

# Análise das Propriedades de Transporte Eletrónico em Sólidos: Determinação do Coeficiente de Temperatura e da Energia de banda proibida

## Protocolo de Laboratório

Laboratório de Física III

Departamento de Física e Astronomia da Faculdade de Ciências da Universidade  
do Porto (DFA@FCUP)

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Metais, Semicondutores e Isoladores . . . . .	2
1.2	Condução nos metais . . . . .	3
1.3	Condução nos semicondutores . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Preparação e Montagem</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Procedimento Experimental</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Análise de Dados e Questões de Discussão</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Relevância e Implicações Tecnológicas</b>	<b>12</b>
5.1	Implicações Tecnológicas em Metais . . . . .	12
5.2	Implicações Tecnológicas em Semicondutores . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Anexo</b>	<b>14</b>

## Objetivos

O presente protocolo de trabalho visa aprofundar os conceitos de condução elétrica em diferentes materiais, com os seguintes objetivos:

- Estudar a dependência da resistência elétrica de um condutor metálico com a temperatura.
- Determinar o coeficiente de temperatura da resistência,  $\alpha$ , para um condutor metálico.
- Analisar a variação da corrente de fuga em polarização inversa de um díodo de silício com a temperatura.
- Determinar a largura da banda proibida (*banda proibida*,  $E_g$ ) de um semicondutor a partir da análise da sua corrente de fuga.
- Familiarizar-se com técnicas de medição em corrente alternada (LCR meter) e com o controlo de variáveis em processos térmicos.

# 1 Introdução

## 1.1 Metais, Semicondutores e Isoladores

A **condutividade elétrica** ( $\sigma$ ) ou o seu inverso denominada de **resistividade** ( $\rho$ ) de um material depende da sua capacidade de ter portadores de carga (eletrões ou lacunas) que se podem mover livremente e é uma característica intrínseca/específica dos materiais. A **Teoria de Bandas** explica esta diferença com base na estrutura de energia dos eletrões no interior de um sólido. A dimensão do *banda proibida* ( $E_g$ ) é a diferença crucial que define se um material é um condutor, um semicondutor ou um isolador (ver Figura 1) [1] [2].

### A) Condutor

### B) Semicondutor

### C) Isolador

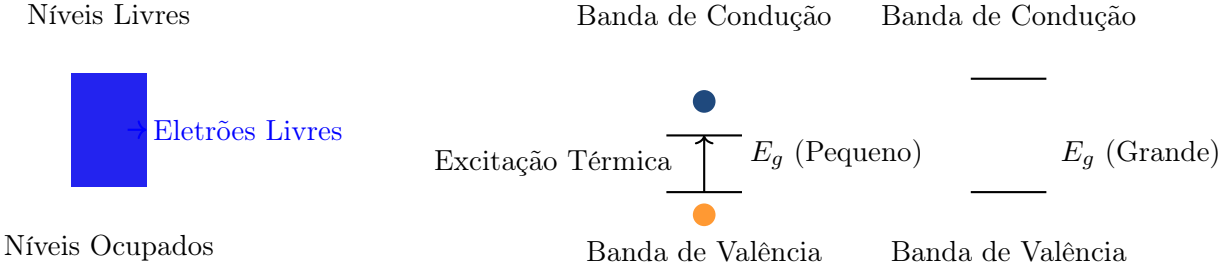


Figura 1: Diagrama de bandas de energia que ilustra a diferença entre os três tipos de materiais. A diferença na condutividade é determinada pela dimensão da *banda proibida* ( $E_g$ ).

## 1.2 Condução nos metais

Nos metais a banda proibida  $E_g$  é extremamente reduzida, podendo ser considerado nulo. Neste caso, os elétrons de valência atuam como elétrons de condução, sempre disponíveis mesmo à temperatura  $T \sim 0$  K. A densidade de elétrons de condução é muito elevada ( $n \sim 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ ), justificando a alta condutividade elétrica. A resistividade  $\rho$  de um metal resulta essencialmente do espalhamento destes elétrons por fonões (quanta das vibrações da rede cristalina), por impurezas, defeitos ou por interações mais complexas (momentos magnéticos, efeitos quânticos).

**Modelo de Drude.** No modelo clássico de Drude [3], os elétrons comportam-se como um gás de partículas carregadas com densidade  $n$  (número de elétrons livres por unidade de volume), carga  $e$  (carga elementar), massa  $m$  (massa do elétron livre) e tempo médio entre colisões  $\tau$ . A condutividade  $\sigma$  e a resistividade  $\rho$  são:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad \rho = \frac{m}{ne^2\tau}. \quad (1)$$

**Modelo de Sommerfeld (gás de fermiões).** Sommerfeld melhorou o modelo aplicando a Mecânica Quântica e a estatística de Fermi-Dirac. A energia mais alta ocupada a 0 K é a **energia de Fermi**,  $E_F$  (tipicamente 5–10 eV nos metais). A distribuição de ocupação é

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}, \quad (2)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann ( $1.38 \times 10^{-23}$  J/K) e  $T$  a temperatura absoluta. Apenas estados próximos de  $E_F$  (numa vizinhança  $\sim k_B T$ ) contribuem para o transporte.

Neste modelo, pode também introduzir-se a **massa efetiva**  $m^*$ , que substitui a massa livre  $m$  para contabilizar interações com o potencial periódico da rede cristalina.

**Interação electrão–fonão: Lei de Bloch–Grüneisen.** A resistividade devida a fonões é descrita por [5, 6]:

$$\rho_{\text{fonões}}(T) = C \left( \frac{T}{\Theta_D} \right)^5 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^5}{(e^x - 1)(1 - e^{-x})} dx, \quad (3)$$

onde  $\Theta_D$  é a temperatura de Debye (temperatura característica de um sólido que marca o limite acima do qual todas as vibrações da rede cristalina estão excitadas- comportamento clássico, e abaixo do qual predominam efeitos quânticos na capacidade calorífica) e  $C$  uma constante que depende do material. Assim, para  $T \ll \Theta_D$ ,  $\rho_{\text{fonões}} \propto T^5$ ; para  $T \gg \Theta_D$ ,  $\rho_{\text{fonões}} \propto \alpha_\rho T$ ,  $\alpha_\rho$  é o coeficiente associado à variação intrínseca da resistividade com  $T$  (espalhamento electrão–fonão). A resistividade total é

$$\rho(T) = \rho_0 + \rho_{\text{fonões}}(T), \quad (4)$$

com  $\rho_0$  a resistividade residual (devida a impurezas e defeitos).

**Resistência Elétrica.** A resistência elétrica  $R$  é medida experimentalmente em função da temperatura  $T$  e depende da resistividade  $\rho(T)$ , do comprimento  $L$  do condutor e da área da sua secção transversal  $A$ :

$$R(T) = \rho(T) \frac{L(T)}{A(T)}. \quad (5)$$

**Dilatação térmica e coeficientes  $\alpha$ .** As dimensões do condutor variam com a temperatura devido à dilatação linear, caracterizada pelo coeficiente  $\alpha_L$ :

$$L(T) = L_0[1 + \alpha_L(T - T_0)], \quad A(T) = A_0[1 + 2\alpha_L(T - T_0)], \quad (6)$$

daqui resulta

$$\frac{L(T)}{A(T)} \approx \frac{L_0}{A_0} [1 - \alpha_L(T - T_0)]. \quad (7)$$

Logo, a resistência escreve-se (considerando  $T \gg \theta_D$ )

$$R(T) \approx R_0[1 + (\alpha_\rho - \alpha_L)(T - T_0)], \quad (8)$$

onde  $R_0$  é a resistência a  $T = T_0$ ,  $\alpha_\rho$  é o coeficiente associado à variação intrínseca da resistividade com  $T$  (espalhamento electrão-fonão), e  $\alpha$  o coeficiente térmico global da resistência:

$$\alpha \equiv \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} \approx \alpha_\rho - \alpha_L, \quad \alpha_\rho = \alpha + \alpha_L. \quad (9)$$

**Como regra de ordem de grandeza,  $\alpha_\rho \sim 10^{-3}$  e  $\alpha_L \sim 10^{-5}$ , pelo que a dilatação corrige  $\alpha$  em apenas  $\sim 1\text{--}2\%$ , não sendo relevante. Conclui-se que a dependência de  $\rho(T)$  com a temperatura provém essencialmente da interação electrão–fonão.**

Assim, o comportamento final é aproximadamente linear:

$$R(T) \approx R_0[1 + \alpha(T - T_0)]. \quad (10)$$

### 1.3 Condução nos semicondutores

Para um semicondutor intrínseco, a concentração intrínseca de portadores  $n_i(T)$  (número de electrões ou lacunas num semicondutor puro a uma dada temperatura  $T$ ) e a condutividade  $\sigma(T)$  (capacidade do material conduzir corrente eléctrica) são, respectivamente,

$$n_i(T) \propto T^{3/2} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right), \quad \sigma(T) = q(\mu_n n + \mu_p p). \quad (11)$$

Aqui,  $E_g$  é a largura da banda proibida (em joules ou eV),  $k_B$  é a constante de Boltzmann ( $1.38 \times 10^{-23}$  J/K),  $q$  é a carga elementar do electrão ( $1.6 \times 10^{-19}$  C),  $\mu_n$  e  $\mu_p$  são as mobilidades dos electrões e das lacunas, e  $n$  e  $p$  são as concentrações de electrões e lacunas.

No regime intrínseco,  $n = p = n_i(T)$ , pelo que a resistividade decresce exponencialmente com a temperatura [7, 8, 10]. Os valores de densidade de carga para semicondutores intrínsecos, conhecidos como **densidade de portadores intrínsecos** ( $n_i$ ), são extremamente dependentes do material e, especialmente, da temperatura.

Estes valores são a concentração de electrões ( $n$ ) e lacunas ( $p$ ) num semicondutor puro, onde  $n = p = n_i$ .

Semicondutor	$E_g$ em eV	$n_i$ em $\text{cm}^{-3}$
Germânio (Ge)	0.66	$2.4 \times 10^{13}$
Silício (Si)	1.12	$1.0 \times 10^{10}$
Arsenieto de Gálio (GaAs)	1.42	$1.8 \times 10^6$

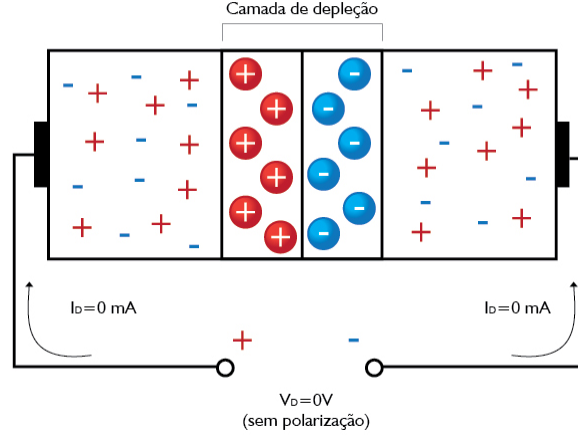


Figura 2: Mecanismos da junção P-N: camada de depleção.

**Dopagem: Modificação Estratégica das Propriedades Eletrônicas** A dopagem é o processo intencional de introduzir impurezas em um semicondutor intrínseco. Ao introduzir impurezas aceitadoras em concentração  $N_A$  ou doadoras em concentração  $N_D$ , obtém-se um semicondutor extrínseco. O objetivo é aumentar a densidade de portadores de carga livres, elevando a condutividade em várias ordens de grandeza.

### Classificação da Dopagem

- **Semicondutor do Tipo N (Negativo):** Dopado com doadores ( $N_D$ ), que libertam elétrons. Os elétrons são os portadores majoritários.
- **Semicondutor do Tipo P (Positivo):** Dopado com aceitadores ( $N_A$ ), que criam lacunas. As lacunas são os portadores majoritários.

**A Junção p-n: A Fundação da Eletrônica** Uma **junção p-n** é formada pela união de um semicondutor do tipo p (concentração de aceitadores  $N_A$ ) com um semicondutor do tipo n (concentração de doadores  $N_D$ ).

No equilíbrio forma-se uma região de depleção de largura  $W(T)$  (zona empobrecida em portadores), um potencial interno  $V_{bi}(T)$  e um campo elétrico interno.

**Largura da depleção.**

$$W(T) = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s(T)}{q} \frac{V_{bi}(T) - V}{N_A + N_D} \left( \frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right)} \quad (12)$$

onde  $\varepsilon_s(T)$  é a permissividade elétrica do semicondutor,  $q$  a carga do elétron,  $V$  a tensão aplicada externamente e  $T$  a temperatura.

O potencial interno é

$$V_{bi}(T) = \frac{k_B T}{q} \ln \left( \frac{N_A N_D}{n_i^2(T)} \right), \quad (13)$$

onde  $n_i(T)$  é a concentração intrínseca de portadores.

A concentração intrínseca é

$$n_i(T) = \sqrt{N_C(T) N_V(T)} \exp \left[ -\frac{E_g(T)}{2k_B T} \right], \quad (14)$$

com  $N_C(T)$  e  $N_V(T)$  as densidades efetivas de estados na banda de condução e de valência:

$$N_C(T) = 2 \left( \frac{2\pi m_e^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2}, \quad N_V(T) = 2 \left( \frac{2\pi m_h^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2},$$

onde  $m_e^*$  e  $m_h^*$  são as massas efetivas do eletrão e da lacuna, e  $h$  é a constante de Planck.

A largura de banda proibida varia com  $T$  pela equação de Varshni:

$$E_g(T) = E_g(0) - \frac{\alpha_V T^2}{T + \beta_V}, \quad (15)$$

com  $E_g(0)$  o banda proibida a 0 K e  $\alpha_V$ ,  $\beta_V$  parâmetros empíricos.

**Corrente inversa numa junção  $p$ - $n$**  Sob polarização inversa  $V_R$ , a corrente é

$$I_R(V_R, T) = - \left[ qA \frac{n_i(T)}{\tau_g(T)} W(V_R) + qA \left( \frac{D_n n_i^2(T)}{L_n N_A} + \frac{D_p n_i^2(T)}{L_p N_D} \right) \right], \quad (16)$$

onde  $A$  é a área da junção,  $\tau_g$  é o tempo de vida de geração,  $D_n$  e  $D_p$  os coeficientes de difusão de eletrões e lacunas, e  $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$  e  $L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$  os comprimentos de difusão (dependentes dos tempos de vida  $\tau_n$  e  $\tau_p$ ).

**Dependência na temperatura** Tendo em conta a equação 16 e simplificando o  $(I_R)$  obtêm-se:

$$I_R(T) \propto e^{-E_g/\eta k_B T} \quad (17)$$

$$\text{onde } \eta = \begin{cases} 1, & \text{difusão,} \\ 2, & \text{geração na depleção.} \end{cases}$$



## 2 Preparação e Montagem

### Material

- Placa de aquecimento
- Gobelé com óleo de silicone
- Termómetro digital com sensor de termopar
- Medidor LCR
- Fonte de tensão DC ( $\pm 15$  V)
- Multímetro digital com escala para microamperes ( $\mu A$ )
- Amostras: enrolamento de fio de cobre e díodo de silício (ex. 1N4007)
- Suportes e cabos de ligação

**Montagem Experimental** A montagem consiste num banho térmico previamente preparado, no qual as duas amostras estão imersas e conectadas aos respetivos conectores. A ligação destes conectores aos instrumentos de medição deve ser efetuada pelo utilizador. O aquecimento é realizado de forma gradual, de modo a garantir o equilíbrio térmico do sistema.

### Nota Importante

É essencial assegurar que o termopar do sistema se encontra posicionado no centro do líquido (óleo de silicone), de forma a garantir que a temperatura medida corresponde efetivamente à temperatura real do banho térmico.

No caso do **díodo**, a medição deve ser realizada no **sentido contrário**, assegurando que se encontra na condição de polarização inversa adequada à experiência.

**Como boa prática de laboratórios de Física, não deve ligar nenhum aparelho até o docente certificar o circuito!!!**

A utilização de um medidor RLC apresenta vantagens relevantes relativamente à medição em corrente contínua (DC). Em primeiro lugar, permite operar fora da região DC/baixas frequências, onde o ruído  $1/f$  é significativamente mais elevado, comprometendo a razão sinal-ruído e aumentando a incerteza na determinação da resistência elétrica. Em segundo lugar, a medição com sinal alternado evita o aparecimento de forças eletromotrizes (efeito de Seebeck) nos contactos, induzidas pela acumulação de cargas e gradientes térmicos locais, fenómeno que tipicamente afeta medições realizadas em regime DC.

No protocolo experimental, ao referir a utilização do medidor RLC, considera-se suficiente indicar que a motivação para esta escolha foi a de aumentar a razão sinal-ruído na determinação da resistência. Quanto ao princípio de funcionamento, pode ser remetido o link que já constava na versão anterior do protocolo.

Importa ainda ter em consideração que o óleo de silicone apresenta uma capacidade calorífica relativamente baixa (cerca de  $1,5\text{--}1,7\text{ J g}^{-1}\text{ K}^{-1}$ ) quando comparado com a água ( $4,18\text{ J g}^{-1}\text{ K}^{-1}$ ). No entanto, devido à sua baixa condutividade térmica e à elevada viscosidade, a dissipação de calor para o meio envolvente é menos eficiente, o que faz com que o óleo de silicone **arrefeça mais lentamente** do que a água.

### 3 Procedimento Experimental

#### Procedimento

1. **Preparação Inicial:** Monte o circuito de acordo com o necessario de forma a ficar idêntico a figura 3.

Certifique-se de que a polarização do díodo é inversa e que os instrumentos estão nas escalas corretas.

2. **Fase de Aquecimento:**

- Ligue a placa de aquecimento e aqueça o óleo lentamente. O aquecimento lento é essencial para que o sistema esteja mais próximo do equilíbrio térmico possível.
- Registe os valores iniciais de temperatura ( $T$ ), resistência ( $R_{Cobre}$ ) e corrente ( $I_{Diodo}$ ) e o tempo (s). Registe os valores de  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) de acordo com o que achar mais acertado.

3. **Fase de Arrefecimento:**

- Quando chegar a cerca de  $70^{\circ}\text{C}$ , desligue o disco e após algum tempo, sem deixar ultrapassar os  $100^{\circ}\text{C}$ , retire cuidadosamente recorrendo as pegas térmicas, o gobelé do disco para a placa de cortiça (bem afastado da placa).
- Continue a registar os valores de  $R_{Cobre}$ ,  $I_{Diodo}$  e o tempo à medida que a temperatura diminui.

4. **Aquecimento rápido**

5. Nesta fase ligue a placa de aquecimento e aqueça o óleo na potência máxima.
6. Registe os valores iniciais de temperatura ( $T$ ), resistência ( $R_{Cobre}$ ) e corrente ( $I_{Diodo}$ ) e o tempo (s). Registe os valores de  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) de acordo com o que achar mais acertado.

### 4 Análise de Dados e Questões de Discussão

1. **Análise do Fio de Cobre:**

- Crie um gráfico da **resistência** ( $R_{Cobre}$ ) em função da **temperatura** ( $T$ ) em graus Celsius.

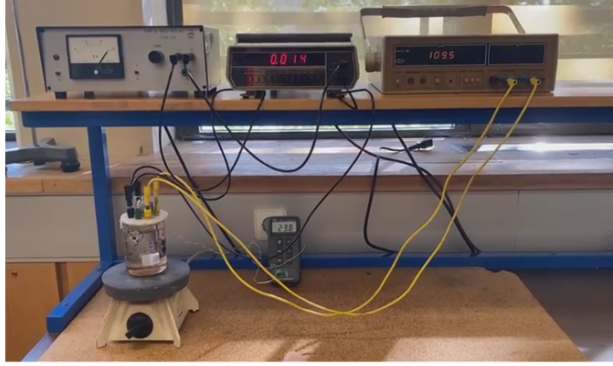


Figura 3: Figura ilustrativa da montagem experimental a realizar.

- Ajuste uma linha reta a estes dados e determine o declive e a ordenada na origem.
- Calcule o **coeficiente de temperatura da resistência**,  $\alpha$ .
- Para a resistividade devida aos fonões ( $\rho_{\text{fonões}}$ ), use o modelo de Bloch-Grüneisen (Equação (3)) e o valor de referência para a temperatura de Debye do cobre,  $\Theta_D \approx 343$  K e simule a curva esperada.
- Discuta a validade do modelo de Bloch-Grüneisen, comparando a curva de resistência experimental com a curva teórica simulada. Analise em que regimes de temperatura (alta ou baixa) o modelo se alinha mais com os seus dados.
- compare e comente os resultados obtidos quer no aquecimento lento vs arrefecimento, e o aquecimento rápido vs aquecimento lento.
- Utilizando um multímetro portátil de mão meça diretamente a resistência do fio de cobre e discuta o resultado obtido com o sistema RC.

## 2. Análise do Díodo Semicondutor:

- Represente graficamente a dependência na temperatura e os resultados obtidos. Comente os resultados.
- Calcule a **largura da banda proibida (banda proibida)**  $E_g$  do semicondutor.
- Compare o valor de  $E_g$  obtido com o valor de referência para o silício. Discuta estes resultados.

## 5 Relevância e Implicações Tecnológicas

A fenomenologia termorresistiva observada em metais e semicondutores não se restringe ao domínio da física teórica. A sua compreensão e manipulação constituem a base para o desenvolvimento e otimização de uma vasta gama de dispositivos e sistemas de alta tecnologia, impactando diretamente a engenharia e a eletrônica moderna.

### 5.1 Implicações Tecnológicas em Metais

A dependência linear e previsível da resistividade de um metal com a temperatura é uma propriedade intrínseca que é aproveitada para calibração e detecção de alta precisão.

- **Sensores de Temperatura de Elevada Precisão (RTDs):** Sensores de platina (Pt100, Pt1000) e outros metais são usados como **RTDs** (*Resistance Temperature Detectors*) em ambientes onde é necessária uma precisão e estabilidade térmica superiores. A sua aplicação abrange a indústria aeroespacial, a calibração de equipamentos científicos e o controle de processos em reatores nucleares e em criogenia, onde a linearidade da resistência é um parâmetro crítico.
- **Gestão Térmica de Dispositivos:** O conhecimento do aumento da resistência em condutores é vital no projeto de sistemas de **gestão térmica**. Em processadores de computadores (CPUs) e GPUs de alto desempenho, a resistência das interconexões metálicas aumenta com a temperatura, afetando a velocidade do sinal. O monitoramento da resistência, por conseguinte, é um método de diagnóstico térmico para evitar o sobreaquecimento e garantir a fiabilidade operacional do dispositivo.

### 5.2 Implicações Tecnológicas em Semicondutores

O comportamento exponencial da condutividade de um semicondutor com a temperatura é o que define as suas aplicações mais sofisticadas, mas também impõe os maiores desafios em termos de projeto e engenharia.

- **Dispositivos de Potência:** A corrente de saturação inversa (corrente de fuga), que aumenta exponencialmente com a temperatura, é um parâmetro crítico em dispositivos de potência como **MOSFETs** e **IGBTs**. Em aplicações de alta tensão e corrente, o aumento da temperatura pode levar ao *thermal runaway*, um fenómeno de instabilidade em que o aumento da temperatura gera mais corrente de fuga, que por sua vez gera mais calor, resultando na falha catastrófica do componente. A engenharia de potência dedica um esforço substancial para mitigar esta dependência.

- **Optoeletrônica:** A energia do banda proibida ( $E_g$ ) de semicondutores como o arsenieto de gálio (GaAs) e o nitreto de gálio (GaN) é a base de funcionamento de **diodos emissores de luz (LEDs)** e de **diodos laser**. A temperatura afeta diretamente a energia do banda proibida, alterando a cor (comprimento de onda) e a eficiência luminosa do dispositivo. A gestão térmica é, portanto, essencial para manter a estabilidade de cor em ecrãs de alta definição e a precisão de feixes laser em sistemas de comunicação por fibra ótica.
- **Sensores MEMS:** Em sistemas microeletromecânicos (**MEMS**), a variação térmica de um semiconductor é usada para criar sensores. Por exemplo, em sensores de fluxo de ar, micro-resistências de silício são usadas como elementos de aquecimento e de detecção para medir a velocidade do ar com base na dissipação de calor. Esta capacidade de integração funcional a nível microscópico demonstra o elevado controlo que se alcançou sobre as propriedades térmicas dos semicondutores.

## Referências

- [1] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 8th ed., Wiley, 2005.
- [2] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Holt-Saunders, 1976.
- [3] P. Drude, “Zur Elektronentheorie der Metalle,” *Annalen der Physik* 306 (1900) 566–613.
- [4] A. Sommerfeld, “Zur Elektronentheorie der Metalle auf Grund der Fermischen Statistik,” *Zeitschrift für Physik* 47 (1928) 1–32.
- [5] F. Bloch, “Zum elektrischen Widerstandsgesetz bei tiefen Temperaturen,” *Zeitschrift für Physik* 59 (1930) 208–214.
- [6] E. Grüneisen, “Theorie des elektrischen Widerstandes in Metallen,” *Annalen der Physik* 408 (1933) 530–540.
- [7] S. M. Sze, K. K. Ng, *Physics of Semiconductor Devices*, 3rd ed., Wiley, 2006.
- [8] B. G. Streetman, S. Banerjee, *Solid State Electronic Devices*, 7th ed., Pearson, 2015.
- [9] S. M. Sze, *Semiconductor Devices: Physics and Technology*, 2nd ed., Wiley, 2001.
- [10] D. A. Neamen, *Semiconductor Physics and Devices*, 4th ed., McGraw-Hill, 2012.

## 6 Anexo

Por que um Medidor em Corrente Alternada?