da abertura circular.

Procedendo como anteriormente, sendo a intensidade luminosa dada por $I(P_{|\Phi=0}) = \nu \varepsilon \langle E^2(P_{|\Phi=0}, t) \rangle$, tem-se para este caso:

$$I(P_{|\Phi=0}) = \frac{2\nu \varepsilon A^2 E_0^2}{R^2} \left[\frac{J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)}{\frac{kaq}{R}} \right]^2 \quad (74)$$

A intensidade no centro do plano de observação corresponde à situação $q=0$. Encontra-se que

$\lim_{x \rightarrow 0} J_1(x) / x = 1/2$, donde:

$$I_0 = I(P_{|\Phi=0}, q=0) = \frac{\nu \varepsilon A^2 E_0^2}{2R^2} \quad (75)$$

Assim, a intensidade associada ao padrão de difração de Fraunhofer de uma abertura circular é:

$$I(q) = I(0) \left[\frac{2J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)}{\frac{kaq}{R}} \right]^2 \quad (76)$$

onde se deixou de referir a condição dos pontos do plano de observação com $\Phi = 0$ atendendo à simetria circular do problema, isto é, no plano de observação a intensidade apenas depende da coordenada radial q . Atendendo à Fig. 12, $\sin \theta = q / R$, o que permite expressar o padrão de difração em função da coordenada angular θ :

$$I(\theta) = I(0) \left[\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2 \quad (77)$$

O primeiro zero desta função acontece quando:

$$J_1(u)_{|u=ka \sin \theta} = 0 \rightarrow u = 3,83 \rightarrow ka \sin \theta = 3,83 \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta = 3,83 \rightarrow \sin \theta \approx \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (78)$$

onde $D = 2a$ é o diâmetro da abertura.

A função $I(\theta)/I(0)$ está representada na Fig. 13-a, sendo que na Fig. 13-b se ilustra o padrão de difração de uma abertura circular iluminada por uma frente de onda quase plana proveniente de um laser de He-Ne.

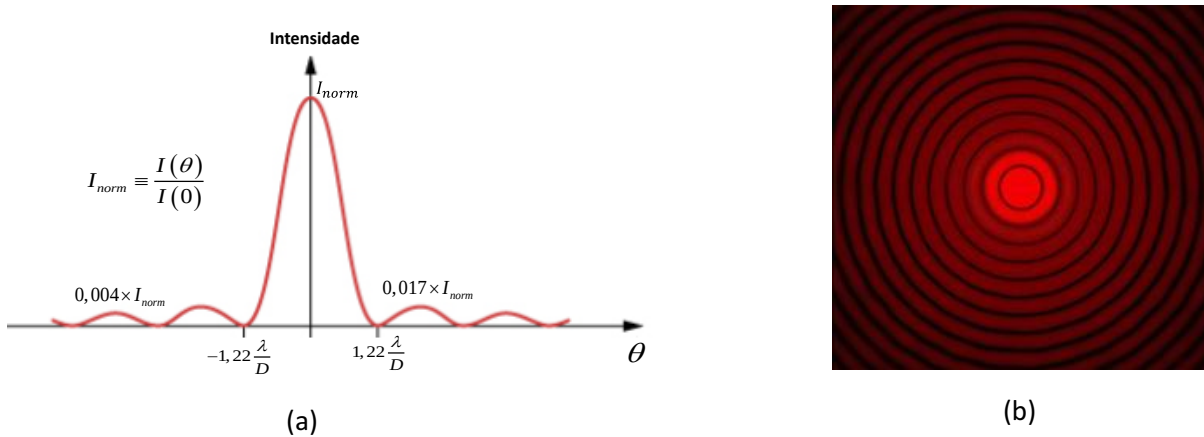


Figura 13. (a) Forma do padrão de difração de uma abertura circular; (b) realização experimental para o caso da abertura iluminada por uma onda plana (aproximadamente) proveniente de um laser de He-Ne (*NIST Handbook of Mathematical Functions*, 2010).

Seja $q_{\text{primeiro zero}}$ a coordenada radial no plano de observação para a qual a intensidade do padrão de difração se anula, isto é, correspondente à condição $ka \sin \theta_{\text{primeiro zero}} = 3,83$ ¹⁹. A observação da Fig. 12 indica que:

$$\text{tg} \theta_{\text{primeiro zero}} = \frac{q_{\text{primeiro zero}}}{d} \approx \sin \theta_{\text{primeiro zero}} \rightarrow ka \frac{q_{\text{primeiro zero}}}{d} = \frac{2\pi n}{\lambda_0} a \frac{q_{\text{primeiro zero}}}{d} = 3,83$$

¹⁹ O primeiro zero da função $J_1(x)$ acontece para $x = 3,83$.

onde d é a distância entre o plano da abertura e o plano de observação. Assim, a determinação experimental de d e de $q_{\text{primeiro zero}}$ (a distância ao centro do padrão do primeiro círculo escuro do padrão de difração) permite determinar o diâmetro da abertura a partir da relação:

$$D = 1,22 \frac{\lambda_0}{n} \frac{d}{q_{\text{primeiro zero}}} \quad (79)$$

Como anteriormente, λ_0 é o comprimento de onda da luz no vácuo e n o índice de refração do meio. De referir que o segundo e terceiro zeros da função $J_1(x)$ acontecem para $x = x_{\text{segundo zero}} = 7,00$ e $x = x_{\text{terceiro zero}} = 10,17$, respetivamente, donde o diâmetro da abertura também pode ser obtido através das relações:

$$D = 2,23 \frac{\lambda_0}{n} \frac{d}{q_{\text{segundo zero}}}; \quad D = 3,24 \frac{\lambda_0}{n} \frac{d}{q_{\text{terceiro zero}}} \quad (80)$$

onde $q_{\text{segundo zero}}$ e $q_{\text{terceiro zero}}$ são, respetivamente, a distância ao centro do padrão de difração do segundo e terceiro círculos escuros.

Na Fig. 12 a fonte de luz está segundo o eixo do sistema (eixo dos x), donde o máximo do padrão de difração da abertura circular também se situa sobre esse eixo. Considere-se agora uma outra fonte que está desviada de um ângulo φ relativamente a esse eixo quando visualizada a partir do centro da abertura. Na situação em que $\text{tg}\varphi \approx \varphi$, o padrão de difração gerado pela abertura e relativo a esta segunda fonte está também desviado do ângulo φ relativamente ao padrão de difração correspondente à primeira fonte. Assuma-se agora que as duas fontes estão presentes. Então, no plano de observação os dois padrões de difração misturam-se. No entanto, como a intensidade do pico central de difração é muito superior à intensidade dos picos laterais (pela Fig. 13-a observa-se que a amplitude dos primeiros picos de intensidade de cada lado do pico central é somente 1,7% da amplitude deste), considera-se que os dois padrões de difração são discerníveis caso os picos centrais de cada um deles estejam suficientemente separados. O critério que se utiliza para definir a separação angular mínima, φ_{min} , que ainda permite identificar cada um dos padrões de difração é o pico central de cada um deles coincidir com o primeiro mínimo do outro (Fig. 14).

Assim, φ_{min} corresponde a $\theta_{\text{primeiro zero}}$. Como

$$\varphi_{\text{min}} = \theta_{\text{primeiro zero}} \approx \text{tg}\theta_{\text{primeiro zero}} = \frac{q_{\text{primeiro zero}}}{d}$$

pela eq. (79)

$$\varphi_{\text{min}} = 1,22 \frac{\lambda_0}{nD} \quad (81)$$

Esta expressão concretiza o critério, designado de *Rayleigh*²⁰, de separação de dois padrões de difração associados à interação com a abertura circular da luz proveniente de duas fontes.

²⁰ **John William Strutt** (1842-1919), também conhecido pelo título honorífico *Lord Rayleigh*, foi um físico e matemático inglês com contribuições importantes em várias áreas, em particular no estudo dos fenómenos ondulatórios (mecânicos e eletromagnéticos, desde logo no que respeita à difração) e na dinâmica dos fluidos. Descobriu um mecanismo de dispersão da luz quando esta se propaga num meio material, fenómeno que mais tarde foi designado como *Dispersão de Rayleigh*, o qual explica o motivo do céu ser azul, também com consequências relevantes em variados domínios, por exemplo na propagação da luz em fibras óticas. Em

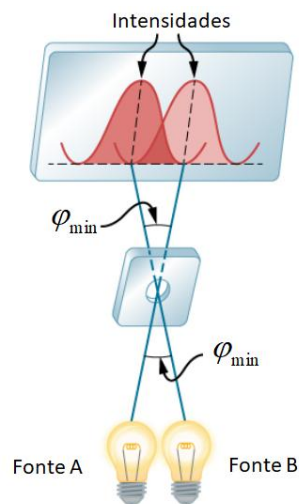


Figura 14. Critério (designado de *Rayleigh*) para discernir no plano de observação o padrão de difração associado à interação com a abertura da luz proveniente de cada uma das fontes.

Num telescópio, a abertura circular por onde passa a luz é definida pela lente ou espelho primário. Assim, essa abertura gera um padrão de difração quando interatua com a luz proveniente de um determinado objeto celeste. Devido ao efeito de focagem da lente (espelho curvo), o padrão de difração de Fraunhofer aparece no plano focal da lente (espelho), isto é, o plano de observação na Fig. 12 é agora o plano focal destes elementos óticos. Duas fontes celestes são discerníveis pelo instrumento caso, quando observadas pelo telescópio, a sua separação angular seja superior a φ_{\min} .

O espelho primário do **Telescópio Espacial Hubble**²¹ tem um diâmetro $D = 2,4m$. Estando em órbita (a uma distância média da superfície terrestre de ≈ 600 km) evita por completo os efeitos de degradação de imagem devidos à atmosfera. O sistema de deteção funciona no visível, pelo que se assume $\lambda_0 \approx 550nm$. Estando no espaço $n = 1$. Considerando a eq.81 obtém-se $\varphi_{\min} = 2,8 \times 10^{-7} rad$. O que significa este valor?

Considerando o exemplo da Galáxia de Andromeda, esta está a uma distância da Terra de aproximadamente $d_{Andromeda} = 2 \times 10^6 anos - luz$. A esta distância, o valor de φ_{\min} significa que é possível distinguir duas estrelas desta galáxia separadas de $d_{estrelas} = d_{Andromeda} \times \varphi_{\min} = 0,56 anos - luz$ ²².

Na verdade, a importância do *Telescópio Hubble* deve-se ao facto de estar no espaço, ficando assim livre do efeito pernicioso da atmosfera, o que possibilita uma enorme estabilidade da frente de onda que atinge o espelho primário do telescópio, permitindo elevados tempos de exposição, ou seja, a deteção de objetos

1876 postulou um padrão de escoamento do ar que possibilitaria a um veículo ter sustentação, levantando pela primeira vez a hipótese de que um aparelho mais pesado do que o ar conseguiria voar com os seus próprios meios. Em conjunto com o químico William Ramsay descobriu o elemento Árgon. O seu trabalho sobre o som levou-o a publicar, em 1877, a obra intitulada *The Theory of Sound*, que ainda hoje é uma referência na acústica. Foi o segundo *Professor Sénior* na Universidade de Cambridge, sucedendo a James Clerk Maxwell. Foi-lhe atribuído em 1904 o Prémio Nobel da Física “*pelas suas investigações relativas à densidade dos gases mais importantes e pela descoberta do Árgon*”.

²¹ O **Telescópio Espacial Hubble** foi lançado para o espaço a 24 de abril de 1990 a bordo do vaivém espacial *Discovery*. Foi projetado para operar nas bandas do visível e do infravermelho próximo do espectro eletromagnético. Já em órbita, detetou-se que o espelho primário do telescópio tinha um defeito grave de fabrico que limitava substancialmente o desempenho do instrumento. Um sistema ótico corretivo (na verdade, uns óculos) foi projetado e instalado no telescópio em dezembro de 1993, numa missão famosa de 10 dias do vaivém espacial *Endeavour*, o que possibilitou recuperar o desempenho previsto para o instrumento. O nome do telescópio é uma homenagem a **Edwin Hubble** (1889-1953), um astrónomo americano que ficou famoso por ter descoberto a expansão do universo, apresentando evidências de que a velocidade de afastamento dos objetos celestes aumenta com a distância a que se encontram do sistema solar.

²² Num exemplo mais prosaico, o Hubble permite ver uma bola de futebol a 51 quilómetros de distância.

celestes muito distantes (com intensidades luminosas que chegam até nós extremamente reduzidas). Pelo ano 2020, o objeto celeste mais distante detetado pelo Hubble é uma galáxia afastada de 13,2 mil milhões de anos-luz, tendo emitido a luz que agora chega até nós quando o Universo tinha cerca de 480 milhões de anos²³.

No *ESO-European South Observatory*, localizado no deserto de Atacama no Chile, a uma altitude de cerca de 2600 m e beneficiando de condições excecionais de observação astronómica, está o sistema de telescópios óticos mais avançado do mundo. É constituído por quatro telescópios principais (espelhos primários com diâmetro de 8,2 m) e quatro telescópios auxiliares (espelhos primários com diâmetro de 1,8 m). Os telescópios podem funcionar individualmente, ou então em conjunto segundo o conceito de interferometria astronómica, segundo o qual a luz captada por cada telescópio é dirigida para um interferómetro onde é combinada com a que provem dos outros, possibilitando um desempenho ao nível da resolução angular do sistema combinado equivalente ao conseguido por um telescópio único com espelho primário de diâmetro $\approx 25 \times 8,2 = 205 \text{ m}$.

Considerando novamente a eq. 81 com $\lambda_0 \approx 550 \text{ nm}$, $n \approx 1$ e $D = 205 \text{ m}$, tem-se $\varphi_{\min} = 3,27 \times 10^{-9} \text{ rad}$. Este resultado significa que o sistema é capaz de discernir duas fontes de luz colocadas na Lua ($d_{\text{Lua}} = 380 \times 10^3 \text{ km}$) separadas de $d_{\text{fontes}} = d_{\text{Lua}} \times \varphi_{\min} = 1,2 \text{ m}$.

Estes exemplos mostram que, de forma simples, a eq. 81 permite determinar a resolução angular de equipamentos que têm aberturas de intersecção de frente de onda, como é o caso referido dos telescópios²⁴.

²³As capacidades observacionais do Hubble foram exponenciadas com o seu sucedâneo, o *Telescópio Espacial James Webb*, com um espelho primário de 6,5 m (o diâmetro do espelho do Hubble é de 2,4 m). Para além da melhoria da resolução angular por um fator de $6,5/2,4 \approx 2,7$, relativamente ao Hubble o James Webb tem uma área coletora de luz que é 6,25 vezes superior, o que possibilita fazer observações que remontam ao tempo da formação das primeiras estrelas e galáxias. O Telescópio Espacial James Webb, que opera essencialmente no infravermelho, foi colocado a uma distância de cerca de 1,5 milhões de km da Terra, no designado ponto de Lagrange L2 do sistema Sol-Terra. O lançamento bem-sucedido do telescópio aconteceu no dia 25 de dezembro de 2021. Os resultados que tem proporcionado estão a colocar em causa muito do que era estabelecido quanto às dinâmicas na fase inicial do Universo.

²⁴O sistema de observação astronómica mais ambicioso em construção é o *Square Kilometer Array* (SKA), que irá operar na banda rádio (comprimento de onda situado no intervalo 1,5-2 cm). Resultado de uma colaboração internacional que agrega um conjunto de países, entre os quais Portugal, este sistema operará milhares de pequenos/médios radiotelescópios, de formatos diversos, localizados na África do Sul e na Austrália, mas com perspectiva de serem também instalados noutros países, em particular Moçambique. Estes radiotelescópios operarão em rede, originando um volume de dados cuja transmissão resultará num tráfego superior ao da internet em 2020. Esta configuração permitirá conseguir um desempenho correspondente a um radiotelescópio único com uma área de 1 km^2 . A resolução angular que daí deriva e a sensibilidade à deteção de ondas de rádio são de tal forma extremas que permitirão detetar o sinal emitido por um radar de aeroporto localizado num planeta a dezenas de anos-luz de distância. A construção deste sistema decorre em várias fases, estando previsto que ficará concluído até 2030.

5. Execução do Trabalho

O procedimento experimental envolve duas partes, i) familiarização com o interferómetro de Michelson e a sua utilização para determinar o índice de refração do ar, assim como o índice de refração do vidro, e ii) observação do fenómeno da difração e utilização dos princípios físicos subjacentes para a determinação da largura de uma fenda, o diâmetro de um fio e o diâmetro de uma abertura circular.

5.1 Interferómetro de Michelson

Nesta experiência utiliza-se um interferómetro de Michelson compacto produzido pela *Pasco Scientific* (OS-9255A), que se ilustra na Fig. 15. O interferómetro é iluminado por um laser de He-Ne.

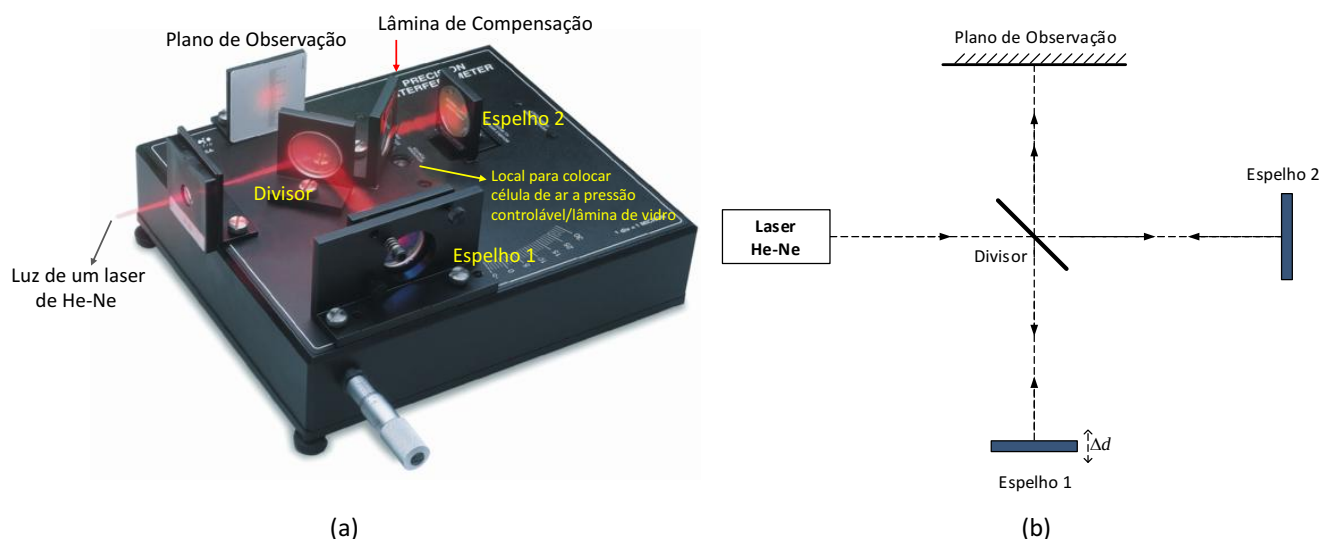


Figura 15. Interferómetro de Michelson a utilizar no procedimento experimental (a) e esquema geral (b).

Atuando nos parafusos de inclinação do espelho 1, procurar a sobreposição no plano de observação dos feixes provenientes dos dois braços do interferómetro de tal forma que se observe o aparecimento de franjas. Irá verificar que atuando no parafuso micrométrico, na parte central do plano de observação a franja passa alternadamente de clara a escura e assim sucessivamente. O parafuso micrométrico atua no espelho 1 através de uma alavanca com fator multiplicativo²⁵. Como referido e justificado na Secção 3, neste procedimento experimental não é necessário a inclusão da lâmina de compensação.

5.1.1 Determinação do Índice de Refração do Ar (Método 1)

O procedimento experimental a seguir decorre segundo os passos seguintes:

²⁵ O valor do deslocamento correspondente a uma divisão do tambor do parafuso micrométrico é de 1 micrómetro. Atendendo à utilização intensiva deste equipamento, o parafuso micrométrico revela uma certa folga quando colocado no início da escala. Assim, recomenda-se colocar o parafuso micrométrico numa outra zona da escala, por exemplo, a meio desta.

- Determinar no plano de observação o ponto central do padrão de interferência, o qual se deve manter fixo no decurso da experiência (o que acontece se o interferómetro estiver bem alinhado);
- Deslocar o espelho 1 utilizando para o efeito o parafuso micrométrico. Tendo em conta o valor do deslocamento correspondente a uma divisão do tambor do parafuso, ler o deslocamento $\Delta d_{|N}$ no parafuso micrométrico correspondente a um certo número N de passagens “brilhante-escuro-brilhante” do ponto central do padrão de interferência. Uma sugestão é considerar $N = 30$, sendo necessária atenção para não *saltar* franjas durante a contagem;
- Sempre que necessário, ajustar o interferómetro atuando nos posicionadores do espelho 2 por forma a manter fixo o ponto central do padrão de interferência;
- Repetir o procedimento anterior um certo número de vezes (como sugestão, considerar 10 vezes), obtendo em cada caso o correspondente $(\Delta d_{|N})_i; i = 1, 2, \dots, 10$;
- Obter o valor médio destas leituras, $\overline{\Delta d_{|N}}$, e registar a temperatura ambiente;
- Sendo $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$, obter o índice de refração do ar utilizando a eq. (19), isto é:

$$n_{ar} = \frac{N\lambda_0}{2\overline{\Delta d_{|N}}} \quad (82)$$

- Utilizando conhecimentos de análise de erros, estimar o erro com que se obtém n_{ar} a partir da incerteza associada à determinação de $\overline{\Delta d_{|N}}$.
- Comparar o resultado obtido (com a incerteza experimental associada) com o valor tabelado do índice de refração do ar à pressão atmosférica e à temperatura padrão (20°C): $n_a = 1,00029$.

5.1.2 Determinação do Índice de Refração do Ar (Método 2)

(Por limitações de equipamento, neste ano letivo esta componente experimental não se realiza)

Para a realização desta experiência coloca-se a célula de ar no braço 2 do interferómetro (ver Fig. 15-a), com as faces perpendiculares ao eixo do braço. À célula está ligado um manómetro com manípulo em alavanca. Atuando neste, é possível variar a pressão do ar no interior da célula para valores inferiores à pressão exterior. Uma segunda alavanca permite novamente a entrada de ar.

O procedimento experimental a considerar é o seguinte:

Parte 1: Confirmar a dependência linear da variação do índice de refração do ar com a pressão

- Com a célula já colocada, alinhar o interferómetro seguindo o indicado no procedimento anterior;
- Fazer vácuo na célula;
- Atuando no parafuso micrométrico, colocar o interferómetro num estado em que no centro do padrão de interferência esteja uma franja brilhante;
- Aumenta-se a pressão gradualmente, contando o número N de passagens “brilhante-escuro-brilhante”, registando ao longo do percurso os pares (p, N) ,
- Fazer a representação gráfica dos valores obtidos e comentar o resultado.

Parte 2: Determinação do índice e refração do ar

- Repetir os procedimentos de alinhamento atrás referidos;
- Fazer vácuo na célula;
- Aumentar gradualmente a pressão na célula até à pressão ambiente contando o número N de passagens “brilhante-escuro-brilhante”;
- Repetir este procedimento um certo número de vezes (como sugestão, considerar 10 vezes), obtendo em cada caso o correspondente $N_i; i = 1, 2, \dots, 10$;
- Obter o valor médio destas leituras, \overline{N} ;
- Sendo $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$ e $d_c = 3 \pm 0,1 \text{ cm}$, obter o índice de refração do ar utilizando a eq. (26), isto é:

$$n_{a|atm} \approx 1 + \frac{\lambda_0 \overline{N}}{2d_c} \quad (83)$$

- Comparar o resultado obtido (com a incerteza experimental associada) com o valor tabelado do índice de refração do ar à pressão atmosférica e à temperatura padrão (20°C): $n_a = 1,00029$.

5.1.3 Determinação do Índice de Refração do Vidro

O procedimento experimental é o seguinte:

- Colocar a lâmina de vidro no braço 2 do interferómetro (ver Fig. 15-a), ficando paralela ao espelho desse braço;
- Atuando no parafuso micrométrico, colocar o interferómetro num estado em que no centro do padrão de interferência esteja uma franja brilhante;
- Partindo desta situação ($i = 0$), atuando lenta e cuidadosamente na alavanca associada à placa de vidro, aumentar o ângulo i de um certo valor registando o correspondente número N de passagens “brilhante-escuro-brilhante” (para diminuir erros, N não deverá ser inferior a 20);
- Repetir a operação anterior para outros valores de i obtendo os correspondentes $N(i)$, sendo que se deve manter a condição de pequenos ângulos ($i \approx [0 - 14^\circ]$);
- Para cada par $[i, N(i)]$ obter o índice de refração do vidro a partir da eq. 38, isto é,

$$n_{v|i, N(i)} = \frac{h n_a^2 \sin^2 i}{h n_a \sin^2 i - N(i) \lambda_0} \quad (84)$$

sendo $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$, $h = 5,5 \pm 0,5 \text{ mm}$, $n_a = 1,00029$;

- A partir dos valores para $n_{v|i, N(i)}$ assim obtidos, determinar um valor médio para o índice de refração do vidro, $\overline{n_v}$, estimando a incerteza associada²⁶.

²⁶ Há diferentes tipos de vidro (dependente do nível de dopagem com metais, por exemplo, com chumbo), o que se reflete no correspondente índice de refração. Na zona do comprimento de onda do laser de He-Ne, o vidro normal tem $n_{v|normal} = 1,517$, o vidro *crown* tem $n_{v|crown} = 1,520$, o vidro *zinc-crown* tem $n_{v|zinc-crown} = 1,575$, e vidros mais extremos, como *heaviest-flint-glass*, tem $n_{v|heaviest-flint-glass} = 1,890$.

5.2 Difração

Para as experiências a realizar será utilizado um banco ótico que proporciona um suporte adequado para os elementos que irão provocar a difração da luz (fenda linear, fio e abertura circular). A fonte de luz será um laser de He-Ne ($\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$). O esquema geral da montagem está ilustrado na Fig. 16.

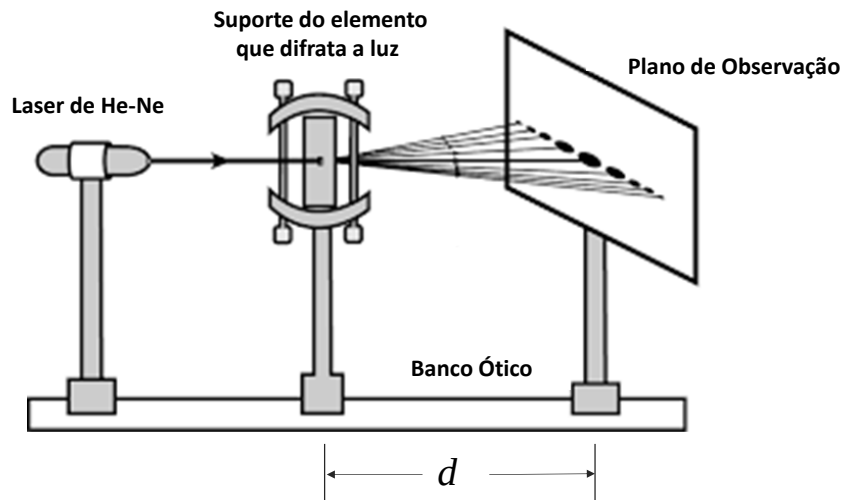


Figura 16. Esquema da montagem experimental para o estudo da difração.

Para os vários objetos difrativos a colocar no suporte indicado na Fig. 16, não esquecer de fotografar o correspondente padrão de difração que se observa no plano de observação, colocando aí uma régua que serve de referência para determinação das distâncias relevantes pela utilização da fotografia.

5.2.1 Determinação da Abertura de uma Fenda Linear

O procedimento experimental é o seguinte:

- Colocar no suporte indicado na Fig. 16 um disco que permite, por rotação, colocar no percurso da luz laser fendas com abertura especificada;
- Fazer a luz do laser de He-Ne incidir na fenda e observar o padrão de difração no plano de observação, localizado a uma distância d da fenda (esta distância é superior a dois metros, assim está-se a operar confortavelmente no regime de Fraunhofer);
- Medir a distância d assim como a distância $Y_{\min|_m}$ no plano de observação entre o ponto central do padrão de difração e o mínimo de ordem m (é vantajoso que $Y_{\min|_m}$ seja a média dos valores correspondentes ao mínimo de ordem m de cada lado do ponto central);
- Utilizando a relação 57, isto é,

$$b = m \frac{d \lambda_0}{n Y_{\min|_m}}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (85)$$

onde n é o índice de refração do ar ($n = n_a = 1,00029$ nas condições de pressão e temperatura existentes no laboratório), obter o valor b para a abertura da fenda;

- Obter o valor de b determinado a partir da relação anterior para vários valores de m (no mínimo, considerar $m = \pm 1, \pm 2$);
- A partir dos resultados obtidos nos pontos anteriores, calcular um valor médio para b , assim como a incerteza associada;
- Aplique o procedimento anterior para duas fendas lineares com diferentes aberturas.

5.2.2 Determinação do Diâmetro de um Fio

O fio cujo diâmetro é proposto ser determinado nesta experiência é um cabelo²⁷ da pessoa que a realiza. Assim, para além do objetivo pedagógico/científico pretendido com esta parte do trabalho, o executante fica com informação sobre algo que é uma característica própria, como é o caso da impressão digital.

O procedimento experimental é exatamente idêntico ao indicado na secção anterior, sendo o diâmetro do filamento capilar obtido utilizando-se a eq. 85.

5.2.3 Determinação do Diâmetro de um Orifício Circular

O procedimento experimental é o seguinte:

- O disco indicado na secção anterior, para além de fendas lineares tem também aberturas de diferentes diâmetros. Por rotação do disco selecione um orifício que proporcione no plano de observação um padrão de difração com boa visibilidade;
- Identificar nesse plano o ponto central do padrão;
- Determinar as distâncias desse ponto até ao primeiro círculo de intensidade nula ($q_{\text{primeiro zero}}$), ao segundo círculo de intensidade nula ($q_{\text{segundo zero}}$) e ao terceiro círculo de intensidade nula ($q_{\text{terceiro zero}}$);
- A partir das relações (79) e (80), isto é,

$$D_{\text{primeiro zero}} = 1,22 \frac{\lambda_0}{n} \frac{d}{q_{\text{primeiro zero}}}, D_{\text{segundo zero}} = 2,23 \frac{\lambda_0}{n} \frac{d}{q_{\text{segundo zero}}}, D_{\text{terceiro zero}} = 3,24 \frac{\lambda_0}{n} \frac{d}{q_{\text{terceiro zero}}} \quad (86)$$

onde n é o índice de refração do ar ($n = n_a = 1,00029$ nas condições de pressão e temperatura existentes no laboratório), d é a distância do orifício ao plano de observação e $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$, determinar um valor médio para o diâmetro do orifício circular com uma estimativa da incerteza associada.

- Aplique o procedimento anterior para dois orifícios com diferentes diâmetros.

²⁷Tal como a generalidade das estruturas biológicas, os filamentos capilares que constituem o cabelo (do latim *capillus*) são construções complexas. Há, em média, cerca de 150 000 destes filamentos numa pessoa adulta, que crescem em torno de 1 cm por mês. Em termos de elementos químicos, o cabelo é 44% carbono, 30% oxigénio, 15% azoto, 6% hidrogénio e 5% enxofre, que se organizam em proteínas, sendo a queratina a mais comum. Tem propriedades mecânicas notáveis, desde logo a capacidade de deformação (o regime elástico estende-se até cerca de 30% do seu comprimento). O diâmetro dos filamentos capilares tem uma grande variabilidade, situando-se em geral no intervalo (50-150) micrómetros. Por norma, os cabelos escuros são mais espessos do que os louros. Em termos de género, os homens têm habitualmente cabelo mais espesso, sendo que as mulheres na fase de gravidez e por razões hormonais vêm o diâmetro dos seus cabelos aumentar substancialmente.

6. Referências

E. Hecht, *Óptica* (3ª edição), Fundação Calouste Gulbenkian, 2012

L. Pedrotti, *Introduction to Optics*, 3th edition, Pearson, 2006

B. D. Guenther, *Modern Optics Simplified*, OUP Oxford, 2019

F. W. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark, *The NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, 2010