LA ELIPSE A MI MANERA

En esta tercera entrega voy a abordar el tema de la elipse acercándome a esta la figura desde una nueva perspectiva. Nada de focos, excentricidad ni directrices; todo diferente y con palabras sencillas para que se entienda bien.

Propondré un nuevo método para dibujar ciertas elipses con regla y compás. Explicaré, a mi manera, cómo se llega al cálculo de la superficie, y me atreveré a sugerir unas nuevas fórmulas para calcular el perímetro aplicando lo aprendido en mis trabajos anteriores.

1 NUEVOS COMPONENTES DE LA ELIPSE

En la figura 1 describo y doy nombres nuevos a distintos componentes de la elipse. Como el propósito último de este trabajo es formular un nuevo algoritmo para calcular el perímetro de la misma empezando de cero, obviaré muchos componentes conocidos y me atendré prácticamente sólo a los principales puntos, líneas y ángulos que voy a emplear para esa faena.

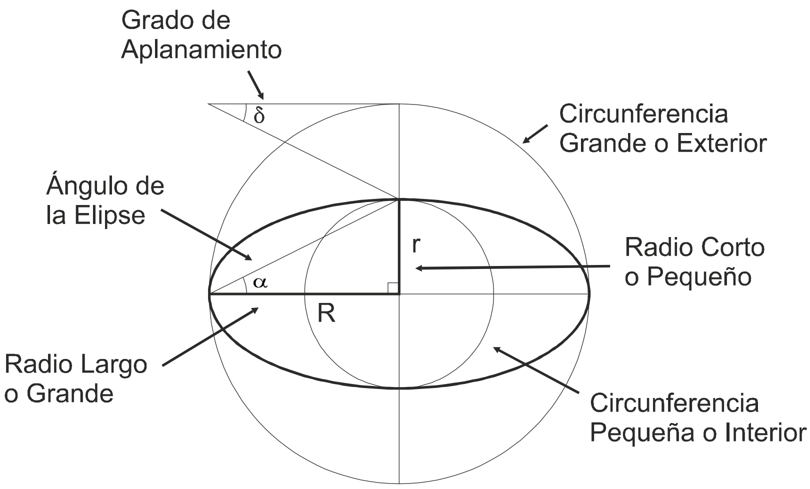


Figura 1

Como cualquier figura geométrica, la elipse puede acomodarse dentro de una circunferencia circunscrita, a la que llamaré, preferentemente, Circunferencia Grande. A su vez, puede contener una circunferencia inscrita, a la que llamaré, preferiblemente, Circunferencia Pequeña. Sencillo.

Puesto que intento huir de cualquier convencionalismo sobre la elipse, a los semiejes, normalmente los llamaré Radios (con mayúscula), puesto que efectivamente son radios de las respectivas circunferencias. Al Radio pequeño le asignaré la letra *"r"* y al grande la letra *"R"*. A los demás radios, los llamaré "radio (con minúscula) de la circunferencia pequeña o interior" y "radio de la circunferencia grande o exterior", o simplemente "radio pequeño", o "radio grande". Cuando la palabra radio pueda inducir a confusión, los llamaré "semieje menor" y "semieje mayor" como es costumbre en matemáticas.

Puesto que en cada cuadrante, dentro de la elipse, se inscribe uno y sólo un triángulo rectángulo, al Ángulo de dicho triángulo lo puedo llamar también Ángulo de la elipse. Por otra parte, ese ángulo también nos da una idea de la forma de la elipse; ángulos menores indican elipses más aplanadas. Además, como según mi criterio sólo existen los triángulos rectángulos de Ángulo de 45 o menos grados, también soy de la idea que sólo existe una elipse para cada triángulo rectángulo y la representaré siempre colocada en el sentido horizontal, es decir, más ancha que alta. Una elipse más estrecha que alta no es más que la ancha girada 90 grados.

Por último, introduciré un nuevo ángulo al que llamaré Grado de Aplanamiento y que explicaré más adelante. Sólo apuntar que toda elipse se puede distinguir por su Grado de Aplanamiento. Cuanto mayor sea dicho grado, más achatada será la elipse.

En analogía con mi estudio sobre el triángulo rectángulo, llamaré elipse unitaria a aquella, más ancha que alta, cuyo Radio Largo vale 1; base del triángulo rectángulo unitario (ver mis trabajos anteriores). Así podré agrupar todas las elipses en clases de equivalencia, nombrando cada clase: "***Elipse de Ángulo α***", o "***Elipse de Grado δ***".

Por último, para simplificar los cálculos y los esquemas, y que se entiendan mejor, normalmente sólo representaré el cuadrante superior izquierdo de la elipse unitaria (figura 2). Con lo que siempre consideraré $R = 1$.

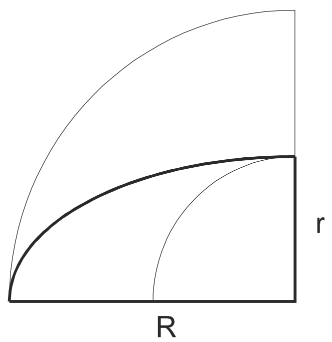


Figura 2

¿Por qué el cuadrante superior izquierdo? La explicación es bien sencilla. Llegué a la elipse a través de la informática, y como los cuatro cuadrantes son simétricos, me bastaba con calcular las coordenadas de un cuadrante para representar la figura completa. Y, aunque en informática (lenguaje C++), las líneas de en un mapa de bits se guardan en orden inverso, cuando programaba siempre empezaba dibujando virtualmente ese cuadrante para después construir la figura entera por reflexión, sin tener en consideración dicha inversión.

2 ESCALA DE LA ELIPSE

Normalmente, para hacernos una idea de la forma de una elipse se emplea la excentricidad. No es más que la razón entre la semidistancia focal y el semieje mayor. Pero como estamos partiendo de cero, adoptaré distintos factores, entre estos definiré una nueva proporción que denomino: **ESCALA DE LA ELIPSE**.

DEFINICION: La Escala de la elipse es la razón entre sus radios: $E = \frac{R}{r}$

Esta nueva magnitud nos dice exactamente cuánto mide el Radio mayor respecto del menor. Así una elipse de escala $E = 5$, indica que el Radio Grande es cinco veces mayor que el Pequeño.

La inversa de esa relación nos dice más o menos lo mismo, pero en tanto por uno. Así, $1/E = 0{,}2$ nos dice que el Radio Pequeño mide exactamente el 0,2 por uno de lo que mide el Grande, es decir el 20%. Es como una razón trigonométrica, pero aplicada a la elipse.

Si nos paramos a pensar un poco, notaremos que la inversa de la escala es la tangente del Ángulo de la elipse unitaria. Así, por ejemplo: si el Radio mayor mide el doble que el Radio menor, el Ángulo valdrá 26,565º, y su tangente 0,5 (el 50%). He apuntado algunos ejemplos sencillos en la tabla adjunta:

R	r	r/R = tangente	
10	10	1	100%
10	7	0,7	70%
10	5	0,5	50%
10	3	0,3	30%
10	0	0	0%

Como veremos más adelante la escala es fundamental para conocer el área de la elipse. Por ejemplo: una elipse escala 2 significa que su área es el doble que la superficie de la circunferencia interior. No ocurre lo mismo con el perímetro.

3 CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE

3.1 MÉTODO TRADICIONAL

Existen varios métodos para representar gráficamente una elipse; todos ellos igual de válidos. Particularmente, prefiero el paramétrico. Consiste en tirar radios de la circunferencia mayor; y, donde dicho radio corta a la circunferencia menor se dibuja una recta horizontal, y donde corta a la circunferencia mayor, una vertical. El punto donde se cruzan ambas rectas es un punto de la elipse.

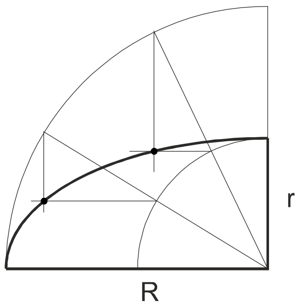


Figura 3

Este es precisamente el método que se utiliza generalmente en informática cuando se quiere dibujar una elipse. Se toman ángulos en un bucle des de 0 a 359, y por cada ángulo se calculan las coordenadas: $r \cdot cos\,\alpha$ y $R \cdot sen\,\alpha$.

```
…
For ( i = 0; i < 360; ++i )
      {
      X = fRadiusR * sin(fAngle) ;
      Y = fRadiusr * cos(fAngle) ;
      …
      }
      …
```

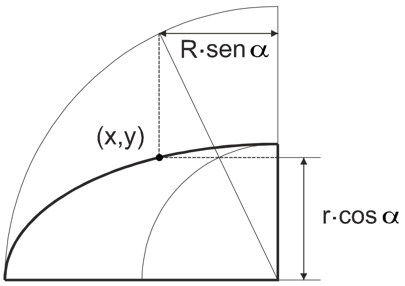


Figura 4

Muchos informáticos no saben que están utilizando el método paramétrico. Algunos Incluso, ni siquiera sospechan que el punto que acaban de hallar no se encuentra sobre el radio correspondiente a ese ángulo, solo saben que la figura sale.

3.2 MÉTODO ALTERNATIVO

Basándome en la figura 4 puedo proponer un método gráfico alternativo de regla y compás que, para algunas elipses, implica menos mediciones.

El punto de coordenadas *(x,y)* se haya a una distancia $R \cdot sen\,\alpha$ desde el Radio pequeño. Pero ya sabemos que $R = E \cdot r$. Significa que si $E = 2$, $R \cdot sen\,\alpha = 2r \cdot sen\,\alpha$. Es decir, la línea horizontal mide el doble en toda su extensión de lo que mide dentro de la circunferencia pequeña; el doble porque la escala es 2, si fuera 3, mediría el triple.

Para dibujar esa elipse escala 2, basta con trazar rectas horizontales paralelas que partan del Radio menor y se extiendan más allá del círculo pequeño. Después, con el compás se toma la amplitud de lo que mide el segmento dentro de la circunferencia pequeña y se lleva esa medida a la parte exterior. Se ve mejor en la figura 5.

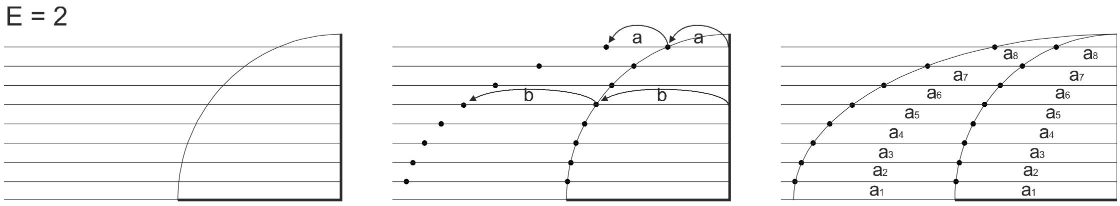


Figura 5

Para $E = 3$, habría que trasladar dos veces las mediciones de compas. Para escalas con decimales la construcción no se podría hacer con un compás; sería cuestión de recurrir a un pantógrafo manual, o volver a cualquiera de los métodos tradicionales.

Pero hay más. Si nos fijamos en la elipse de escala 2 de la figura 6, observamos que si trazamos segmentos rectos verticales dentro de la circunferencia grande, estos cortan todos a la elipse justo por la mitad de su propia longitud.

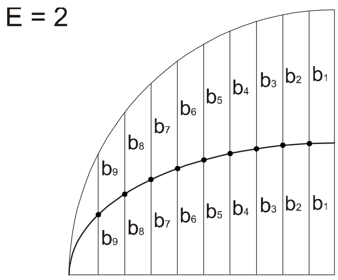


Figura 6

Podemos afirmar que esa elipse en concreto es el lugar geométrico de todos los puntos interiores de la circunferencia mayor equidistantes entre el semieje mayor y la circunferencia exterior. En caso de una elipse de escala 3, sería el lugar geométrico de todos puntos situados a un tercio de la distancia entre el semieje mayor y la circunferencia exterior.

Podemos afirmar que:

DEFINICION: La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos de una región circular del plano que se encuentran proporcionalmente a la misma distancia perpendicular de cualquier diámetro de dicha región respecto de la circunferencia.

Lo que viene a decir es, que si dibujamos una circunferencia y uno de sus diámetros, la elipse es el conjunto de los puntos interiores de esa circunferencia que se hallan proporcionalmente a la misma distancia perpendicular del diámetro respecto de la circunferencia. No hace falta que el diámetro sea horizontal o vertical, sirve cualquier diámetro como se intenta mostrar en la figura 7.

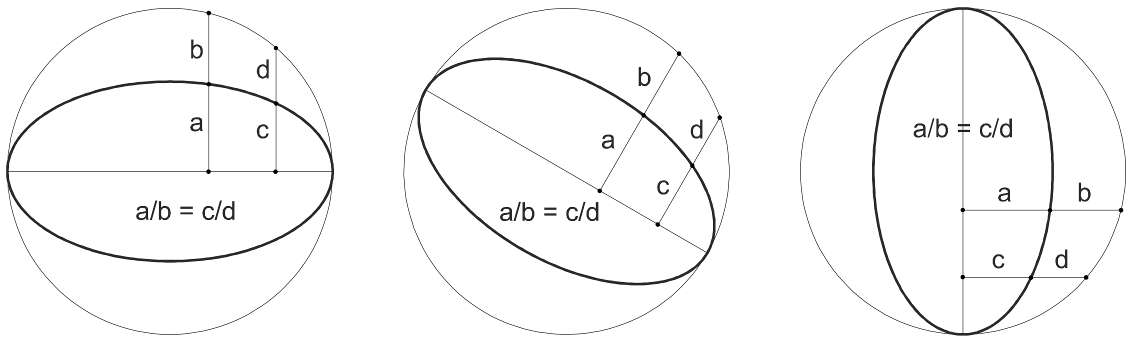


Figura 7

4 ÁREA DE LA ELIPSE

Del capítulo anterior se desprende, de forma directa, que el área de la elipse es igual al área de la circunferencia interior multiplicado por la Escala de la elipse. Vamos a fijarnos en la figura 8.

Hemos constatado que en una elipse escala 2, los segmentos a_n son idénticos a los correspondientes segmentos b_n. Significa que hay la misma cantidad de puntos en cada segmento a_n que en el segmento b_n correspondiente. Y esto ocurre con las infinitas duplas (a_n, b_n). Luego, la superficie más oscura es idéntica a la superficie más clara. Es decir, el área de la elipse es exactamente el doble que área de la circunferencia pequeña.

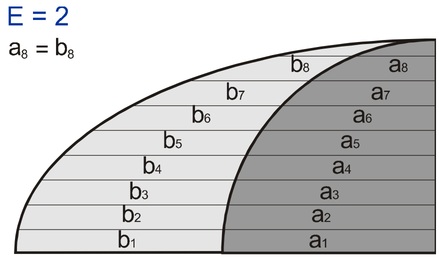


Figura 8

Para una escala 3 habría 2 veces más b_n que a_n, y para una escala 1,5, la mitad, etc.

Sean: $\boldsymbol{S_E}$ la superficie de la elipse y S_C la de la circunferencia pequeña de radio r, y dado que $R = E \cdot r$ (Radio de la circunferencia grande). Ocurrirá que:

$$S_E = E \cdot S_C \quad \Rightarrow \quad S_E = E \cdot \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad S_E = \pi \cdot (E \cdot r) \cdot r \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S_E = \pi \cdot (R \cdot r)}$$

Es la fórmula tradicional del área de la elipse. Ahora ya sabemos de dónde sale la fórmula, al menos, explicada a mi manera.

Del mismo modo, según la figura 6, podemos decir que el área de la circunferencia exterior es el área del área de la elipse por su Escala, y por lo tanto, el área de la circunferencia pequeña por la Escala al cuadrado.

Sean: S_{CG} la superficie del área de la circunferencia grande, de radio $R = E \cdot r$, S_E la superficie de la elipse y S_{CP} el área de la circunferencia pequeña, de radio r. Y dado $S_{CG} = E \cdot S_E$. Entonces:

$$\begin{aligned} S_{CG} = E \cdot S_E \quad &\Rightarrow \quad S_E = E \cdot \pi \cdot (R \cdot r) \quad \Rightarrow \quad S_E = \pi \cdot (R \cdot E \cdot r) \\ &\Rightarrow \quad S_E = \pi \cdot (Er \cdot E \cdot r) \quad \Rightarrow \quad S_E = \pi \cdot (Er)^2 \\ &\Rightarrow \quad E^2 \cdot \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad S_{CG} = E^2 \cdot S_{CP} \end{aligned}$$

También podremos decir que el área de la elipse es igual al área de la circunferencia grande dividido por la Escala de la elipse: $S_E = S_{CG} / E$

4.1 APRECIACIONES PARTICULARES

Cuando decimos que un mapa está a escala *1/10.000*, como sabemos, significa que un centímetro medido en el mapa representa 10.000 centímetros en la realidad. Por convenio las escalas se representan como *1/E*, porque multiplicando las medidas reales por esa fracción obtenemos las medidas en un mapa escala *1/E*. Puede parecer un poco incongruente pues normalmente, lo que hacemos es medir sobre el mapa. Medidas que hay que multiplicar por E para saber cuánto miden en la realidad. Pero cobra sentido cuando hablamos de, por ejemplo, coches a escala, pues nos hacemos una idea de las medidas del juguete.

Por analogía, podríamos decir que la circunferencia pequeña de la elipse, es la circunferencia grande a escala *1/E*. O, como prefiero, que la circunferencia grande es la pequeña a escala *E*.

Por otra parte, cuando se trabaja a escala en dos dimensiones, podemos tomar medidas en cualquier dirección, incluso en diagonal, pues la escala actúa tanto en la componente horizontal como el vertical y la combinación de ambas nos da una diagonal a escala, como se ve en la figura 9.

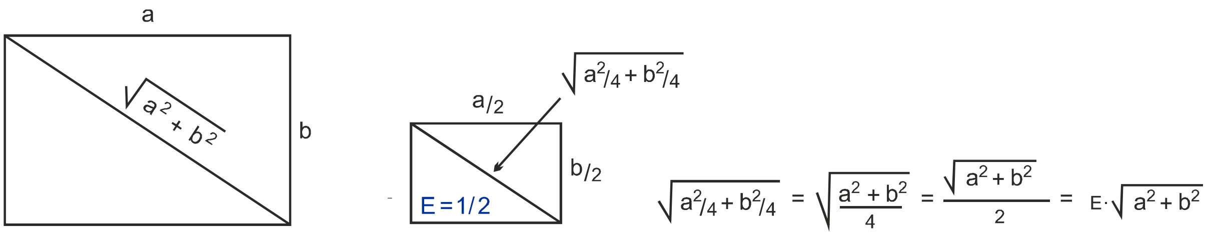


Figura 9

Pero que ocurre cuando aumentamos o disminuimos cualquier figura sólo en una de las componentes, la horizontal o la vertical. Pues que la figura resultante se deforma en una sola dirección, y las diagonales ya no están a la misma escala, ni presentan el mismo ángulo. Se pueden tomar medidas a lo largo o a lo ancho, pero no en diagonal sin aplicar fórmulas que corrijan esa deformación.

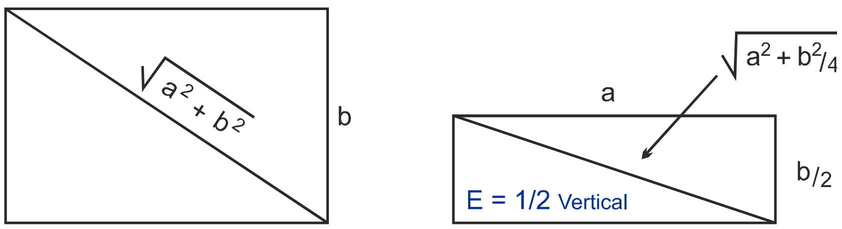


Figura 10

Esto último es lo que ocurre con la elipse, es como una circunferencia a escala, pero escalada sólo en un sentido. En la figura 11, la circunferencia pequeña ampliada en la componente horizontal, o la circunferencia grande reducida en la componente vertical.

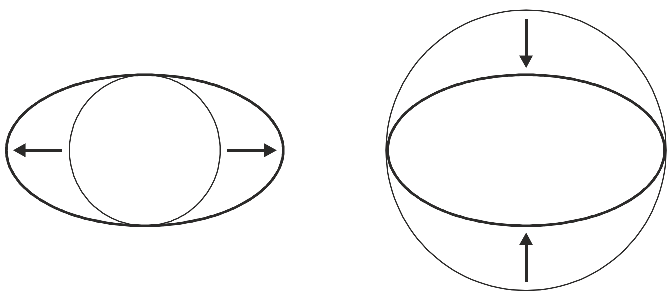


Figura 11

¿Qué significa? Pues, que lo que se ha explicado para la superficie no sirve para el perímetro, pues la circunferencia que se deforma, disminuye o aumenta en una sola dirección. Luego, dado P_E el perímetro de la elipse, P_{CP} el perímetro de la circunferencia pequeña, de radio r, y P_{CG} el perímetro de la circunferencia grande, de radio R, ocurrirá que:

$$P_E \neq E \cdot P_{CP} \quad \text{y} \quad P_E \neq \frac{P_{CG}}{E} \qquad \Rightarrow \qquad P_E \neq \pi \cdot (R + r)$$

Por último, si consideramos una elipse como una circunferencia pequeña aumentada en su componente horizontal, entonces diremos que E es su escala, pero si la consideramos como una circunferencia grande reducida en su componente vertical, habrá que llamar a la escala $1/E$. A efectos prácticos, siempre la llamaré E, por eso así la definí en el punto 2; al fin y al cabo, lo que importa es la parte *"E"* de la expresión.

5 PERÍMETRO DE LA ELIPSE

5.1 DISTINTAS FÓRMULAS

El cálculo del perímetro de la elipse es bien complejo. Los matemáticos, tras siglos de estudios, llegaron a la conclusión de que había que tomar diferenciales, y se basaron en la integración para resolverlo. Uno de los resultados es la fórmula:

$$P = 4a \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot sen^2\theta}\, d\theta$$

Denominada Integral Elíptica Completa de Segunda Especie. Fórmula que, por otra parte, también se utiliza para otros muchos cálculos complejos. Donde a es el semieje mayor, ε es la excentricidad de la elipse y θ el Ángulo de cualquier ínfimo triángulo rectángulo diferencial. Desarrollando esta integral llegaron a diferentes fórmulas más o menos sencillas de utilizar.

Se suelen tomar distintas series sumatorias de infinitos términos. Con utilizar unos pocos términos se pueden obtener aproximaciones al perímetro exacto muy aceptables. Por ejemplo:

Serie Nº1 $P \approx 2\pi R \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i)!^2}{(2^i \cdot i!)^4} \cdot \frac{\varepsilon^{2i}}{2i-1}\right)$ donde ε es la excentircidad

Para mi estudio, utilizaré los 4 primeros términos del sumatorio:

$$P \approx 2\pi R \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5}\right)$$

Serie Nº2 $P \approx \pi(R + r) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \binom{0.5}{i}^2 \cdot h^i$ donde: $h = \frac{(R-r)^2}{(R+r)^2}$

Aquí también utilizaré los 4 primeros términos del sumatorio:

$$P \approx \pi(R + r) \cdot \left(1 + \frac{h}{4} + \frac{h^2}{64} + \frac{h^3}{256}\right)$$

Como es lógico, cuantos más términos se utilicen, más próximos estaremos al perímetro exacto de la elipse. Pero con tres o cuatro sumandos es suficiente para una aproximación más que aceptable, pues, cada término subsiguiente es a cada vez más pequeño y sólo sirve para aumentar las precisiones decimales en diezmilésimas, cienmilésimas, etc.

Estas fórmulas son algo engorrosas de utilizar, por eso, cuando no se necesita tanta precisión, se emplean otras fórmulas más toscas. La más **sencilla** de todas es:

$$P \approx 2\pi \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$$

Aunque la fórmula más utilizada suele ser la de **Ramanujan**:

$$P \approx \pi \cdot \left(3 \cdot (R + r) - \sqrt{(3R + r) \cdot (R + 3r)}\right)$$

He calculado algunos perímetros empleando esas fórmulas. A continuación trascribo los resultados obtenidos en una tabla para que los puedan comparar.

Comparativa de perímetros calculados según las distintas fórmulas tradicionales						
R	r	Fórmula Sencilla	Fórmula Ramanujan	Serie 1	Serie 2	Escala
10	10	62,8318530717959	62,8318530717959	62,8318530717959	62,8318530717959	1
10	9	59,7728767351409	59,7316043227659	59,7325995151364	59,7316043252429	1,11
10	8	56,8966628507974	56,7233355685092	56,7380272618114	56,7233357759323	1,25
10	7	54,2322976788245	53,8236866019157	53,8919468031230	53,8236897368814	1,43
10	6	51,8124733736608	51,0539727875171	51,2506859136024	51,0539965193095	1,66
10	5	49,6729413289805	48,4421054883564	48,8764628540062	48,4422295064890	2
10	4	47,8513136815776	46,0256246304151	46,8316431472467	46,0261411343968	2,5
10	3	46,3850596575824	43,8567338145499	45,1738799272557	43,8585852537806	3,33
10	2	45,3086935965559	42,0112085186987	43,9521378607826	42,0171856961598	5
10	1	44,6504209276917	40,6055251851410	43,2036006421258	40,6233708766265	10
10	0	44,4288293815837	39,8337986806673	42,9514620607980	39,8835004850267	∞

Del análisis de esta tabla se desprenden varias conclusiones interesantes.

1) Los perímetros calculados mediante la fórmula más sencilla sólo son fiables para elipses muy redondeadas; concretamente para escalas inferiores a 2. Los perímetros de las elipses más aplanadas se desvían progresivamente en mayor medida cuanto más achatadas sean.

2) La fórmula de *Ramanujan* es la fórmula sencilla la más precisa. Los resultados de dicha columna son muy parecidos a los de la Serie 2. Es por lo tanto la fórmula aconsejable para cálculos que no necesiten una excesiva precisión.

3) Los resultados obtenidos con la Serie 1, comparado con la serie 2, tampoco parecen muy fiables más allá de la escala $E = 2$.

4) La segunda serie de sumandos parece ser la más precisa. El problema es que se necesita resolver muchos sumandos para acercarse al perímetro exacto.

No he analizado más fórmulas, pero supongo que arrojarán resultados muy cercanos a estos, puesto que todas salen de las mismas expresiones integrales. También supongo que, como “cada maestrillo tiene su librillo”, cada matemático o científico tendrá sus preferencias a la hora de resolver problemas con elipses.

Si examinamos estos resultados en su conjunto podemos concluir que los perímetros tienen que estar comprendidos entre $2\pi R$, cuando la elipse coincide con la circunferencia, y $4R$, cuando $r = 0$, es decir, una elipse plana. En definitiva:

$$\pi \cdot (R + r) \leq Perímetro \leq 4 \cdot (R + r)$$

Significa que hay que multiplicar $(R+r)$ por una fórmula que fluctúe entre 4 y π. En principio parece complicado, pero ya conocemos una fórmula de esas características, la ***Fórmula de las Constantes Regulares*** de mi trabajo anterior:

$$\pi \leq N \cdot tan\frac{180}{N} \leq 4 \qquad \Rightarrow \qquad \pi \cdot (R + r) \leq N \cdot tan\frac{180}{N} \cdot (R + r) \leq 4 \cdot (R + r)$$

El problema es que N es un número natural. Pero N representa la cantidad de veces que cierto ángulo está comprendido en *180º*. Por lo tanto, podemos expresarlo como $N = 180/\alpha$. Por otro lado, $180/N$ representa a dicho ángulo, es decir: $\alpha = 180/N$. Ahora podemos decir que:

$$\pi \leq N \cdot tan\frac{180}{N} \leq 4 \quad \Longrightarrow \quad \pi \leq \frac{180}{\alpha} \cdot \tan\alpha \leq 4 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \alpha \leq 45$$

La llamaré ***Forma Invertida de la Constante Regular***. Implica que:

$$\lim_{N\to\infty}\left(N \cdot tan\frac{180}{N}\right) = \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{180}{\alpha} \cdot \tan\alpha\right) = \pi$$

Entonces:

$$\text{Para } \alpha = 45 \rightarrow \frac{180}{\alpha} \cdot \tan\alpha = 4 \qquad \text{y para } \alpha = 0 \rightarrow \frac{180}{\alpha} \cdot \tan\alpha = \pi$$

Atendiendo al Ángulo de la elipse, el resultado debería ser el contrario, es decir, habría que emplear la inversa de esa fórmula. Pero entonces los resultados estarían entre $1/4$ y $1/\pi$. Por lo que, tomando α, el Ángulo de la elipse, y por analogía a las fórmulas tradicionales que tienen forma *π·algo·(operación entre R y r)*, propongo la fórmula:

$$P \approx \pi \cdot \frac{4}{\frac{180}{\alpha} \cdot \tan\alpha} \cdot (R + r) \quad \Longrightarrow \quad P \approx \pi \cdot \frac{\alpha}{45 \cdot \tan\alpha} \cdot (R + r) \quad \text{Donde: } \frac{4}{\pi} \geq \frac{\alpha}{45 \cdot \tan\alpha} \geq 1$$

La llamaré: **FÓRMULA DEL PERÍMETRO DE LA ELIPSE POR CONSTANTE INVERTIDA**.

He calculado algunos perímetros sencillos y los he comparado con los resultados anteriores en la siguiente tabla.

Comparativa de perímetros calculados según distintas fórmulas					
R	**r**	**Por Constante Invertida**	**Fórmula Ramanujan**	**Serie 2**	**Escala**
10	10	62,8318530717959	62,8318530717959	62,8318530717959	1
10	9	61,8821641508605	59,7316043227659	59,7316043252429	1,11
10	8	60,7266848001197	56,7233355685092	56,7233357759323	1,25
10	7	59,3276651120945	53,8236866019157	53,8236897368814	1,43
10	6	57,6447466955290	51,0539727875171	51,0539965193095	1,66
10	5	55,6377130800967	48,4421054883564	48,4422295064890	2
10	4	53,2708927957311	46,0256246304151	46,0261411343968	2,5
10	3	50,5191777094970	43,8567338145499	43,8585852537806	3,33
10	2	47,3749343639714	42,0112085186987	42,0171856961598	5
10	1	43,8542070961113	40,6055251851410	40,6233708766265	10
10	0	40,0000000000000	39,8337986806673	39,8835004850267	∞

El resultado no parece muy satisfactorio. Supongo que se debe a la naturaleza de la fórmula utilizada, pues proviene de la Fórmula de las Constantes Regulares. Es muy probable que mi fórmula calcule perímetros de polígonos aplanados. Pero aun así podría servir para elipses muy chatas, de escalas superiores a 8, 9 o 10.

Vamos a hacer una comprobación. En la figura 12 calculo los perímetros de hexágonos achatados, el primero, circunscrito a la circunferencia y el segundo inscrito en ella.

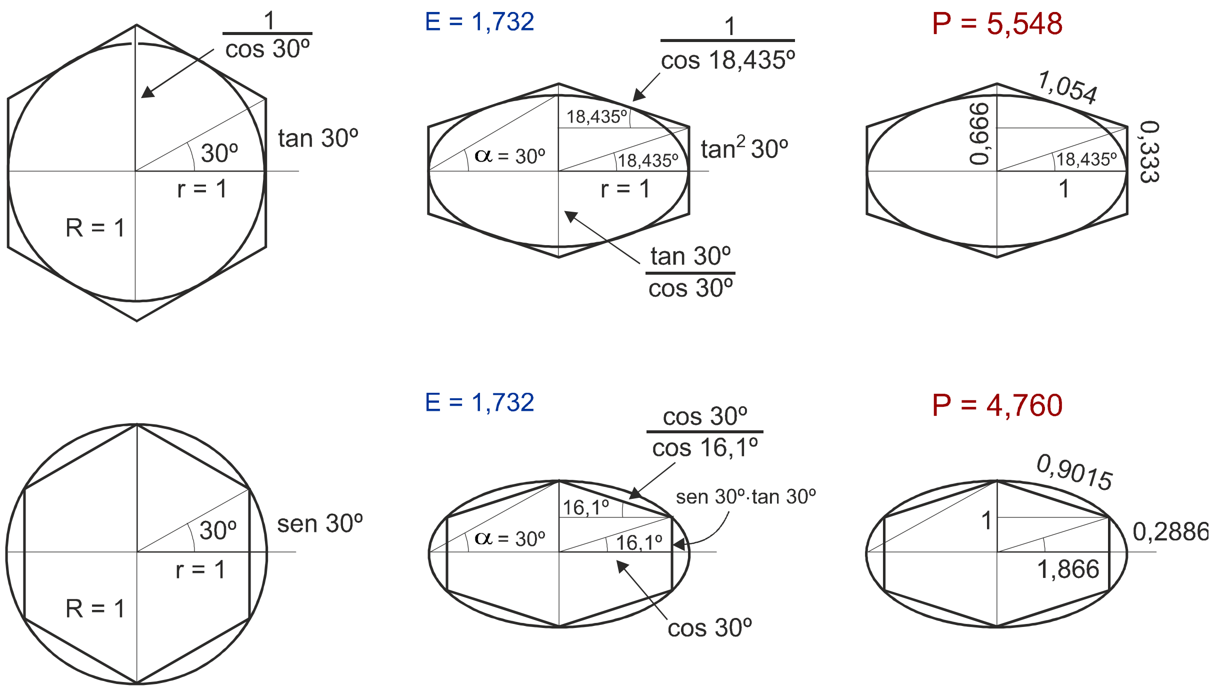


Figura 12

Las figuras de la izquierda representan sendos hexágonos con las circunferencias inscritas y circunscritas respectivamente. En la figura de en medio, están esas mismas representaciones pero achatadas para formar una elipse de Escala 1,732; correspondiente a una elipse de Ángulo 30. He elegido ese ángulo porque es también el del hexágono. En los dibujos de la derecha expreso las dimensiones. Si lo multiplicamos todo por 10, nos da unos perímetros de 55,48 y 47,6 respectivamente. La media da 51,54.

Si calculamos el perímetro de una elipse de Ángulo 30º y Radios $R = 10$ y $r = 5{,}77$ correspondiente $10 \cdot tan\ 30$, con distintas fórmulas, obtenemos.

Perímetro medio calculado:	**51,54**
Por la fórmula más simple:	**51,2942**
Por la de Ramanujan:	**50,4380**
Por la Serie 1:	**50,6786**
Por la Serie 2:	**50,4381**
Por Constante Invertida:	***57,2132***

Todos los valores se acercan al perímetro medio del hexágono achatado salvo el valor calculado con mi fórmula, más próximo al perímetro del hexágono circunscrito aplanado, pero muy alejado; demasiado para que ésta represente a un hexágono achatado.

Sospecho que el Ángulo de la elipse no representa su cantidad de achatamiento. Además, como expuse anteriormente, su tangente tiene que ver con la escala de la elipse, la razón entre sus Radios. Pero, si en lugar de invertir la fórmula, de cierta manera, invertimos el ángulo, tomando el ángulo correspondiente al tramos $R - r$, entonces sí obtenemos un grado de aplanamiento: δ. Ahora sí, a mayor ángulo, mayor achatamiento de la elipse. Por eso, voy a proponer otra fórmula basada en la Forma Invertida de la Constante Regular: $(180/\alpha) \cdot tan\ \alpha$.

En la figura 13 sitúo el ángulo δ, al que llamaré **GRADO DE APLANAMIENTO**. Cuando δ vale *0º*, la elipse coincide con la circunferencia, y cuando δ vale *45º*, le elipse es totalmente plana.

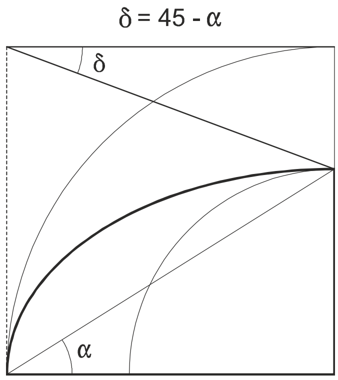


Figura 13

Mi nueva fórmula propuesta es:

$$P \approx \frac{180}{\delta} \cdot \tan \delta \cdot (R + r)$$

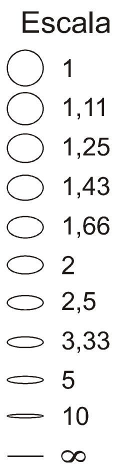
Donde: $4 \geq \frac{180}{\delta} \cdot \tan \delta \geq \pi$

La llamaré:

FÓRMULA DEL PERÍMETRO DE LA ELIPSE POR EL GRADO DE APLANAMIENTO.

He vuelta a calcular los perímetros de la tabla anterior con esta nueva fórmula, y estos son los resultados comparativos:

Comparativa de perímetros calculados según distintas fórmulas				
R	**r**	**Por Grado Aplanamiento**	**Ramanujan**	**Serie 2**
10	10	62,8318530717959	62,8318530717959	62,8318530717959
10	9	59,8887001341761	59,7316043227659	59,7316043252429
10	8	57,2947717847570	56,7233355685092	56,7233357759323
10	7	54,9725476875944	53,8236866019157	53,8236897368814
10	6	52,8406202691243	51,0539727875171	51,0539965193095
10	5	50,8186485695486	48,4421054883564	48,4422295064890
10	4	48,8312843576912	46,0256246304151	46,0261411343968
10	3	46,8106725677836	43,8567338145499	43,8585852537806
10	2	44,6975833051935	42,0112085186987	42,0171856961598
10	1	42,4414933517567	40,6055251851410	40,6233708766265
10	0	40,0000000000000	39,8337986806673	39,8835004850267



Sigue habiendo diferencias, pero está mucho mejor. La desviación respecto de los valores correctos es tanto mayor cuanto mayor es el grado de aplanamiento. No obstante, si comparamos los resultados con los obtenidos con la serie 1 de la primera tabla, esas diferencias no son tan acentuadas.

Comparativa de perímetros calculados según distintas fórmulas				
R	**r**	**Por Grado Aplanamiento**	**Serie 1**	**Serie 2**
10	10	62,8318530717959	62,8318530717959	62,8318530717959
10	9	59,8887001341761	59,7325995151364	59,7316043252429
10	8	57,2947717847570	56,7380272618114	56,7233357759323
10	7	54,9725476875944	53,8919468031230	53,8236897368814
10	6	52,8406202691243	51,2506859136024	51,0539965193095
10	5	50,8186485695486	48,8764628540062	48,4422295064890
10	4	48,8312843576912	46,8316431472467	46,0261411343968
10	3	46,8106725677836	45,1738799272557	43,8585852537806
10	2	44,6975833051935	43,9521378607826	42,0171856961598
10	1	42,4414933517567	43,2036006421258	40,6233708766265
10	0	40,0000000000000	42,9514620607980	39,8835004850267

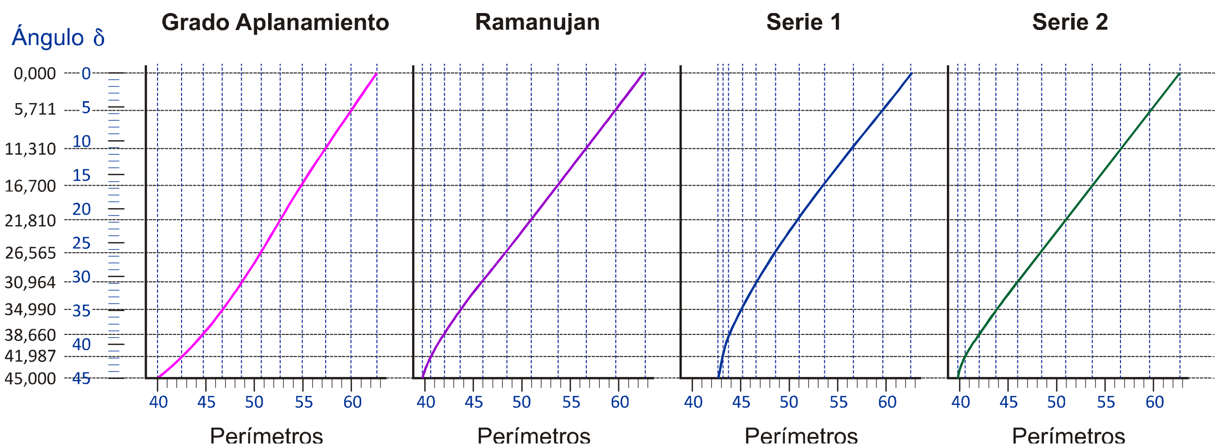
Considero que es una buena aproximación a la realidad. Como comprenderá, no pretendo rebatir unas fórmulas centenarias, basadas en cálculos diferenciales muy precisos, y descubiertas por matemáticos excepcionales tras eones de estudio. No soy matemático, tan sólo un aficionado a la trigonometría que se ha tropezado con la elipse por casualidad.

Además, si se fija, los valores de la columna correspondiente a la Serie 1, cuya fórmula se desarrolla sumando términos negativos, es decir, restándolos, son siempre mayores que los de la Serie 2, cuya fórmula emplea sumandos positivos, por lo que, cuando se empleen infinitos término ambas fórmulas casi coincidirán. ¿Significa eso que los perímetros exactos deberían estar entre medias de ambos resultados? No es más que una reflexión.

Hay más diferencias. En la tabla siguiente, he reflejado los porcentajes en que decrecen los perímetros de una fila respecto de la siguiente. Podemos apreciar que, en las columnas referentes a las series 1 y 2, exceptuando la primera fila de porcentajes, dichos porcentajes crecen progresivamente conforme disminuyen los Ángulos de las elipses. Sin embargo, los porcentajes referentes a los perímetros medidos con mi fórmula, aumentan hasta la mitad de la tabla, y después decrecen. Cabe destacar los primeros porcentajes, que difieren sensiblemente de la tendencia general al menos con los perímetros medidos con las fórmulas académicas.

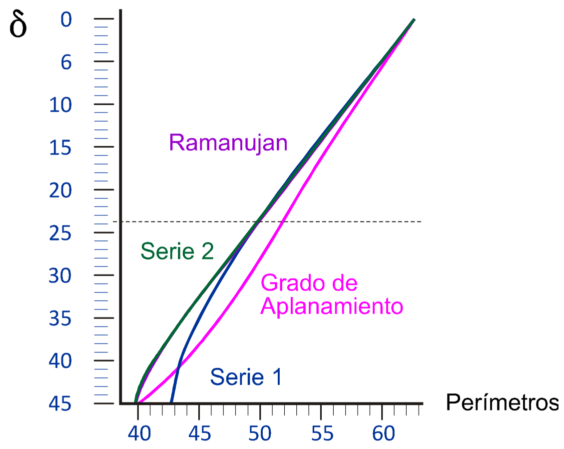
			TABLA COMPARATIVA					
R	**r**	**Ángulo δ**	**Perímetros por Grado Aplanamiento**	**% Dec.**	**Perímetros por Serie 1**	**%Dec.**	**Perímetros por Serie 2**	**% Dec.**
10	10	0,000	62,831853071796		62,831853071796		62,831853071796	
10	9	5,711	59,888700134176	95,316	59,732599515136	95,067	59,731604325243	95,066
10	8	11,310	57,294771784757	95,669	56,738027261811	94,987	56,723335775932	94,964
10	7	16,700	54,972547687594	95,947	53,891946803123	94,984	53,823689736881	94,888
10	6	21,801	52,840620269124	96,122	51,250685913602	95,099	51,053996519309	94,854
10	5	26,565	50,818648569547	96,173	48,876462854006	95,367	48,442229506489	94,884
10	4	30,964	48,831284357691	96,089	46,831643147247	95,816	46,026141134397	95,012
10	3	34,990	46,810672567784	95,862	45,173879927256	96,460	43,858585253781	95,291
10	2	38,660	44,697583305194	95,486	43,952137860783	97,295	42,017185696159	95,802
10	1	41,987	42,441493351757	94,953	43,203600642126	98,297	40,623370876626	96,683
10	0	45,000	40,000000000000	94,247	42,951462060798	99,416	39,883500485027	98,179

Lo veremos mejor de forma gráfica.



En esta gráfica represento la evolución de los distintos perímetros respecto de los ángulos δ (grado de aplanamiento), de las respectivas elipses según las distintas fórmulas.

Notamos enseguida la similitud entre las tres gráficas de la derecha; curvas pronunciadas de inicio con un tramo prácticamente recto a continuación. En cambio, la curva representativa de la fórmula por Grado de Aplanamiento, presenta un punto de inflexión cerca de los 25 grados. Esta es la comparativa gráfica:



Las tres curvas correspondientes a los cálculos tradicionales prácticamente se superponen a partir del ángulo de 25º, casi coincidiendo, curiosamente, con el punto de inflexión de la cuarta curva, y que he calculado que se encuentra ente los ángulos 23,701º y 23,749.

Tiene su lógica; las fórmulas normales se basan en el mismo cálculo diferencial expuesto al inicio de este capítulo. Por eso son tan similares entre sí. Uno de los componentes de dicha expresión es el seno del ángulo θ, ángulo que tiene que ver con los diferenciales tomados para la integración. Estos ángulos disminuyen de forma progresiva con el achatamiento de la elipse, y sus senos lo hacen prácticamente en esa misma proporción, como muestra la tabla siguiente.

Ángulo θ	**%Dec**	**Senos**	**%Dec**
45,000		0,707106781186547	
41,987	93,3 %	0,668964731622450	94,6 %
38,660	92,1 %	0,624695047554424	93,4 %
34,992	90,5 %	0,573462344363328	91,8 %
30,964	88,5 %	0,514495755427527	89,7 %
26,565	85,8 %	0,447213595499958	86,9 %
21,801	82,1 %	0,371390676354104	83,0 %
16,699	76,6 %	0,287347885566345	77,4 %
11,310	67,7 %	0,196116135138184	68,3 %
5,711	50,5 %	0,099503719020999	50,7 %
0,000	00,0 %	0,000000000000000	00,0 %

También observamos que los perímetros disminuyen progresivamente muy rápidamente al principio, cuando la elipse es muy redondeada, para después estabilizarse y disminuir en progresión casi constante. Con la excepción del primer valor que es aparentemente mayor de lo que debería.

En cambio, la curva correspondiente a mi última fórmula, indica que los perímetros decrecen de forma progresivamente más rápida hasta el punto de inflexión, para después decrecer de forma progresivamente más lenta. Aquí, el primer valor si está en concordancia con el resto de la tabla.

Por otra parte, en la fórmula integral, seno de θ al cuadrado se multiplica por la excentricidad $\mathcal{E}$ al cuadrado, que representa el cuadrado de una relación entre el semieje mayor y la distancia focal. Pero, resulta que: $\sqrt{\mathbf{1-\varepsilon^2 \cdot sen^2\theta}} \cong \boldsymbol{\varepsilon \cdot \cos\theta}$. Significa, más o menos, que la integral calcula el perímetro mediante una infinita suma de segmentos rectos infinitesimales cercanos al coseno del ángulo, a escala excentricidad, de cada triángulo rectángulo diferencial.

A mi entender, con las fórmulas tradicionales se descompone la elipse en infinitos triángulos rectángulos proporcionales al semieje mayor y sumando la base de cada triángulo rectángulo obtenemos el perímetro de esa elipse. Finalmente, la integral se multiplica por $4R$ porque ésta calcula el perímetro en el intervalo $[0,\pi/2\,]$ que define un solo cuadrante de la elipse unitaria en cuestión.

Me lleva a una reflexión, si se suman las bases de todos y cada uno de esos triángulos rectángulos, se están sumando infinitos segmentos paralelos, algo así como la representación de la figura 14 (a groso modo).

Teniendo en cuenta que las alturas de dichos triángulos rectángulos son tan pequeñas que se pueden considerar 0, el perímetro tiene que ser muy aproximado a la realidad, pero inexacto.

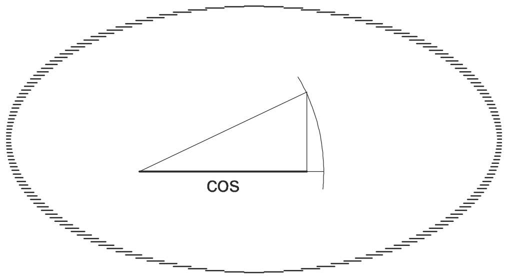


Figura 14

A mi entender, mi solución de medir los perímetros por grado de aplanamiento no difiere mucho de la fórmula integral:

En lugar de la Excentricidad que es una razón entre segmentos significativos de la elipse, tomo la tangente del Grado de Aplanamiento, que, de cierta forma, expresa proporcionalidad entre los dos Radios de la elipse; razón, también, entre segmentos significativos de la elipse. Es decir, tomo $\tan\delta = 1 - \tan\alpha$, en lugar de la raíz cuadrada de $1 - \mathcal{E}^2 sen^2\theta$. Y en lugar de sumar infinitos segmentos rectos, sólo tomo $180/\delta$ segmentos, que no son muchos (salvo para $\delta=0$ y cercanos), pero ¿quién dice que sean rectos? Cuando calculamos el perímetro de una circunferencia, sólo cogemos dos segmentos rectos, $2r$, y los multiplicamos por π. Si consideramos $2r = d$ (el diámetro) entonces es un solo segmento.

¿Podría ser que π sea un factor de "redondeamiento"? ¿Podría ser también que los Coeficientes Regulares, y sus "derivados", sean de la misma "clase" que π, y que todos sean también factores de "redondeamiento", o mejor dicho, de convexidad, pero en distinto grado: pasando de $\pi = totalmente\ convexo$, a $4 = totalmente\ plano$?

Es cierto que π interviene en todas las fórmulas tradicionales, pero es como si primero se calculará la elipse como conjunto de segmentos recto y después π la redondea. Sin embargo en mi fórmula, calculo directamente el perímetro con un factor de "convexidad" específico para cada elipse.

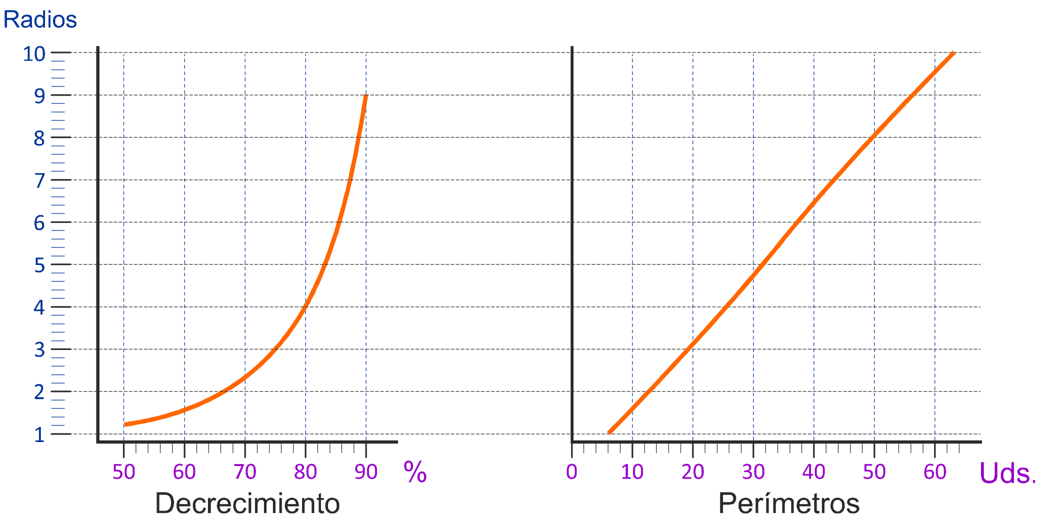
Como he dicho antes, no soy más que un aficionado, y lo más seguro es que me pierda en divagaciones absurdas. Reconozco que los cálculos diferenciales me vienen grandes y a lo mejor no sé de lo que estoy hablando. Pido también disculpas por si no acierto a expresarme en lenguaje puramente matemático y si llego a conclusiones transgresoras que puedan escandalizar a más de un académico. Pero, ¿tengo algo de razón?

Por último, me gustaría exponer a continuación unos datos interesantes respecto de la progresión de los perímetros de diferentes circunferencias.

En la tabla siguiente muestro distintos perímetros de la circunferencia, que van desde la de Radio 1 hasta la de Radio 10.

Radio	Perímetro	% Dec.
10	62,831853071795900	
9	56,548667764616300	90,00
8	50,265482457436700	88,89
7	43,982297150257100	87,50
6	37,699111843077500	85,71
5	31,415926535897900	83,33
4	25,132741228718300	80,00
3	18,849555921538800	75,00
2	12,566370614359200	66,67
1	6,283185307179590	50,00

En la tercera columna trascribo, de manera similar a cómo lo hice con la elipse, el tanto por ciento de decrecimiento de cada perímetro respecto del anterior. Estos datos se aprecian mejor en la siguiente gráfica:



La gráfica de decrecimientos tiene clara forma exponencial, mientras que la de la evolución de los distintos perímetros es prácticamente una recta, aunque se aprecia que tienen ligeras curvaturas, cóncava - convexa, con un punto de inflexión a la mitad. Muy similar a la de los perímetros calculados por grado de aplanamiento…

Ya sé que ambas gráficas no tienen nada que ver. En la primera uno de los Radios permanece constante, y representa cómo evolucionan los perímetros de una misma elipse conforme se va achatando. En esta última son perímetros de circunferencias distintas cada vez más pequeñas. Pero me agrada esa similitud, esa misma evolución progresiva, perímetros cada vez más pequeños que disminuyen de forma armónica.

5.2 EL FACTOR ELIPTÍCO

A pesar de lo recién expuesto, voy a llamar ***Factor Elíptico*** φ al producto $(180/\delta) \cdot \tan\delta$ con el subíndice δ para expresar el grado de aplanamiento.

DEFINICION: FACTOR ELIPTICO: $\varphi_\delta = \dfrac{180}{\delta} \cdot TAN\ \delta$

Expresaré el perímetro de la elipse como: $\boldsymbol{P \approx \varphi_\delta.(R + r)}$, y al ángulo δ lo llamaré grado de la elipse.

Así por ejemplo, $\boldsymbol{\varphi_{30}.(R + r)}$ se refiere al perímetro de la elipse de Radios R y r, y grado de aplanamiento 30^{o}. Y, $\boldsymbol{\varphi_{30}}$ es el factor elíptico de toda elipse de grado 30.

Notamos enseguida la similitud entre ésta fórmula y las de la circunferencias, o la de los polígonos regulares de mi trabajo anterior. De tal manera que, cuando los dos Radios sean iguales, el perímetro medirá:

$$\boldsymbol{P = 2\varphi_\delta r \quad \Longrightarrow \quad P = 2\pi r}$$

Y, cuando el Radio pequeño valga 0, el perímetro medirá:

$$\boldsymbol{P = 2 \cdot \varphi_\delta R \quad \Longrightarrow \quad P = 2 \cdot 4r \quad \Longrightarrow \quad P = 4R}$$

El perímetro de las demás elipses se calcularía como el de cualquier polígono regular.

Existen perímetros particularmente curiosos: cuando el grado de la elipse coincide con el Ángulo de cualquier polígono regular. Por ejemplo: $\delta = 30$. ¿Qué perímetro estaríamos calculando? ¿El de la elipse o el de un hexágono? ¿O el de los dos? El perímetro de un cuadrado de lado 6 es exactamente el mismo que el de un rectángulo de lados 5x7. También podría ser el perímetro de un triángulo equilátero de lado 8.

Significa que hay veces que el Factor Elíptico coincide con la Constante Regular. Por ejemplo:

$$\boldsymbol{\varphi_{30} = \sigma_6} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{\varphi_{36} = \sigma_5}$$

Pero, ¿qué diferencia hay? En principio, ninguna. Bueno, en la Constantes regular N es un número natural, y en el Factor Elíptico, δ es un número real. Aun así, podemos decir que el conjunto de Constantes Regulares es un subconjunto del conjunto de los Factores Elípticos igual que $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Por supuesto, estoy suponiendo que la fórmula del perímetro de la elipse por grado de aplanamiento es correcta. No obstante, si decidimos calcular los perímetros de las elipses con este método, entonces habría que tener en cuenta todos estos factores.

El mayor inconveniente de utilizar este método, en principio, sería medir el Grado de Aplanamiento. Pero no tanto. Resulta que:

$$\boldsymbol{E = \frac{R}{r} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{1}{\tan\alpha}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\tan\sigma = 1 - \tan\alpha}, \quad \text{luego } \boldsymbol{\tan\sigma = 1 - \frac{1}{E}}$$

Con esto, podemos calcular el Grado de Aplanamiento de forma sencilla:

$$\boldsymbol{tan\,\sigma = 1 - \frac{1}{E}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{tan\,\sigma = 1 - \frac{r}{R}} \quad \text{luego} \;\; \boldsymbol{\sigma = atan\left(1 - \frac{r}{R}\right)}$$

Ya podemos calcular el Grado de Aplanamiento sólo conociendo los Radios de la elipse. De hecho, sólo con esos segmentos podemos calcular cualquier magnitud:

$$\boldsymbol{E = \frac{R}{r}} \qquad \boldsymbol{\sigma = atan\left(1 - \frac{r}{R}\right)} \qquad \boldsymbol{\alpha = atan\left(\frac{r}{R}\right)} \qquad \boldsymbol{tan\,\alpha = \frac{r}{R}} \qquad \boldsymbol{tan\,\sigma = 1 - \frac{r}{R}}$$

También podemos poner algunas igualdades en función de la tangente de la elipse.

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{tan\,\alpha}} \qquad \boldsymbol{tan\,\sigma = 1 - tan\,\alpha}$$

Esto nos lleva a deducir:

$$\boldsymbol{tan\,\alpha = 1 - tan\,\sigma} \qquad \boldsymbol{tan\,\alpha + tan\,\sigma = 1}$$

Por último, podemos hacerlo en función de la escala de la elipse.

$$\boldsymbol{tan\,\alpha = \frac{1}{E}} \qquad \boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{tan\,\sigma = 1 - \frac{1}{E}}$$

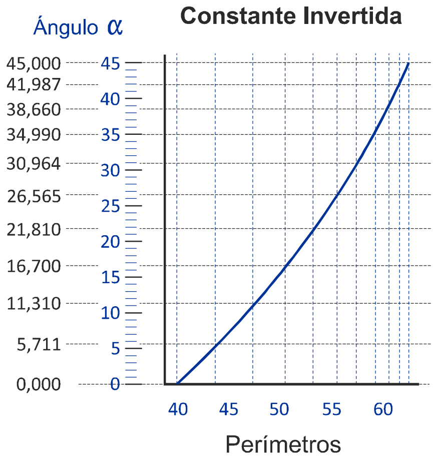
5.3 LA CONSTANTE INVERTIDA

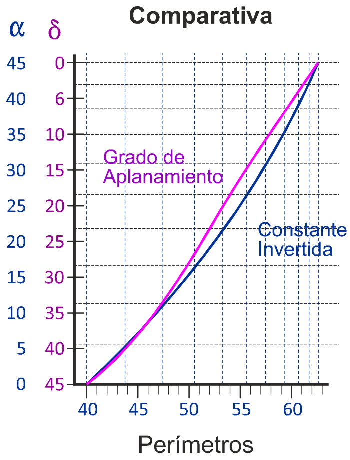
Hay un aspecto de la fórmula del perímetro de la elipse por constante invertida que resulta interesante y que me gustaría reflejar en este trabajo.

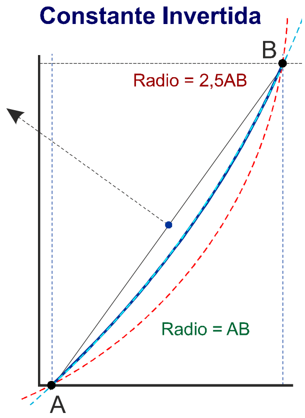
Analicemos la tabla de progresión de los perímetros calculados con esa fórmula:

Ángulo α	Perímetros	% Dec
45,000	62,831853071796	
41,987	59,888700134176	95,316
38,660	57,294771784757	95,669
34,992	54,972547687594	95,947
30,964	52,840620269124	96,122
26,565	50,818648569549	96,173
21,801	48,831284357691	96,089
16,699	46,810672567784	95,862
11,310	44,697583305194	95,486
5,711	42,441493351757	94,953
0,000	40,000000000000	94,247

De forma similar a la fórmula del factor de aplanamiento, los perímetros aumentan primero de forma progresivamente ascendente hasta la mitad de la tabla para después disminuir de forma progresivamente decreciente. Pero con una diferencia significativa como vemos en la gráfica de la página siguiente: es una progresión constante casi perfecta.



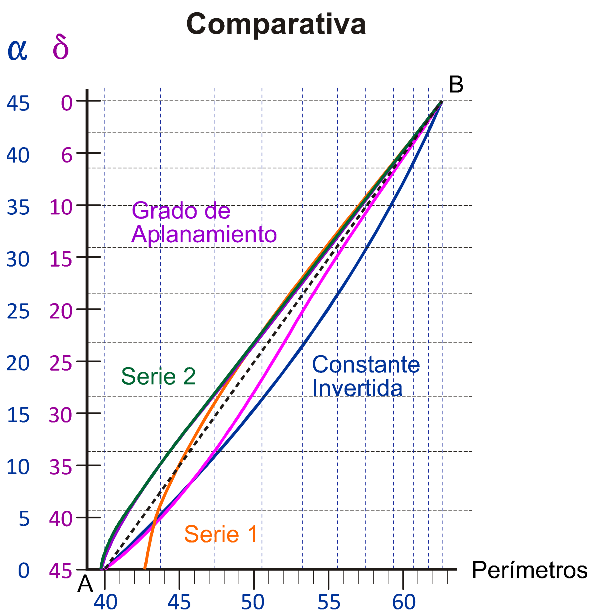




En la gráfica de la izquierda represento la progresión de la misma manera que con las demás fórmulas. En la de en medio comparo esa curva con la obtenida con la fórmula por grado de aplanamiento. Observamos que la curva azul empieza por encima de la morada, para después, sobre el grado 35, discurrir siempre por debajo.

En la curva más a la derecha he dibujado dos arcos de circunferencia, uno de puntos, color cian, de radio $\overline{AB}$, y otro, rojo de radio $2{,}5 \cdot \overline{AB}$. Compruebe que el primer arco de circunferencia, prácticamente se solapa con la curva representativa de los perímetros medidos mediante mi fórmula de los perímetros de la elipse por constante invertida.

Finalmente, en la gráfica siguiente, represento la evolución de los perímetros medidos por las distintas fórmulas. Podemos extraer dos conclusiones inmediatas.



1º Si observamos el eje de puntos $\overline{AB}$, las curvas correspondientes a mis fórmulas transcurren íntegramente por debajo de ese eje, mientras que las correspondientes a las fórmulas tradicionales siempre van por encima, con la excepción del primer tramo de la Serie 1, la supuestamente menos fiable.

2º La curva correspondiente a la constante invertida es la más diferente de todas. Pero también es la más constante, la más homogénea. Prácticamente un arco de circunferencia.

No tengo los suficientes conocimientos para sacar más conclusiones, pero, me pregunto: ¿si aplano una circunferencia de forma constante, midiendo los perímetros a intervalos regulares, qué resultados obtendría si utilizara una fórmula al cien por cien fiable? En teoría, desde este punto de vista ¿deberíamos obtener una representación totalmente recta, una curva constante, una curva variable, o una curva con punto de inflexión?

Según las fórmulas tradicionales, al inicio, los perímetros disminuyen muy rápidamente y después el decrecimiento se estabiliza. Es decir, la diferencia entre una circunferencia perfecta y una elipse ligeramente achatada, digamos unos 10 grados, es muy diferente a achatar 10 grados una elipse ya achatada 30 grados; pero achatar 10 grados una elipse aplanada 40 grados es más o menos lo mismo que achatar 10 grados una elipse aplanada 60, 70 u 80 grados.

En mi fórmula de constante invertida, en cambio, sería lo mismo aplanar una elipse ligeramente achatada que achatar una casi plana. Y lo mismo sería aplanar elipses medianamente redondas que las medianamente planas. Las diferencias crecen y decrecen simétricamente en torno a los 22,5 grados.

Da que pensar. Si analizamos las representaciones gráficas de las distintas razones trigonométricas, todas crecen o decrecen de forma progresiva. Los senos y cosenos dan curvas sinusoidales prefectas y las tangentes, en un mismo cuadrante, curvas de variación exponencial continua, sin inflexiones ni tramos rectos. ¿Cómo debería ser la curva representativa de la evolución de los perímetros de las elipses?

6 RADIOS EXCÉNTRICOS

Quiero continuar este estudio plasmando aquí un elemento de la elipse, creo que desconocido, al que he denominado **RADIO EXCÉNTRICO**.

6.1 LA TEORIA

Como expuse al inicio de este trabajo, llegué a la elipse a través de la informática. Necesitaba programar un algoritmo que dibujara figuras geométricas simples de colores concéntricamente degradados. Como los de la figura 15, dibujados con dicho algoritmo.

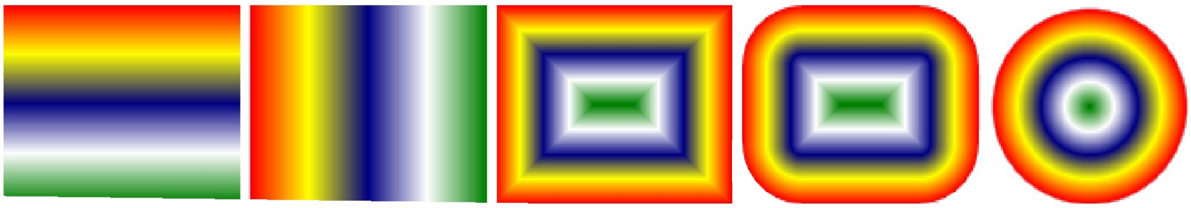


Figura 15

Para dibujar estas figuras no hay que trazar paralelas, ni figuras concéntricas de colores distintos, habría que dibujar demasiadas líneas y el resultado sería cromáticamente discontinuo y desastroso. Hay que configurar un mapa de bits vacío para después colorearlo punto por punto. Para ello hay que tomar puntos de referencia y calcular el color correspondiente dependiendo de la distancia a dichos puntos. Para la circunferencia, por ejemplo, se calcula la distancia de cada punto respecto del centro de la figura, y después se extrapola el color adecuado según esa distancia.

Todo iba bien hasta que me tocó degradar la elipse. Mi primera intención fue proceder como con la circunferencia. Resultado, el dibujo de la izquierda de la figura 16, pero yo quería llegar a la representación derecha, elipses concéntricas homogéneas.

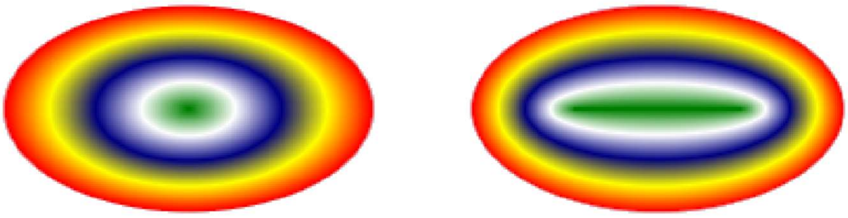


Figura 16

Para obtener el resultado requerido, no podía tomar el centro de la elipse como punto de referencia, tenía que tomar puntos sobre el eje mayor. Probé con las normales y con las verticales, pero nada.

Después averigüe que debía medir distancias sobre segmentos inclinados, más inclinados cuanto más alejados del centro. Finalmente me di cuenta que esos segmentos eran paralelos a los Radios de la circunferencia menor y además medían exactamente lo mismo que ese radio y que encajaban perfectamente dentro de la elipse.

A esos segmentos los denominé Radios Excéntricos, porque era como tomar cada radio y desplazarlos horizontalmente, descentrarlos, hasta que encajaran dentro de la elipse. Como represento en la figura siguiente.

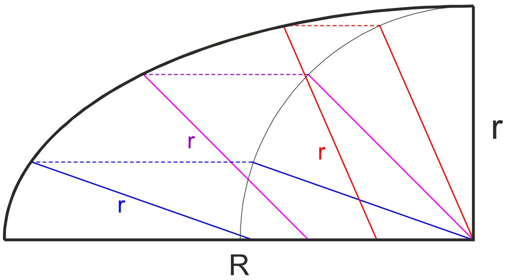


Figura 17

Se podría definir el Radio Excéntrico como: el segmento recto paralelo a un radio de referencia que, teniendo su mismo tamaño e inclinación, y dentro de su mismo cuadrante, encaja perfectamente entre el semieje mayor y el perímetro de la elipse.

Equivale a dotar del punto extremo superior del Radio Menor de dos movimientos uniformes combinados, dentro de cada cuadrante mientras el punto inferior permanece sobre el Radio Mayor. Uno de rotación alrededor del centro de la Circunferencia Pequeña, y otro de traslación a lo largo del Radio Mayor. Como planetas girando alrededor de una estrella que se desplaza en línea recta. Cada foto que tomemos de ese movimiento equivaldría a un Radio Excéntrico. Si a cada punto del Radio Pequeño le asignásemos un color diferente obtendríamos un cuadrante de la elipse derecha de la figura 16.

Llamaré Ángulo del Radio Excéntrico al ángulo de su radio de referencia respeto del semieje menor. Así, cuando hable del radio excéntrico de 37 grados, me estaré refiriendo al excéntrico cuyo radio de referencia está inclinado 37 grados respecto del Radio Pequeño.

Dibujar un radio excéntrico correspondiente a un radio de referencia inclinado θ grado respecto del semieje menor es muy sencillo; se traza una horizontal desde el extremo superior del radio de referencia y donde corta a la elipse se dibuja una paralela a dicho radio. Como explicaba en el punto 3.2, el punto superior de cada radio excéntrico se encontrará a distancia $E \cdot r\,sen\,\theta$ del Radio Menor. Pero, el extremo inferior está a distancia $(E\!-\!1) \cdot r\,sen\,\theta$ de ese mismo Radio (= centro de la elipse).

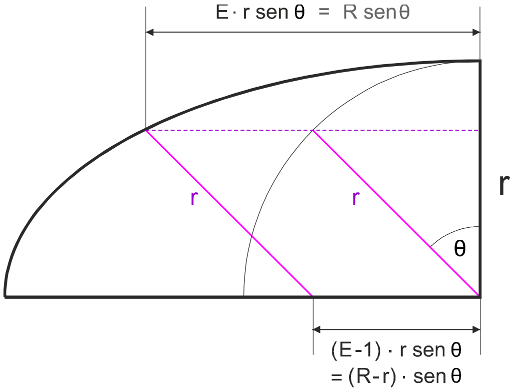


Figura 18

Es decir, el Radio Excéntrico está desplazado horizontalmente $(E\!-\!1) \cdot r\,sen\,\theta$ respecto del radio referencia. Empleo el vocablo "horizontalmente", porque, como explicaba en el primer capítulo, trabajo siempre con elipses unitarias, es decir más anchas que altas y de semieje mayor 1.

Si ponemos la expresión anterior en función de R, obtenemos.

$$\begin{aligned}
(E-1)\cdot r\cdot sen\,\theta &= (E-1)\frac{R}{E}\cdot sen\theta \\
&= \left(R-\frac{R}{E}\right)\cdot sen\theta \\
&= R\left(1-\frac{1}{E}\right)\cdot sen\theta && \text{pero } 1-\frac{1}{\mathrm{E}}=\tan\delta \\
&= R\cdot tan\delta\cdot sen\theta && \text{pero } \mathrm{R}\cdot\tan\delta=\mathrm{R}-\mathrm{r} \\
&= (R-r)\cdot sen\,\theta
\end{aligned}$$

Luego, la distancia horizontal a la que se encuentra el Radio Excéntrico respecto del de referencia se puede expresar:

En función de la Escala:	$(E-1)\cdot r\cdot sen\,\theta$
En función del Grado de Aplanamiento:	$R\cdot tan\delta\cdot sen\,\theta$
En función de los Radios:	$(R-r)\cdot sen\,\theta$
En función del Angulo de elipse:	$\left(\frac{\mathbf{1}}{\tan\alpha}-\mathbf{1}\right)\cdot r\cdot sen\,\theta$
Ángulos Combinados:	$\left(\frac{tan\,\delta}{tan\,\alpha}\right)\cdot r\cdot sen\,\theta$

Particularmente la expresión que más me gusta es: $(R-r)\cdot sen\,\theta$

Esto implica que el Radio Pequeño y su excéntrico está a distancia 0 el uno del otro, puesto que ambos son de ángulo 0. Es decir ocupan el mismo lugar, o, si lo prefiere, son el mismo segmento.

Ya conocemos la distancia en horizontal de cada punto de cualquier radio excéntrico respecto de su radio de referencia, ahora podemos calcular su distancia en horizontal respecto del Radio Menor. Si tomamos el centro de la elipse como origen de un sistema cartesiano de referencia[1], dadas (x,y) las coordenadas de un punto cualquiera, dicho punto se hallará a la distancia:

En función de la Escala: $x = (E-1)\cdot r \cdot sen\,\theta + y\cdot\tan\theta$

En función del Grado de Aplanamiento: $x = R\cdot tan\delta \cdot sen\,\theta + y\cdot\tan\theta$

En función de los Radios: $x = (R-r)\cdot sen\,\theta + y\cdot\tan\theta$

En función del Angulo de elipse: $x = \left(\frac{\mathbf{1}}{tan\,\alpha} - \mathbf{1}\right)\cdot r\cdot sen\,\theta + y\cdot\tan\theta$

Ángulos Combinados: $x = \left(\frac{tan\,\delta}{tan\,\alpha}\right)\cdot r\cdot sen\,\theta + y\cdot\tan\theta$

En la figura 19 se ve mejor:

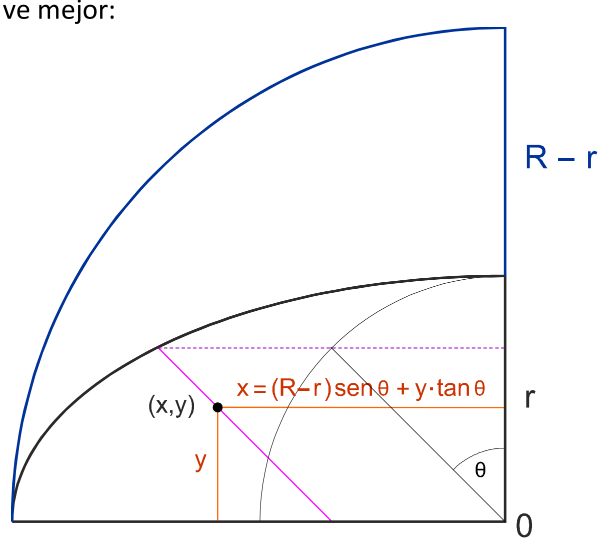


Figura 19

Llegados a este punto puedo de definir el Radio Excéntrico de manera más formal:

DEFINICION: Un Radio Excéntrico es el Conjunto de los puntos interiores de una elipse que, dentro de un mismo cuadrante, se encuentran horizontalmente a distancia $(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot \boldsymbol{sen\,\theta} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{tan\,\theta}$ del Semieje Menor.

1º **Por cada radio cualquiera de la circunferencia interior, existe un Radio Excéntrico y solo uno dentro de ese cuadrante**. Esto es cierto puesto que cualquier otro punto de ese cuadrante se hallará forzosamente a una distancia horizontal diferente.

2º **Cada punto interior de la superficie de la elipse, incluida la cuerda, pertenece a un y solo un Radio Excéntrico**. Si algún punto perteneciera a dos radios excéntricos distintos dentro de un mismo cuadrante, significaría que se encuentra a la misma distancia horizontal de dos radios cualquiera de la circunferencia interior. Pero eso no puede ser pues implicaría que dos radios distintos de la circunferencia interior tienen la misma inclinación o que se cruzan en algún punto, y eso es imposible.

1. *Puesto que hasta ahora siempre he utilizado el sector superior izquierdo de la elipse para mis representaciones gráficas, para este capítulo me permitiré la licencia de invertir las medidas horizontales del sistema de referencia normal, considerando valores positivos a la izquierda del origen y negativos a la derecha. No es muy académico, pero me evita tener que modificar todo el estudio.*

6.2 EJERCICIO

Aparentemente, con estas premisas debe resultar sencillo dibujar mi elipse de colores degradados. Sé sobre qué línea tengo que medir distancias, el radio excéntrico, y conocido éste, puedo colocarlo en el sitio correcto. Pero la cosa resulta más compleja de lo que parece.

Para saber qué color tengo que darle a cada pixel, tengo que saber a qué radio excéntrico pertenece el punto en cuestión y a qué distancia está respecto del semieje mayor a lo largo de dicho radio. No puede ser muy complicado, sólo pertenece a uno y sólo uno, pero ¿Cuál?

Por eso, me gustaría plantear un pequeño problema:

PROBLEMA: Dado un punto cualquiera de la superficie interior de una elipse, averiguar a qué radio excéntrico pertenece.

Tenga en cuenta que solo conocemos las dimensiones de la elipse: Radio Pequeño, Radio Grande y las coordenadas (x,y) del punto en cuestión respeto del centro de la elipse; se ve mejor sobre la figura 20.

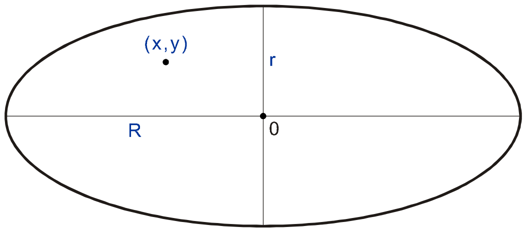


Figura 20

Mientras pensáis al respecto, voy a exponer un último aspecto peculiar de la elipse que creo que también es novedoso. Distintos tipos de elipses concéntricas.

7 ELIPSES CONCÉNTRICAS

Dentro de la superficie que abarca cualquier elipse se pueden dibujar infinitas elipses más pequeñas. Pero hay algunas que son distintivas, las concéntricas. Y las hay de varios tipos, pero distinguiré dos tipos básicos; las de la figura 16: las ESCALADAS y las PARALELAS.

Antes de continuar, tengo que aclarar que cuando hablo de elipses concéntricas me refiero a concéntricas respecto de otras más grandes a las que llamaré: ***contenedoras***. Ni decir tiene que estas contenedoras, a su vez pueden ser concéntricas de otras mayores, pero siempre que mencione "elipse concéntrica" estaré refiriéndome a una elipse contenida dentro de otra más grande.

Todas las concéntricas comparten un mismo centro, el de la elipse contenedora, pero las de los dos tipos a considerar se diferencian en ciertos aspectos significativos que paso a detallar.

7.1 ELIPSES CONCÉNTRICAS ESCALADAS

Las elipses concéntricas escaladas, son aquellas cuyos Radios, Grande y Pequeño, son menores que los de la contenedora, pero en la misma proporción. Es decir, si el Radio mayor de la concéntrica es un 10 por ciento menor que el mayor de la contenedora, su Radio menor también será 10 por ciento más pequeño que el Radio menor de la contenedora.

Siendo R'y r' los Radios de cualquier elipse concéntrica, se cumple: $\frac{\boldsymbol{R'}}{\boldsymbol{r'}} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{r}}$

Significa que todas las elipses concéntricas escaladas pertenecientes a una misma elipse contenedora son de su misma escala. $E' = E$.

$$\forall \boldsymbol{R'}, \boldsymbol{r'}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{R'} = \boldsymbol{xR},\ \boldsymbol{r'} = \boldsymbol{xr}\ \ \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{E'} = \frac{\boldsymbol{R'}}{\boldsymbol{r'}} \quad \text{Entonces:} \quad \boldsymbol{E'} = \frac{\boldsymbol{R'}}{\boldsymbol{r'}} = \frac{\boldsymbol{xR}}{\boldsymbol{xr}} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{E}$$

Significa también que todas tienen el mismo ángulo y grado de achatamiento; pertenecen a la misma clase de equivalencia. Así, podremos hablar ***de Elipses Concéntricas Escala E***. Ya no es obligatorio incluir la palabra “Escalada” puesto que viene implícita en *“Escala E”*.

Una elipse concéntrica escalda es proporcional a su contenedora en todos los aspectos, Radios, área y perímetro. Sus radios excéntricos también se hallan a la misma distancia proporcional respecto de sus homólogos de la contenedora. La concéntrica es exactamente como la contenedora pero a diferente “escala cartográfica”, de ahí que las llamara CONCÉNTRICAS ESCALADAS.

Por eso, podemos nombrarla por su grado de proporcionalidad, o *“Escala Concéntrica”*.

Por ejemplo: La Elipse Concéntrica 0,45 será aquella cuyas magnitudes sean las de la contenedora multiplicado por 0,45.

El nombre completo de una elipse concéntrica escalada perteneciente una contenedora de Escala 2, y de Escala Concéntrica 0,45 podría ser, por ejemplo:

Elipse Concéntrica 0,45 Escala 2

Conociendo las medidas de la contenedora, podemos calcular todas las magnitudes de la concéntrica 0,45 con una simple multiplicación.

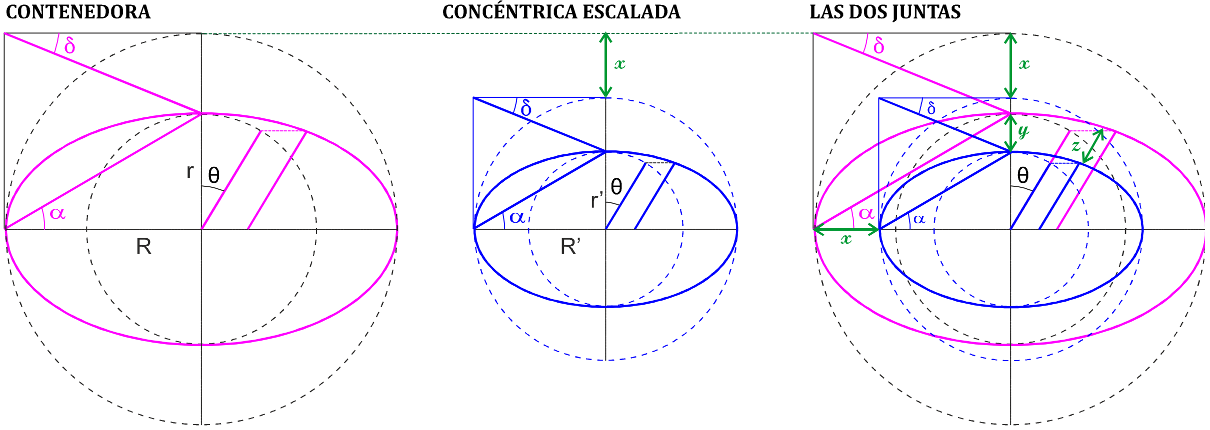


Figura 21

La figura 21 nos muestra la semejanza entre contenedora y concéntrica escalada. Todas las líneas de la primera coinciden en ángulo, orientación e inclinación de la segunda. Sólo varían las medidas y las distancias, pero en todas ellas las distancias x, y, z se reducen en la misma proporción. Por ejemplo, como el Radio mayor es más grande que el menor, la distancia horizontal (x) aumenta en mayor medida que la vertical (y). La concéntrica es una copia exacta de la contenedora pero a menor escala.

7.2 ELIPSES CONCÉNTRICAS PARALELAS o DISTANCIADAS

Las elipses concéntricas paralelas, o distanciadas, son aquellas cuyos Radios, grande y pequeño, son menores que los de la contenedora en idéntica magnitud absoluta. Es decir, si el Radio mayor de la concéntrica es 10 unidades más pequeño que el mayor de su contenedora, su Radio menor también será 10 unidades más pequeño que el Radio menor de la contenedora. Se cumple:

$$\boldsymbol{R' - r' = R - r}$$

Todos y cada uno de los puntos de cualquier elipse concéntrica paralela están a la misma distancia de sus “homólogos” de la elipse contenedora; distancia que ha de medirse sobre los radios excéntricos. Por eso las llamo también distanciadas, por la constante equidistancia entre figuras. Además los radios excéntricos de todas las concéntricas paralelas coinciden con los de la contenedora, son exactamente los mismos aunque más cortos.

Aquí, lo razonables es nombrarlas por esa equidistancia. Por ejemplo, una elipse concéntrica paralela que se halle a 5 unidades de su contenedora la llamaríamos:

Elipse Concéntrica Distanciada 5 unidades

Con estas concéntricas, si conocemos las proporciones de la contenedora, no podemos calcular las medidas de cualquier concéntrica con una simple operación. Sólo sabremos el tamaño de los Radios r', igual a x unidades menos que r, pero ni ángulo, ni escala, ni grado de achatamiento, ni superficie, ni perímetro; todo difiere. No son proporcionales, sólo equidistantes.

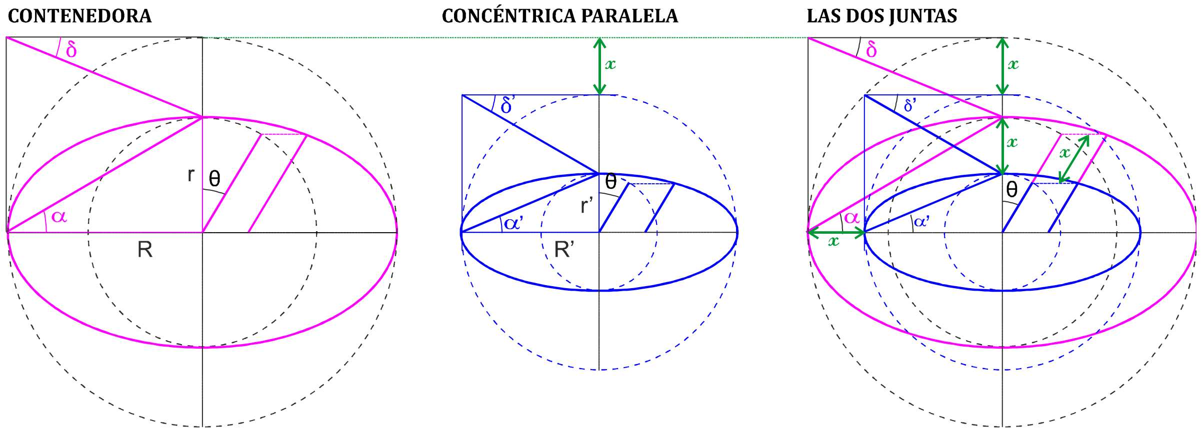


Figura 22

En la figura 22 se aprecia cómo varían medidas, ángulos y escalas, y cómo los radios excéntricos coinciden plenamente en posición e inclinación. Podemos apreciar cómo la elipse pequeña, respecto de los radios excéntricos, se mantiene equidistante (x) a la contenedora alrededor de todo el perímetro.

En este caso no estamos ante una copia exacta a menor escala, al contrario, la escala de la elipse concéntrica es mayor que la de la contenedora. Escala, que aumenta aún más cuanto más pequeña sea la concéntrica respecto de la contenedora. Se puede demostrar de varias maneras, por ejemplo:

$$\boldsymbol{E' = \frac{R'}{r'} = \frac{R-x}{r-x} > \frac{R}{r}} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{E'} > E$$

El término $\frac{\mathrm{R-x}}{\mathrm{r-x}} > \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}}$ se cumple porque si analizamos la expresión, resulta que le estamos quitando la misma cantidad $\boldsymbol{x}$ a dos factores diferentes, por lo que tiene mayor incidencia en el más pequeño que en el más grande. En este caso se reduce en mayor proporción el divisor que el denominador por lo que la división es mayor. No obstante podemos también hacer:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Rr = Rr} \quad &\Longrightarrow \quad \boldsymbol{Rr - xr} > Rr - xR \qquad \text{porque } \mathrm{R} > r \\ &\Longrightarrow \quad \boldsymbol{r \cdot (R-x)} > R \cdot (r-x) \\ &\Longrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{R-x}{r-x} > \frac{R}{r}} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{E'} > E \end{aligned}$$

De todas formas, en este caso, está bastante claro, en la figura 22, que la diferencia entre los Radios mayor y menor de la concéntrica es más acentuada que en la contenedora, por lo que la división R'/r' debe arrojar un resultado mayor que R/r.

En este tipo de elipses concéntricas, se dan, además, otras curiosidades que no ocurren con las otras y que paso a detallar. Veamos la figura 23.

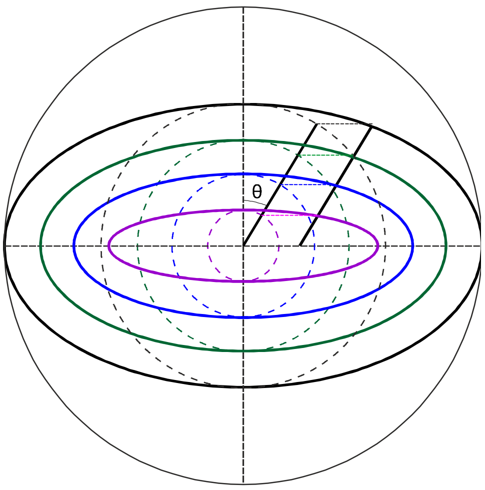


Figura 23

Lo primero que llama la atención es que el único radio excéntrico que hemos representado es el mismo para todas las Elipses Concéntricas Paralelas. Sólo se ha representado uno pero ocurriría lo mismo con cualquier otro radio.

La distancia de dicho radio al semieje menor, medido sobre la elipse, independientemente del valor de '$\boldsymbol{r}$', será siempre:

$$\boldsymbol{d = E \cdot r \cdot sen\,\theta} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{d = R \cdot\ sen\,\theta}$$

Y la distancia entre el radio excéntrico y su radio de referencia, como vimos en el capítulo anterior, será siempre:

$$\boldsymbol{d = (E-1) \cdot r \cdot sen\,\theta} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{d = (R-r) \cdot sen\,\theta}$$

Esto nos lleva a la conclusión que, en el conjunto de infinitas Elipses Concéntricas Distanciadas que caben en una elipse cualquiera, se cumplirá siempre que:

$$\boldsymbol{(E-1) \cdot r \cdot sen\,\theta = (E_1 - 1) \cdot r_1 \cdot sen\,\theta = (E_2 - 1) \cdot r_2 \cdot sen\,\theta = \cdots = (E_n - 1) \cdot r_n \cdot sen\,\theta}$$

Y que:

$$\boldsymbol{(R-r) \cdot sen\,\theta = (R_1 - r_1) \cdot sen\,\theta = (R_2 - r_2) \cdot sen\,\theta = \cdots = (R_n - r_n) \cdot sen\,\theta}$$

Significa que dentro de un conjunto infinito de Elipses Concéntricas Paralelas contenido en una misma elipse, la distancia entre un radio cualquiera y su excéntrico será siempre la misma se mida sobre la elipse que se mida, concéntrica o contenedora.

Lo podemos esquematizar en la figura 24

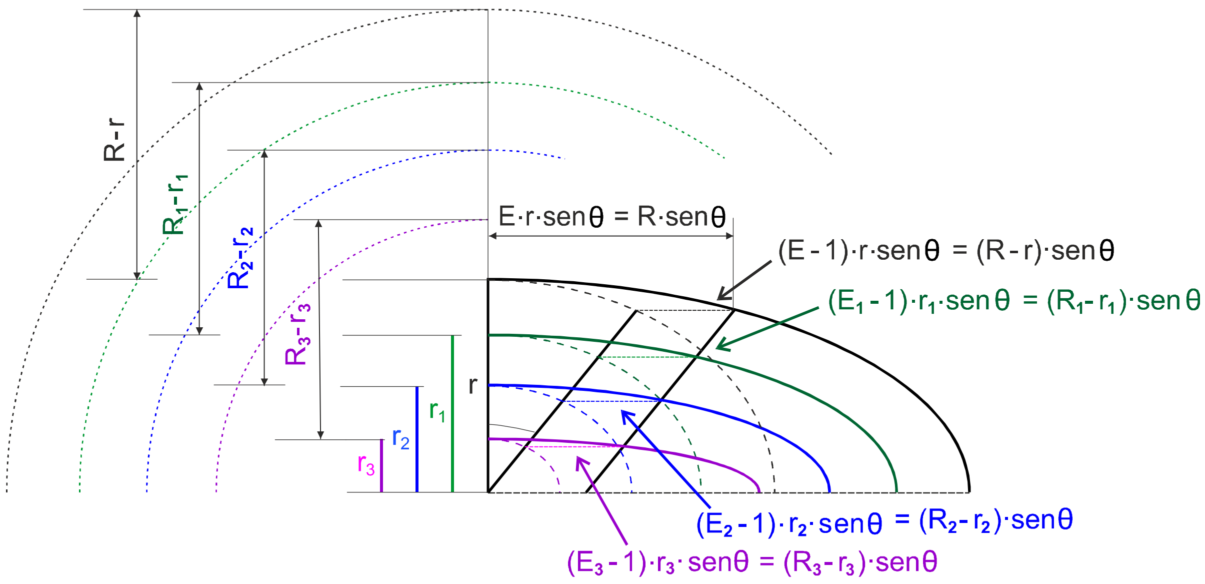


Figura 24

Por último, como muestro en la figura 25, si alargamos cualquier radio excéntrico hasta que corte al semieje menor por abajo, éste medirá R; lo mismo que cuando alargamos el radio de referencia hasta que corte la circunferencia exterior.

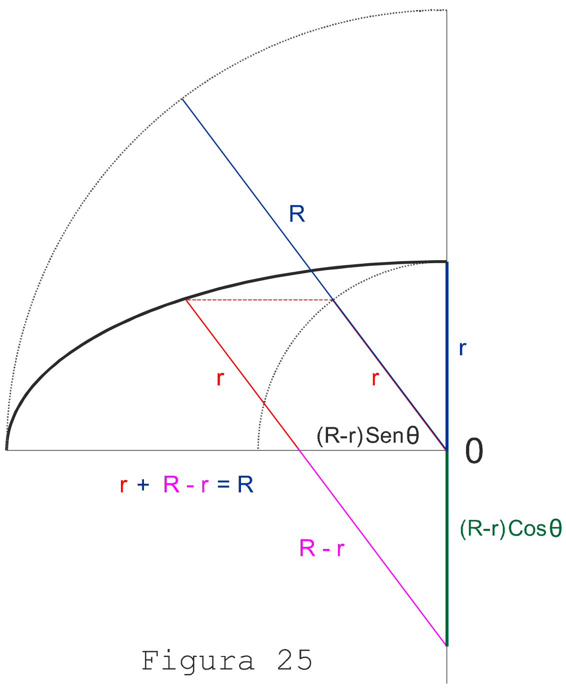


Figura 25

Por otra parte, si la distancia entre cualquier radio y su excéntrico, horizontalmente es:

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{sen}\ \boldsymbol{\theta}$$

Como muestra la figura, verticalmente es:

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{\theta}$$

7.3 ELIPSES CONCÉNTRICAS PRINCIPAL DIFERENCIA

Ya hemos apuntados algunas diferencias entre ambos tipos de elipses concéntricas:

- Proporciones, ángulos y escala permanecen constante en las Concéntricas Escaladas pero en las Paralelas no.
- Sin embargo, las principales distancias y medidas, en las Escaladas varían de una a otra, mientras que en la Distanciadas se mantienen iguales.

Pero hay un aspecto que las diferencia de manera significativa: observe las distintas elipses concéntricas de la figura 26 y la evolución de los radios excéntricos correspondientes en ambos esquemas.

En las Concéntricas Escaladas, como ya hemos venido apuntando, cualquier radio excéntrico de la contenedora, cuando se dibuja en las distintas concéntricas, cambia de tamaño, empequeñece y se acerca a su radio de referencia. De manera que la Concéntrica Escalada más pequeña seria el punto central de la Contenedora. Y cualquier punto del radio excéntrico de la contenedora, si lo buscamos en los respectivos radios excéntricos de las diferentes concéntricas, se acercan a ese punto central siguiendo una línea recta. El punto azul de la contenedora sigue la recta azul, el punto naranja la línea naranja, y así, todos y cada uno de sus puntos siguen un trayecto recto hacia el centro.

CONCÉNTRICAS ESCALADAS **CONCÉNTRICAS PARALELAS**

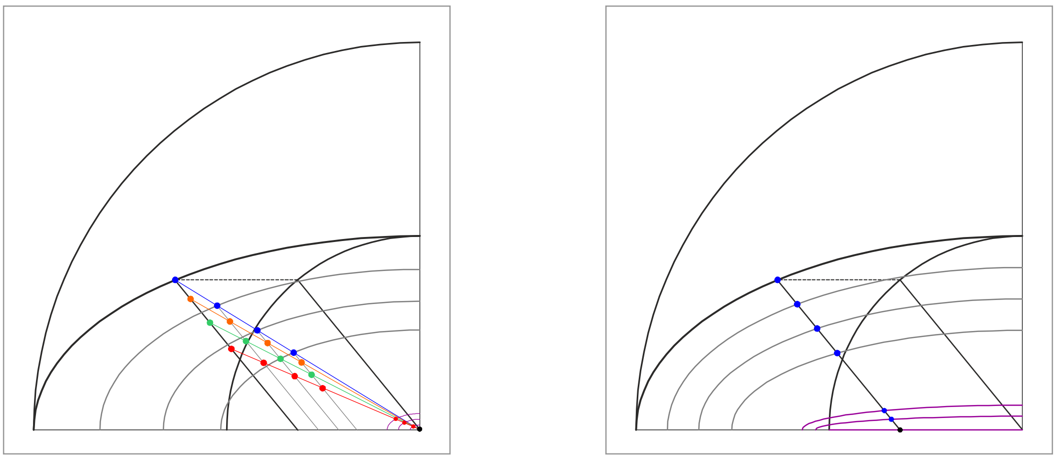


Figura 26

Sin embargo, en las Concéntricas Distanciadas, los distintos puntos de cualquier radio excéntrico recorren, todos, un mismo trayecto: el propio radio excéntrico, hasta llegar a la base. Y la elipse Concéntrica Paralela más pequeña será un segmento recto de tamaño *"r"*, el Radio pequeño, situado sobre el semieje horizontal.

8 RESOLUCION DEL EJERCICIO

Vamos a empezar por un resumen del radio excéntrico:

1. Es un segmento recto paralelo a un radio de referencia que, teniendo el mismo tamaño e inclinación que éste, encaja perfectamente entre el semieje mayor y la elipse, dentro de su mismo cuadrante.

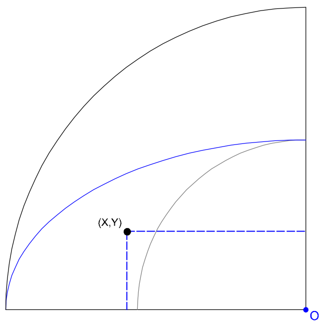
2. El ángulo del radio excéntrico es el grado de inclinación de su radio de referencia respecto del semieje menor.

3. Todo radio excéntrico está separado de su radio de referencia una distancia: $(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot \boldsymbol{sen\ \theta}$

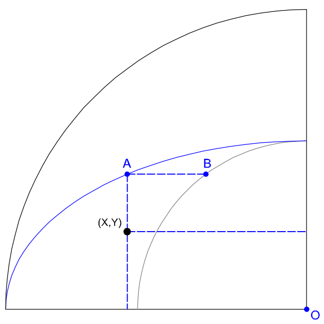
4. A todo radio de la circunferencia interior le corresponde un excéntrico y sólo uno.

5. Todo punto de la elipse, incluida el área interior, pertenece a un radio excéntrico, y sólo uno.

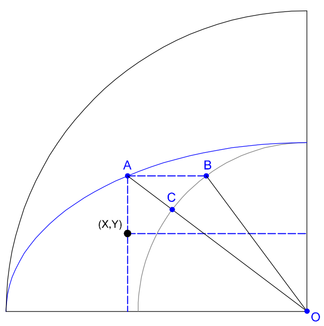
He aquí una solución gráfica muy facilita con la que dibujar el Radio Excéntrico al que pertenece uno punto concreto de la superficie interior de una elipse.



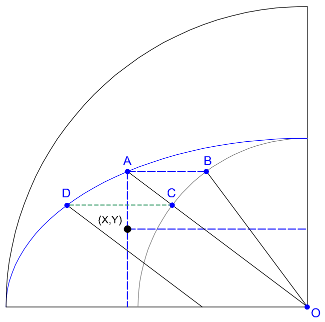
Empezamos dibujando, como siempre, el cuadrante superior izquierdo de la elipse, más un punto cualquiera de coordenadas (x, y), de la superficie interior de dicha elipse. Vamos a dibujar el radio excéntrico al que pertenece dicho punto. Ese punto, sólo lo he colocado fuera de la circunferencia pequeña por razón de espacio, para que los dibujos resulten más despejados y legibles. Pero también funciona con cualquier punto interior de la circunferencia pequeña.



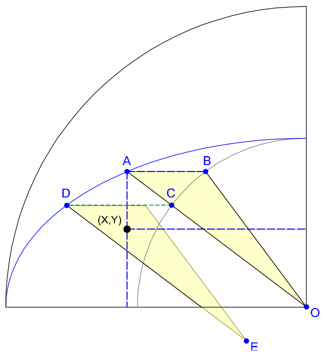
Primero, prolongamos la línea de trazos vertical que pasa por nuestro punto en cuestión hasta que alcance la elipse. Obtenemos así el punto A. Después, desde ese punto trazamos una horizontal que muera en la circunferencia pequeña. Ya tenemos un punto B.



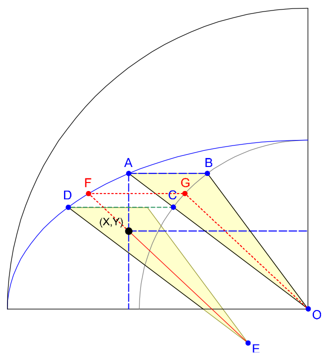
Continuamos trazando el radio $\overline{BO}$ y la recta $\overline{AO}$, para formar el triángulo $\overline{ABO}$. Observe como uno de sus lados corta a la circunferencia pequeña en el punto C. Y que el segmento $\overline{CO}$ es otro radio de la circunferencia pequeña. Vamos a hallar su excéntrico como aprendimos en el capítulo *6.1*.



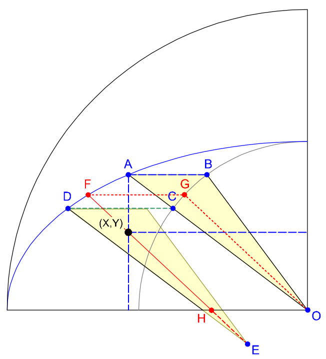
Desde C dibujamos una horizontal que corte a la elipse en el punto D, y desde dicho punto D trazamos una paralela a $\overline{AO}$ que, como ya sabemos, es el radio excéntrico correspondiente al radio $\overline{CO}$, pues es paralelo, mide lo mismo y encaja perfectamente en ese espacio.



Ahora, tomamos el triángulo $\overline{ABO}$, que he rellenado de amarillo tenue para distinguirlo mejor, y lo copio de manera que su vértice A se sitúe sobre el punto D. Comprobará que nuestro punto (x, y) ha quedado completamente enmarcado en ese nuevo triángulo, que es lo que buscábamos; situarlo en un entorno proporcional y proporcionado.



Finalmente, trazamos un segmento que, partiendo del punto E, pase por el punto (x, y), y lo prolongamos hasta que toque la elipse en el punto F. Es el radio excéntrico que buscamos. Vamos a comprobarlo: Desde F continuamos horizontalmente hacia la derecha hasta alcanzar G, y dibujamos el segmento $\overline{GO}$ que es un radio pequeño paralelo a $\overline{FE}$.



Hemos aprendido en el punto 6.2 que **Cada punto interior de la superficie de la elipse, incluido el perímetro, pertenece a un y solo un Radio Excéntrico.** Luego, el segmento $\overline{FH}$ que contiene el punto (x, y), puesto que es paralelo a $\overline{GO}$ y mide lo mismo, es su radio excéntrico correspondiente. Radio excéntrico al que pertenece (x, y). El que estábamos buscando. Queda averiguar su ángulo.

Para hallar ese excéntrico, podría haber utilizado dos radios cualesquiera de la circunferencia menor. La única condición para conseguir el excéntrico en cuestión es que el triángulo resultante contenga al punto (x, y). Entonces ¿por qué elegí esos dos radios concretos? Pues, porque podemos averiguar su ángulo de manera muy sencilla.

No lo he mencionado antes, pero el punto A es el extremo superior del radio excéntrico correspondiente al radio $\overline{BO}$, que no dibujé entonces para no emborronar demasiado el esquema; en la figura 27 si lo represento. También conocemos la abscisa (en mi sistema de referencia particular) de dicho punto: *"y"*. Pero como aprendimos, esa distancia, puesto que hablamos de excéntricos, es: $y = R \cdot sen\, \alpha_1$ de donde podemos despejar el ángulo de ese radio excéntrico: $\boldsymbol{\alpha_1 = arcsen(y/R)}$

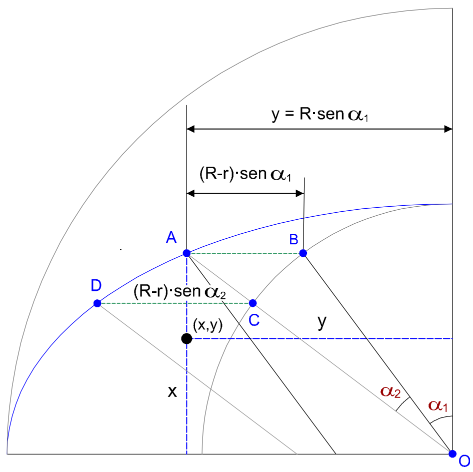


Figura 27

Por otro lado, también aprendimos que el segmento $\overline{DC}$ mide $(R-r)\cdot sen\ \alpha_2$, la distancia del radio respecto de su excéntrico. De donde $\boldsymbol{\alpha_2 = arcsen(\overline{DC}/(R-r))}$, ángulo del segundo excéntrico.

En la figura 28 expreso algunas mediciones interesantes representadas en nuestro ya clásico cuadrante superior izquierdo.

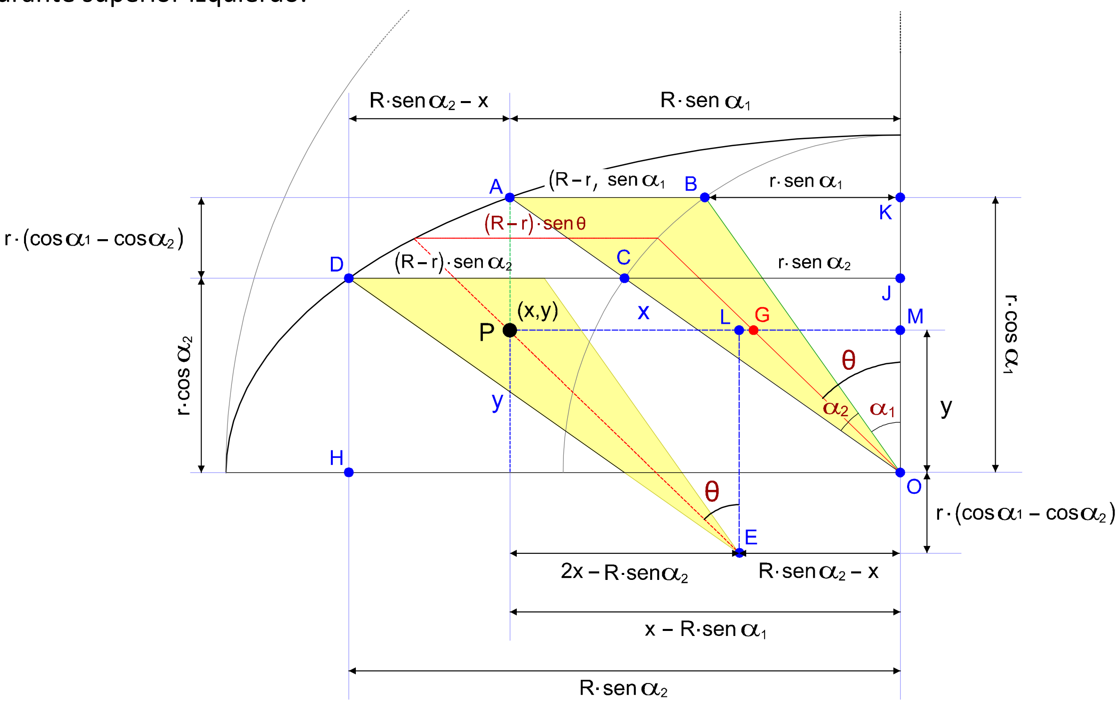


Figura 28

Calculemos el ángulo de la excéntrica que contiene nuestro punto P de coordenadas (x, y). Pero, primero veamos las medidas inmediatas:

$\overline{AB} = (R-r)\cdot sen\ \alpha_1$	Distancia del radio $\overline{BO}$ a su excéntrico.
$\overline{AK} = r\cdot sen\ \alpha_1$	Distancia del punto B al Semieje Menor.
$x = R\cdot sen\ \alpha_1$	Abscisa del punto P, y, a la vez distancia del excéntrico del radio $\overline{BO}$ al semieje menor desde el perímetro de la elipse.
$\overline{DC} = (R-r)\cdot sen\ \alpha_2$	Distancia del radio $\overline{CO}$ a su excéntrico.

$\overline{CJ} = r \cdot sen\ \alpha_2$	Distancia del punto C al Semieje Menor.
$\overline{DJ} = R \cdot sen\ \alpha_2$	Distancia del excéntrico del radio $\overline{CO}$ al semieje menor desde el perímetro de la elipse.
$\overline{KO} = r \cdot cos\ \alpha_1$	Distancia del extremo superior del radio $\overline{BO}$, y la de su excéntrico, al semieje mayor.
$\overline{DH} = r \cdot cos\ \alpha_2$	Distancia del extremo superior del radio $\overline{DO}$, y la de su excéntrico, al semieje mayor.
$r \cdot (cos\ \alpha_1 - cos\ \alpha_2)$	Distancia vertical entre los dos triángulos amarillos.
$R \cdot cos\ \alpha_2 - x$	Distancia horizontal entre los dos triángulos amarillos.

Ahora calcularemos la distancia más importante, la parte « $y \cdot tan\ \theta$ » de la definición de radio excéntrico expresada en el apartado ***6.2***, y que corresponde al segmento $\overline{GM}$, puesto que el segmento $\overline{PG}$ es la distancia $(R - r) \cdot sen\ \theta$, separación entre el radio rojo y su excéntrico.

Comprobará que el segmento $\overline{GM}$ no se puede medir directamente puesto que no conocemos las coordenadas del punto G. Pero podemos averiguarlo. Observe los triángulos $\overline{PEL}$ y $\overline{GOM}$, vemos inmediatamente que son semejantes.

Conocemos la distancia $\overline{LE}$, es la Ordenada de P, (y), más la distancia vertical entre los dos triángulos amarillos: $y + r \cdot (cos\ \alpha_1 - cos\ \alpha_2)$ Y la distancia $\overline{PL}$, que es la abscisa de P, (x), menos la distancia horizontal entre dichos triángulos amarillos: $x - (R \cdot sen\ \alpha_2 - x) = 2x - R \cdot sen\ \alpha_2$

Estos valores nos van permitir calcular la distancia $\overline{GM}$ puesto que, por semejanza de triángulos, se cumple que:

$$\frac{\overline{GM}}{y} = \frac{\overline{PL}}{\overline{LE}} \;=>\; \overline{GM} = y\frac{\overline{PL}}{\overline{LE}} \;=>\; y \cdot \tan\theta = \frac{y \cdot (2x - R \cdot sen\ \alpha_2)}{y + r \cdot (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)} \;=>$$

$$\tan\theta = \frac{2x - R \cdot sen\ \alpha_2}{y + r \cdot (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)} \;=>$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2x - R \cdot sen\ \alpha_2}{y + r \cdot (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)}\right)$$

Con esta fórmula, ya puedo implementar mi elipse multicolor; sólo me falta calcular la distancia $\overline{GO}$ para asignarle el color adecuado al pixel que representa a ese punto. Es muy sencillo:

$$\overline{GO} = \frac{y}{\cos\theta}$$

9 PROYECCIÓN EXCÉNTRICA

Este es un concepto que me acabo de inventar tras repasar el capítulo anterior. No sé para qué puede servir, pero puesto que se me ha ocurrido, y que me parece, como mínimo, curioso, lo incluyo a ver qué sale.

Ya conocemos los radios excéntricos. Cada punto de cualquier radio de la circunferencia pequeña tiene un homólogo en el excéntrico correspondiente. De hecho, todos y cada uno de los puntos de la circunferencia pequeña, interiores como perimetrales, pertenecen a algún radio, luego todos tienen un homólogo. ¿Y si dibujo una figura en la superficie interior de la circunferencia y después reflejo todos sus puntos en sus homólogos? Pues que obtendré una proyección, que denominaré, por darle un nombre, PROYECCIÓN EXCÉNTRICA.

Eso es lo que he representado en la figura 29. Dentro del cuadrante superior izquierdo de la circunferencia interior de una elipse escala 2, he dibujado un cuadrado. He elegido 14 puntos de su perímetro: las cuatro esquinas más otros 10 cualesquiera. He trazado los radios que contienen dichos puntos y finalmente, he hallado sus homólogos en los radios excéntricos correspondientes y he dibujado la proyección resultante.

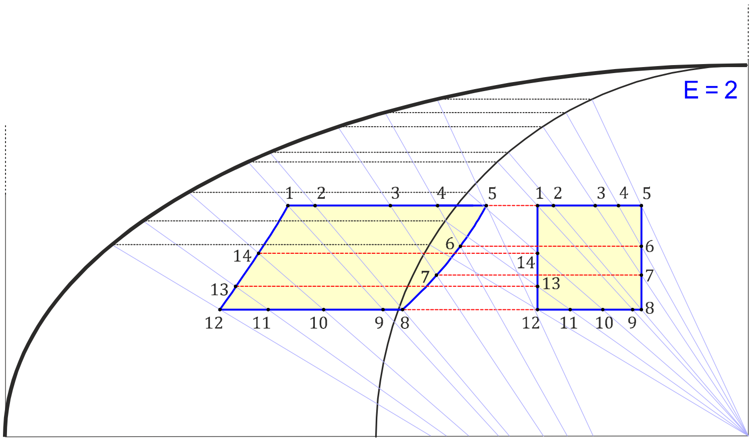


Figura 29

El resultado ha sido algo sorprendente. No tanto por el hecho de que las líneas verticales del cuadrado modelo se proyectan excéntricamente como curvas, eso ya lo intuía, sino porque la curva es cóncava y no convexa como lo es el perímetro de la elipse, o el de la circunferencia interior. Claro que tiene su lógica: los homólogos de los puntos pertenecientes a los radios más inclinados se dibujan más alejados de sus referentes cuanto más inclinados son los radios correspondientes, lo que deforma el dibujo, en este caso, estirándolo hacia la izquierda. En el cuadrante superior derecho, el estiramiento habría ocurrido hacia la derecha. Por otro lado, la proyección del lado inferior del cuadrado es más corta que la del lado superior. También tiene su lógica: la amplitud del foco del ángulo es mayor cuanto más se acerca al perímetro de circunferencia. Luego la proyección de cualquier trazo horizontal será tanto mayor cuanto más cerca a la parte superior de la circunferencia se sitúe. La figura resultante es pues la que tenía que salir.

He aquí el resultado de la proyección de ese mismo cuadrado, pero en una elipse escala 3.

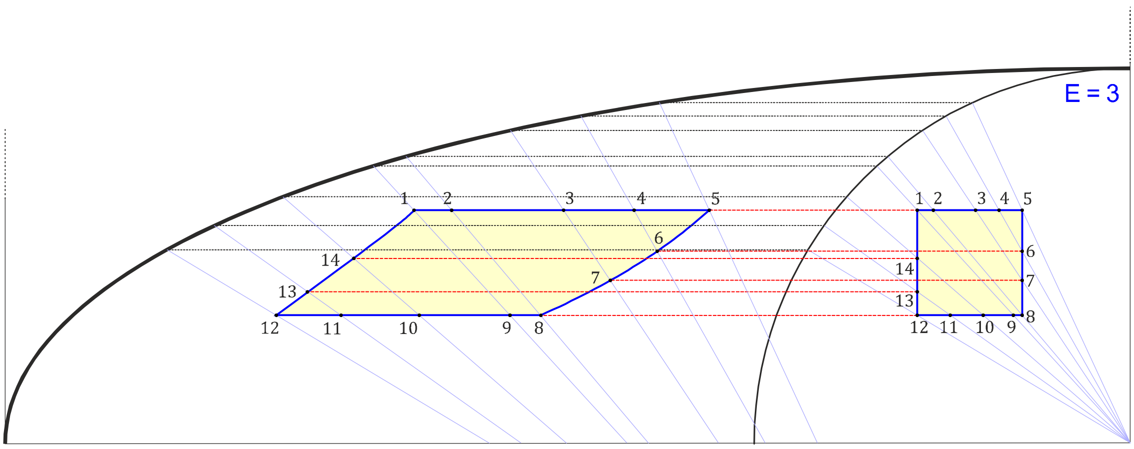


Figura 30

La figura resultante es más ancha en la figura 30 que en la figura 29. Era de esperar puesto que se trata de una elipse de escala mayor. Vamos a tomar algunas medidas. Pero antes.

RECORDEMOS:

1. r es el Radio de la circunferencia interior, y R el de la exterior. $(R–r)$ se puede decir que es la parte exterior a la circunferencia pequeña.
2. El ángulo de cualquier radio (grande o pequeño), lo mido siempre respecto del semieje pequeño.
3. La distancia de cualquier punto A del perímetro de la elipse al semieje menor es siempre $r \cdot sen\ \alpha$. siendo α el ángulo del radio al que pertenece dicho punto. Y la distancia de su homólogo al semieje menor es: $R \cdot sen\ \alpha$.
4. La distancia al semieje menor de cualquier punto B de la superficie interior de la elipse, y de coordenadas (x,y), es $y \cdot tan\ \alpha$. Y la distancia de su homologo al semieje menor es $(R - r) \cdot sen\ \alpha + y \cdot tan\ \alpha = (E - 1) \cdot r \cdot sen\ \alpha + y \cdot tan\ \alpha$. Luego la distancia entre esos dos puntos será $(R - r) \cdot sen\ \alpha = (E - 1) \cdot r \cdot sen\ \alpha$.

Según todo eso, la distancia entre los puntos 1 y 5 del cuadrado modelo será la distancia del punto 1 al semieje menor menos la distancia del punto 5 a dicho semieje. En la figura 31, a esos puntos los llamo respectivamente A y B. La distancia entre ambos puntos es:

$$a \cdot tan\ \alpha_2 - a \cdot\ tan\ \alpha_1 = a \cdot (tan\ \alpha_2 - tan\ \alpha_1)$$

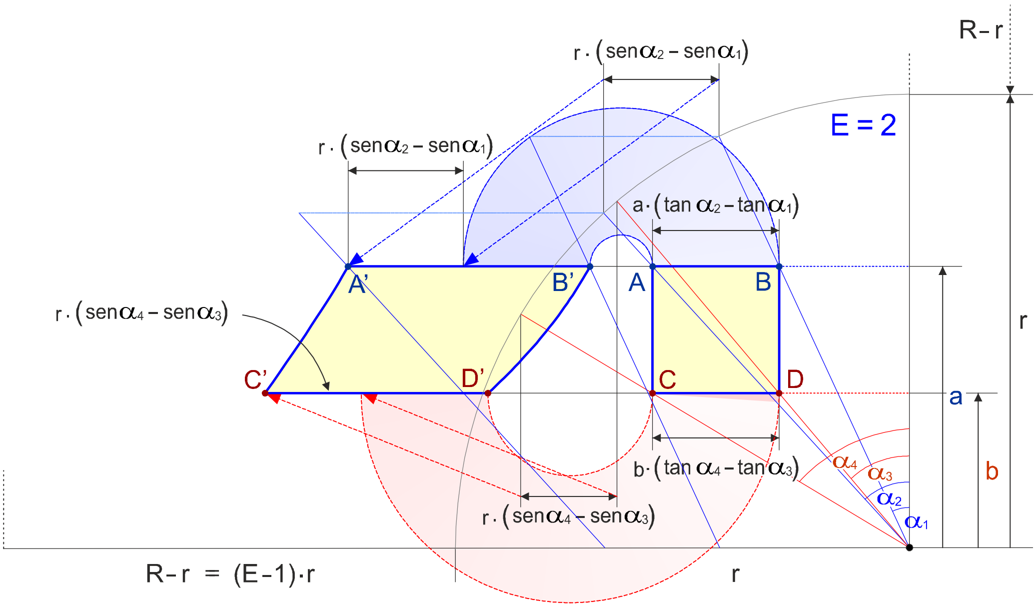


Figura 31

De la misma manera, la distancia entre los puntos A' y B', homólogos de los primeros es:

$$\big((R - r) \cdot sena\ \alpha_2 + a \cdot tan\ \alpha_2\big) - \big((R - r) \cdot sena\ \alpha_1 + a \cdot tan\ \alpha_1\big) \quad =>$$

$$(R - r) \cdot (\ sena\ \alpha_2 - sena\ \alpha_1) + a(tan\ \alpha_2 - tan\ \alpha_1) \quad =>$$

$$\boxed{\boldsymbol{(E - 1) \cdot r \cdot (\ sena\ \alpha_2 - sena\ \alpha_1) + a \cdot (tan\ \alpha_2 - tan\ \alpha_1)}}$$

Como nos encontramos ante una elipse de escala $E = 2$, la fórmula se convierte en:

$$r \cdot (sena\ \alpha_2 - sena\ \alpha_1) + a \cdot (tan\ \alpha_2 - tan\ \alpha_1)$$

Que es la distancia entre los extremos superiores de los dos radios pequeños.

Significa que el segmento horizontal superior de la proyección mide lo que mide el lado superior del cuadrado modelo, más la diferencia entre los extremos superiores de los radios de referencia de los excéntricos que contienen los puntos, vértices, de dicha figura.

Es más complicado de decir que de ver. En la figura 31 sí se comprende mucho mejor de forma visual: Mire como el sector azul traslada la distancia $\overline{AB}$ sobre la figura proyectada abarcando la parte derecha, y como la parte izquierda corresponde exactamente con la distancia horizontal entre radios medida sobre cada extremo, es decir, medidas respecto del semieje pequeño.

Si en lugar de 2, la escala fuera 3. La fórmula estaría multiplicada por $E{-}1 = 2$

$$2r \cdot (sena\ \alpha_2 - sena\ \alpha_1) + a(tan\ \alpha_2 - tan\ \alpha_1)$$

En la horizontal inferior, se obtiene el mismo resultado, pero extrapolado a los ángulos de los respectivos radios y sus excéntricos.

En la siguiente figura superpongo las figuras obtenidas de ambas escalas junto al cuadrado modelo, todas ellas alineadas por la derecha, en los puntos *B* y *B'*:

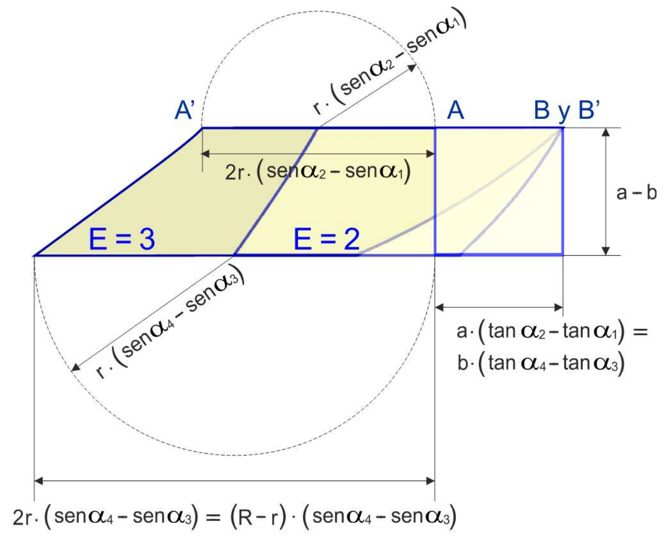


Figura 32

Es fácil deducir que esto mismo ocurre en todas las horizontales de cualquier dibujo que se proyecte: La línea original + la diferencia entre radios multiplicada por $E{-}1$.

Como decía al inicio de este capítulo, esto de la Proyección Excéntrica es sólo un aspecto curioso que me sacado de la manga, un experimento que quería llevar a cabo a ver si surgía algo interesante.

Para acabar de satisfacer mi curiosidad, voy a proyectar el cuadrado de partida en la parte superior externa de la elipse, dentro de la circunferencia mayor. Para ello alargaré los radios pequeños hasta convertirlos en radios grandes, y después, trazaré verticales desde los puntos de la primera proyección, hacia arriba hasta que corten a los radios correspondientes. Lo he plasmado en la figura 33.

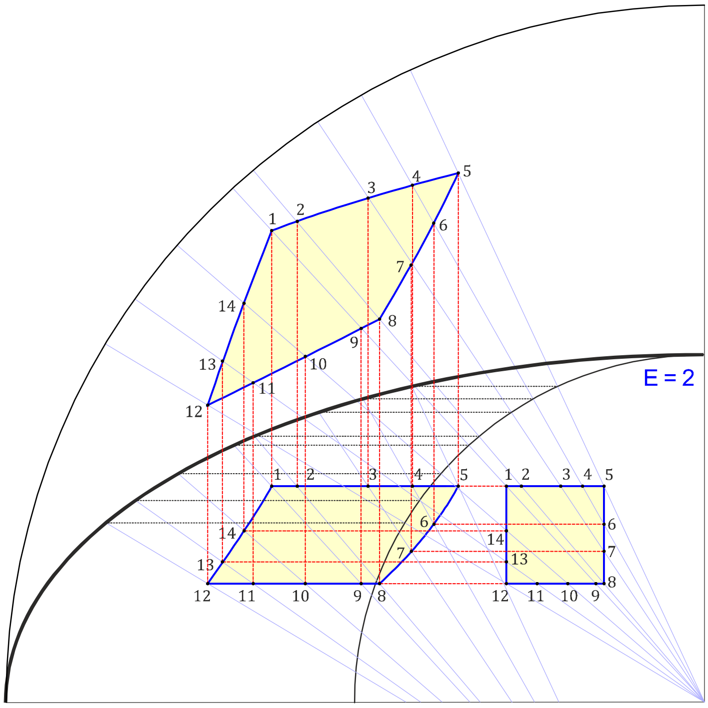


Figura 33

El resultado obtenido es una figura romboidea de lados curvos. Aunque parezca que algunos lados son rectos, en verdad describen una ligera curva. Lo que pasa es que todos sus lados tienden a curvarse de forma convexa, luego aquellos lados que, en la primera proyección tenían curva cóncava, ahora parecen casi rectos.

Lo que sí está claro es que la figura se ha estirado verticalmente, pero más por la parte más alejada que por la más cercana a la circunferencia menor. Eso es debido a la misma causa que antes, los radios se van separando tanto más cuanto más se van alejando del origen, lo que amplía con la distancia el arco de circunferencia que abarca cada foco.

No hay mucho más que explicar, puesto que no es más que una simple curiosidad que quería experimentar.

Y hasta aquí mi estudio personal sobre la elipse. Por supuesto, pido disculpas por mi estilo nada académico y por si mi falta de conocimientos me ha llevado a plasmar alguna barbaridad sobre estas líneas. Y, como decía en mi primer trabajo, si esta disertación ha suscitado el interés de alguna persona, me doy por satisfecho.

Manuel Ramos Framit
ramosframit@gmail.com
En Jerez de la Frontera
Diciembre 2022