EL TRIANGULO RECTANGULO A MI MANERA

La trigonometría es básicamente el estudio de las razones trigonométricas dentro de la circunferencia de radio 1, llamada Circunferencia Goniométrica, Trigonométrica, o simplemente, Circunferencia Unitaria. Y una parte importante de la trigonometría radica en el estudio del triángulo rectángulo.

Desde pequeños hemos aprendido que para resolver cualquier triángulo rectángulo es necesario conocer las medidas de al menos dos de sus elementos. Dos lados, o un lado y un ángulo. La teoría es bien sencilla, y sus fórmulas nada complejas. Además, todas las razones trigonométricas se representan en el triángulo rectángulo de manera muy evidente. ¿Por qué resulta entonces tan complicado para muchos alumnos? Creo que el lenguaje matemático que se emplea es demasiado oscuro y cerrado para la mayoría de los mortales y cuajaría mucho mejor si se enseñara de otra manera. Ese es, en parte, el objeto de este trabajo: explicar las razones trigonométricas y el triángulo rectángulo desde otro punto de vista, más amable y sencillo y enseñar gráficamente de dónde salen sus fórmulas.

Cuando hablamos de senos, cosenos o tangentes, a los detractores de las matemáticas en seguida les deriva la mente hacia intricados recovecos pitagóricos. Aunque sencillas, son muchas las fórmulas a memorizar. Pero cuando sabemos por qué existen, de donde salen, y podemos ubicarlas en un dibujo, son mucho más fáciles de retener.

Empezaremos por rememorar ángulos y razones trigonométricas. Después resolución sencilla de triángulos rectángulos. Finalmente, me tomaré la licencia de trabajar con subdivisiones del triángulo rectángulo para intentar mostrar de dónde surgen las fórmulas e identidades más comunes.

1 ANGULOS Y RAZONES

Para trabajar con los ángulos y hallar las razones trigonométricas, así como para el resto del estudio, emplearemos siempre la circunferencia unitaria, la de radio 1.

Me imagino que los matemáticos de la antigüedad tenían la necesidad de determinar la medida de la amplitud del ángulo y la longitud de su foco para realizar todo tipo de mediciones, y por ello idearon las razones trigonométricas. Veamos las figuras siguientes:

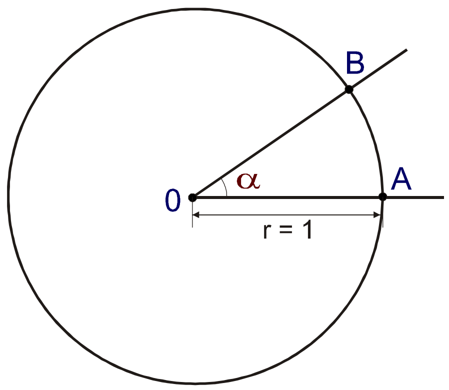


Figura 1 - A

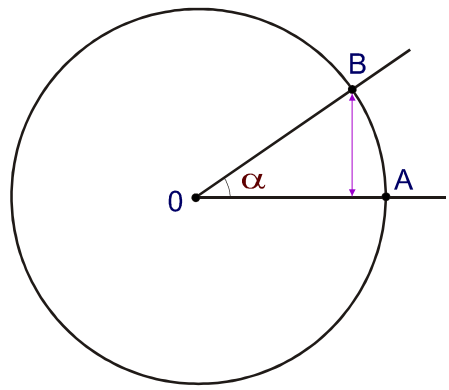


Figura 1 - B

Los dos segmentos que forman el ángulo α cortan a la circunferencia unitaria en los puntos A y B. Me imagino que una de las medidas que interesaban era saber ¿para el ángulo α, a qué altura se encuentra el punto B sobre el segmento $\overline{0A}$? Entonces se dieron cuenta que aunque el segmento $\overline{AB}$ de la figura 2 – A variaba dependiendo de la medida de la circunferencia, para un mismo ángulo, su proporción respeto de $\overline{0A}$ siempre era la misma. Por ejemplo, *suponga* que con el ángulo α el segmento $\overline{AB}$ mide 0,4. Significa que $\overline{AB}$ es una 0,4^{ava} parte de $\overline{0A}$, o sea, un 40% más pequeño. Si dibujamos la circunferencia con **radio 3**, todo se amplifica 3 veces, como un zoom. Luego, para el mismo ángulo α, ahora, $\overline{AB}$ mediría 1,2. La proporción de $\overline{AB}$ respecto de $\overline{0A}$ será: 1,2 / 3 = 0,4 es decir, $\overline{AB}$ sigue siendo un 40% más pequeño que $\overline{0A}$. A esa proporción, coeficiente, escala o razón, le dieron nombre. La llamaron: **SENO del ángulo**.

Así pues, el seno de un ángulo no es más que la proporción, o razón, entre ese segmento vertical respecto del segmento base, para el arco de circunferencia definido por ese ángulo. Es decir, ¿cómo de pequeño es $\overline{AB}$ respecto de $\overline{0A}$ para ese ángulo? Y, cuando decimos que seno de 40º vale 0,642, estamos diciendo que, para un ángulo de 40º, $\overline{AB}$ es el 64,2% de $\overline{0A}$ independientemente de lo que mida el radio. Luego, si nos dicen que ahora el radio mide 7,23 metros, sabremos que el punto B se encontrará a de 7,23 x 0,642 = 4,64 metros de altura respeto de $\overline{0A}$. Pero, a qué distancia de 0, en horizontal, está el punto B? Para ello está el **COSENO del ángulo**.

Vea las figuras siguientes:

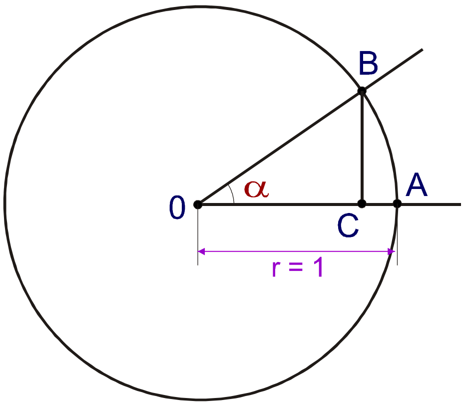


Figura 2 - A

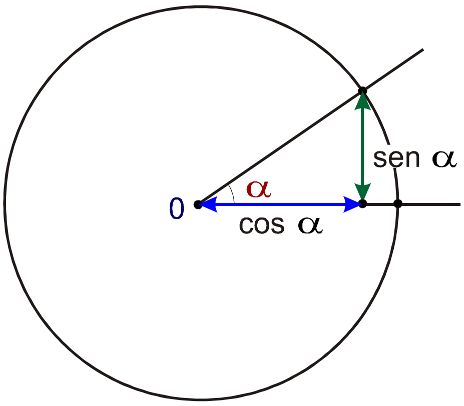


Figura 2 - B

El segmento $\overline{0C}$ es el coseno de α. Éste nos indica cómo de pequeña es la distancia $\overline{0C}$ respecto del radio $\overline{0A}$ para ese ángulo. Si nos dicen que ese coseno vale 0,8, nos estarán diciendo que esa distancia es el 80% del radio, es decir la 0,8^{ava} parte de $\overline{0A}$ para el ángulo α. Si el radio vale 7,23 metros, entonces sabremos que $\overline{0C}$ mide 7,23 x 0,8 = 5,784 metros.

Luego, para medir alguna de esas distancias, no hay más que determinar cuánto vale el ángulo, y multiplicar el radio por la razón correspondiente puesto que ambos lados son proporcionales a dicho radio. El valor de cada razón se recoge en tablas, aunque hoy día con las calculadoras y los ordenadores ya no es necesario recurrir a ellas.

Ojo, hemos hablado de distancia en horizontal. Pero el punto B, en realidad, respeto de 0 está a una distancia absoluta $\overline{0B}$. Pero, si se fija, $\overline{0B}$ es otro radio de la circunferencia. La distancia real de B respecto de 0 será lo que mida el radio, pero en horizontal, será '*radio x coseno*'.

En realidad, todo esto de los antiguos matemáticos es una historia que me he inventado. De hecho, la distancia $\overline{CA}$ se denomina Verseno y en la antigüedad era una razón trigonométrica muy importante; especialmente en navegación.

Por otra parte, cuando hay que medir la altura de un edificio, una estatua, un acantilado, etc., los senos y cosenos son un poco engorrosos, pues es más fácil medir la distancia desde la que nos encontramos hasta el objeto cuya altura queremos averiguar, que tener que calcular un radio, a partir de esa distancia, y después hallar la altura mediante el seno. Lo mejor para esa tarea, es calcular la altura utilizando la **Tangente del ángulo**. Vea las figuras siguientes.

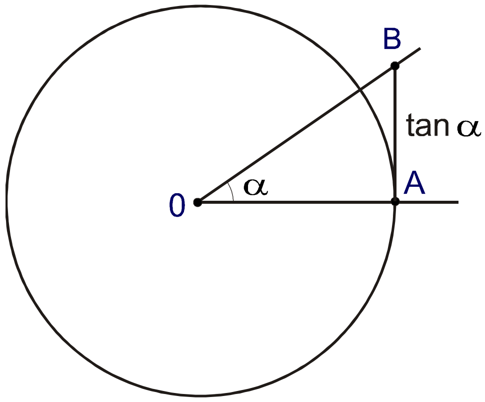


Figura 3 - A

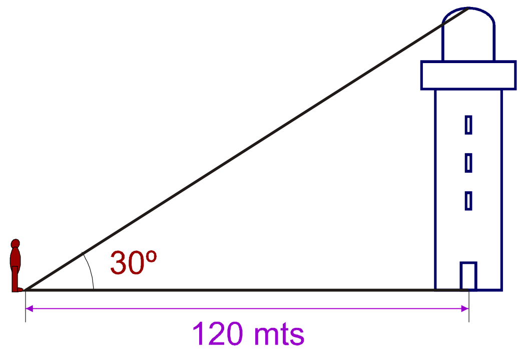


Figura 3 - B

La tangente del ángulo α es la recta $\overline{AB}$ de la figura 3 – A y, como las razones trigonométricas anteriores, también se mide comparándola con la longitud del radio. Nos dice a qué altura está *B* respecto de la base, como el seno, pero medida en la tangencial de la circunferencia, en el extremo del radio. Si nos dicen que la tangente de ese ángulo es 0,6 significa que ese segmento mide el 60% del radio. Y si ese radio midiera 3, entonces $\overline{AB}$ mediría 3 x 0,6 = 1,8. Note que 1,8 sigue siendo el 60% de 3. Nos centramos ahora en la figura 3 – B. Por un lado, la tangente de 30º es 0,577; como el radio, es decir la distancia del observador al centro de la base del edificio, es de 120 metros, entonces la altura del faro será 120 x 0,577 = 69,24 metros. Matemáticamente se escribiría:

$$Altura = 120 \cdot \tan\alpha = 120 \cdot 0{,}577 = 69{,}24 \text{ Muy fácil!}$$

Por cierto, $tan = sen/cos$. Significa que además de con el radio, la tangente se puede medir a partir del seno o del coseno. Si se fija, es como si fuera el seno pero a otra escala. Por semejanza de triángulos, la tangente tiene la misma proporción respecto del radio que el seno respecto del coseno.

Otra razón trigonométrica fundamental es la **Secante del ángulo**. En la figura 3 – B sería la distancia desde los pies del observador a lo más alto del faro. Como verá, radio, tangente y secante forman un triángulo rectángulo. También existen las razones inversas: Cotangente y Cosecante.

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \qquad \text{La Cotangente es la inversa de la Tangente.}$$

$$\operatorname{csec}\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \qquad \text{La Cosecante es la inversa de la Secante.}$$

Por último, están las razones trigonométricas que no se suelen dar en la escuela: El Verseno, que ya hemos visto, el Coverseno, la Exsecante, o Secante Externa, y la Excosecante, o Cosecante Externa. También es habitual utilizar el Semiverseno y el Semicoverseno que son la mitad de Verseno y Coverseno respectivamente.

En las figuras 4 – A y 4 – B de la página siguiente, represento todas estas razones para que las ubiquen fácilmente.

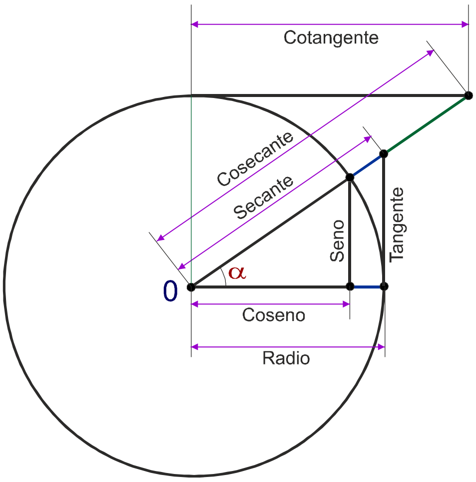


Figura 4 - A

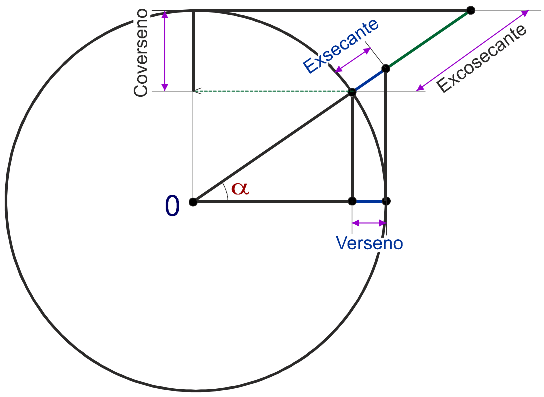


Figura 4- B

$\text{versen}\,\alpha$	$= 1 - \cos\alpha$	El verseno es la diferencia entre la longitud del radio y el coseno.
$\text{coversen}\,\alpha$	$= 1 - \text{sen}\,\alpha$	El coverseno es la diferencia entre la longitud del radio y el seno.
$\text{exsec}\,\alpha$	$= \sec\alpha - 1$	La exsecante es la parte de la secante que sale fuera del circulo.
$\text{excsec}\,\alpha$	$= \text{csec}\,\alpha - 1$	La excosecante es la parte de la cosecante que sale fuera del circulo.

A los matemáticos, todas estas magnitudes les gusta representarlas mediante la figura 5.

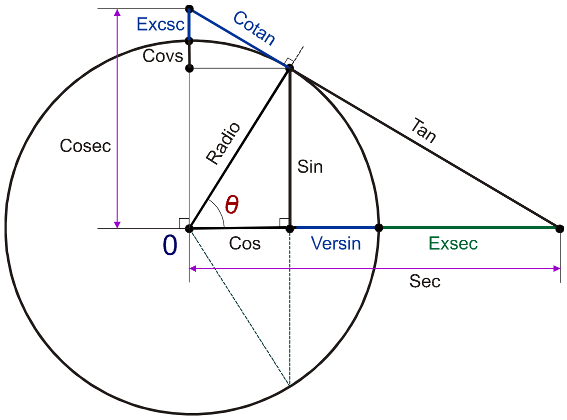


Figura 5

A primera vista, en esta última representación, se pueden observar algunas curiosidades.

a) Algunas magnitudes, como la tangente y la cotangente se han dibujado en ubicaciones distintas. En esta última figura aparecen correlativas, en la misma recta. No obstante, tangente y cotangente siguen siendo tangentes a la circunferencia, y, radio, tangente y secante siguen formando el mismo triángulo rectángulo que en la figura 4 – B, aunque en otra disposición. Sus medidas son exactamente las mismas puesto que son razones trigonométricas, es decir que están siempre en la misma proporción respecto del radio.

Particularmente, estoy más familiarizado con mi representación de las figuras 4 – A y 4 – B. Asimismo, en mis esquemas, las magnitudes más conocidas pertenecen todas al mismo triángulo rectángulo. Además, el propósito primordial de este trabajo es esa figura, el triángulo rectángulo, por lo que me basaré en esas figuras en lugar de en la matemática formal.

b) Últimamente, el ángulo se suele representar mediante la letra griega θ. A los matemáticos les gusta etiquetar los ángulos con letras poco conocidas por el común de los mortales, para no confundirse con letras latinas. Sin embargo, a mí me enseñaron con las letras α y β, que son más cercanas y parecidas a las nuestras, y por eso las sigo utilizando.

CONCLUSIÓN

El ángulo es el dato más importante de todo este capítulo. El ángulo determina el arco de circunferencia en el que se van a definir las razones trigonométricas más importantes, seno, coseno, verseno, secante y tangente, y con estas se calculan las demás. No es lo mismo el ángulo de 30º que el de 40º, pero cuando se opta por un ángulo determinado, todas las razones trigonométricas que le pertenecen permanecen constantes independientemente de la longitud del foco *(radio)*.

Las razones trigonométricas no son líneas rectas, son conceptos, proporciones abstractas que se suelen representar físicamente mediante segmentos rectos: generalmente, los lados de un triángulo rectángulo. Por ejemplo, el seno no es la recta vertical opuesta al vértice del ángulo en cuestión, es la proporción entre esa recta y el radio de la circunferencia en términos unitarios, pero se representa con esa recta porque, en la circunferencia trigonométrica, al ser de radio 1, esa recta mide exactamente Seno del ángulo. Igual ocurre con todas las demás razones trigonométricas.

Para un mismo ángulo, sus razones trigonométricas siempre tendrán el mismo valor, las dibujes como las dibujes y donde las dibujes. Más adelante veremos, por ejemplo, que seno y coseno pueden dibujarse en otro lugar dentro del mismo triángulo rectángulo de la figura 4 – A. También veremos que algunas razones trigonométricas pueden formularse de otra manera, aunque sus magnitudes sean las mismas.

2 EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Hemos visto que en el área que abarca el arco de circunferencia definida por un ángulo cualquiera, se pueden construir dos triángulos rectángulos concretos. Dos triángulos rectángulos formados por la representación, en forma de segmentos rectos, de las principales razones trigonométricas derivadas de ese ángulo.

El resto del estudio va a tratar fundamentalmente de triángulos rectángulos, por ello, y para facilitar el trabajo y la comprensión, voy a definir nombres para cada parte del triángulo rectángulo. Así, siempre que tenga que mencionar uno de sus componentes los llamaré por el nombre que aquí les voy a dar. Es más fácil referirse a un elemento por su nombre que tener que explicar cada vez cuál es su ubicación. Además, procuraré siempre dibujar el triángulo rectángulo en la misma posición que en la figura 6 y, cuando su base mida 1, me referiré a él como *TRIANGULO RECTÁNGULO UNITARIO, o simplemente* ***TRIÁNGULO UNITARIO*** o ***EL UNITARIO*** sin más.

Veamos en la figura 6 en cuántas partes descompongo el triángulo rectángulo y cómo voy a llamar cada parte:

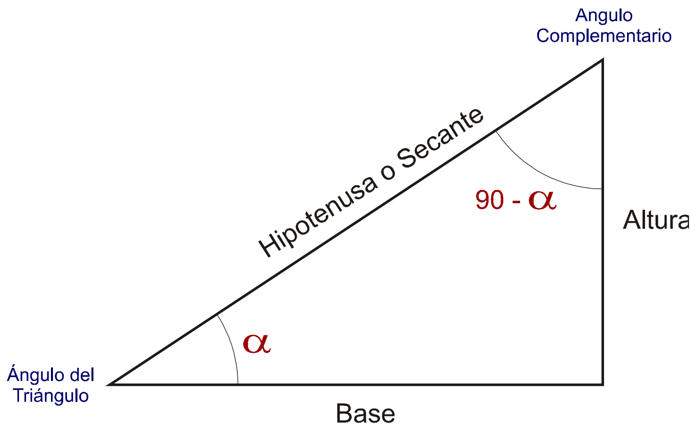


Figura 6

Convendrá que son nombres que ya se utilizan con normalidad en trigonometría. A los segmentos que normalmente llaman catetos, los denomino Base y Altura para evitar confusiones entre ellos, y a la Hipotenusa la llamaré a veces Secante, especialmente cuando la Base se corresponda al radio de la circunferencia.

Al ángulo inferior izquierdo lo llamaré Ángulo del triángulo rectángulo, o simplemente **ÁNGULO**, y le daré el valor α; también daré por sentado que su vértice es el centro de una circunferencia que a veces será de radio Base y otras de radio Secante. Al ángulo complementario lo representaré como $90 - \alpha$. Finalmente, utilizaré siempre grados sexagesimales porque los radianes, fracciones de π, son más complicados de manejar para los neófitos.

Por último, voy a exponer un aspecto novedoso de los triángulos rectángulos que puede que genere cierta polémica. En ellos siempre hay dos ángulos agudos, que, si no miden ambos 45º, siempre hay uno que es más pequeño que el otro. El más pequeño será el **Ángulo** con mayúscula, el que dé nombre al triángulo rectángulo, porque considero que es el gen de la figura, el que le da todas sus proporciones. Por eso, si hablo del triángulo de 38º, me estaré refiriendo al triángulo rectángulo cuyo ángulo agudo más pequeño mide 38º, y convendré dibujar el triángulo rectángulo con la base en la parte inferior y la altura a la derecha.

Gracias a este axioma puedo encuadrar el conjunto de triángulos rectángulos en clases de equivalencia, y cuando hable del triángulo de 38º, estaré refiriéndome al conjunto de todos los triángulos rectángulos de Ángulo 38º, y a ese conjunto lo representaré mediante el Triángulo Unitario de la clase. Se deriva de este concepto que, en mi opinión, sólo existen los triángulos rectángulos de 45 o menos grados. Los demás no son ni semejantes, son los mismos. Por ejemplo, para mí, no existe el triángulo rectángulo de 52º, es el de 38º, porque si dibujo un triángulo rectángulo que uno de sus ángulos mida 52º, el ángulo complementario medirá 90 – 52 = 38º, será el más pequeño y dará nombre a ese triángulo rectángulo. No sería el triángulo rectángulo con un ángulo de 52º sino el Triángulo Rectángulo 38º. Esto no impide que se pueda trabajar con las razones trigonométricas del ángulo de 52º o las del de 123º.

Para resolver cualquier triángulo rectángulo, lo haré siempre considerando su Ángulo. El otro, el complementario, está implícito en su medida puesto que vale 90 – Ángulo, de la misma manera que siempre conocemos el de 90º puesto que está implícito en el propio concepto de triángulo rectángulo. Así, cuando definimos el Ángulo de cualquier triángulo rectángulo, estamos a la vez definiendo su complementario.

3 RESOLUCION DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Como apuntábamos al principio, para resolver cualquier triángulo rectángulo necesitamos conocer dos de sus medidas: dos lados cualesquiera, o un lado y el Ángulo. Del capítulo anterior se desprende que no me sirve conocer sólo los dos ángulos agudos, puesto que son el mismo concepto.

A) Si nos dan la medida de dos de sus lados, basta con aplicar el Teorema de Pitágoras de la raíz cuadrada de la suma de cuadrados.

Si nos dan Base y Altura: $Hipotenusa = \sqrt{Base^2 + Altura^2}$

Si nos dan Hipotenusa y Altura: $Base = \sqrt{Hipotenusa^2 - Altura^2}$

Si nos dan Hipotenusa y Base: $Altura = \sqrt{Hipotenusa^2 - Base^2}$

B) Si nos dan el Ángulo y un lado, entonces consideraremos que nuestro triángulo es alguno de los dos triángulos rectángulos vistos en capítulos anteriores. Para ello distinguiremos entre el triángulo rectángulo **INSCRITO** en la circunferencia (figura 7 – A), y el triángulo rectángulo **CIRCUNSCRITO** a la circunferencia (figura 7 – B).

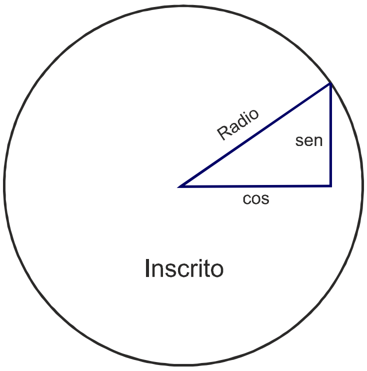


Figura 7 - A

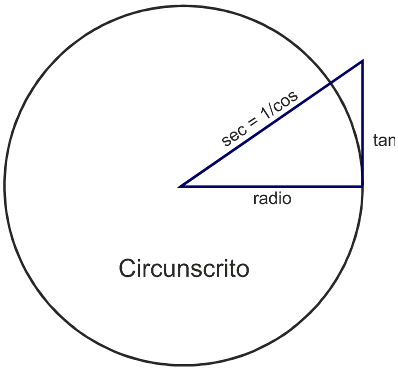


Figura 7- B

Comprobará que en el primer dibujo el radio es la hipotenusa y en el segundo es la base. Cuando nos faciliten las dos medidas, una será el Ángulo y la otra uno de los lados. Si el lado conocido es la hipotenusa, resolveremos el triángulo rectángulo considerando que se trata de uno ***Inscrito***. Si conocemos la base, que es el ***Circunscrito***. Si nos dan la altura, entonces consideraremos que el lado cuya medida queremos averiguar es el radio del ***Inscrito*** si queremos averiguar la hipotenusa, o el radio del ***Circunscrito*** si buscábamos la medida de la base.

Conocemos la Base: Entonces supondremos que la base es el radio de la circunferencia a la que se circunscribe, figura 7 – B, la altura es la tangente y la hipotenusa la secante. Como el radio vale 1 entonces:

$Altura = tan\ \alpha$
$Hipotenusa = sec\ \alpha$ particularmente prefiero: $Hipotenusa = 1/cos\ \alpha$

Conocemos la Hipotenusa: Entonces consideramos que la hipotenusa es el radio de la circunferencia en la que se inscribe, figura 7 – A, la altura es el seno y la base el coseno. Como el radio vale 1 entonces:

$Base = cos\ \alpha$
$Altura = sen\ \alpha$

Conocemos la Altura: Como la atura, a veces es la tangente y veces el seno, si queremos averiguar la base, entonces consideraremos que la base es el radio del circunscrito y despejamos la altura de: $Altura = Base \cdot tan\ \alpha$. Si queremos conocer la hipotenusa entonces consideramos que la hipotenusa es el radio del inscrito y despejamos la altura de: $Hipotenusa = Altura \cdot$ sen α. los cálculos serían:

$Base = Altura\ /\ tan\ \alpha$
$Hipotenusa = Altura\ /\ sen\ \alpha$

Pero, normalmente trabajamos con triángulos rectángulos más grandes o más pequeños que el unitario.

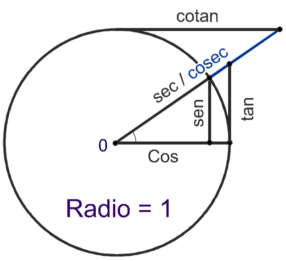


Figura 8 - A

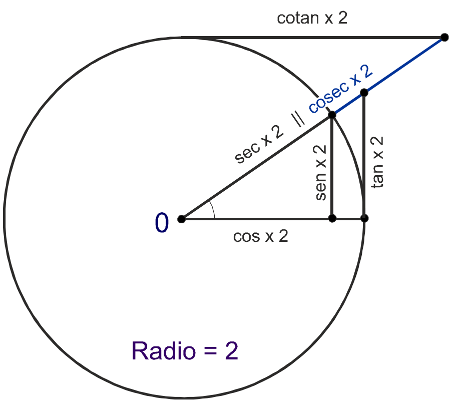


Figura 8 - B

En estos casos, es como si fueran el triángulo unitario, pero ampliado o reducido de acuerdo a la medida de cada radio, como si hiciéramos ±zoom sobre él y todas sus medidas se multiplican por la medida del radio, como intentos reflejar en la figura 8.

De acuerdo a esta nueva información, las fórmulas anteriores quedarían como sigue:

Conocemos la Base: $Altura = radio \cdot tan\ \alpha$
$Hipotenusa = radio \cdot sec\ \alpha$ ó $Hipotenusa = radio\ /cos\ \alpha$

Conocemos la Hipotenusa: $Base = radio \cdot cos\ \alpha$
$Altura = radio \cdot sen\ \alpha$

Conocemos la Altura: $Base = Altura\ /\ tan\ \alpha$
$Hipotenusa = Altura\ /\ sen\ \alpha$

Observará que las dos últimas fórmulas son las mismas que antes. Eso es porque la altura nunca puede ser un radio, pero su medida si es proporcional al radio: $Altura = radio \cdot tangente$, o, $Altura = radio \cdot sen\ \alpha$. El radio está implícito en la medida de la Altura.

Ejemplo: Nos dicen que en un triángulo rectángulo de Ángulo 32º, su base mide 8 metros. Calcular los otros dos lados.

Como conocemos la Base, consideramos que se trata de un triángulo rectángulo circunscrito en una circunferencia de 8 metros de radio. Calculamos la altura multiplicando el radio, es decir la base, por la tangente de 32º: $\text{Altura} = 8\ \text{X}\ 0{,}625 = 5\ \text{metros}$.

Después calculamos la hipotenusa multiplicando el radio por la secante pero, como prefiero llamarla $1/cos$: dividiendo el radio, o sea la Base, por el coseno de 32º y resulta:
$\text{Hipotenusa} = 8\ /\ 0{,}848 = 9{,}434\ \text{mts}$.

Si en lugar de la base nos dan: hipotenusa = 10 metros. Pues consideramos que se trata de un triángulo rectángulo inscrito de radio 10 metros. Base y Altura se calcularán respecto de la secante: $\text{Base} = \text{secante} \cdot \cos 32º = 10 \cdot 0{,}848 = 8{,}48\ \text{mts y,}$
$\text{Altura} = \text{secante} \cdot \text{seno } 32º = 10 \cdot 0{,}53 = 5{,}3\ \text{mts}$

Como puede constatar, los lados se calculan respecto del radio, que en realidad es la Base o la Secante según nos convenga.

4 SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Cuando dos triángulos rectángulos tienen el mismo Ángulo, se dice que son semejantes, y entonces, "por semejanza de triángulos" se pueden hallar las medidas de uno de ellos cuando conocemos las del otro, con una sencilla regla de tres. Por cierto: *Todos los triángulos rectángulos de una misma clase de equivalencia son semejantes*.

Cuando dos triángulos rectángulos son semejantes, la proporción entre sus medidas se mantienen constantes en ambos triángulos y entre sí. Me explico: Si en un triángulo rectángulo la hipotenusa es tres veces su base, en el triángulo semejante su hipotenusa también será tres veces su propia base. Pero, además, si la hipotenusa del primero es la mitad de la del segundo, la base del primero también será la mitad de la base del segundo.

De esta manera, si conocemos alguna medida de un triángulo rectángulo, y al menos una medida del segundo, podremos calcular las que le faltan al segundo gracias a las del primero, puesto que son proporcionales.

Por ejemplo, si conocemos la base del segundo y queremos hallar su altura, diremos que la altura del segundo es a la base del segundo como la altura del primero es a la base del primero, y se escribe: $\frac{\textbf{Altura del segundo}}{\textbf{Base del segundo}} = \frac{\textbf{Altura del primero}}{\textbf{Base del primero}}$

Se resolvería despejando: $\textbf{Altura del segundo} = \frac{\textbf{Base del segundo} \cdot \textbf{Altura del primero}}{\textbf{Base del primero}}$

Por ejemplo, si consideramos que el primer triángulo rectángulo es el Unitario Inscrito y que el segundo es el Unitario Circunscrito, nos fijamos en la figura 7 y, sustituyendo el valor del radio correspondiente, nos dará: $tan\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$

Si hacemos lo mismo con la hipotenusa del segundo, obtendremos:

$$\frac{Secante\ del\ segundo}{Base\ del\ segundo} = \frac{Secante\ del\ primero}{base\ del\ primero} \quad => sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$$

A partir de ahora, cuando me refiera a la Secante, normalmente utilizaré: $\frac{1}{cos\ \alpha}$

Finalmente, si calculamos la hipotenusa con el Teorema de Pitágoras obtenemos:

$$Secante = \sqrt{Base^2 + Altura^2} \quad => \quad Sec\ \alpha = \sqrt{1 + tan^2\alpha}$$

RESUMEN

Hasta ahora hemos dado medida a los lados de los triángulos rectángulos unitarios, pero en cualquier otro triángulo rectángulo, cuando no calculamos un lado respecto de la altura, dichas medidas se aplican multiplicando las unitarias por el radio.

Calculo de la Altura	En el triángulo Inscrito:	$Altura = Radio \cdot sen\ \alpha$
	En el triángulo Circunscrito:	$Altura = Radio \cdot tan\ \alpha$
Calculo de la Base	En el triángulo Inscrito:	$Base = Radio \cdot cos\ \alpha$
	En el triángulo Circunscrito:	$Base = Altura/tan\ \alpha$
Calculo de la Hipotenusa	En el triángulo Inscrito:	$Secante = Altura/sen\ \alpha$
	En el triángulo Circunscrito:	$Secante = Radio/cos\ \alpha$

Hemos insistido que en las fórmulas en las que hay que utilizar la altura para resolverlas no empleamos el radio puesto que viene implícito: $Altura = radio \cdot tan\ \alpha$, ó $Altura\ = radio \cdot sen\ \alpha$ dependiendo de si utilizamos el radio de la circunferencia circunscrita o la inscrita respectivamente. Pero, resulta que en la base, o en la hipotenusa, el radio unitario también está implícito en su medida. Luego, para los cálculos no es necesario mencionar el radio, ni con qué circunferencia estamos trabajando, sólo el lado respecto del que se va a calcular. Por eso, siempre que necesite hallar la medida de cualquier lado procuraré decir: "*respeto del lado conocido, el lado desconocido mide tanto*". Las fórmulas generales quedarán definitivamente como sigue:

Calculo de la Altura	Respecto de la Base:	1º) $Altura = Base \cdot tan\ \alpha$
	Respecto de la Secante:	2º) $Altura = Secante \cdot sen\ \alpha$
Calculo de la Base	Respecto de Secante:	3º) $Base = Secante \cdot cos\ \alpha$
	Respecto de la Altura:	4º) $Base = Altura\ /\ tan\ \alpha$
Calculo de la Secante	Respecto de la Altura:	5º) $Secante = Altura\ /\ sen\ \alpha$
	Respecto de la Base:	6º) $Secante = Base\ /\ cos\ \alpha$

Observe que en cada fórmula interviene el lado respecto del cual queremos extraer el valor que buscamos. Por eso, conociendo el Ángulo y un lado podemos calcular los otros dos lados respecto del conocido, pues será proporcional a éste de acuerdo a las razones trigonométricas de Ángulo. Y, entre otras cosas, para eso sirven las razones trigonométricas, para saber cuánto mide un lado desconocido con relación a otro conocido. Esas son las fórmulas que normalmente nos enseñan en la escuela. Ya sabemos de dónde vienen, cómo podemos llegar hasta ellas y porqué se expresan así. Ahora vamos a ver cómo se utilizan.

Antes de empezar, recuerden, siempre que hable de **Triángulo Unitario,** o de **"el Unitario"**, si no indico otra cosa, me estaré refiriendo al **TRIÁNGULO RECTÁNGULO CIRCUNSCRITO DE BASE 1**.

CASO PRÁCTICO

Vamos a tratar de poner en práctica todos estos conceptos de una manera sencilla. Empezaremos dibujando un triángulo unitario, y desde el vértice del ángulo recto trazamos una perpendicular a la hipotenusa (figura 9 – A). Vamos a tratar de saber cuánto mide.

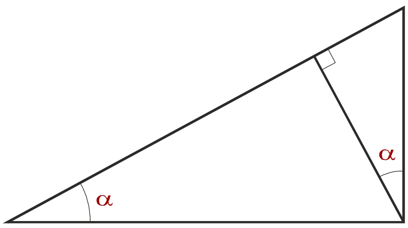


Figura 9 - A

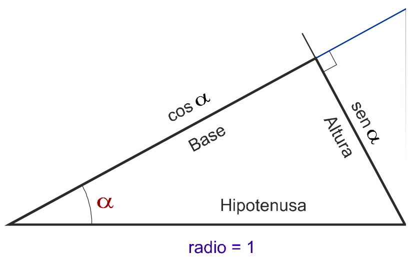


Figura 9 - B

Al dividir nuestro triángulo unitario de este modo, nos aparecen ahora dos triángulos rectángulos semejantes. Nos quedamos con el mayor; el de la izquierda. La base del nuevo triángulo es parte de la hipotenusa del triángulo unitario, su hipotenusa es la base del Unitario y su altura es el segmento recién dibujado perpendicular a la hipotenusa.

La única medida que conocemos es la de la base del triángulo unitario; vale 1. Y pienso: es una hipotenusa, luego la tomo como radio del inscrito y calculo la altura del nuevo triángulo rectángulo respecto de ella con la fórmula: *Altura = secante · sen α*. Como esa secante vale 1, resulta que respecto de ella: $Altura = Sen\ \alpha$. Y la Base del nuevo triángulo rectángulo la calculo por la fórmula *Base = secante · cos α*, o sea, respecto de esa secante $Base = cos\ \alpha$. Esas medidas se reflejan en la figura 9 – B.

Ya conocemos otra ubicación de seno y coseno dentro del arco de circunferencia que abarca el ángulo α. Las medidas del nuevo triángulo rectángulo $\overline{\text{radio seno coseno}}$ son idénticas a las del inscrito dentro de la circunferencia unitaria de la figura 7 – A, como representa la figura 10. En definitiva, es el triángulo inscrito dentro del circunscrito, pero invertido.

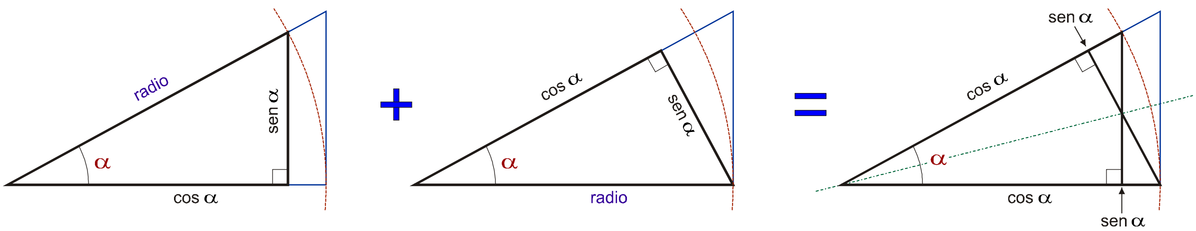


Figura 10

Como me tendré que referir a este esquema muchas veces, en ocasiones lo llamaré Método Alternativo de hallar el seno y el coseno; y "seno alternativo" y "coseno alternativo".

A primera vista podemos observar que el nuevo triángulo rectángulo $\overline{\text{radio seno coseno}}$ también es un inscrito de la circunferencia. Y que ambos triángulos rectángulos forman una figura especular cuyo eje de simetría es la bisectriz del Ángulo.

Ahora vamos a subdividir el triángulo rectángulo interior más grande de la figura 9 – A mediante una perpendicular a la base del triángulo unitario que pase por el vértice del ángulo recto del triángulo interior. Aparecen dos nuevos triángulos rectángulos semejantes. Vamos a resolver el mayor (figura 11 – A).

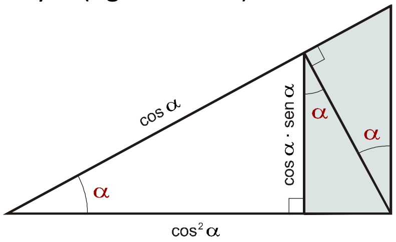


Figura 11 - A

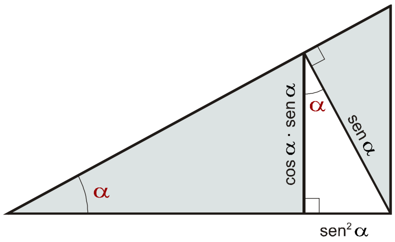


Figura 11 - B

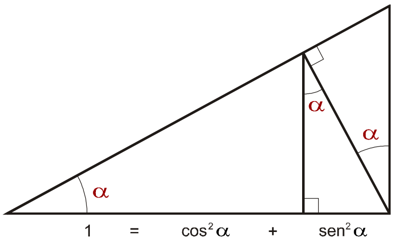


Figura 11 - C

Sólo conocemos cuánto mide su secante: *cos α*. Respecto de ésta, la base, por la fórmula 3º, medirá:

$$Base = secante \cdot cos\,\alpha \quad => \quad Base = cos\,\alpha \cdot cos\,\alpha \quad => \quad Base = cos^2\alpha$$

La altura de ese nuevo triángulo rectángulo la podemos medir respecto de su base, con la fórmula 1º, o respecto de su secante con la fórmula 2º.

- **Respecto de la base**: $Altura = base \cdot tan\,\alpha \quad => \quad Altura = cos^2\alpha \cdot tan\,\alpha$
  Como la tangente vale *sen/cos*, la ecuación resulta: $Altura = cos^2\alpha \cdot {}^{sen\,\alpha}/_{cos\,\alpha}$
  Uno de los cosenos cuadrado se va con el divisor del cociente y queda: $Altura = cos\,\alpha \cdot sen\,\alpha$

- **Respecto de la secante**: $Altura = secante \cdot sen\,\alpha \quad => \quad Altura = cos\,\alpha \cdot sen\,\alpha$ directamente.

Vamos a resolver ahora el triángulo rectángulo más pequeño (figura 11 – B). Ya conocemos su base: $cos\,\alpha \cdot sen\,\alpha$; y su secante: $sen\,\alpha$. Falta la altura. La podemos medir respecto de cualquiera de los dos lados conocidos.

- **Respecto de la base**: $Altura = (cos\,\alpha \cdot sen\,\alpha) \cdot tan\,\alpha \quad => \quad tan\,\alpha = {}^{sen\,\alpha}/_{cos\,\alpha}$
  $Altura = (cos\,\alpha \cdot sen\,\alpha) \cdot {}^{sen\,\alpha}/_{cos\,\alpha} \quad => \quad (cos\,\alpha)\ se\ va$
  $Altura = sen^2\alpha$

- **Respecto de la secante**: $Altura = sen\,\alpha \cdot sen\,\alpha \quad => \quad Altura = sen^2\alpha$ directamente.

Con ambos cálculo llegamos a la misma conclusión. Por otra parte, observe que el nuevo segmento vertical divide a la base del triángulo unitario en dos tramos que miden $cos^2\alpha$ y $sen^2\alpha$ cada uno. Lo que prueba que: $\boldsymbol{cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1}$. Tradicionalmente esa igualdad se demuestra mediante el teorema de Pitágoras, pero aquí podemos visualizarlo directamente sobre el triángulo unitario (figura 11 – C).

Tan sólo falta por medir el triángulo rectángulo más a la derecha de la figura 11-A. Este no tiene mucha relevancia, pero así practicamos el método de cálculo. Conocemos dos de sus lados: su secante es la altura del triángulo unitario, luego mide *tan α*. Su base, ya la hemos calculado, es *sen α*. Falta la altura. Esta la podemos medir respecto de cualquiera de los otros dos lados.

- **Respecto de la base**: $Altura = sen\,\alpha \cdot tan\,\alpha$ directamente.

- **Respecto de la secante**: $Altura = tan\,\alpha \cdot sen\,\alpha$ directamente.

En la figura 12 – A se representan todas las medidas halladas en este capítulo; en la 12 – B ubico los cuadrados de seno y coseno dentro del triángulo inscrito normal. Más adelante utilizare uno u otro según las necesidades:

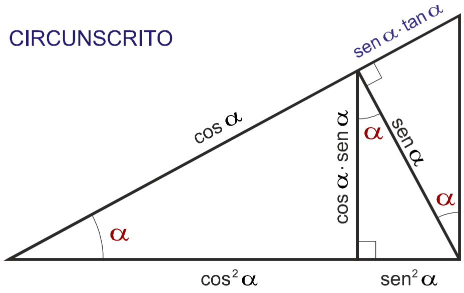


Figura 12 - A

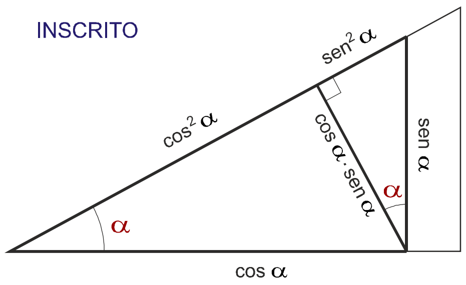


Figura 12 - B

Para reafirmar la veracidad de la figura 12 – A, sumando los dos segmentos en que ha quedado subdividida la hipotenusa del triángulo inscrito debería darnos $1/\cos\alpha$, es decir, $\sec\alpha$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\cos\alpha + (\operatorname{sen}\alpha \cdot \tan\alpha)} &= \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \\
&= \cos\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + \sin\alpha \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \\
&= \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} \\
&= \frac{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} = \boldsymbol{\frac{1}{\cos\alpha}}
\end{aligned}$$

Llegados a este punto, y adquirida cierta experiencia con el método de cálculo de los lados, y para agilizar el estudio, no volveré a dar tantas explicaciones. Y, cuando un mismo lado se pueda hallar por distintos caminos, sólo explicaré el que considere más conveniente.

Si no es necesario, tampoco volveré a extenderme en explicaciones respecto a las ecuaciones básicas siguientes:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \quad => \quad \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha \cdot \tan\alpha \quad => \quad \cos\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\tan\alpha}$$

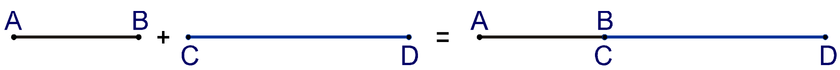
$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \quad => \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} \quad => \quad \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

Antes de pasar a nuevos temas relacionados con el triángulo rectángulo, voy exponer un método gráfico de sumar, restar, multiplicar y dividir segmentos rectos, pues me va a hacer falta más adelante y en el colegio nunca lo enseñan; al menos en el mío.

5 OPERACIONES BÁSICAS CON SEGMENTOS

5.1 LA SUMA

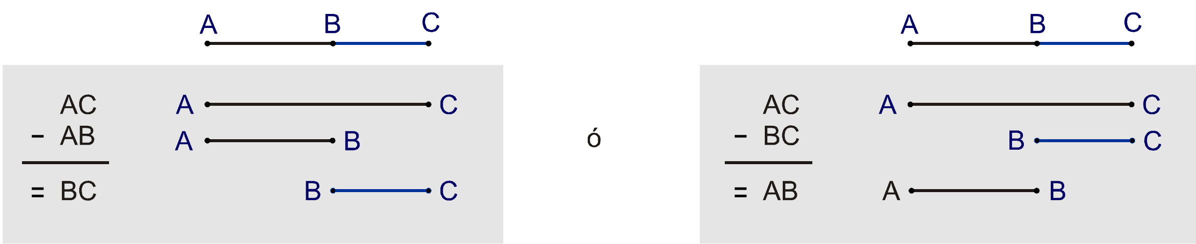
Basta con poner dos segmentos uno a continuación del otro. La suma será la longitud conjunta de ambos segmentos:



$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD}$

5.2 LA RESTA

A grosso modo, hay que comparar la longitud de ambos segmentos, emparejados desde cualquier extremo, y lo que sobra respecto del más grande es el resultado de la resta:



5.3 LA MULTIPLICACIÓN

Aquí también propongo un método alternativo al de la geometría oficial.

Fíjese en la imagen siguiente:

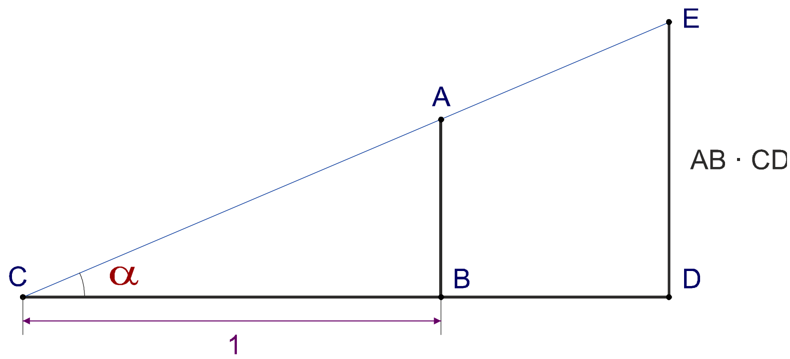
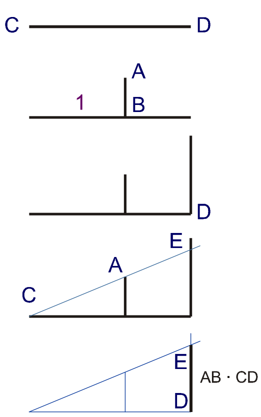


Figura 13

Si suponemos que el triángulo $\overline{ABC}$ es el unitario, su base mide 1 y su altura, $\overline{AB}$, vale tan α. Como hemos explicado, si en lugar de trabajar con radio 1, trabajamos con otro, hay que multiplicarlo todo por ese valor. Luego, para un radio $\overline{CD}$, la nueva altura $\overline{ED}$ medirá $\overline{CD} \cdot \tan \alpha$, es decir , $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$. También se podría haber resuelto por semejanza de triángulos.

En la práctica, para multiplicar dos segmentos , $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$, procederemos como a continuación:



1) Dibujamos la base (el multiplicador) a tamaño $\overline{CD}$.

2) A distancia 1, dibujamos la altura (multiplicando) a tamaño $\overline{AB}$.

3) Trazamos una vertical desde el vértice D.

4) Unimos C con A y prolongamos la línea hasta que corte la vertical en E.

5) La altura $\overline{DE}$ será el resultado de la multiplicación.

También funciona cuando $\overline{CD}$ es menor que 1, como muestro en la figura 14.

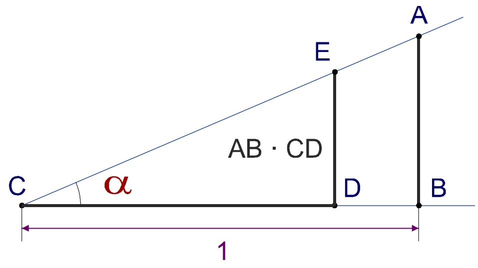


Figura 14

Por ejemplo:

Como $\overline{AB} = tan\,\alpha$, si $\overline{CD} = \cos\alpha$, entonces $\overline{DE} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \; tan\,\alpha \cdot cos\,\alpha = sen\,\alpha$

5.4 LA DIVISIÓN

Es la inversa de la multiplicación, luego, no hay más que invertir el significado de las medidas. Ahora $\overline{ED}$ es el dividendo, $\overline{CD}$ es el divisor, y $\overline{AB}$ el cociente

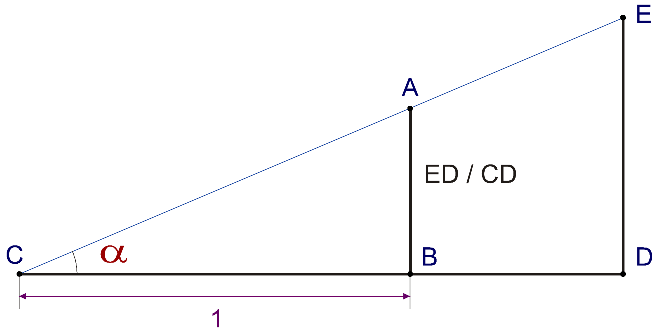
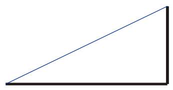


Figura 15

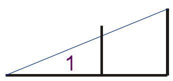
En la práctica, para dividir dos segmentos, $\overline{ED}$ / $\overline{CD}$, hay que proceder como sigue:

1) Dibujamos la base (el divisor) a tamaño $\overline{CD}$.

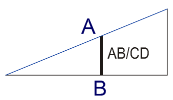
2) En el extremo derecho D dibujamos una vertical de tamaño $\overline{DE}$ (el dividendo).



3) Completamos el triángulo rectángulo.



4) A distancia 1 dibujamos una vertical hasta que corte la hipotenusa.



5) La altura $\overline{AB}$ será el resultado de la división.

El de la derecha sería el esquema para un divisor menor que 1:

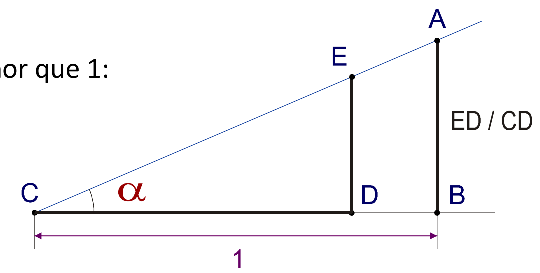


Figura 16

Por ejemplo:

Si $\overline{DE} = \operatorname{sen}\alpha$, y si $\overline{CD} = \cos\alpha$,

Entonces: $\overline{AB} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$.

Podemos deducir que en cualquier triángulo rectángulo, la altura es fruto de un producto o una división respecto de su base o de la de un triángulo semejante. Lógico, por otra parte, puesto que todos son proporcionales los unos respecto de los otros.

Finalmente, si somos capaces de reconocer una multiplicación o una división de segmentos en cualquier problema trigonométrico, seguramente estaremos más cerca de su resolución. Por lo pronto, permite ahorrarnos una regla de tres. Aunque la tarea no es tan sencilla, tenga en cuenta que no siempre nos vamos a encontrar con triángulos rectángulo completos, ni en esta posición.

La división de segmentos también podría basarse en secantes proporcionales, ya que éstas pueden construirse mediante división del radio por el coseno. Pero entonces habría que calcular, al menos, el arcocoseno del dividendo y después construir triángulos rectángulos semejantes de ese Ángulo. Pero sólo conocemos los segmentos, no el ángulo, por eso, el método aquí expuesto es más sencillo y directo; y se puede dibujar con una simple regla de medir. No obstante, es cierto que las secantes son fruto de divisiones de segmentos proporcionales, y ese concepto nos puede servir para resolución de problemas.

6 SUBDIVISION DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS. METODOLOGÍA

Los siguientes capítulos los voy a dedicar a dividir el Ángulo del triángulo unitario en distintas áreas, y cada partición obtenida la volveré a dividir con segmentos concretos para tratar de llegar a conclusiones trigonométricas interesantes.

A cada área, y a cada segmento, siempre que pueda, le daré un nombre y evitaré identificarlos mediante letras. Porque pienso que cuando nos hacemos un esquema mental de una figura, es más fácil localizar elementos concretos que retener el conjunto de letras que los delimitan, que, por otra parte, siempre se utilizan las mismas letras para diferentes segmentos de distintos esquemas. Visualice en su cabeza un triángulo rectángulo cualquiera con su Ángulo dividido por una bisectriz; después vuelva a dividir el triángulo con un segmento que lo cruza de arriba abajo. ¿Lo visualiza por entero en su cabeza? ¿Localiza las diferentes partes? Ahora etiquete mentalmente cada punto, vértice e intersección con letras. ¿Visualiza el esquema completo, con todas sus letras claras en su cabeza? ¿Complicado verdad?

Para facilitar la localización, medida y nomenclatura de cada una de las partes, voy a establecer una serie de reglas que son las que voy a seguir en el resto del trabajo.

a) Cuando subdivida el Ángulo del triángulo rectángulo en varias partes, a cada área la llamaré Sector, y las nombraré de abajo arriba y de izquierda a derecha: Primer Sector, Segundo Sector, etc. Y los trozos en que queden divididos los segmentos los llamaré tramos, y también los enumeraré de abajo arriba y de izquierda a derecha: Primer Tramo, Segundo Tramo, etc. Por ejemplo: "el primer sector del triángulo unitario", "el segundo tramos de la tangente…"

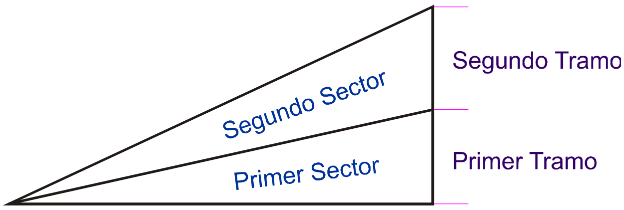


Figura 17

b) **Regla de la subdivisión**: Cuando dividimos un triángulo rectángulo cualquiera mediante un segmento perpendicular a alguno de sus lados, siempre obtendremos, al menos un triángulo rectángulo que será siempre semejante al original.

c) Cuando el segmento que divide es perpendicular a la hipotenusa y pasa por el vértice del ángulo recto, el triángulo queda subdividido en dos triángulos rectángulos semejantes. En cualquier otro caso quedará subdividido en un triángulo rectángulo semejante al Unitario, más un cuadrilátero. Cuando ese triángulo contenga al ángulo complementario del triángulo rectángulo, lo llamaré ***Triángulo Complementario***; cuando contenga al Ángulo del Triángulo original, ***Triángulo Principal***. La figura 18 muestra diferentes combinaciones.

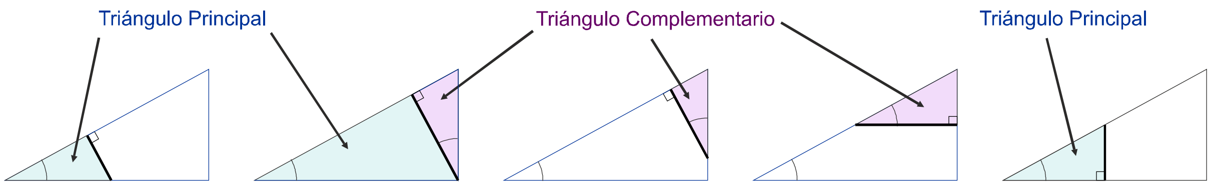


Figura 18

7 BISECCIÓN DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Empezaremos subdividiendo el triángulo unitario mediante la bisectriz del Ángulo, más una perpendicular a su hipotenusa, como muestra la figura 19.

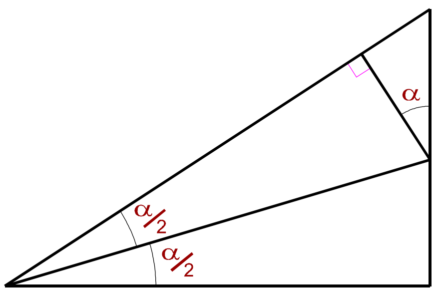


Figura 19

Aparecen tres triángulos rectángulos: el primer sector del Unitario, que es un triángulo de ángulo $½\alpha$, y el segundo sector con un triángulo $½\alpha$, más un complementario del Unitario.

Puede parecer que ha fallado la Regla de la Subdivisión, pues el complementario no es semejante al triángulo del segundo sector, pero si elimina la bisectriz, notara que el segmento es perpendicular a la secante; en realidad, lo que hace es subdividir el Unitario. Hay que tener cuidado con esas cosas.

Vamos a ver lo que mide cada segmento de la figura 19. La base del primer sector es la base del Unitario, luego mide 1. Su altura, que es el primer tramo de la altura del Unitario, respecto de esa base, medirá $tan\ ½\alpha$, y su secante, $1/cos\ ½\alpha$. En cuanto al triángulo principal del segundo sector, puesto que es semejante al del primer sector, y que ambos comparten secante, es idéntico al primero; luego su altura (segmento perpendicular a la secante), medirá también $tan\,½\alpha$.

La base del complementario es la altura del principal del segundo sector, luego, mide $tan\ ½\alpha$. Su altura medirá: $tan\ \alpha \cdot tan\,½\alpha$. Y su secante, que es el segundo tramo de la tangente del Unitario, medirá: $tan\,½\alpha / cos\ \alpha$. Lo vemos todo reflejado en la figura 20.

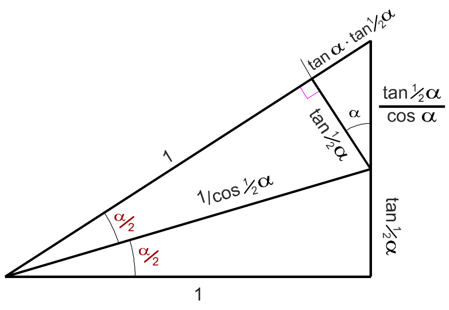


Figura 20

Observamos enseguida que el segundo tramos de la tangente del triángulo unitario es el primer tramo multiplicado por la secante. Podría decirse que el segundo tramo de la tangente es el primero a escala secante. Este tipo de razonamientos es interesante; aplicando este principio podremos calcular otros supuestos donde la bisectriz de otro triángulo rectángulo divida a su tangente en dos tramos semejantes a estos.

Otra conclusión interesante es que la secante, ya sabíamos que se dividía en radio más exsecante, pero aquí, la exsecante la medimos como $tan\ \alpha \cdot tan$ ½α. Conocemos así otra manera de hallar la secante.

Podemos establecer tres fórmulas fundamentales para la secante:

1) $\boldsymbol{Sec\ \alpha = \sqrt{1 + tan^2\alpha}}$
2) $\boldsymbol{Sec\ \alpha = {}^{1}/_{\cos\alpha}}$
3) $\boldsymbol{Sec\ \alpha = 1 + \tan\alpha \cdot \tan ½\alpha}$

Por otro lado tenemos dos para la exsecante:

1) $\boldsymbol{Exsec\ \alpha = Sec\ \alpha - 1}$
2) $\boldsymbol{Exsec\ \alpha = \tan\alpha \cdot \tan ½\alpha}$

La tercera fórmula de la secante es muy interesante. Por ejemplo, si la última de la secante la igualamos con la primera y desarrollamos la igualdad, obtenemos:

$$\sqrt{1 + tan^2\alpha} = 1 + tan\ \alpha \cdot tan\ ½\alpha \qquad => \ Elevamos\ ambos\ miembros\ al\ cuadrado$$

$$1 + tan\ \alpha^2 = 1 + tan^2\alpha \cdot tan^2\ ½\alpha + 2\ tan\ \alpha \cdot tan\ ½\alpha \quad => \ Reducimos\ el\ 1$$

$$tan\ \alpha^2 = tan^2\alpha \cdot tan^2\ ½\alpha + 2\ tan\ \alpha \cdot tan\ ½\alpha \ => \ Dividimos\ ambos\ miembros\ por\ tan\ ½\alpha$$

$$\frac{tan^2\alpha}{tan\ ½\alpha} = tan^2\alpha \cdot tan\ ½\alpha + 2\ tan\ \alpha \quad => \quad sacamos\ tan\ \alpha\ factor\ común.$$

$$\frac{tan^2\alpha}{tan\ ½\alpha} = tan\ \alpha\ (tan\ \alpha \cdot tan\ ½\alpha + 2) \quad => \quad quitamos\ un\ tan\ \alpha\ \ y\ finalmente\ obtenemos:$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{tan\ \alpha}{tan\ ½\alpha} = 2 + tan\ \alpha \cdot tan\ ½\alpha}}$$

La división es igual a la multiplicación más 2.

Fórmula que nos dice que si dividimos ambas tangentes, tendremos la $secante + 1$, ó, la $exsecante + 2$. Es decir:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{tan\ \alpha}{tan\ ½\alpha} = 1 + \frac{1}{cos\ \alpha}}}$$

El miembro de la derecha ya lo había visto varias veces, pero no sabía cómo ubicarlo hasta ahora.

Por otra parte, si retomamos la primera conclusión de esta última ecuación y despejamos $tan\ \alpha$, obtendremos:

$$\frac{tan\,\alpha}{tan\,½\alpha} = 2 + \ tan\,\alpha \cdot tan\,½\alpha \qquad => \quad pasamos\ la\ tan\,½\alpha\ izquierda\ al\ otro\ lado$$

$$tan\,\alpha = 2\,tan\,½\alpha + tan\,\alpha \cdot tan^2½\alpha \quad => \quad Dividimos\ por\ tan\,\alpha$$

$$1 = \frac{2\,tan\,½\alpha}{tan\,\alpha} + tan^2½\alpha \qquad => \quad pasa\ tan^2½\alpha\ al\ otro\ miembro$$

$$1 - tan^2½\alpha = \frac{2\,tan\,½\alpha}{tan\,\alpha} \qquad => \quad reorganizamos$$

$$tan\,\alpha = \frac{2\,tan\,½\alpha}{1 - tan^2½\alpha} \qquad => \quad \boxed{\mathbf{tan\,2}\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{2\,tan}\,\boldsymbol{A}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{tan^2A}}}$$

Que es la fórmula tradicional de la tangente del ángulo doble. Luego no andábamos muy descaminados.

8 LA TANGENTE DEL ANGULO MEDIO

Ahora vamos a igualar las fórmulas 2) y 3) de la secante, y vamos a despejar la tangente del ángulo medio:

$$1 + tan\,\alpha \cdot tan\,½\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha} \quad => \quad pasamos\ el\ 1\ del\ 1º\ al\ 2º\ miembro$$

$$tan\,\alpha \cdot tan\,½\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha} - 1 \quad => \quad dividimos\ por\ \ tan\,\alpha$$

$$tan\,½\alpha = \frac{{}^1\!/_{cos\,\alpha} - 1}{tan\,\alpha} \qquad => \quad resolvemos$$

$$tan\,½\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} - \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} \qquad => \quad agrupamos$$

$$\boxed{\boldsymbol{tan½\alpha} = \frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{cos\,\alpha}}{\boldsymbol{sen\,\alpha}}}$$

Una fórmula muy interesante para hallar la tangente del ángulo medio. Hemos visto que para dividir dos segmentos necesitamos que ambos segmentos formen un ángulo recto y que a distancia 1 del divisor, mediante una hipotenusa obtenemos el segmento resultado de la división. Lo dibujo en la figura 21.

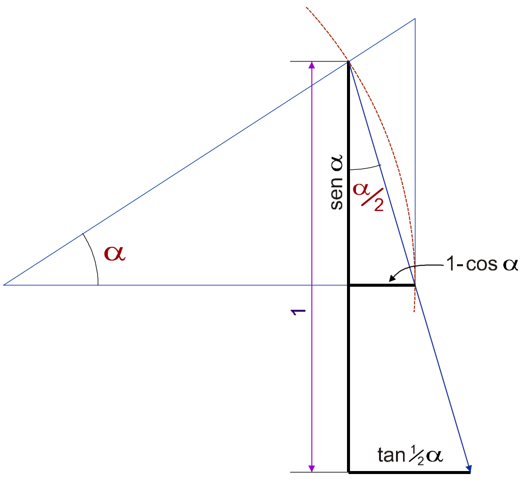


Figura 21

El seno y el verseno, de por sí, forman un ángulo recto, luego alargamos el segmento del seno hasta que mida 1, construimos el triángulo rectángulo de la división, y según esa fórmula, su altura medirá *tan ½α*.

Significa que el triángulo rectángulo que hemos construido para realizar la división, es un triángulo de Ángulo ½α.

Existe otra fórmula tan sencilla como la anterior. Para ello sumamos los dos tramos de la tangente del triángulo unitario (vea figura 20), e igualamos esa suma a *tan α*:

$$tan\,\alpha = tan\,½\alpha + \frac{tan\,½\alpha}{cos\,\alpha} \qquad => \qquad igualamos\ divisores$$

$$\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{cos\,\alpha \cdot tan\,½\alpha}{cos\,\alpha} + \frac{tan\,½\alpha}{cos\,\alpha} \qquad => \qquad eliminamos\ los\ divisores$$

$$sen\,\alpha = cos\,\alpha \cdot tan\,½\alpha + tan\,½\alpha \qquad => \qquad sacamos\ tan\,½\alpha\ \ factor\ común$$

$$sen\,\alpha = tan\,½\alpha \cdot (cos\,\alpha + 1) \qquad => \qquad reorganizamos\ los\ factores$$

$$\boxed{\boldsymbol{tan\,½\alpha = \frac{sen\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}}}$$

Esta fórmula, también puede dibujarse como una división de segmentos. Basta alargar la base hasta que mida *1+cos α*, dibujar una vertical en su extremo derecho de tamaño *sen α*, y en la altura de la tangente del unitario obtenemos *tan* ½α que es el cociente de la división de segmentos.

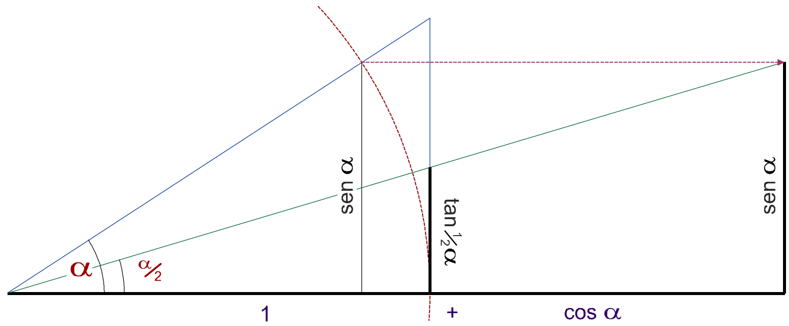


Figura 22

Note que la secante del triángulo rectángulo de la división es la bisectriz del ángulo α.

Queda reflexionar: si podemos obtener la tangente del ángulo medio de una forma tan sencilla, ¿por qué los matemáticos se empeñan en la fórmula tan compleja?:

$$tan\,½\alpha = \frac{\sqrt{1 - cos\,\alpha}}{\sqrt{1 + cos\,\alpha}}$$

Como curiosidad, en la figura siguiente represento un triángulo rectángulo de Ángulo α y base: *1+cos α*, al que llamaré Súper Triángulo.

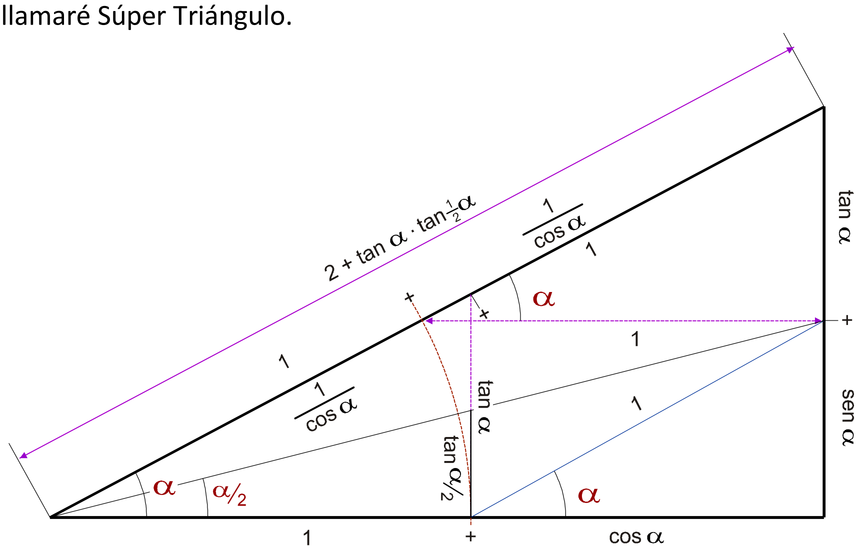


Figura 23

La altura del Súper Triángulo ha quedado partida en dos tramos. El primero mide sen α, el segundo, según hemos visto, es el primero a escala secante, es decir multiplicado por secante:

$$sen\,\alpha \cdot sec\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = tan\,\alpha$$

Su altura mide pues, $sen\,\alpha + tan\,\alpha$, y su secante: $1 + 1/cos\,\alpha = 2 + tan\,\alpha \cdot tan\,½\alpha$. Se pueden ver, entre otras cosas, tres triángulos unitarios, un inscrito y dos circunscritos.

9 FÓRUMULAS DEL ÁNGULO DOBLE

9.1 *SENO Y COSENO DEL ANGULO DOBLE*

Existen muchas maneras de representar el ángulo mitad, pero voy a construir una última que me parece significativa.

Con ayuda de un compás, vamos a abatir la secante del triángulo unitario sobre su base. Obtenemos una prolongación de la base que mide *exsec α*, que hemos constatado que se puede representar como *exsec α = tan α · tan* ½α. Con ese segmento como altura y tomando tan α como base podemos construir el triángulo rectángulo vertical de la figura 24 – A. Su Ángulo lo desconocemos; lo llamaremos β por ahora. Su altura debería medir $tan\,\alpha \cdot tan\,\beta$. Pero ya sabemos que en realidad mide: $tan\,\alpha \cdot tan\,½\alpha$, luego $\beta = ½\alpha$. Se trata pues de un triángulo rectángulo de Ángulo $½\alpha$.

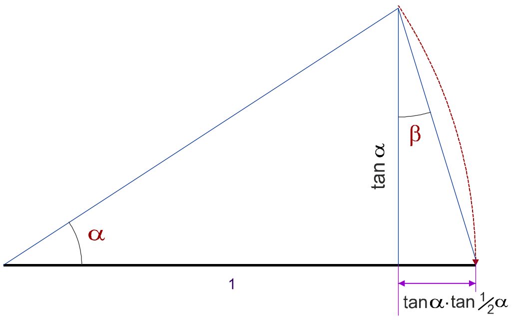


Figura 24 - A

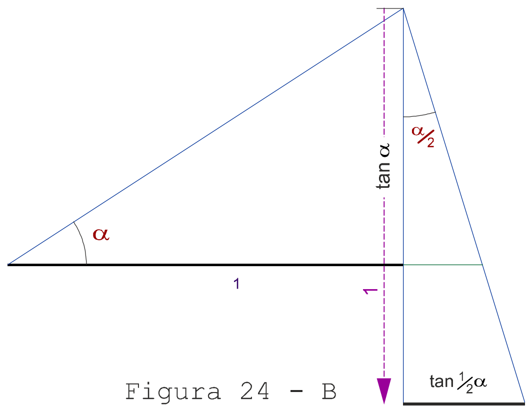


Figura 24 - B

Ahora prolongado la base hasta que mida 1, y por división de segmentos, volvemos a obtener la tangente del ángulo medio (figura 24 – B).

Retomamos el triángulo unitario. Ahora alargamos la base hasta que mida $1 + tan\,\alpha \cdot tan\,½\alpha$, es decir $1/_{cos\,\alpha}$. Dibujamos la bisectriz y con el primer sector dibujamos el triángulo rectángulo de Ángulo $½\alpha$ de la figura 25.

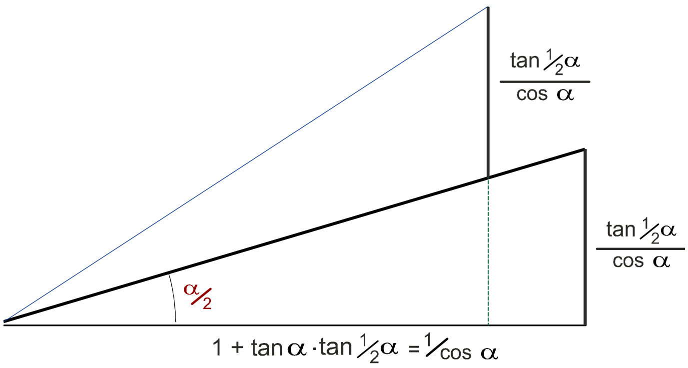


Figura 25

Su altura medirá: $tan\,½α/cos\,α$, es decir lo que mide el segundo tramo de la tangente del triángulo unitario. En cuanto a su secante, medirá:

$$\frac{1 + tan\,\alpha \cdot tan\,½\alpha}{cos\,½\alpha} = \frac{1}{cos\,½\alpha} + \frac{tan\,\alpha \cdot tan\,½\alpha}{cos\,½\alpha} = \frac{1}{cos\,½\alpha \cdot cos\,\alpha}$$

Puesto que la secante del triángulo unitario de Ángulo $½\alpha$ mide $1/cos\,½α$, entonces la parte sobrante medirá:

$$\frac{tan\,\alpha \cdot tan\,½\alpha}{cos\,½\alpha}$$

Ahora bien, vamos a formar dos triángulos rectángulos con esa parte sobrante, en el hueco superior derecho, como muestra la figura 26.

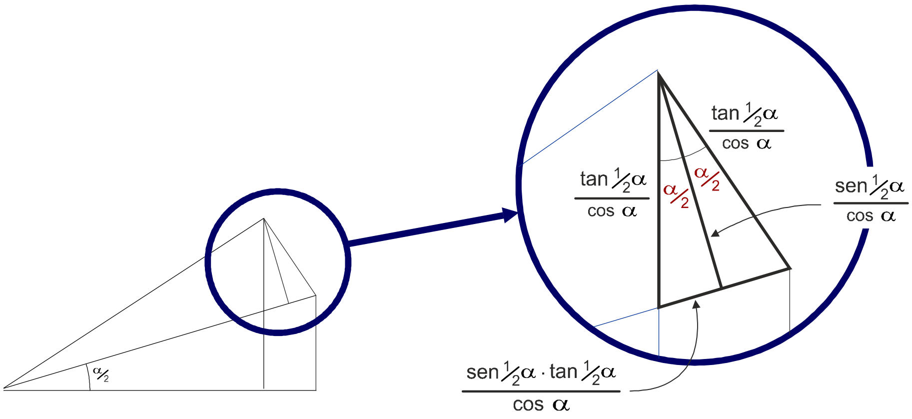


Figura 26

No es necesario explicar que los dos nuevos triángulos rectángulos son semejantes y de Ángulo $½\alpha$. Respecto de su hipotenusa, que es el segundo tramos de la tangente del triángulo unitario, sus bases miden: $\frac{sen½\alpha}{cos\,\alpha}$, y sus alturas: $\frac{sen½\alpha \cdot tan\,½\alpha}{cos\,\alpha}$. Por lo tanto, en este dibujo, la parte sobrante mide:

$$2 \cdot \frac{sen½A \ \cdot \ tan½A}{Cos\,\alpha} \qquad \text{igualamos ambas medidas y obtenemos:}$$

$$\frac{tan\,\alpha \cdot tan\,½\alpha}{cos\,½\alpha} = 2 \cdot \frac{sen½\alpha \cdot tan\,½\alpha}{cos\,\alpha} \quad => \quad eliminamos\ \ tan\,½\alpha$$

$$\frac{tan\,\alpha\,\cdot}{cos\,½\alpha} = 2 \cdot \frac{sen½\alpha}{cos\,\alpha} \quad => \quad cruzamos\ divisores$$

$$tan\,\alpha \cdot cos\,\alpha = 2 \cdot sen\,½\alpha \cdot cos\,½\alpha \quad => \quad resolvemos\ el\ primer\ miembro$$

$$sen\,\alpha = 2 \cdot sen\,½\alpha \cdot cos\,½\alpha \quad => \quad \boxed{\boldsymbol{sen\,2A = 2 \cdot sen\,A \cdot cos\,A}}$$

Gracias a la 3ª fórmula de la secante hemos averiguado como llegar a dos identidades fundamentales de la trigonometría. Estimo que la tercera fórmula de la secante hay que darle la importancia que se merece.

Vamos a fijarnos ahora en la figura 27 – A:

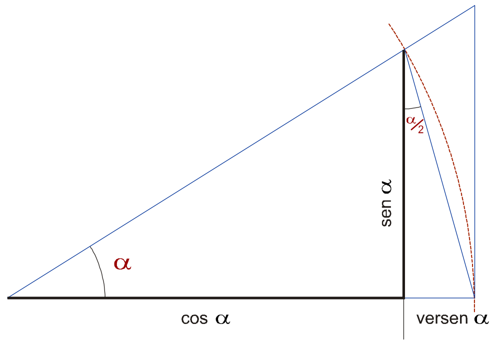


Figura 27 - A

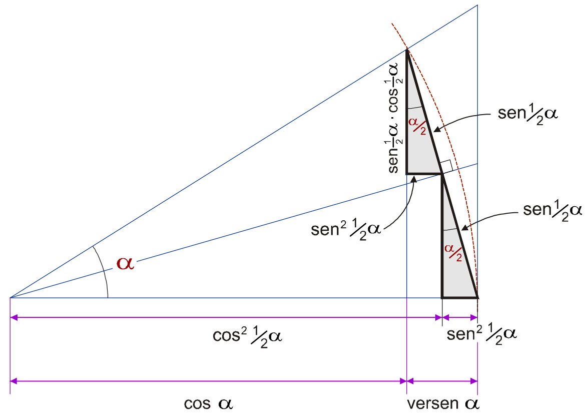


Figura 27 - B

Hemos construido un triángulo unitario, y en él hemos dibujado un arco de la circunferencia a la que se circunscribe, y con éste, el seno y el coseno tradicionales del Ángulo α. La base ha quedado dividida en $cos\,\alpha + versen\,\alpha$ como ya sabemos. También hemos dibujado una cuerda que forma un ángulo $½\alpha$ con el seno y el verseno como vimos en la figura 21.

Pasemos a la figura 27 – B. Primero hemos completado la figura anterior trazando la bisectriz del Ángulo. Puesto que la cuerda que hemos trazado abarca toda la amplitud del arco de circunferencia, la bisectriz corta perpendicularmente a la cuerda y la divide en dos mitades. Esto nos permite dibujar dos pequeños triángulos rectángulos idénticos de Ángulo $½\alpha$.

Tomemos la hipotenusa del pequeño triángulo rectángulo vertical del primer sector; vemos que es perpendicular a la secante del principal del primer sector y pasa por su ángulo recto, luego, como vimos en la figura 12 (Método Alternativo), mide: $sen½\alpha$. En cuanto a su altura, respecto de esa secante, medirá $\boldsymbol{sen^2\,½\alpha}$. El verseno del triángulo unitario ha quedado así dividido en dos tramos de $\boldsymbol{sen^2\,½\alpha}$ cada uno; uno por cada triángulo pequeño. De donde: $versen\,\alpha = 2\,sen^2\,½\alpha$. Ecuación conocida por todos los matemáticos duchos en trigonometría.

Por último, si nos fijamos, puesto que la altura del triangulito del primer sector mide $sen^2\,½\alpha$, significa que el resto de la base del unitario medirá $cos^2\,½\alpha$, para que sumen 1, como explicábamos en la figura 11 – C. Ahora bien, si al primer tramo de la base del unitario, que mide $cos^2\,½\alpha$, le quitamos el segundo tramo que también mide $sen^2\,½\alpha$ *(como el tercero)*, nos quedará $\boldsymbol{cos\,\alpha}$.

Eso significa que $cos\,\alpha = cos^2\,½\alpha - sen^2\,½\alpha$. O, lo que es lo mismo:

$$\boxed{\cos 2A = cos^2 A - sen^2 A}$$ Otra identidad fundamental.

Note que la base de cada triángulo pequeño mide exactamente $sen\,½\alpha \cdot cos\,½\alpha$; y que esas dos bases abarcan por completo $sen\,\alpha$. Luego: $sen\,\alpha = 2 \cdot sen\,½\alpha \cdot cos\,½\alpha$, o lo que es lo mismo:

$$\boxed{sen\,2A = 2\,\mathrm{sen}\,A \cdot \cos A}$$ Más sencillo que con el esquema anterior.

Vemos que existen diferentes maneras de llegar a las mismas conclusiones. Sólo es cuestión de quedarse con las que más nos guste.

Por último, voy a representar gráficamente las dos fórmulas para que vea mejor:

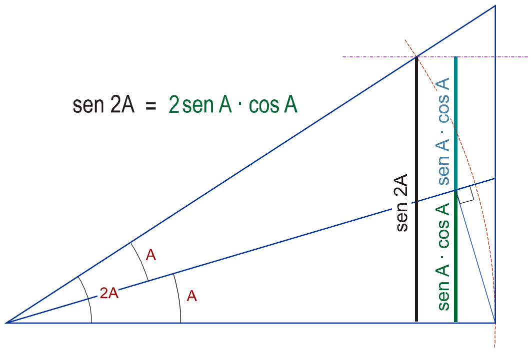


Figura 28 - A

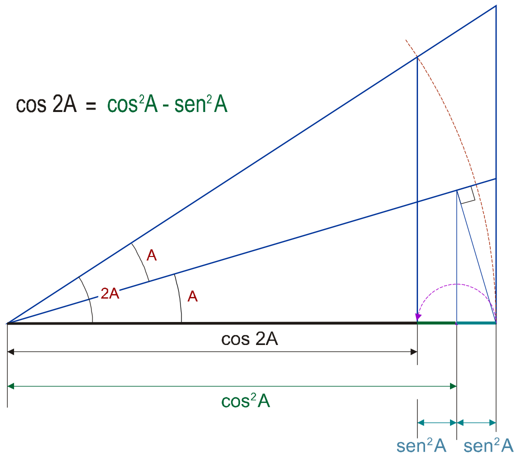


Figura 28 - B

En la figura 12 – A del capítulo 4 constatamos que uno de los segmentos verticales medía seno por coseno. Si apilamos dos de esos segmentos constatamos que miden exactamente el seno del ángulo doble como podemos ver en la figura 28 – A.

En esa *misma* figura 12 – A, dividimos la base del unitario en dos segmento, $cos^2\alpha$ y $sen^2\alpha$. Por otra parte, observando la figura 27 – B constatamos que si le quitamos medio verseno de un ángulo al coseno de ese ángulo nos queda el coseno cuadrado del ángulo mitad. Por lo tanto, quitándole el $sen^2 A$ de la figura 12 – B al $cos^2 A$, como muestra la figura 28 – B, nos quedará el coseno del ángulo $2A$. Significa que el coseno del ángulo doble es el coseno cuadrado del ángulo simple menos el seno cuadrado del ángulo simple.

A simple vista: $cos\ 2A + 2sen^2 A = 1$, luego: $\boldsymbol{cos\ A + 2sen^2 ½A = 1}$. Nueva fórmula.

9.2 TANGENTE DEL ANGULO DOBLE

Vamos a subdividir el triángulo unitario como muestra la figura 29 – A, y vamos a ver cuánto miden los diferentes segmentos.

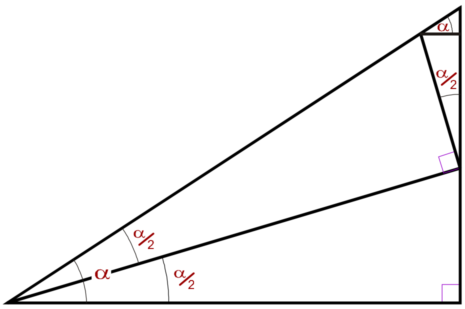


Figura 29 - A

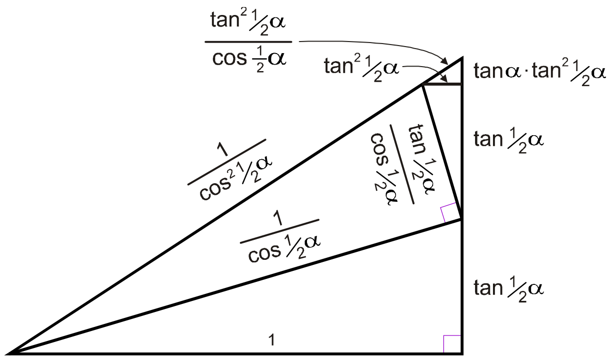


Figura 29 - B

Primer sector: es un triángulo rectángulo Ángulo $½\alpha$; su base es la del unitario, luego mide 1. Su altura $tan\ ½\alpha$, y su secante, que es la bisectriz del Ángulo, mide: $1/cos\ ½\alpha$.

Segundo sector: lo dividimos de forma similar a la figura 19 del capítulo 7, pero de manera perpendicular a la bisectriz, no a la hipotenusa como antes. Aparece un triángulo principal y otro no rectángulo a la derecha. Ese último lo cortamos con una horizontal por su punto de unión con la hipotenusa, y lo convertimos en dos nuevos triángulos rectángulos: uno vertical que por la Regla de la

Subdivisión es de Ángulo *½α*, puesto que su hypotenusa es perpendicular a la base del triángulo principal del segundo sector, que también es la secante del primer sector, y ambos son de Ángulo *½α*. Más un complementario del unitario, luego, de Ángulo *α*.

Principal de segundo sector: su base es la secante del primer sector, luego mide: $1/cos\,½α$. Su altura, respeto de su base, medirá: $tan\,½α/cos\,½α$. Y su secante, respeto de su base: $1/cos^2\,½α$.

Triángulo vertical: Conocemos su secante; es la altura del principal del segundo sector: *tan ½α/cos ½α.* Respeto de su secante, su base medirá *tan ½α*. Y, respeto de esa base, su altura medirá $tan^2\,½α$.

Triángulo complementario: Conocemos su base: $tan^2\,½α$. Respeto de esa base, su altura será $tan\,α \cdot tan^2\,½α$, y su secante $tan^2\,½α/cos\,α$.

En la figura 29 – B se reflejan todas esas medidas, y con ellas podemos volver a hallar dos identidades fundamentales:

a) La tangente del unitario ha quedado subdividida en tres tramos; los sumamos e igualamos la suma a *tan α*.

$$tan\,α = tan\,½α + tan\,½α + tan\,α \cdot tan^2½α \quad => \quad pasamos\ el\ 3º\ sumando\ al\ 1º\ miembro$$

$$tan\,α - tan\,α \cdot tan^2½α = 2\,tan\,½α \quad => \quad sacamos\ \ tan\,α\ \ factor\ comun$$

$$tan\,α\,(1 - tan^2½α) = 2\,tan\,½α \quad => \quad pasamos\ el\ parentesis\ al\ 2º\ miembro$$

$$tan\,α = \frac{2tan½α}{1 - tan^2½α} \quad => \quad \boxed{\boldsymbol{tan\,2A = \frac{2\,tan\,A}{1 - tan^2A}}}$$

b) La secante del unitario también ha quedado subdividida en dos tramos. Los sumamos y lo igualamos a *1/cos α*.

$$\frac{1}{cos\,α} = \frac{1}{cos^2½α} + \frac{tan^2½α}{cos\,α} \quad => \quad pasamos\ el\ 2º\ sumando\ al\ 1º\ miembro$$

$$\frac{1}{cos\,α} - \frac{tan^2½α}{cos\,α} = \frac{1}{cos^2½α} \quad => \quad sacamos\ \frac{1}{cos\,α}\ factor\ común$$

$$\frac{1}{cos\,α}(1 - tan^2½α) = \frac{1}{cos^2½α} \quad => \quad pasamos\ el\ parentesis\ al\ 2º\ miembro$$

$$\frac{1}{cos\,α} = \frac{1}{cos^2½α(1 - tan^2½α)} \quad => \quad invertimos\ los\ cocientes$$

$$cos\,α = cos^2½α(1 - tan^2½α) \quad => \quad distribuimos\ cos^2½α\ \ en\ el\ \ 2º\ miembro$$

$$cos\,α = cos^2½α - cos^2½α \cdot tan^2½α \quad => \quad coseno \cdot tangente = seno$$

$$cos\,α = cos^2½α - sen^2½α \quad => \quad \boxed{\mathbf{cos\,2α = \ cos^2α - \ sen^2α}}$$

Quizá este método de hallar el coseno del ángulo doble le resulte más matemático que el del capítulo anterior, pero lo que cuenta es el resultado.

Retomando la tangente del ángulo doble, voy a representar esa fórmula de manera más visual mediante la figura 30.

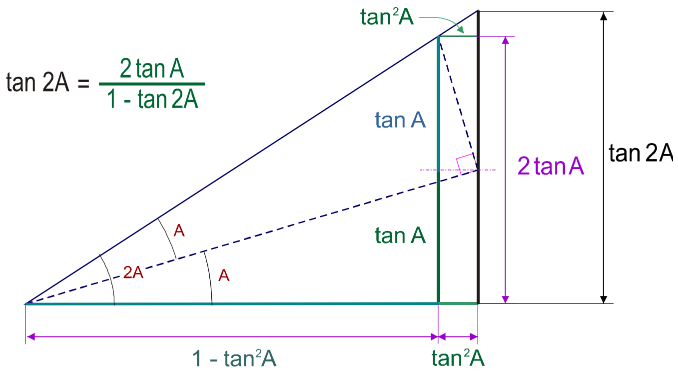


Figura 30

En la figura 29 – B vemos que los dos primeros tramos de la tangente del unitario miden cada uno $tan\, ½\alpha$ y que la base del complementario mide $tan^2\, ½\alpha$. Aplicado a esta nueva figura, Si trazamos una vertical desde el vértice del Ángulo del complementario obtenemos un segmento de tamaño: $2tanA$; además, la base del triángulo de Ángulo 2A queda dividida en dos tramos. El segundo tramo, sabemos que mide $tan^2 A$, luego el primero medirá: $1 - tan^2 A$. Si observamos bien la figura 30 y recordamos la figura 16 del capítulo 5.4, advertimos que hemos dibujado la división de segmentos:

$$\frac{2\tan A}{1 - tan^2 A} = \tan 2A$$

10 TRISECCIÓN DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Empezaré puntualizando que la trisección del ángulo, no se puede realizar de forma general con regla y compás. Si bien algunos ángulos concretos tienen trisección; en 1837, el matemático Pierre Laurent Wantzel demostró que era imposible hallar una fórmula general para el resto de los ángulos, y hasta hoy, nadie se lo ha rebatido y no seré yo quien lo haga.

Por eso, a falta de transportador de ángulos, la mejor manera de trisecar el triángulo es utilizar un programa informático como he hecho yo. La figura 31 muestra el triángulo unitario trisecado, el que utilizaré para este capítulo. Recuerde que mientras no diga lo contrario, establecí llamar unitario al Unitario Circunscrito, el de base 1.

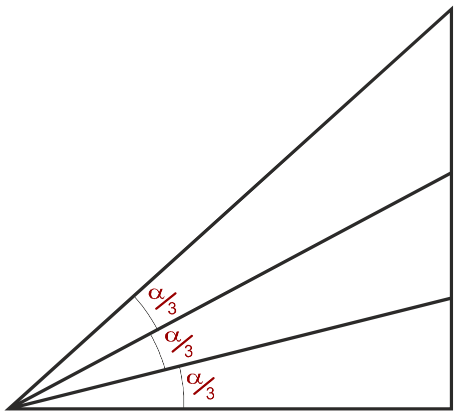


Figura 31

Los dos primeros sectores, unidos, forman un triángulo rectángulo unitario bisecado, luego, se les puede aplicar todo lo *explicado* en la bisección del triángulo. No hay más que cambiar α por $⅔\alpha$, y $½\alpha$ por $⅓\alpha$.

Luego, el primer tramo de la tangente del unitario medirá $tan\ ⅓\alpha$, y el segundo tramo $tan\ ⅔\alpha / cos\ ⅓\alpha$. ¿Cuánto medirá el tercer tramo? Para ello, subdividiremos la tercera sección mediante un segmento perpendicular a la secante del unitario como muestra la figura 32 – A.

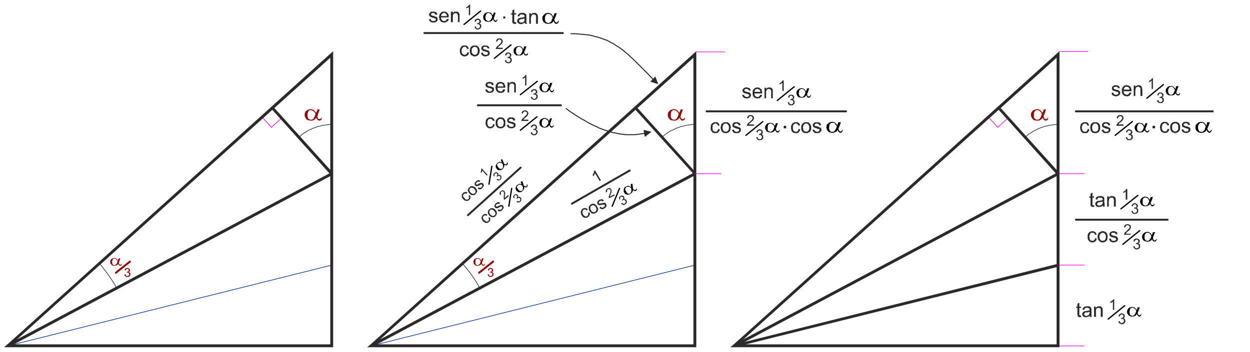


Figura 32 - A Figura 32 - B Figura 32 - C

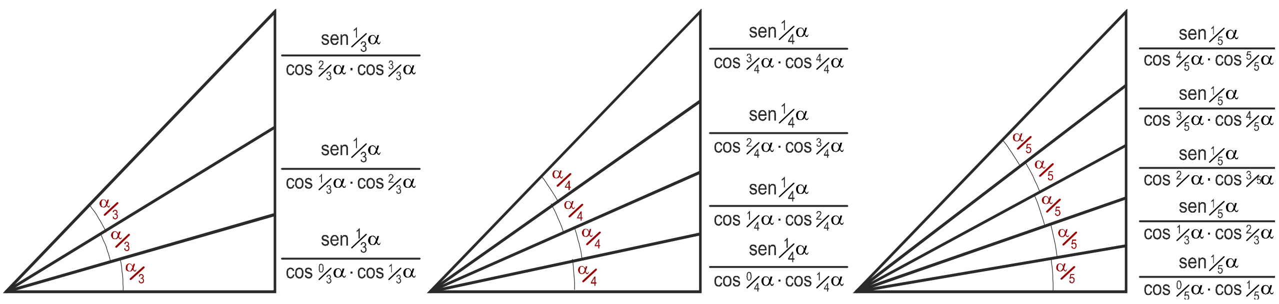
En la figura 32 – B transcribo las medidas de la tercera sección, y en la 32 – C, las medidas de los distintos tramos de la tangente del triángulo unitario trisecado. Cabría esperar que el tercer tramo también fuese proporcional a $tan\ ⅓\alpha$, de manera similar al segundo tramo, pero no es así. Aunque si tenemos en cuenta que el seno es la tangente por el coseno, el tercer tramo también podría escribirse de manera más compleja en función de $tan\ \alpha/3$

$$\frac{tan\ ⅓\alpha \cdot cos\ ⅓\alpha}{cos\ ⅔\alpha \cdot cos\ \alpha} \quad \text{ó} \quad tan\ ⅓\alpha \cdot \frac{cos\ ⅓\alpha}{cos\ ⅔\alpha \cdot cos\ \alpha} \quad \text{ó} \quad \frac{tan\ ⅓\alpha}{cos\ \alpha} \cdot \frac{cos\ ⅓\alpha}{cos\ ⅔\alpha}$$

Sin embargo, si actuamos al revés y ponemos la tangente como el seno partido por el coseno en los otros tramos, y teniendo en cuenta que $cos\ 0$ es 1, podemos poner todos los tramos en función del seno de $⅓\alpha$:

$$tan\ ⅓\alpha = \frac{sen\ ⅓\alpha}{cos\ ⅓\alpha} \quad y \quad \frac{tan\ ⅓\alpha}{cos\ ⅔\alpha} = \frac{sen\ ⅓\alpha}{cos\ ⅓\alpha \cdot cos\ ⅔\alpha}$$

Examinando los resultados detenidamente, podemos sacar una correlación entre todos esos valores, como represento en las siguientes figuras.



Ahora podemos saber cuánto mide cada tramo en cualquier subdivisión. De forma general, si dividimos el triángulo rectángulo en ‘n’ sectores de misma amplitud, el tramo *‘x’* de la tangente medirá:

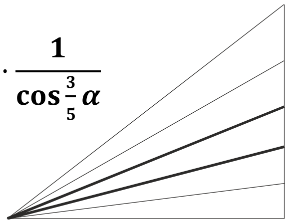
$$\boxed{\textbf{Tramo } x \quad \rightarrow \quad \frac{sen\ \frac{1}{n}\alpha}{cos\ \frac{x-1}{n}\alpha \cdot cos\ \frac{x}{n}\alpha}}$$

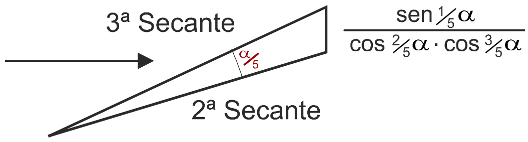
Parece una fórmula compleja de recordar. No obstante, si nos fijamos un poquito, cada tramo es el seno del primer sector multiplicado por las secantes que lo delimitan:

$$\boldsymbol{Tramo\ x \quad \rightarrow \quad \mathbf{sen}\frac{1}{n}\alpha \cdot \frac{1}{\cos\frac{x-1}{n}\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\frac{x}{n}\alpha}}$$

Por ejemplo, en un triángulo rectángulo dividido en 5 sectores iguales, el 3º tramo medirá seno del primer sector por las secantes 2ª y 3ª.

$$\boldsymbol{Tramo\ 3^{o} \quad \rightarrow \quad \mathbf{sen}\frac{1}{5}\alpha \cdot \frac{1}{\cos\frac{2}{5}\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\frac{3}{5}\alpha}}$$





También significa que, al igual que cualquier tangente es el seno a escala secante, si dividimos el triángulo en sectores iguales cada tramo de la tangente es el seno del primer tramo a escala de las secantes que delimitan dicho tramo. Todo es proporcional.

EL PUNTO ' T '

Voy a insertar un aspecto de mi cosecha de los triángulos rectángulos, o, al menos una propiedad que nunca me enseñaron. Si trazamos perpendiculares a las dos bisectrices de la trisección desde sus puntos de corte con la tangente, ambos segmentos se unen en un solo punto sobre la secante del triángulo. A ese punto, a falta de otro nombre, lo llamaré punto ' **T** '. Lo represento en la figura 34.

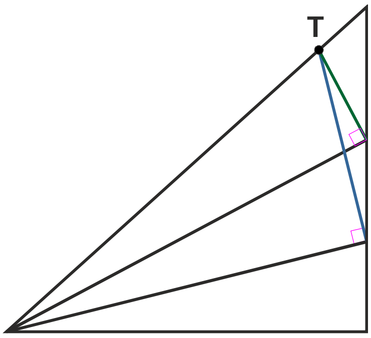


Figura 34

Si subdividimos el unitario en sectores de igual amplitud siempre habrá, al menos, un punto ' **T** '. Si lo subdividimos en más de tres sectores habrá más de uno, concretamente, la parte entera del número de sectores dividido por dos. Y eso es así porque los distintos puntos ' **T** ' emparejan las secantes interiores desde los extremos hacia dentro: la primera secante con la última, la segunda con la penúltima, y así hasta agotar las secantes. Si el número de secantes interiores es impar, la de en medio queda suelta como ocurre con la bisección en la que sólo hay una secante divisoria.

En la figura 35 - A represento un triángulo unitario dividido en 5 sectores iguales. Aparecen dos puntos ' **T** ' (5/2=2,5 la parte entera es 2), el ' $\mathbf{T_1}$ ' y el ' $\mathbf{T_2}$ '. Podemos observar que la perpendiculares que determinan lo puntos ' **T** ' se cruzan entre sí. Y si se construyen distintas divisiones notará que lo hacen siempre en alguna secante interior. En realidad esos puntos de cruce son puntos ' **T** ' de triángulos unitarios de ángulo más pequeño. Por ejemplo, si tomamos los tres primeros sectores, el punto donde se cruzan las dos primeras perpendiculares es el punto ' **T** ' de la trisección como se muestra en la figura 35 – B.

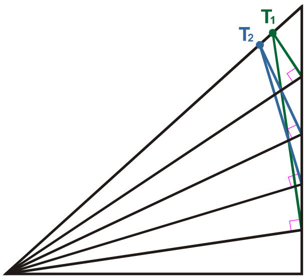


Figura 35 - A

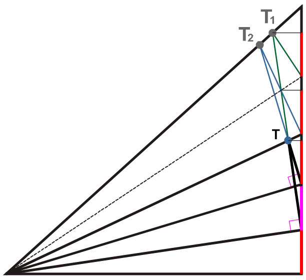


Figura 35 - B

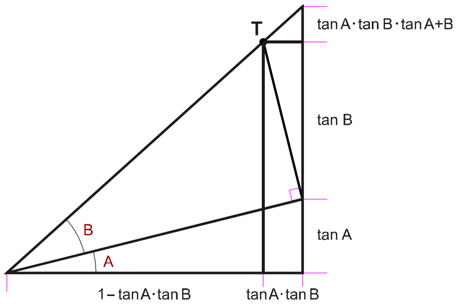


Figura 35 - C

El punto ‘ **T** ‘ tiene otra propiedad. Tomando sólo una de las secantes interiores, esta divide al unitario en dos sectores de Ángulos A y B. Si trazamos una horizontal por el punto ‘ **T** ‘, la altura del triángulo **siempre** quedará subdividida en tres tramos: *tan A, tan B* y *tan A · tan B · tan A+B* de abajo arriba. Si trazamos una vertical desde el punto ‘ **T** ‘, la base del triángulo **siempre** quedará subdividida en dos tramos de medidas, de izquierdas a derechas: *1 - tan A · tan B* y *tan A · tan B*, como muestra la figura 35 – C.

11 FÓRMULAS DEL ÁNGULO SUMA

11.1 TANGENTE DEL ÁNGULO SUMA

Voy a aprovechar la trisección del triángulo rectángulo para explicar las fórmulas del ángulo suma, aunque sólo sea necesaria una de las trisectrices. Pero lo demostrado aquí se puede aplicar después a cualquier subdivisión.

Aplicando la teoría del punto ‘ **T** ‘ a nuestra trisección veremos que la fórmula de la tangente del ángulo suma se puede demostrar por sí sola. En la figura 36 – A muestro el triángulo unitario particionado mediante la secante del primer sector. En la figura 36 – B las medidas de los segmentos resultantes:

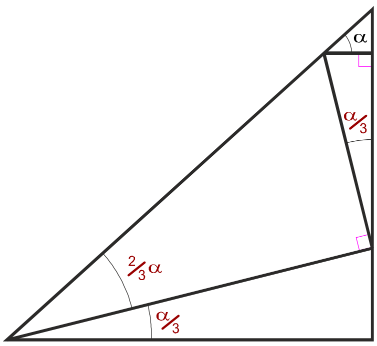


Figura 36 - A

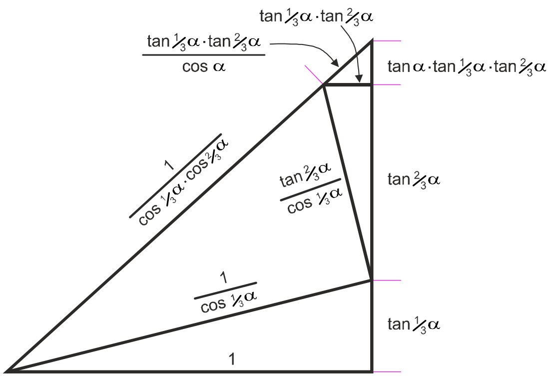


Figura 36 - B

Vamos a sumar los tres tramos de la tangente e igualarlos a *tan α*.

$$\tan\alpha = \tan{}^1\!/_3\alpha + \tan{}^2\!/_3\alpha + \tan\alpha\cdot\tan{}^1\!/_3\alpha\cdot\tan{}^2\!/_3\alpha \quad => \quad 3º\ sumando\ del\ 2º\ miembro\ al\ 1º$$

$$\tan\alpha - \tan\alpha\cdot\tan{}^1\!/_3\alpha\cdot\tan{}^2\!/_3\alpha = \tan{}^1\!/_3\alpha + \tan{}^2\!/_3\alpha \quad => \quad \tan\alpha\ \ factor\ común$$

$$\tan\alpha\cdot(1 - \tan{}^1\!/_3\alpha\cdot\tan{}^2\!/_3\alpha) = \tan{}^1\!/_3\alpha + \tan{}^2\!/_3\alpha \quad => \quad paréntesis\ al\ 2º\ miembro$$

$$\tan\alpha = \frac{\tan{}^1\!/_3\alpha + \tan{}^2\!/_3\alpha}{1 - \tan{}^1\!/_3\alpha\cdot\tan{}^2\!/_3\alpha} \quad o\ lo\ que\ es\ lo\ mismo: \quad \tan 3\alpha = \frac{\tan\alpha + \tan 2\alpha}{1 - \tan\alpha\cdot\tan 2\alpha}$$

Que es la fórmula de la tangente del ángulo suma:

$$\boxed{\mathbf{\tan(\mathit{A}+\mathit{B}) = \frac{\tan \mathit{A} + \tan \mathit{B}}{1 - \tan \mathit{A}\cdot\tan \mathit{B}}}}$$

Esta fórmula, también se puede representar gráficamente de forma similar a como lo hicimos con la bisección. Vea la figura 37.

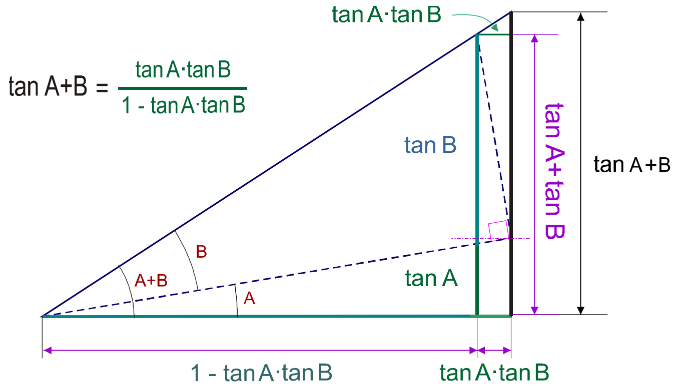


Figura 37

No hay mucho que explicar, la vertical que baja del punto ‘ T ‘ y el primer tramos de la base forman una división cuyo resultado es *tan(A+B)*; exactamente igual que en el capítulo 9.2 sobre la tangente del ángulo doble. Compare este dibujo con el de la figura 30.

11.2 COSENO DEL ÁNGULO SUMA

Vamos a repetir la operación anterior pero, esta vez, para variar, con la segunda trisectriz. Lo muestro en la figura 38 – A.

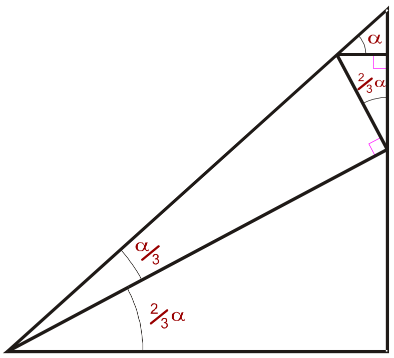


Figura 38 – A

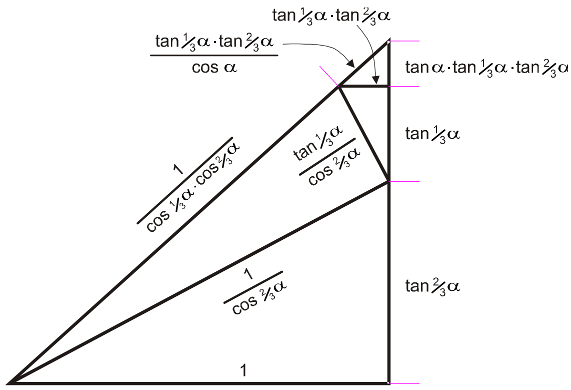


Figura 38 – B

La tangente del unitario ha quedado subdividida en los mismos tramos que antes aunque con los dos primeros permutados. En cuanto a las medidas del complementario del unitario, han quedado exactamente igual puesto que el punto ‘ T ‘ es el mismo.

Para variar, podemos sumar los tramos de la secante e igualarlos a *1/cos α*:

$$\frac{1}{cos\,\alpha} = \frac{1}{cos\,⅓\alpha \cdot cos\,⅔\alpha} + \frac{tan\,⅓\alpha \cdot tan\,⅔\alpha}{cos\,\alpha} \quad => \quad 2º\ sumando\ del\ 2º\ miembro\ al\ 1º$$

$$\frac{1}{cos\,\alpha} - \frac{tan\,⅓\alpha \cdot tan\,⅔\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{1}{cos\,⅓\alpha \cdot cos\,⅔\alpha} \quad => \quad restamos\ en\ el\ 1º\ miembro$$

$$\frac{1 - tan\,⅓\alpha \cdot tan\,⅔\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{1}{cos\,⅓\alpha \cdot cos\,⅔\alpha} \quad => \quad divisores\ al\ otro\ miembro$$

$$(1 - tan\,⅓\alpha \cdot tan\,⅔\alpha) \cdot (cos\,⅓\alpha \cdot cos\,⅔\alpha) = cos\,\alpha \quad => \quad resolvemos\ 1º\ miembro$$

$$cos\,⅓\alpha \cdot cos\,⅔\alpha - sen\,⅓\alpha \cdot sen\,⅔\alpha = cos\,\alpha \quad => \quad le\ damos\ la\ vuelta$$

$$cos\,\alpha = cos\,⅓\alpha \cdot cos\,⅔\alpha - sen\,⅓\alpha \cdot sen\,⅔\alpha \quad ó,\ lo\ que\ es\ lo\ mismo:$$

$cos\,3\alpha = cos\,\alpha \cdot cos\,2\alpha - sen\,\alpha \cdot sen\,2\alpha$ Que es la fórmula del coseno del ángulo suma:

$$\boxed{\mathbf{cos(A + B) = Cos\,A \cdot cos\,B - sen\,A \cdot sen\,B}}$$

Antes de continuar, y con el fin de recordar como razono la resolución de los triángulos rectángulos, vamos a calcular algunos segmentos de la figura 38 – B a mi manera.

Empezamos con que, en su conjunto, se trata de un triángulo unitario luego es el circunscrito. Significa que su base es el radio de la circunferencia y que éste mide 1. Con respecto a esa base, la trisectriz, que es la secante del triángulo que forma el primer sector, que, como es un triángulo de Ángulo $⅔\alpha$, medirá: *Base · Secante = Base/Coseno = 1/cos ⅔α*.

La Altura del triángulo principal del segundo sector, que es de Ángulo *⅓α,* como conocemos su base, se calcula considerando de que se trata de un triángulo circunscrito, en cuyo caso es una tangente. Pero su base, radio de la circunferencia a la que se circunscribe, no mide 1, sino $1/cos\,⅔\alpha$ como acabamos de ver, luego esa altura medirá:

$$Base \cdot tangente \quad => \quad \frac{1}{cos\,⅔\alpha} \cdot tan\,⅓\alpha \quad = \quad \frac{tan\,⅓\alpha}{cos\,⅔\alpha}$$

En cuanto al triángulo vertical del segundo sector, que según la Regla de la Subdivisión, es de Ángulo ⅔α, puesto que conocemos su hipotenusa, consideraremos que esa es el radio de la circunferencia en la que se inscribe y cuyo radio mide $\tan ⅓\alpha / \cos ⅔\alpha$. Respecto de ese radio, su altura medirá:

$$Secante \cdot seno \quad => \quad \frac{\tan ⅓\alpha}{\cos ⅔\alpha} \cdot \sin ⅔\alpha \quad = \quad \tan ⅓\alpha \cdot \tan ⅔\alpha$$

Notará que los cálculos son un poco largos de explicar, pero en la práctica el razonamiento es inmediato y este método facilita sustancialmente la resolución. Por eso, creo que no es necesario seguir resolviendo la figura 38 - B.

Retomando el hilo del capítulo, la representación gráfica de la fórmula del coseno del ángulo suma quedaría como muestro en las figuras siguientes.

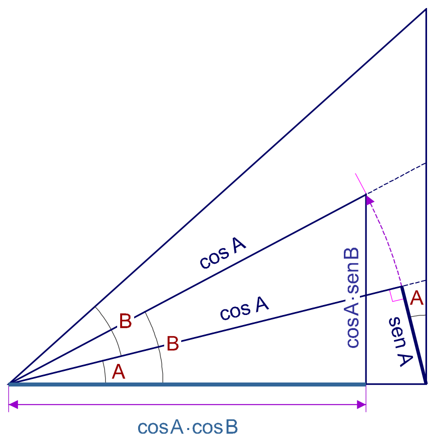


Figura 39 - A

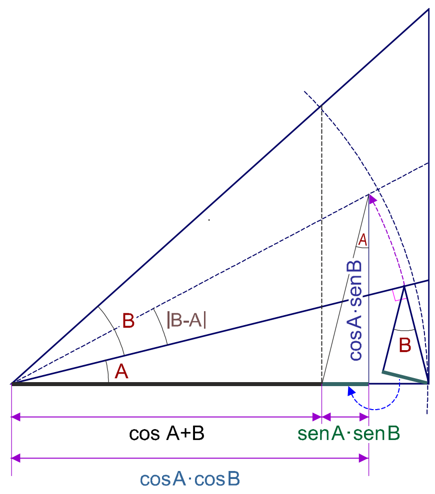
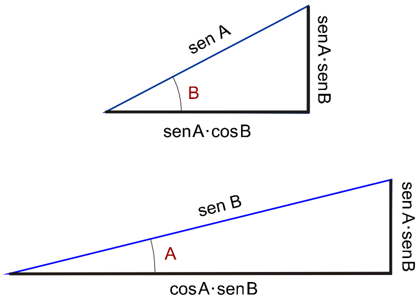


Figura 39 - B

EXPLICACIÓN: En la figura 39 – A utilizo el método del capítulo 4 para hallar el coseno alternativo del primer sector: $cos\ A$. Esa medida, la abato con un compás sobre la secante del segundo sector y construyo un triángulo de Ángulo B cuya base, respecto de esa secante, medirá $cos\ A \cdot cos\ B$, primera parte de la fórmula.

Después, en la figura 39 – B aprovecho el seno alternativo de *A* para construir un triangulito de Ángulo *B* cuya altura medirá $sen\ A \cdot sen\ B$. Segunda parte de la fórmula. Finalmente resto ambos segmentos para hallar $cos\ A{+}B$.

SI se fija en el dibujo de la derecha, con una altura $sen\ A \cdot sen\ B$ se pueden construir dos triángulo rectángulos. El de Ángulo B y base $sen\ A \cdot cos\ B$ que es el triangulito de la figura 39 – B, y el de Ángulo A y base $cos\ A \cdot sen\ B$. Pero vemos que en la figura 39 – A existe un segmento vertical que mide exactamente $cos\ A \cdot sen\ B$, luego lo puedo aprovechar para construir el triángulo rectángulo de ángulo A que dividirá la base en los tramos necesarios para que se cumpla la fórmula.



Por eso, la figura representativa de la fórmula será la de la figura 40.

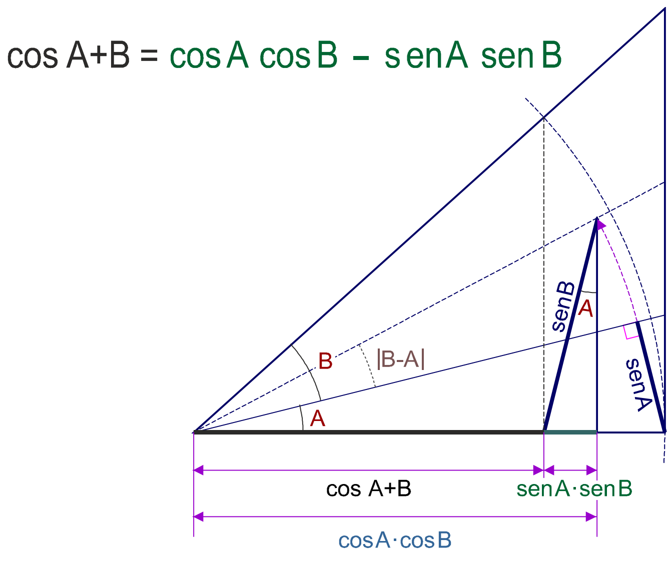


Figura 40

Este gráfico se puede dibujar de una sola vez aprovechando los trazos de la figura 39 – A y representar la resta dibujando la secante del triángulo vertical de Ángulo A.

He dibujado la fórmula sobre la trisección porque ya la conocemos, y para seguir con la dinámica de este trabajo, pero el dibujo de la figura 40 sirve para cualquier dupla de ángulos A y B.

11.3 SENO DEL ÁNGULO SUMA

Vamos a retomar el triángulo unitario de la figura 38 – A, y desde el punto ‘ T ‘ vamos a trazar una vertical como muestra la figura 41. Ya explicamos en el capítulo 10 como se construye y cuanto miden algunos de sus segmentos.

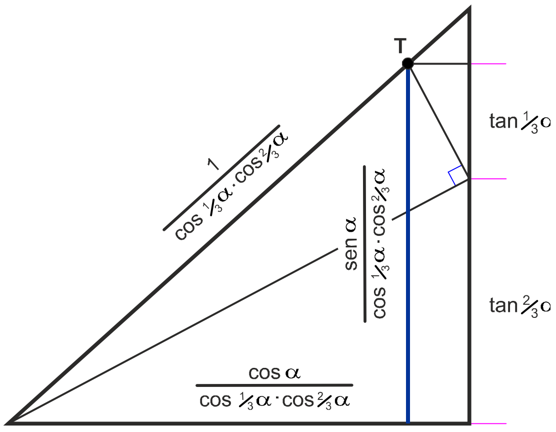


Figura 41

Nos aparece un triángulo rectángulo semejante al unitario pero con las siguientes medidas:

$$Base \ \rightarrow \ \frac{cos\ \alpha}{cos\ ⅓\alpha \cdot cos\ ⅔\alpha} \quad Altura \rightarrow \frac{sen\ \alpha}{cos\ ⅓\alpha \cdot cos\ ⅔\alpha} \quad Hipotenusa \rightarrow \frac{1}{cos\ ⅓\alpha \cdot cos\ ⅔\alpha}$$

También comprobamos que su altura, sobre la altura del unitario, mide: $\tan ⅓\alpha + \tan ⅔\alpha$. Podemos igualar ambas medidas.

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ ⅓\alpha \cdot cos\ ⅔\alpha} = tan\ ⅓\alpha + tan\ ⅔\alpha \quad => \quad multiplicamos\ por\ \ cos\ ⅓\alpha$$

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ ⅔\alpha} = sen\ ⅓\alpha + cos\ ⅓\alpha\ tan\ ⅔\alpha \quad => \quad multiplicamos\ por\ \ cos\ ⅔\alpha$$

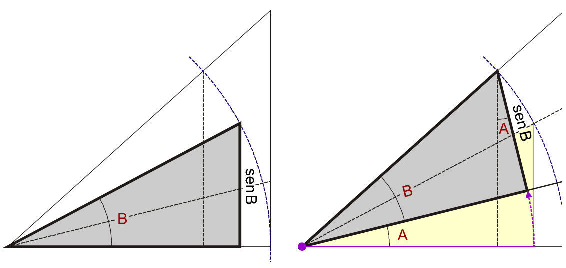
$$sen\ \alpha = \ sen\ ⅓\alpha \cdot cos\ ⅔\alpha + sen\ ⅔\alpha \cdot cos⅓\alpha \quad ó, lo\ que\ es\ lo\ mismo:$$

$$sen\ 3\alpha = \ sen\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha + sen\ 2\alpha \cdot cos\alpha$$

Que es la fórmula del seno del ángulo suma:

$$\boxed{\boldsymbol{sen\ (A+B) = \ sen\ A \cdot \cos B + cos\ A \cdot sen\ B}}$$

Antes de representar esta fórmula esquemáticamente, me gustaría que nos fijáramos en el dibujo de la derecha. Primero se representa el triángulo unitario inscrito de Ángulo *B*. En el segundo dibujo, se ha pivotado el triángulo sobre el vértice de su Ángulo: *A* grados. Su secante queda sobre la del unitario y su base sobre la secante del sector de Ángulo *A*.



Partimos de un Unitario dividido en dos sectores de Ángulos *A* y *B*. Utilizo el método alternativo para hallar el seno del ángulo *A* del primer sector, y crear así el TRIÁNGULO DE INICIO de la figura 42. Después, desde su mismo vértice, construyo un triángulo rectángulo de Ángulo *B* y secante *sen A* abriendo el foco; su base medirá *sen A · cos B*. Finalmente empleo la técnica explicada más arriba para trazar un *sen B* inusual: primero creo un triángulo rectángulo de Ángulo *B* con base la del Unitario, hallo su seno por el método tradicional y, finalmente pivoto el conjunto hasta que su hipotenusa coincida con la secante del Unitario. Apreciará en la figura 42 que se puede crear así un nuevo triángulo rectángulo de base *cos A · sen B*, y, que si prolongamos dicha base hasta la del Unitario, ésta medirá exactamente *sen A+B*.

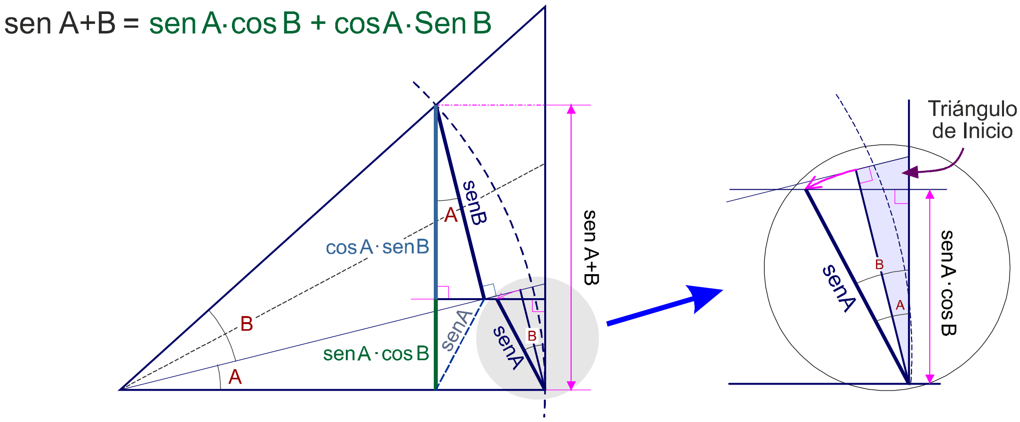


Figura 42

Con lo estudiado en los esquemas de los dos últimos capítulos podemos formar el curioso triángulo de la figura 43:

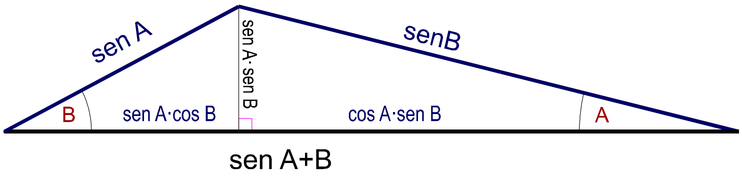


Figura 43

A éste no le he puesto nombre.

12 FÓRMULAS DEL ÁNGULO TRIPLE

12.1 *COSENO DEL ÁNGULO TRIPLE*

Ahora vamos a subdividir al unitario de una manera que me agrada particularmente y que muestro en la figura 44 - A. Con una perpendicular a la segunda trisectriz que parte del extremo de la primera trisectriz más una horizontal para formar un complementario del unitario. En la figura 44 – B se reseñan las medidas.

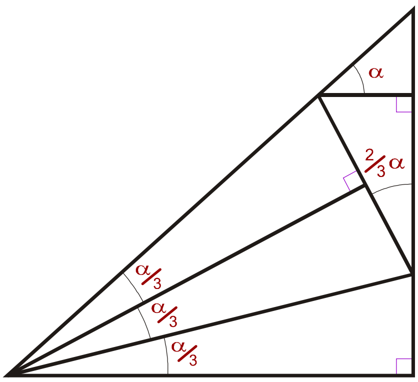


Figura 44 - A

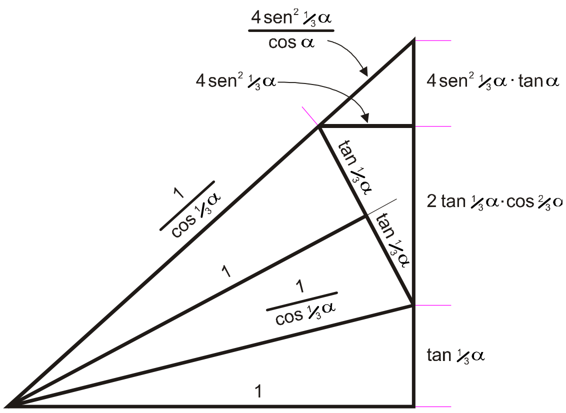


Figura 44 - B

Aparecen cinco triángulos rectángulos. Tres idénticos de Ángulo $⅓\alpha$, los principales de cada sector de la trisección, uno vertical de Ángulo $⅔\alpha$ que abarca los dos últimos sectores, más un complementario del unitario. La base del complementario debería medir $2\tan ⅓\alpha \cdot \operatorname{sen} ⅔\alpha$. Sin embargo si aplicamos la fórmula: $\operatorname{sen} 2A = 2\operatorname{sen} A \cdot \cos A$, nos da:

$2\,tan\,⅓\alpha \cdot 2\,sen\,⅓\alpha \cdot cos\,⅓\alpha = 4sen^2⅓\alpha$, que también utilizo para expresar las medidas de la altura y de la secante del triángulo rectángulo complementario del unitario.

La secante del unitario ha quedado partida en dos tramos, que si los sumo y los igualo a $1/cos\,\alpha$ nos dará:

$$\frac{1}{cos\,\alpha} = \frac{1}{cos⅓\alpha} + \frac{4sen^2⅓\alpha}{cos\,\alpha} \quad => \quad el\ 2º\ sumando\ del\ 2º\ miembro\ al\ 1º$$

$$\frac{1}{cos\,\alpha} - \frac{4sen^2⅓\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{1}{cos⅓\alpha} \quad => \quad efectuamos\ la\ resta\ del\ 1º\ miembro$$

$$\frac{1 - 4sen^2⅓\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{1}{cos⅓\alpha} \quad => \quad aplicamos\ \ sen^2A = 1 - cos^2A$$

$$\frac{1 - (4 - 4cos^2⅓\alpha)}{cos\,\alpha} = \frac{1}{cos⅓\alpha} \quad => \quad resolvemos\ el\ dividendo\ del\ 1º\ miembro$$

$$\frac{4cos^2⅓\alpha - 3}{cos\,\alpha} = \frac{1}{cos⅓\alpha} \quad => \quad cruzamos\ divisores\ y\ resolvemos$$

$$4cos^3⅓\alpha - 3cos⅓\alpha = cos\,\alpha \quad => \quad \boldsymbol{cos\,\alpha = 4cos^3⅓\alpha - 3cos⅓\alpha}$$

Que es la conocida fórmula del coseno del ángulo triple:

$$\boxed{\mathbf{cos\,3A = 4cos^3A - 3cosA}}$$

Represento esa fórmula mediante la figura 45:

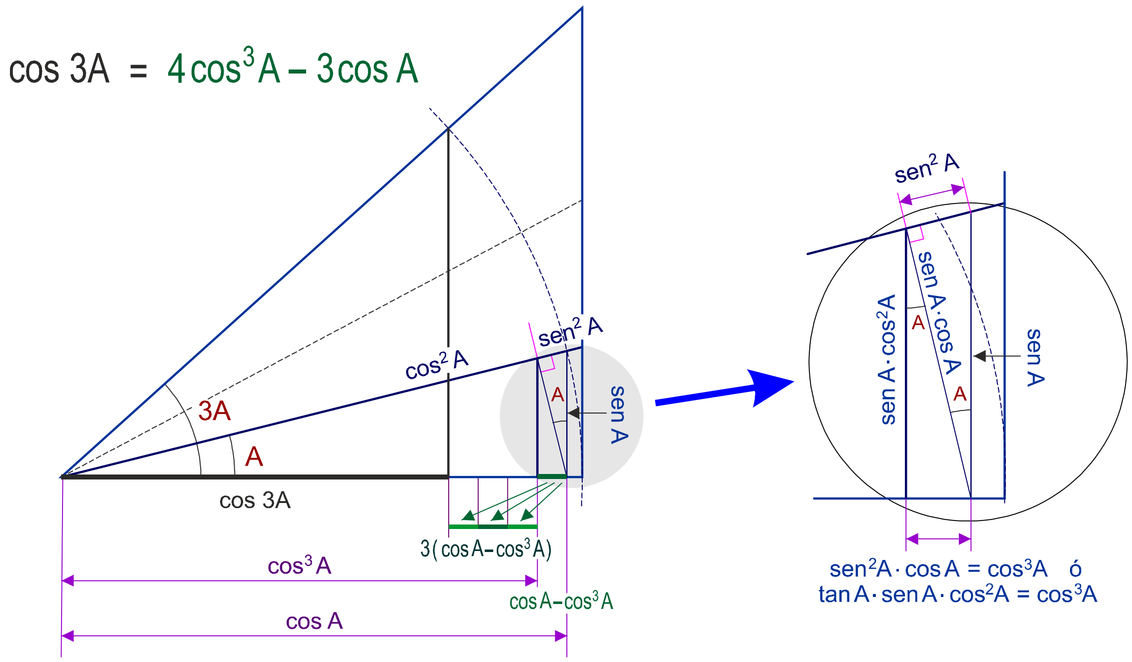
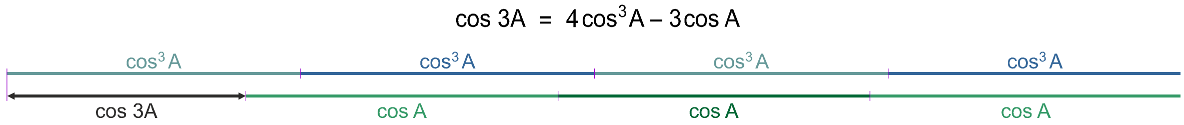
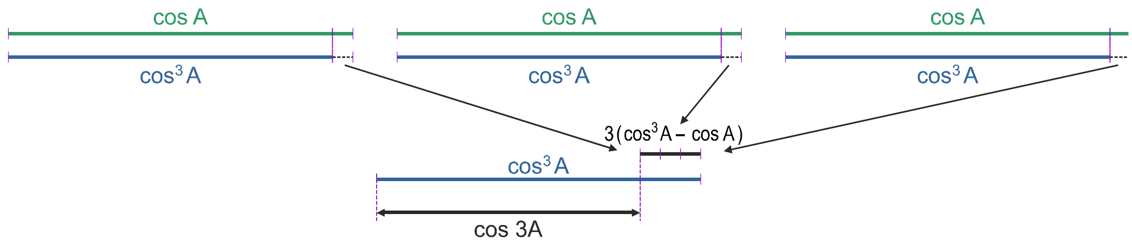


Figura 45

Primero dibujo *sen A* de manera tradicional, y después subdivido el triángulo principal del primer sector como en la figura 12 - B del método alternativo para hallar *sen² A* y *cos² A*. Finalmente con un segmento vertical consigo $cos^3 A$. Quedaría colocar 4 segmentos $cos^3 A$, uno a continuación del otro, y restarles 3 segmentos $cos A$. Es decir, algo así:



Pero nos queda un dibujo muy ancho e incómodo. En definitiva, la fórmula nos dice que hay que restarle 3 segmentos $cos A$ a 4 segmentos $cos^3 A$, y podemos hacerlo por la "cuenta de la vieja": como $cos A$ es mayor que $cos^3 A$, cada $cos A$ anula a un $cos^3 A$, y sobra un trocito $cos A$- $cos^3 A$, que, si los juntamos los tres que sobran y se los quitamos al $cos^3 A$ restante, nos quedará exactamente $cos\ 3A$, como se puede apreciar en el esquema siguiente:



En realidad, para simplificar el esquema, no he hecho más que representar la fórmula: $cos\,3A = cos^3A - 3(cosA - cos^3A)$, que deriva de la anterior.

12.2 SENO DEL ÁNGULO TRIPLE

Retomamos el esquema de la figura 44 – A, pero ahora trazaremos una vertical hacia abajo desde el vértice del Ángulo del complementario. Esta divide a la base del unitario en dos tramos; el segundo medirá lo que mide la base del complementario, es decir: $4sen^2 ⅓\alpha$. El primero será la base de un triángulo rectángulo semejante al unitario cuyas medidas son las del inscrito a escala $1/cos⅓\alpha$:

$$\text{Hipotenusa: } \frac{1}{\cos ⅓\alpha}, \qquad \text{base: } \frac{\cos\alpha}{\cos ⅓\alpha} \qquad \text{y altura: } \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos ⅓\alpha}$$

Esas medidas se reflejan en la figura 46:

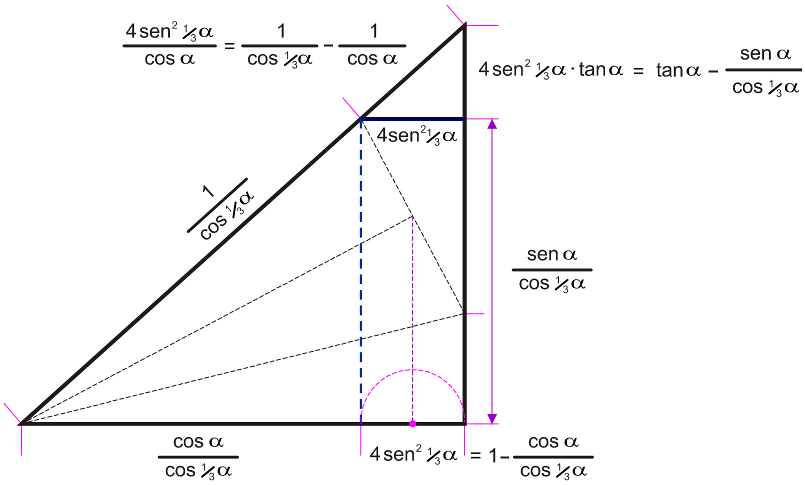


Figura 46

Se ve claramente que:

$$4sen^2 ⅓\alpha = 1 - \frac{cos\,\alpha}{cos\,⅓\alpha} \quad y \quad \frac{cos\,\alpha}{cos\,⅓\alpha} = 1 - 4sen^2 ⅓\alpha$$

Es decir: $\boxed{\boldsymbol{4sen^2 A = 1 - \frac{cos\,3A}{cos\,A}}}$ y $\boxed{\boldsymbol{\frac{cos\,3A}{cos\,A} = 1 - 4sen^2 A}}$

Por cierto, 4 $sen^2 ⅓\alpha$ es el doble verseno del Ángulo $⅔\alpha$. También lo he querido insinuar en la figura 46 con el semicírculo magenta, a modo de curiosidad.

Por otra parte, también podemos apreciar que los dos primeros tramos de la altura del unitario ahora suman $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos ⅓\alpha}$, podemos igualarlo a las medidas de la figura 44 – B:

$$\frac{sen\,\alpha}{cos\,⅓\alpha} = tan\,⅓\alpha + 2\,tan\,⅓\alpha \cdot cos\,⅔\alpha \quad => \quad Sacamos\ \ tan\,⅓\alpha\ \ factor\ común$$

$$\frac{sen\,\alpha}{cos\,⅓\alpha} = tan\,⅓\alpha\,(1 + 2\,cos\,⅔\alpha) \quad => \quad pasamos\ \ cos\,⅓\alpha\ \ al\ 2º\ miembro$$

$$sen\,\alpha = sen\,⅓\alpha\,(1 + 2\,cos\,⅔\alpha) \quad => \quad aplicamos:\ cos\,⅔\alpha = cos^2 ⅓\alpha - sen^2 ⅓\alpha$$

$$sen\,\alpha = sen\,⅓\alpha\,(1 + 2cos^2 ⅓\alpha - 2sen^2 ⅓\alpha) \quad => \quad aplicamos\ cos^2 ⅓\alpha = 1 - sen^2 ⅓\alpha$$

$$sen\,\alpha = sen\,⅓\alpha\,(1 + 2 - 2sen^2 ⅓\alpha - 2sen^2 ⅓\alpha) \quad => resolvemos\ paréntesis$$

$$sen\,\alpha = sen\,⅓\alpha\,(3 - 4sen^2 ⅓\alpha) \quad => distribuimos\ \ sen\,⅓\alpha$$

$$sen\,\alpha = 3\,sen\,⅓\alpha - 4sen^3 ⅓$$

Que es la conocida fórmula del seno del ángulo triple:

$$\boxed{\boldsymbol{sen\,3A = 3\,sen\,A - 4sen^3 A}}$$

En la figura 47 represento esquemáticamente la fórmula:

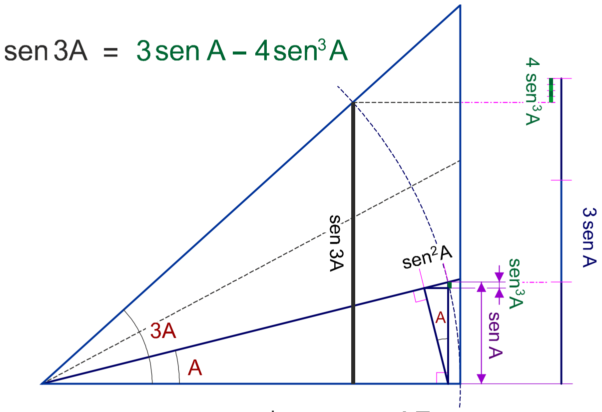


Figura 47

He procedido como en el caso del coseno del ángulo triple. Primero he hallado el seno de manera tradicional, después he dividido el triángulo principal mediante el método alternativo para dibujar $sen^2 A$, y finalmente, con un segmento horizontal he hallado $sen^3 A$. Para completar el esquema, he unido tres segmentos *sen A* en vertical a los que he restado 4 segmentos $sen^3 A$. Se ve que el resultado de la resta coincide perfectamente con *sen 3A*.

Esta fórmula no ha sido necesario simplificarla para que cupiera en la página, aunque, procediendo como antes, podría haber representado: $\operatorname{sen} 3A = 3(senA - sen^3 A) - sen^3 A$.

12.3 TANGENTE DEL ÁNGULO TRIPLE

La solución para hallar la fórmula de la tangente del ángulo triple sería, dividir entre sí las fórmulas de los dos capítulos anteriores. Supongo que esa es una solución tradicional, pero no se corresponde al título de este trabajo. Por ello voy a buscarlo a mi manera, según lo aquí aprendido.

Retomamos la trisección del triángulo rectángulo unitario, de la figura 36 del capítulo 11.1, donde cada tramos de la altura miden: $tan\, ⅓\alpha$, $tan\, ⅔\alpha$ y $tan\, \alpha \cdot tan\, ⅔\alpha \cdot tan\, ⅓\alpha$ respectivamente.

Sabemos que: $tan\, ⅔\alpha = \dfrac{2\, tan\, ⅓\alpha}{1 - tan^2 ⅓\alpha}$

Luego: $tan\, \alpha \cdot tan\, ⅓\alpha \cdot tan\, ⅔\alpha = tan\, \alpha \cdot tan\, ⅓\alpha \cdot \dfrac{2\, tan\, ⅓\alpha}{1 - tan^2 ⅓\alpha} = tan\, \alpha \cdot \dfrac{2tan^2 ⅓\alpha}{1 - tan^2 ⅓\alpha}$

Ahora podemos sumar los tres tramos:

$$tan\, ⅓\alpha + tan\, ⅔\alpha + tan\, ⅓\alpha \cdot tan\, ⅓\alpha \cdot tan\, ⅔\alpha = tan\, ⅓\alpha + \frac{2\, tan\, ⅓\alpha}{1 - tan^2 ⅓\alpha} + tan\, \alpha \cdot \frac{2tan^2 ⅓\alpha}{1 - tan^2 ⅓\alpha}$$

Significa que:

$$tan\, \alpha = tan\, ⅓\alpha + \frac{2\, tan\, ⅓\alpha}{1 - tan^2 ⅓\alpha} + tan\, \alpha \cdot \frac{2tan^2 ⅓\alpha}{1 - tan^2 ⅓\alpha} \quad => \quad sumamos\ mismos\ divisores$$

$$tan\, \alpha = tan\, ⅓\alpha + \frac{2\, tan\, ⅓\alpha + 2(tan\, \alpha \cdot tan^2 ⅓\alpha)}{1 - tan^2 ⅓\alpha} \quad => \quad sacamos\ \ tan\, ⅓\alpha\ \ fasctor\ común$$

$$tan\, \alpha = tan\, ⅓\alpha \left(1 + \frac{2 + 2(tan\, \alpha \cdot tan⅓\alpha)}{1 - tan^2 ⅓\alpha}\right) \quad => \quad pasamos\ \ tan\, ⅓\alpha\ \ al\ otro\ miembro$$

$$\frac{tan\, \alpha}{tan\, ⅓\alpha} = 1 + \frac{2 + 2(tan\, \alpha \cdot tan⅓\alpha)}{1 - tan^2 ⅓\alpha} \quad => \quad ejecutamos\ la\ suma$$

$$\frac{tan\, \alpha}{tan\, ⅓\alpha} = \frac{3 + 2(tan\, \alpha \cdot tan⅓\alpha) - tan^2 ⅓\alpha}{1 - tan^2 ⅓\alpha} \quad => \quad multiplicamos\ los\ 2\ miembros\ por\ \ tan\, ⅓\alpha$$

$$tan\, \alpha = \frac{3\, tan\, ⅓\alpha + 2(tan\, \alpha \cdot tan^2 ⅓\alpha) - tan^3 ⅓\alpha}{1 - tan^2 ⅓\alpha} \quad => \quad pasamos\ 2º\ sumando\ al\ 1º\ miembro$$

$$tan\, \alpha - \frac{2(tan\, \alpha \cdot tan^2 ⅓\alpha)}{1 - tan^2 ⅓\alpha} = \frac{3\, tan\, ⅓\alpha - tan^3 ⅓\alpha}{1 - tan^2 ⅓\alpha} \quad => \quad sacamos\ \ tan\, \alpha\, factor\ común$$

$$tan\, \alpha \left(1 - \frac{2tan^2 ⅓\alpha}{1 - tan^2 ⅓\alpha}\right) = \frac{3\, tan\, ⅓\alpha - tan^3 ⅓\alpha}{1 - tan^2 ⅓\alpha} \quad => \quad efectuamos\ la\ resta\ del\ 1º\ miembro$$

$$tan\, \alpha \left(\frac{1 - 3tan^2 ⅓\alpha}{1 - tan^2 ⅓\alpha}\right) = \frac{3\, tan\, ⅓\alpha - tan^3 ⅓\alpha}{1 - tan^2 ⅓\alpha} \quad => \quad eliminamos\ divisores$$

$$tan\, \alpha\, (1 - 3tan^2 ⅓\alpha) = 3\, tan\, ⅓\alpha - tan^3 ⅓\alpha \quad => \quad pasamos\ 2º\ factor\ del\ 1º\ miembro\ al\ 2º$$

$tan\, \alpha = \dfrac{3\, tan\, ⅓\alpha - tan^3 ⅓\alpha}{1 - 3tan^2 ⅓\alpha}$ que es la fórmula buscada:

$$\boxed{\boldsymbol{tan\, 3A = \frac{3\, tan\, A - tan^3 A}{1 - 3tan^2 A}}}$$

Represento la fórmula esquemáticamente en la figura 48.

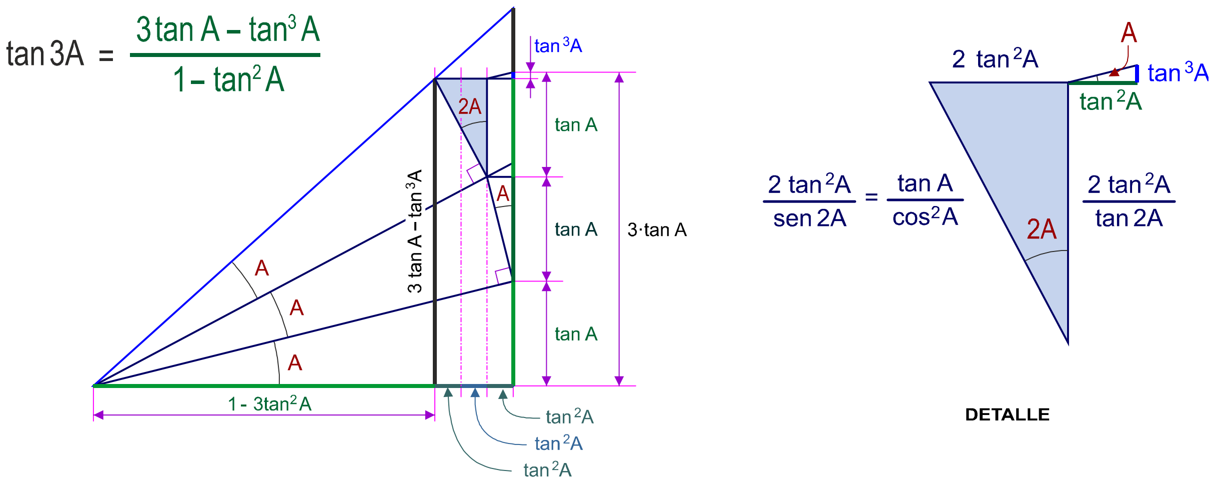


Figura 48

Si tratamos los dos primeros sectores del unitario como una bisección, podemos representar el segmento $tan^2 A$ como lo hicimos en la figura 29 – B del capítulo 9.2. Después podemos pintar, por un lado, tres segmentos *tan A* sobre la altura del unitario, y por otro, tres segmentos $tan^2 A$ sobre la base; lo que sobra de base medirá: $1 - 3tan^2 A$.

Vamos a fijamos ahora en los dos triángulos del detalle de la derecha de la figura 48. El más pequeño es un triángulo de Ángulo A cuya base es la proyección de $tan^2 A$ desde la base de Unitario, por lo que su altura mide $tan^3 A$, la cual queda por debajo del extremo superior del conjunto de tres segmentos *tan A*. En cuanto al segundo triángulo, el de fondo azulón, en principio no conocemos su Ángulo, sin embargo sabemos, mirando la base del Unitario, que su altura mide $2\,tan^2 A$. Su base, si el Ángulo del triángulo fuera $2A$, según esa altura mediría $2\,tan^2 A/tan\,2A$. Esa magnitud vemos que es menor que $tan\,A$, concretamente $tan^3 A$ menos, significa que si le añadimos $tan^3 A$ debería medir $tan\,A$. Vamos a ver si es cierto.

$$\frac{2\,tan^2 A}{tan2A} + tan^3 A = \frac{2\,tan^2 A + (tan2A \cdot tan^3 A)}{tan2A} \quad hemos\ efectuado\ la\ suma$$

$$= tan^2 A\,\frac{2 + tan2A \cdot tanA}{tan2A} \quad hemos\ sacado\ tan^2 A\ factor\ común$$

Hemos visto, en el capítulo 7, que: $2 + tan2A \cdot tanA = \dfrac{tan2A}{tanA}$ Luego:

$$tan^2 A\,\frac{2 + tan2A \cdot tanA}{tan2A} = tan^2 A\,\frac{tan2A/_{tanA}}{tan2A} = tan^2 A\,\frac{1}{tanA} = tanA$$

Es pues cierto que $\dfrac{2\,tan^2 A}{tan2A} + tan^3 A = tanA$

Significa que, efectivamente la base del triángulo azul mide *2tan² A/tan 2ª* y, puesto que sabemos que su altura *2tan² A*, su Ángulo es 2A, y que, en consecuencia, su hipotenusa es perpendicular a la segunda trisectriz, y la figura 48 es cierta.

13 RESUMEN: SUBDIVISION POR EL PUNTO ‘ T ‘.

Llegados a este punto, me van a permitir una pequeña reflexión. Podemos subdividir el triángulo rectángulo de infinitas maneras: mediante segmentos horizontales, verticales, oblicuos. Pero parece que el triángulo rectángulo sólo admite algunas particiones. Subdivisiones coherentes que hacen que todo encaje y que permiten formular las ecuaciones fundamentales.

Partiendo el triángulo Unitario mediante el segmento seno, conseguimos el Inscrito. Con un segmento perpendicular a la secante del Unitario que pase por el vértice del ángulo recto, nos salen seno y coseno en distinta ubicación y permite concluir que $sen^2\,\alpha + cos^2\alpha = 1$.

En el capítulo 9.1, si repasamos las figuras 28 – A y 28 – B, nos dimos cuenta que si duplicábamos, hacia arriba, el segmento que mide seno del ángulo medio por coseno del ángulo medio, obteníamos una línea que si la desplazamos hacia la izquierda hasta que su arte superior toque la secante, es decir la misma distancia hacia la izquierda como la que hay entre esta y la tangente, obteníamos exactamente el seno del ángulo.

Pero el esquema que ha dado lugar a esta reflexión ha sido la configuración de la figura 40 del capítulo 11.2. Subdivido el Unitario mediante una secante cualquiera para obtener dos sectores de Ángulos A y B respectivamente. Hallo el seno del primer sector, el de Ángulo A, con el método alternativo, lo proyecto sobre una secante correspondiente a un Ángulo del segundo sector, B. Como resultado de esa proyección hallo un punto que resulta que es el vértice de un triángulo de Ángulo A, el ángulo de partida, que encaja perfectamente con el Inscrito de Ángulo A+B. Ese punto en cuestión podría haber quedado a otra distancia, o el triángulo encajado podría haber sido de cualquier otro Ángulo, pero no, se ubica perfectamente.

Cabe pensar que como las subdivisiones se hacen mediante segmentos que forman ángulos proporcionales el resultado es coherente y proporcionado. Pero otras subdivisiones que emplean esos mismos ángulos y segmentos dan resultados totalmente incoherentes: segmentos que miden fracciones complicadas de senos y cosenos, ángulo como *0,756 ó 0,09666*, etc. Por eso pienso que algunas particiones son inherentes al triángulo rectángulo, y una de las más trascendente es la del punto ‘ T ‘, pues con ella podemos hallar, de forma muy directa, todas las fórmulas del ángulo suma, y por ende las del ángulo doble.

En el capítulo 11.1 hallamos la fórmula de la tangente del ángulo suma mediante una subdivisión específica del Unitario. En el capítulo 11.2 la del coseno del ángulo suma con una figura semejante, y en el 11.3 la del seno del ángulo suma, pero con otra figura. Si se fija bien, siempre hemos utilizado la subdivisión por el punto ‘ T ‘. Vamos a comprobarlo; sirva de paso de resumen.

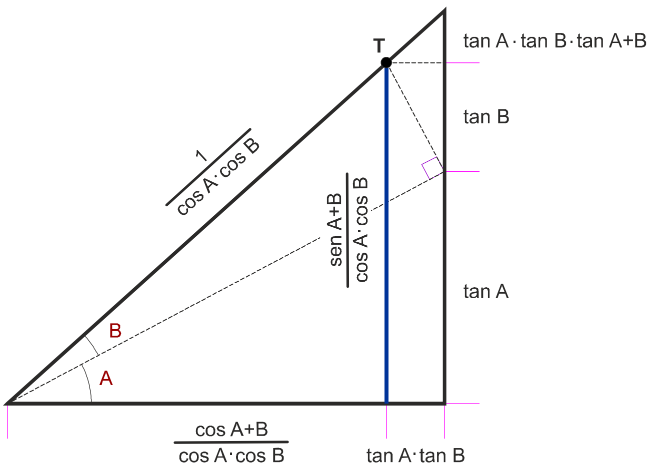


Figura 49

La figura 49 representa la subdivisión por el punto ' T 'con las medidas más importantes. Comprobamos que con el segmento vertical obtenemos un triángulo rectángulo de ángulo $A+B$ cuyas medidas son las del Inscrito a escala $1/\cos A \cdot \cos B$.

Sumando los tres segmentos de la altura del Unitario, e igualándola a $\tan A+B$, se obtiene la fórmula de la tangente del ángulo suma en 3 sencillos pasos:

$\tan A + B = \tan A + \tan B + \tan A \cdot \tan B \cdot \tan A + B$ => $3º\ sumando\ a\ 1º\ miembro$

$\tan A + B - \tan A \cdot \tan B \cdot \tan A + B = \tan A + \tan B$ => $\tan A + B\ \ factor\ común$

$\tan A + B\,(1 - \tan A \cdot \tan B) = \tan A + \tan B$ => $paréntesis\ al\ 2º\ miembro$

$$\mathbf{\tan A + B = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}}$$

El segmento vertical, el de la subdivisión, se puede medir de dos maneras. Igualando las dos medidas se obtiene la fórmula del seno del ángulo suma en dos pasos.

$\dfrac{sen\ A + B}{\cos A \cdot \cos B} = \tan A + \tan B$ => $dividendo\ del\ 1º\ al\ 2º\ miembro$

$sen\ A + B = \cos A \cdot \cos B \cdot (\tan A + \tan B)$ => $distributiva\ más\ sen = tan \cdot cos$

$$\boldsymbol{sen\ A + B = \mathbf{sen}\,A \cdot \cos B + \cos A \cdot sen\ B}$$

Finalmente, sumando los dos tramos de la base del Unitario e igualando la suma a 1, se obtiene la fórmula del coseno del ángulo suma, también en tres pasos.

$\dfrac{cos\ A + B}{\cos A \cdot \cos B} + \tan A \cdot \tan B = 1$ => $2º\ sumando\ del\ 1º\ al\ 2º\ miembro$

$\dfrac{cos\ A + B}{\cos A \cdot \cos B} = 1 - \tan A \cdot \tan B$ => $dividendo\ del\ 1º\ al\ 2º\ miembro$

$cos\ A + B = \cos A \cdot \cos B \cdot (1 - \tan A \cdot \tan B)$ => $distributiva\ más\ sen = tan \cdot cos$

$$\boldsymbol{cos\ A + B = \cos A \cdot \cos B - \mathbf{sen}\,A \cdot \mathbf{sen}\,B}$$

Si hacemos $B = A$ obtendríamos las fórmulas del ángulo doble. Haciendo $B = 2A$, sustituyendo y reduciendo, llegaríamos a las del ángulo triple.

ELEMPLO:

$sen\ 3A = sen(A + 2A)$ => $aplicamos\ fórmula\ seno\ ángulo\ suma$

$sen\ 3A = sen\ A \cdot \cos 2A + \cos A \cdot sen\ 2A$ => $Sustituimos\ razones\ 2A\ por\ fórmulas$

$sen\ 3A = sen\ A \cdot (cos^2 A - sen^2 A) + \cos A \cdot (2sen\ Acos\ A)$ => $resolvemos\ parentesis$

$sen\ 3A = sen\ A \cdot cos^2 A - sen^3 A + 2\ senA \cdot cos^2 A$ => $sumo\ 1º +\ 3º\ factores$

$sen\ 3A = 3sen\ A \cdot cos^2 A - sen^3 A$ => $cos^2 A =\ 1 - sen^2 A$

$sen\ 3A = 3sen\ A \cdot (1 - sen^2 A) - sen^3 A$ => $Distribución\ y\ suma$

$$\boldsymbol{sen\ 3A = 3sen\ A - 4sen^3 A}$$

Con la subdivisión por el punto ' T ' se pueden hallar fórmulas tan sencillas como la 1º de la secante del capítulo 7, resultado del Teorema de Pitágoras. Utilizo la fórmula 50 – A para representar la demostración mediante el punto ' T ' y la 50 – B para extrapolar la explicación a cualquier ángulo en general.

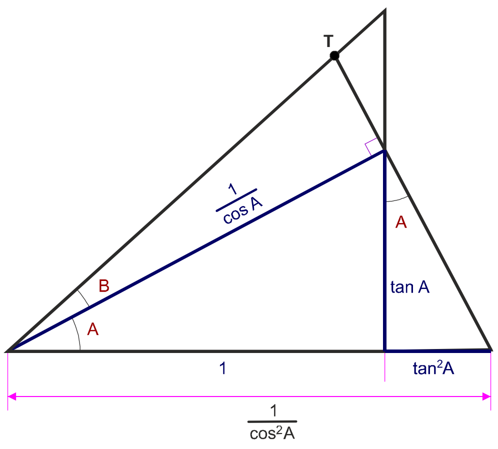


Figura 50 - A

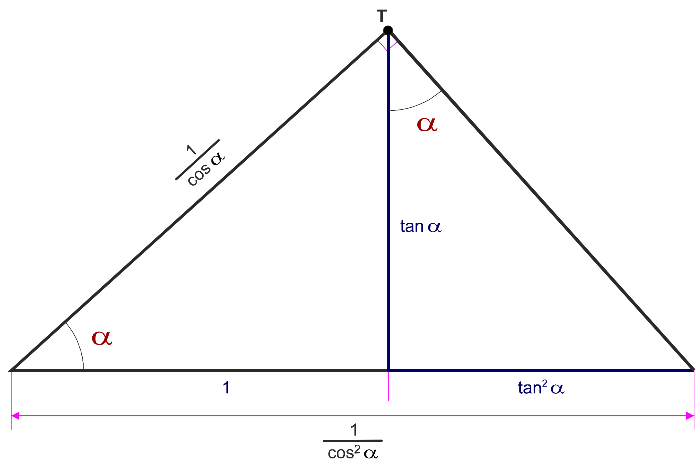


Figura 50 - B

Nos centramos en la primera figura. Comprobamos que la magnitud de la línea base se puede expresar de dos maneras. Igualamos ambas medidas y nos da:

$$\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + tan^2 A \;\; => \;\; aplicamos\ raiz\ cuadrada \;\; => \;\; \boldsymbol{\frac{1}{\cos A} = \sqrt{1 + tan^2 A}} \;\; directamente.$$

En la figura 50 – B he procedido de la misma manera, pero con el Ángulo del unitario ¿podría decirse que el vértice del ángulo complementario es el punto ' T ' de una hipotética división en dos sectores de Ángulos α y 0 respectivamente?

Por otro lado:

$$1 + tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} \qquad => \quad dividendo\ al\ 1º\ miembro$$

$$\cos^2 A \cdot (1 + tan^2 A) = 1 \quad => \quad distribuimos \text{ y resolvemos}$$

$$\boldsymbol{\cos^2 A + \mathrm{sen}^2 A = 1}$$

Sin comentarios.

Con la subdivisión por el punto ' T ' podemos resolver cualquier fórmula primaria de la trigonometría de manera muy sencilla.

Por último, reseñar que, si bien las razones trigonométricas pertenecen al Ángulo, las particiones del triángulo rectángulo pertenecen al Triángulo Rectángulo en general, y no dependen del Ángulo del mismo.

Es decir: el seno de un ángulo concreto es diferente al de otro ángulo, pero, si no varía el Ángulo, permanecerá constante a dicho Ángulo independientemente del tamaño de la figura.

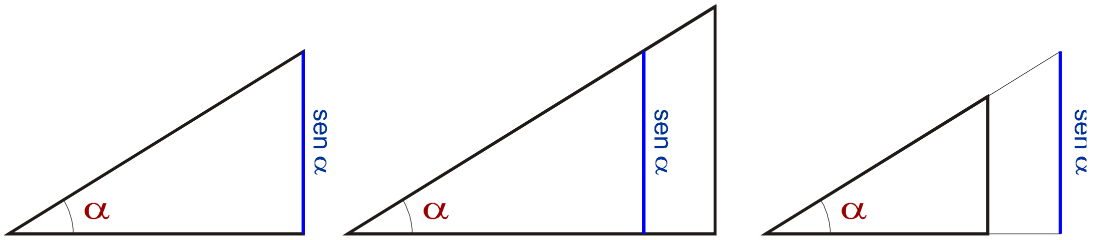


Figura 51

Sin embargo, una partición determinada de cualquier triángulo rectángulo siempre refleja las mismas magnitudes independientemente del Ángulo de dicho triángulo. Por ejemplo, siempre que divida cualquier triángulo rectángulo por el punto ' T ', la altura siempre quedará descompuesta en los mismos tramos: *tan A, tan B y tan A · tan B · tan A+B*; sea cual sea el Ángulo.

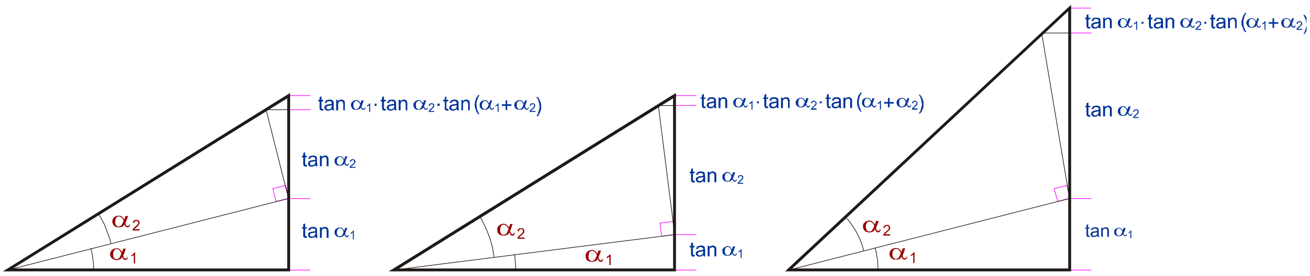


Figura 52

14 FÓRMULAS DEL ÁNGULO RESTA

14.1 COSENO DEL ÁNGULO RESTA

Ya conocemos la fórmula $1 + \tan\alpha \cdot \tan ½\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ de la bisección. En la trisección se escribiría: $1 + \tan ⅔\alpha \cdot \tan ⅓\alpha = \frac{1}{\cos ⅔\alpha}$

Ambas fórmulas derivan las fórmulas generales, yo diría que primigenias:

$$\boxed{\frac{\mathbf{cos}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})}{\mathbf{cos}\,\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{cos}\,\boldsymbol{B}} = \mathbf{1} + \mathbf{tan}\,\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{tan}\,\boldsymbol{B}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{cos}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{cosA}\cdot\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{sen}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{sen}\,\boldsymbol{B}}$$

De la que pueden derivar todas las fórmulas aquí vistas incluida la famosa: $1 = cos^2A + sen^2A$, aunque no lo parezca.

El esquema de esta fórmula debería ser alguno de los de la figura 53. Pero se puede perfeccionar.

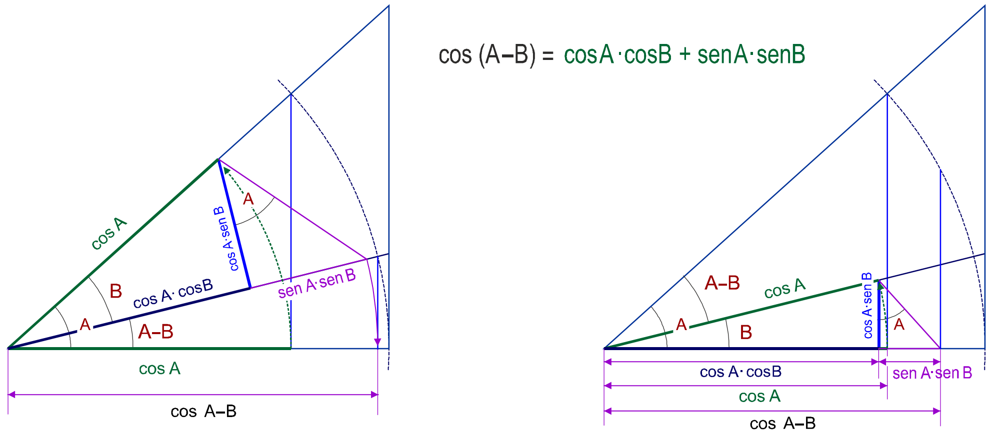


Figura 53

Cuando subdividimos el Ángulo en dos partes desiguales, normalmente se representa como en la figura 54 – A; con una secante dividiendo el Ángulo en dos sectores de ángulos A y B. Pero el ángulo B también se puede representar como en la figura 54 – B, formando arista con la Base, como ya vimos con anterioridad. Y esa representación será la que utilice para dibujar el esquema general de la fórmula.

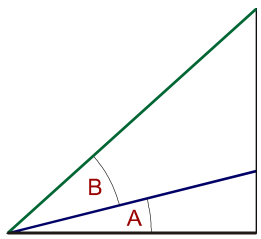


Figura 54-A

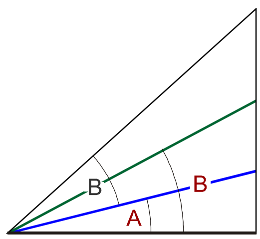


Figura 54-B

De nuevo, me ayudaré de la trisección para explicar dos ejemplos simultáneos. Vamos a coger dos triángulos unitarios. En uno trazamos la primera trisectriz, la de ángulo ⅓α, y en el otro la segunda, la de ángulo ⅔α. Después, vamos a utilizar las alturas de los unitarios como base para construir sendos triángulos rectángulos cuyas alturas se encontrarán sobre la prolongación de las bases de Los unitarios.

A esos nuevos triángulos rectángulos los llamaré Triángulos Adosados. Finalmente prolongaré cada trisectriz hasta que corte a la secante del adosado correspondiente.

Cada trisectriz corta a la secante del adosado perpendicularmente. Esto es así por la Regla de la Subdivisión. Si no se cortaran perpendicularmente no sería una trisectriz.

Es muy sencillo, trace una paralela a cada trisectriz que pase por el vértice del ángulo recto de cada adosado y comprobará que efectivamente se cumple la Regla puesto que los triangulitos que se forman son semejantes a los adosados respectivos. Por lo tanto, los triángulos de ambos primeros sectores son semejantes a los adosados, o vece-versa. En las figuras 55 – A y 55 – B se muestran las medidas obtenidas.

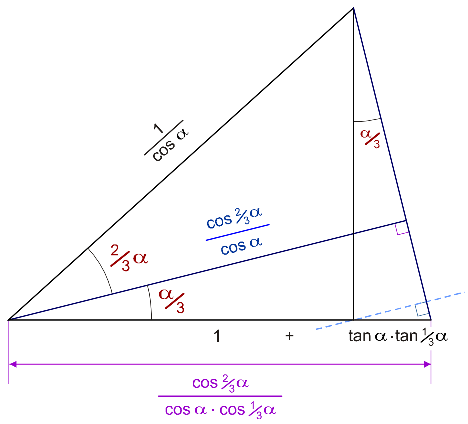


Figura 55-A

Conocemos cuánto mide la secante del unitario:

$$\frac{1}{\cos\alpha}$$

Luego, la primera trisectriz, prolongada, medirá:

$$\frac{\cos ⅔\alpha}{\cos\alpha}$$

Y la base de todo el conjunto, respecto de esa trisectriz, medirá:

$$\frac{\cos ⅔\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos ⅓\alpha}$$

Por otro lado, la altura del adosado, respecto de su base, tan α, medirá:

$$\tan\alpha \cdot \tan ⅓\alpha$$

De esta manera la base del conjunto mide:

$$1 + \tan\alpha \cdot \tan ⅓\alpha$$

Igualamos ambos resultados y obtenemos:

$$\frac{\cos ⅔\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos ⅓\alpha} = 1 + \tan\alpha \cdot \tan ⅓\alpha \quad =>$$

$$\cos ⅔\alpha = \cos\alpha \cdot \cos ⅓\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen} ⅓\alpha$$

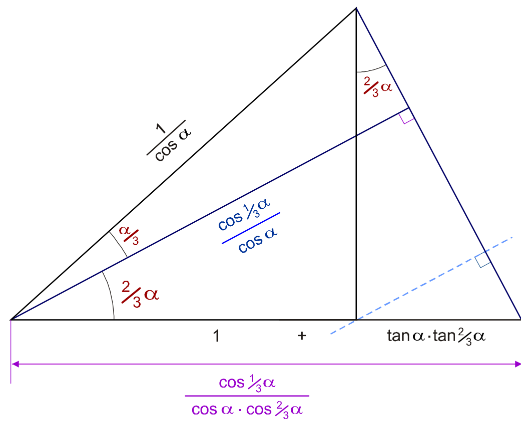


Figura 55-B

Conocemos cuánto mide la secante del unitario:

$$\frac{1}{\cos\alpha}$$

Luego, la segunda trisectriz, prolongada, medirá:

$$\frac{\cos ⅓\alpha}{\cos\alpha}$$

Y la base de todo el conjunto, respecto de esa trisectriz, medirá:

$$\frac{\cos ⅓\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos ⅔\alpha}$$

Por otro lado, la altura del adosado, respecto de su base, tan α, medirá:

$$\tan\alpha \cdot \tan ⅔\alpha$$

De esta manera la base del conjunto mide:

$$1 + \tan\alpha \cdot \tan ⅔\alpha$$

Igualamos ambos resultados y obtenemos:

$$\frac{\cos ⅓\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos ⅔\alpha} = 1 + \tan\alpha \cdot \tan ⅔\alpha \quad =>$$

$$\cos ⅓\alpha = \cos\alpha \cdot \cos ⅔\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen} ⅔\alpha$$

Puesto que $\alpha = ⅓\alpha + ⅔\alpha$, acabamos de obtener dos expresiones de la fórmula general:

$$\boldsymbol{\cos ⅔\alpha \;=\; \cos(\alpha - ⅓\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos ⅓\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen} ⅓\alpha \qquad y}$$

$$\boldsymbol{\cos ⅓\alpha \;=\; \cos(\alpha - ⅔\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos ⅔\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen} ⅔\alpha}$$

En la figura 56 se representan los esquemas de ambas fórmulas

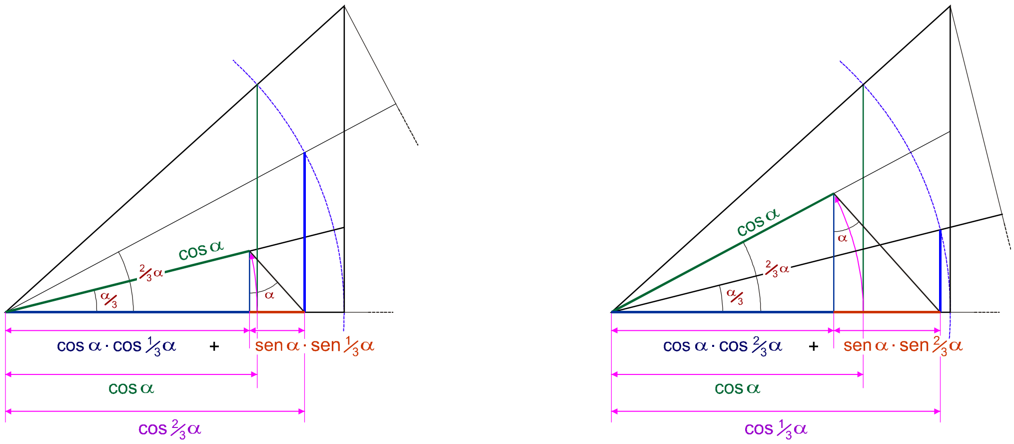
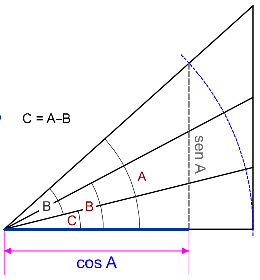


Figura 56

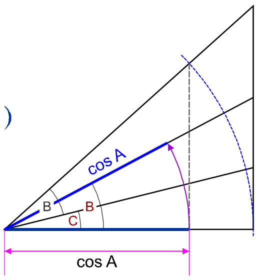
Vamos a explicar paso a paso el esquema de la fórmula general:

I)



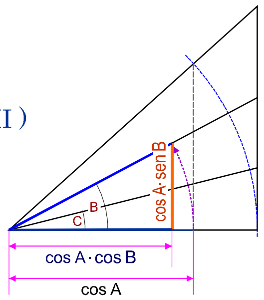
I) Me voy a ayudar del esquema de la trisección para que se entienda mejor. Suponemos que conocemos los ángulos A (Ángulo del unitario) y B (sectores segundo y tercero juntos), y queremos hallar el ángulo resta $C = A - B$ (primer sector del unitario). Primero dibujamos el coseno del Ángulo A.

II)



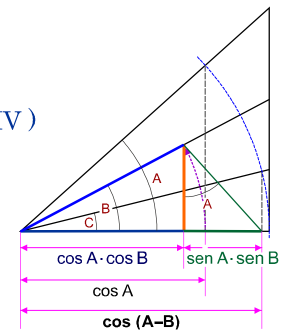
II) Con la ayuda de un compás, transportamos esa medida sobre la secante del sector del ángulo conocido, en este caso el de ángulo B (segunda trisectriz del esquema).

III)



III) Del extremo izquierdo de ese segmento trazamos un vertical que corte la base del unitario. Formamos así un triángulo rectángulo de Ángulo B cuya base, respeto de su secante, mide $\cos A \cdot \cos B$, y su altura (la vertical recién trazada) $\cos A \cdot \cos B \cdot \tan B = \cos A \cdot \text{sen } B$.

IV)



IV) Tomando esa misma vertical como base, podemos dibujar un triángulo rectángulo de Ángulo A cuya altura se sitúe sobre la base del unitario. Esa altura medirá: $\cos A \cdot \text{sen } B \cdot \tan B = \text{sen } A \cdot \text{sen } B$.

Ya tenemos los dos tramos que nos interesan uno a continuación del otro, $\cos A \cdot \cos B$ y $\text{sen } A \cdot \text{sen } B$, que sumados, vemos que miden exactamente el coseno del Ángulo Resta: $\cos C = \cos (A\text{-}B)$.

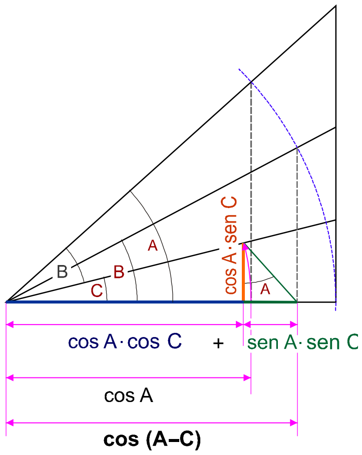


Figura 57

Si en lugar de *cos C*, el ángulo desconocido que queremos hallar es *cos B*, el esquema quedaría como la figura 57.

Prácticamente idénticos, pero aquí *cos A* se trasporta a la secante del primer sector del unitario. Siempre hay que abatir el coseno de ese ángulo sobre la secante interior del triángulo rectángulo del Ángulo conocido. Lógico, pues se supone que no sabemos dónde se encuentra la otra secante.

En realidad, la secante correspondiente al ángulo resta sólo la dibujo para comprobar que la suma de los dos segmentos hallados corresponde efectivamente con el coseno del ángulo desconocido; el ángulo resta.

En algún capítulo anterior comentaba que algunas particiones del triángulo rectángulo parece como si fueran inherentes al Triángulo Rectángulo. Son subdivisiones que hacen que todo encaje y las fórmulas concuerden. Por otro lado, he afirmado, dos veces, que la suma de los dos segmentos calculados concuerdan exactamente con la medida del coseno del ángulo desconocido, el ángulo resta. Pero, ¿y si no correspondieran? ¿y si resulta que parece que corresponden pero en realidad sólo se aproximan mucho sin coincidir de manera exacta?

Retomemos la figura 57 y dibujamos la línea del seno alternativo del unitario (línea morada), como muestra la figura 58. Desde el punto de corte de esa línea con la secante del unitario, trazamos ahora una perpendicular a la segunda trisectriz. Se ha formado el triángulo principal del tercer sector cuya secante es la línea del coseno alternativo del unitario, es decir *cos A*. Respecto de esa secante, su altura, la última línea dibujada, medirá $cos\,A \cdot sen\,C$; exactamente lo mismo que el segmento perpendicular a la base del unitario. De hecho los he pintado del mismo color anaranjado. Luego, con la referida altura podemos dibujar un triángulo pequeño semejante al unitario y cuya altura mide $sen\,A \cdot sen\,C$. Por último, si prolongamos esa misma altura, ésta cortará la segunda trisectriz exactamente por el vértice superior del triangulito de abajo, pues es la misma configuración de la figura 44 del capítulo 12.1. Todo encaja; los tres tramos naranjas miden exactamente lo mismo.

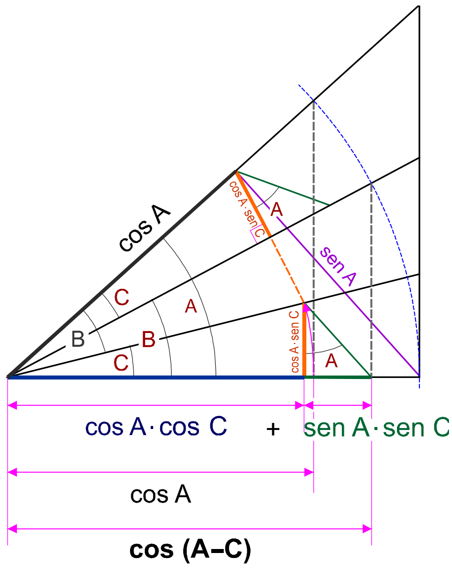


Figura 58

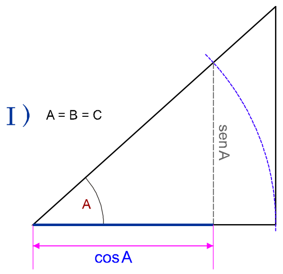
Pero la configuración que además de reforzar la idea de particiones inherentes, demuestra que la representación de la fórmula general es correcta es la de $1 = cos2A + sen2A$. Partimos de la fórmula general:

$$\cos(A - B) = cos\,A \cdot cos\,B + \ sen\,A \cdot sen\,B \quad => \quad si\ hacemos\ A = B\ entonces\ A - B = 0$$

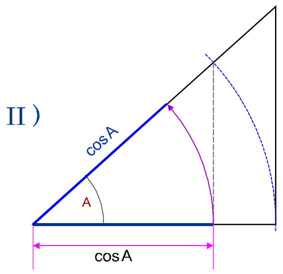
$$\cos 0 = cos\,A \cdot cos\,A + \ sen\,A \cdot sen\,A \quad => \quad \cos 0 = 1$$

$$1 = cos^2A + sen^2A$$

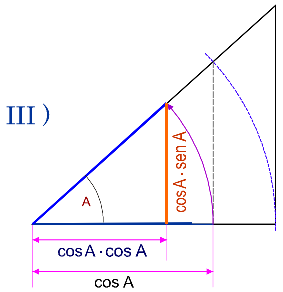
Equivaldría, supuestamente, a subdividir el unitario mediante la secante del ángulo 0. Veamos cómo se dibujaría empleando los cuatro pasos de la página anterior.



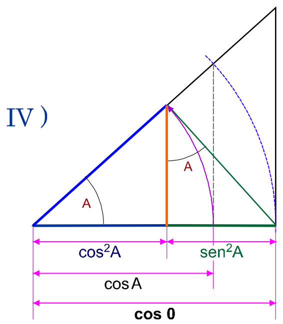
I) Primero trazamos *cos A*. Se supone que vamos a buscar el ángulo *A – B*, pero como *A = B*, el resultado tendrá que ser *cos 0*.



II) Con el compás trasportamos esa medida sobre la secante del triángulo cuyo ángulo conocemos. Se supone que sobre la del ángulo *B*, pero como *B = A*, la transportamos sobre la secante del unitario.



III) Del extremo izquierdo de ese último segmento hay que trazar una vertical que corte la base del unitario. Formamos así un triángulo rectángulo de Ángulo *A* cuya base, respeto de su secante, puesto que *A= B*, mide *cos A · cos A* y su altura medirá, *cos A · cos A · tan A = cos A · sen A*.



IV) Utilizamos el segmento vertical como base para un triángulo rectángulo semejante al unitario, es decir de ángulo *A*, puesto que *A = B*; y su altura medirá *sen A · Sen A*. Vemos claramente que los dos segmentos así calculados, sumados miden exactamente *cos 0*, es decir *1*, puesto que hemos obtenido la famosa fórmula:

$$1 = cos2A + sen2A$$

Y aquí no hay confusión, es la figura del método alternativo de hallar seno y coseno, y esa suma vale 1.

Por cierto, esta fórmula, igual que la general, y puesto que *A – B* vale 0, proviene de:

$$\frac{\cos 0}{\cos A \cdot \cos A} = 1 + \tan A \cdot \tan A \qquad \text{o sea:} \qquad \frac{1}{cos^2 A} = 1 + tan^2 A \quad => \quad 1 = cos^2 A + sen^2 A$$

Además, el esquema de esta fórmula ya lo hemos representado en la figura 50, cuando hablamos de la subdivisión por el punto ʻ T ʻ.

Por último, al inicio de este capítulo dijimos que la fórmula $\frac{1}{\cos\alpha} = 1 + \tan\alpha \cdot \tan$ ½α era de esta misma categoría. Ocurre cuando *A = 2B*. Por ejemplo en la bisección del triángulo unitario. En cuyo caso:

$$\frac{\cos(A-B)}{\cos A \cdot \cos B} = 1 + \tan A\ \tan B \ => \frac{\cos B}{\cos A \cdot \cos B} = 1 + \tan A\ \tan B \ => \frac{1}{\cos A} = 1 + \tan A\ \tan\frac{A}{2}$$

De aquí la idea de fórmula primigenia, pues se puede utilizar para hallar cualquier otra.

14.2 SENO DEL ÁNGULO RESTA

La fórmula del seno del ángulo resta es:

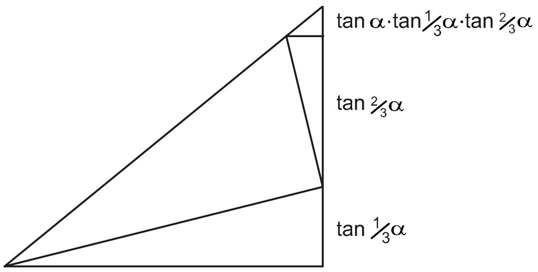
$$\boxed{\mathbf{sen}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \mathbf{sen}\,\boldsymbol{A}\cdot\cos\boldsymbol{B} - \cos\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{sen}\,\boldsymbol{B}}$$

En realidad, las fórmulas del ángulo resta son las mismas que las del ángulo suma, no hay más que variar el signo del seno del ángulo negativo, pero el propósito de este trabajo es averiguar de dónde salen y cómo se representan de manera gráfica. Y eso es lo que vamos a ejecutar. Para ello volveremos a la trisección y los dos ejemplos simultáneos.

Primero recordar que:

$\alpha = ⅓\alpha + ⅔\alpha \quad \text{luego} \quad ⅓\alpha = \alpha - ⅔\alpha$

Segundo, recordar también que subdividiendo con el punto ´ T ´mediante la **primera** trisectriz obtenemos:



Si quitamos el primer tramo de la altura del unitario, nos quedará: $\tan\alpha - \tan ⅓\alpha$ Que vale:

$\tan\alpha - \tan ⅓\alpha = \tan ⅔\alpha + \tan\alpha\cdot\tan ⅔\alpha\cdot\tan ⅓\alpha$
$\tan\alpha - \tan ⅓\alpha = \tan ⅔\alpha\cdot(1 + \tan\alpha\cdot\tan ⅓\alpha)$

Veamos ahora el esquema siguiente:

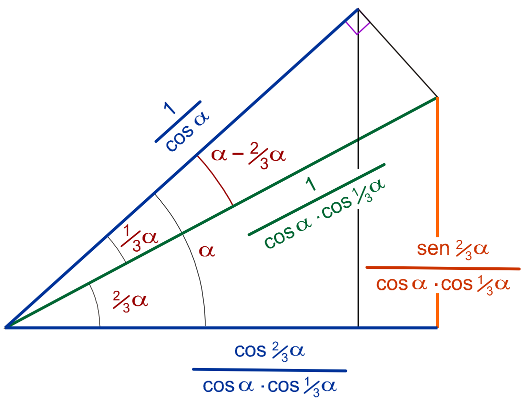
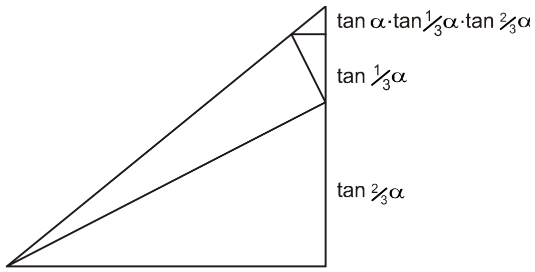


Figura 59 - A

Primero recordar que:

$\alpha = ⅓\alpha + ⅔\alpha \quad \text{luego} \quad ⅔\alpha = \alpha - ⅓\alpha$

Segundo, recordar también que subdividiendo con el punto ´ T ´mediante la **segunda** trisectriz obtenemos:



Si quitamos el primer tramo de la altura del unitario, nos quedará: $\tan\alpha - \tan ⅔\alpha$ Que vale:

$\tan\alpha - \tan ⅔\alpha = \tan ⅓\alpha + \tan\alpha\cdot\tan ⅔\alpha\cdot\tan ⅓\alpha$
$\tan\alpha - \tan ⅔\alpha = \tan ⅓\alpha\cdot(1 + \tan\alpha\cdot\tan ⅔\alpha)$

Veamos ahora el esquema siguiente:

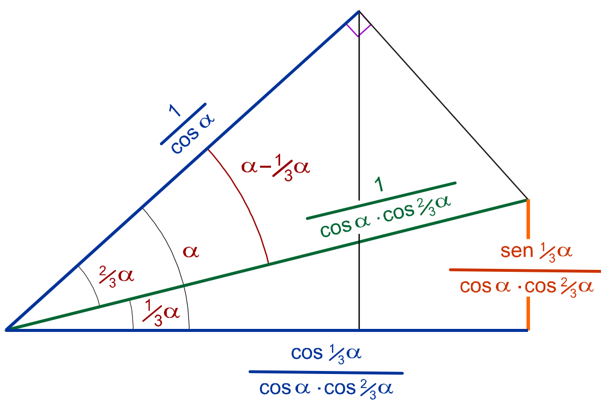


Figura 59 - B

Empezamos dibujando un unitario y su **segunda** trisectriz.

Desde el vértice del ángulo complementario trazamos una perpendicular a la secante que corte a la prolongación de la trisectriz.

Finalmente, desde ese último punto, dibujamos una vertical hasta la prolongación de la base.

Conocemos la secante del unitario: $1/cos\ \alpha$

Respecto de esa secante, la segunda trisectriz, prolongada vale: $1\,/(cos\ \alpha \cdot cos\ \tfrac{1}{3}\alpha)$

Por último, la altura del triángulo del primer sector valdrá:

$$\frac{\operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{1}{3}\alpha}$$

Si multiplicamos y dividimos por $\cos \tfrac{2}{3}\alpha$ nos da:

$$\frac{\operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{1}{3}\alpha} = \frac{\cos \tfrac{2}{3}\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{1}{3}\alpha} \cdot \frac{\cos \tfrac{2}{3}\alpha}{\cos \tfrac{2}{3}\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{1}{3}\alpha} = \tan \cos \tfrac{2}{3}\alpha \cdot \frac{\cos \tfrac{2}{3}\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{1}{3}\alpha}$$

Pero ya sabemos cuánto vale esa división de cosenos:

$$\frac{\operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{1}{3}\alpha} = \tan \tfrac{2}{3}\alpha \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan \tfrac{1}{3}\alpha)$$

$$\text{Luego:}\quad \frac{\operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{1}{3}\alpha} = \tan \alpha - \tan \tfrac{1}{3}\alpha \;\; =>$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\alpha = (\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{1}{3}\alpha) \cdot (\tan \alpha - \tan \tfrac{1}{3}\alpha)$$

$$=> \operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\alpha = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \tfrac{1}{3}\alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\alpha$$

Pero: $\operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\alpha = sen(\alpha - \tfrac{1}{3}\alpha)$ luego:

$$sen(\alpha - \tfrac{1}{3}\alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cos \tfrac{1}{3}\alpha - \cos \alpha\ \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\alpha$$

Que es la fórmula general del ángulo resta.

Empezamos dibujando un unitario y su **primera** trisectriz.

Desde el vértice del ángulo complementario trazamos una perpendicular a la secante que corte a la prolongación de la trisectriz.

Finalmente, desde ese último punto, dibujamos una vertical hasta la prolongación de la base.

Conocemos la secante del unitario: $1/cos\ \alpha$

Respecto de esa secante, la primera trisectriz, prolongada vale: $1\,/(cos\ \alpha \cdot cos\ \tfrac{2}{3}\alpha)$

Por último, la altura del triángulo del primer sector valdrá:

$$\frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{2}{3}\alpha}$$

Si multiplicamos y dividimos por $\cos \tfrac{1}{3}\alpha$ nos da:

$$\frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{2}{3}\alpha} = \frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{2}{3}\alpha} \cdot \frac{\cos \tfrac{1}{3}\alpha}{\cos \tfrac{1}{3}\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{2}{3}\alpha} = \tan \tfrac{1}{3}\alpha \cdot \frac{\cos \tfrac{1}{3}\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{2}{3}\alpha}$$

Pero ya sabemos cuánto vale esa división de cosenos:

$$\frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{2}{3}\alpha} = \tan \tfrac{1}{3}\alpha \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan \tfrac{2}{3}\alpha)$$

$$\text{Luego:}\quad \frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{2}{3}\alpha} = \tan \alpha - \tan \tfrac{2}{3}\alpha \;=>$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\alpha = (\cos \alpha \cdot \cos \tfrac{2}{3}\alpha) \cdot (\tan \alpha - \tan \tfrac{1}{3}\alpha)$$

$$=> \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\alpha = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \tfrac{2}{3}\alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\alpha$$

Pero: $\operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\alpha = sen(\alpha - \tfrac{2}{3}\alpha)$ luego:

$$sen(\alpha - \tfrac{2}{3}\alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cos \tfrac{2}{3}\alpha - \cos \alpha \operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\alpha$$

Que es la fórmula general del ángulo resta.

Como ocurre con otras fórmulas, parece un proceso extenso y tedioso, pero en realidad es muy sencillo. Es mucho más largo de explicar que de entender y manipular. Por otro lado, me gusta explicar las dos trisectrices a la vez para enseñar que se llega al mismo resultado independientemente del camino seguido.

Finalmente, si en lugar de utilizar la trisección hubiese dividido el unitario mediante un segmento cualquiera, habría llegado a la misma conclusión pero dándole muchas más vueltas, pues no habría podido aprovecharme de lo explicado con anterioridad.

El esquema de la fórmula será el siguiente. Voy a poner uno para cada sector:

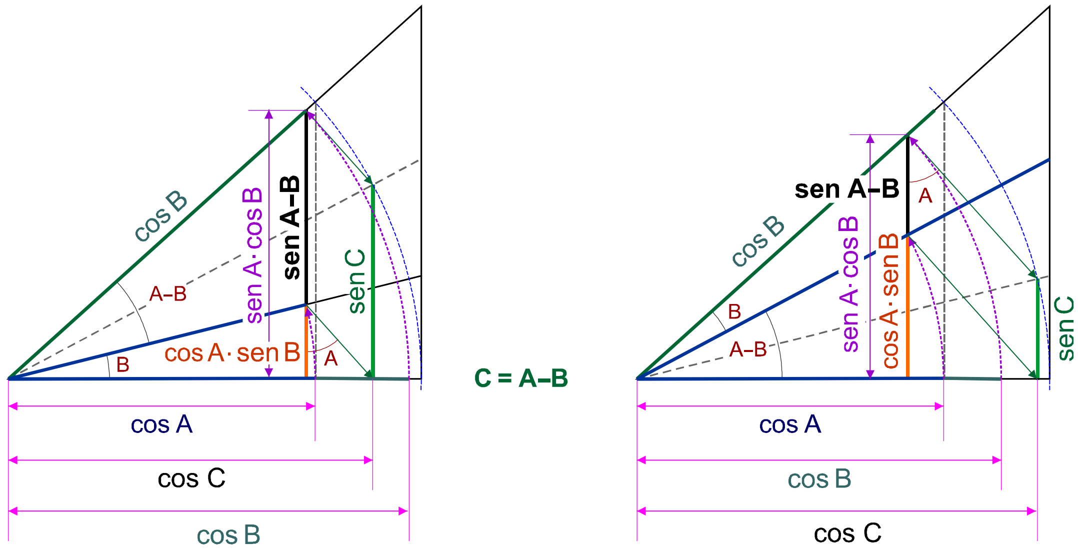


Figura 60

El procedimiento es bien sencillo:

1 Con el compás, se abate *cos B* sobre la secante del unitario.

2 Desde su extremo se traza una vertical hacia abajo. Está medirá $\text{sen A} \cdot \cos \text{B}$

3 Se abate *cos A* sobre la secante del sector de ángulo B.

4 Comprobamos que corta dicha secante exactamente por donde pasa la vertical de antes dividiéndola en dos tramos. El primero será $\cos A \cdot \text{sen}\, B$ y el segundo: $sen\ (A - B)$

En el paso tres, el *cos A* coincide perfectamente con la vertical $\text{sen A} \cdot \cos \text{B}$ y eso es así porque en el capítulo anterior el primer tramo de dicha vertical lo utilizábamos para hallar el coseno del ángulo resta. Con él formábamos un triángulo semejante al unitario cuya secante la utilizo aquí para comprobar que $sen\ (A - B)$ mide exactamente *sen C*. siendo $C = A - B$; todo casa y concuerda.

14.3 TANGENTE DEL ÁNGULO RESTA

¿De dónde sale la fórmula? De la fórmula de la tangente del ángulo suma. Pero eso es lo normal. Además no hace falta, en el capítulo anterior, lo dejamos resuelto:

Quitando un tramo de la tangente del unitario vimos que:

$$\tan \alpha - \tan {}^1\!/_3\alpha = \tan {}^2\!/_3\alpha \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan {}^1\!/_3\alpha) \quad \text{o} \quad \tan \alpha - \tan {}^2\!/_3\alpha = \tan {}^1\!/_3\alpha \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan {}^2\!/_3\alpha)$$

Puesto que ${}^2\!/_3\alpha = \alpha - {}^1\!/_3\alpha$, o que ${}^1\!/_3\alpha = \alpha - {}^2\!/_3\alpha$, puede decirse que, de forma general:

$\tan A - \tan B = \tan(A - B) \cdot (1 + \tan A \cdot \tan B)$ de donde:

$$\boxed{\tan(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = \frac{\tan \boldsymbol{A} - \tan \boldsymbol{B}}{1 + \tan \boldsymbol{A} \cdot \tan \boldsymbol{B}}}$$

Como curiosidad, represento a continuación parte de las líneas estudiadas a lo largo de este trabajo, fruto de algunas particiones concretas del triángulo rectángulo. He dibujado del mismo color las líneas importantes que coinciden en longitud; verá que son distintos tramos de la tangente del unitario. No he dibujado todas las coincidencias, pero estas son muy relevantes.

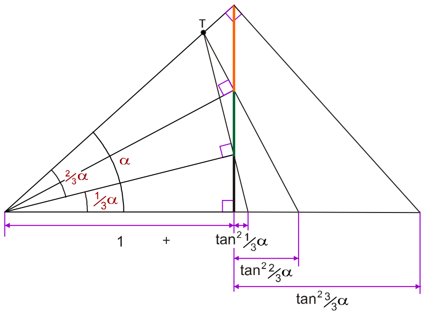


Figura 61 - A

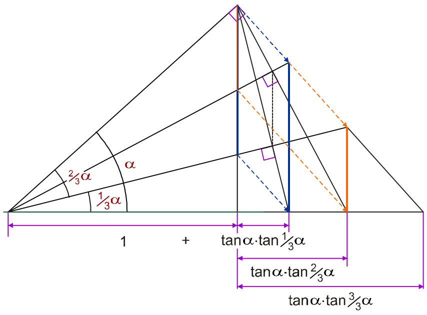


Figura 61 - B

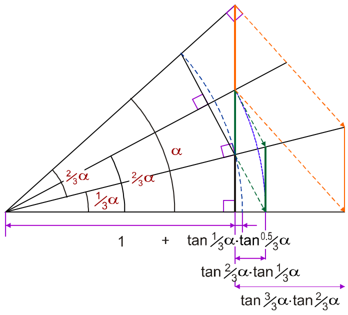


Figura 61 - C

Podemos apreciar, que, al igual que con la bisección, si alargamos la base del unitario una cantidad proporcionada, podemos dibujar un primer sector más largo cuya altura sea el segundo tramo de la tangente del unitario. Y si alargamos un poco más esa base, también una cantidad concreta proporcional a las otras conocidas, podemos ampliar más el primer sector hasta que su altura mida el tercer sector de la tangente, como represento en la figura 62. Significa que todos los tramos son proporcionales.

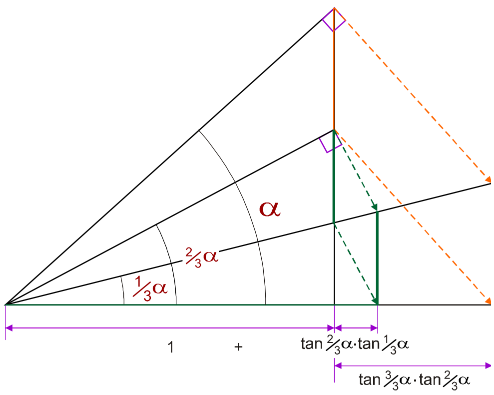


Figura 62

De forma general, al igual que en el capítulo 10, podemos afirmar que si subdividimos un triángulo rectángulo en *'n'* sectores de misma amplitud, el tramo *'x'* de la tangente medirá:

$$\textbf{\textit{Tramo x}} \quad \rightarrow \quad tan\frac{1}{n}\alpha \cdot \left(1 + tan\frac{x}{n}\alpha \cdot tan\frac{x-1}{n}\alpha\right) \quad \text{o} \quad tan\frac{x}{n}\alpha - tan\frac{x-1}{n}\alpha$$

Podemos comparar la primera fórmula con la del capítulo 10.

$$\textbf{\textit{Tramo x}} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{sen}\frac{1}{n}\alpha}{\mathbf{cos}\frac{x-1}{n}\alpha \cdot \mathbf{cos}\frac{x}{n}\alpha}$$

De forma general podemos afirmar que:

$$\frac{\mathbf{cos}\frac{1}{n}\alpha}{\mathbf{cos}\frac{x}{n}\alpha \cdot \mathbf{cos}\frac{x-1}{n}\alpha} = 1 + \mathbf{tan}\frac{x}{n}\alpha \cdot \mathbf{tan}\frac{x-1}{n}\alpha$$

O que: $\mathbf{cos}\frac{1}{n}\alpha = \mathbf{sen}\frac{x}{n}\alpha \cdot \mathbf{sen}\frac{x-1}{n}\alpha + \mathbf{cos}\frac{x}{n}\alpha \cdot \mathbf{cos}\frac{x-1}{n}\alpha$

Podemos seguir deduciendo que:

$$\mathbf{sen}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{sen}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{cos}\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{n}}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{cos}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{sen}\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{n}}\boldsymbol{\alpha}$$

Y que:

$$\mathbf{tan}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{tan}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} - \mathbf{tan}\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{n}}\mathbf{B}}{\mathbf{1} + \mathbf{tan}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{tan}\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{n}}}$$

En definitiva, el seno, coseno o tangente del ángulo del primer sector, *(1/n) α,* lo podemos deducir del seno, coseno o tangente de cualquiera ángulo resta del tipo:

$$\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}}\right)\boldsymbol{\alpha} - \left(\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{n}}\right)\boldsymbol{\alpha} \quad \text{curiosamente} \quad \frac{x}{n} - \frac{x-1}{n} = \frac{x-x+1}{n} = \frac{1}{n}$$

Significa que, por ejemplo, *sen(1/7α)*, lo podemos calcular como *sen(3/7α – 2/7α)*, *sen(4/7α – 3/7α)*, *sen(5/7α – 4/7α)*, *sen(6/7α – 5/7α)*, o *sen(7/7α – 6/7α)*.

Por otra parte, el hecho de que cualquier tramo de la tangente del unitario valga $tan\frac{x}{n}\alpha - tan\frac{x-1}{n}\alpha$, no hace más que expresar lo que cualquier persona haría: quitarle $tan\frac{x-1}{n}\alpha$ a $tan\frac{x}{n}\alpha$, lo que queda es el tramo en cuestión.

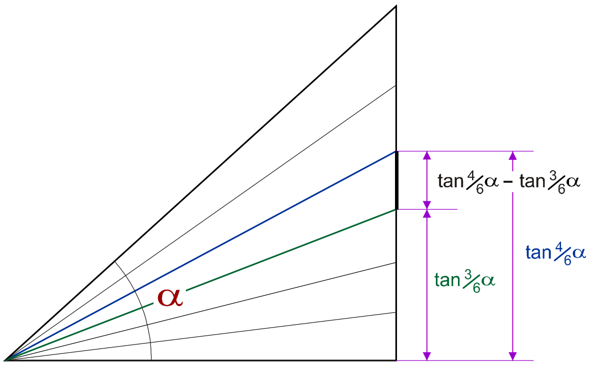


Figura 63

Y hasta aquí mi estudio sobre el triángulo rectángulo. Espero que no se haya hecho muy pesado, y si le ha gustado al menos a una persona, me daré por satisfecho. No se pierdan mi siguiente trabajo sobre los polígonos regulares.

Manuel Ramos Framit
ramosframit@gmail.com
En Jerez de la Frontera
Diciembre 2022