EL POLÍGONO REGULAR A MI MANERA

Siguiendo con la trigonometría a mi manera, en esta segunda entrega pretendo explicar el mundo de los polígonos regulares desde mi propio punto de vista. Empezaré, como es habitual, por destacar las partes comunes a todos ellos, continuar redefiniendo algunos aspectos trigonométricos, para finalmente, acercarme a la circunferencia en un intento de incluirla dentro del conjunto de los polígonos regulares. Veremos también cómo con unas mismas fórmulas podemos resolver todos los polígonos regulares, incluida la circunferencia.

Trato simplemente de afirmar, bajo mi punto de vista, que la circunferencia es el último polígono regular, el de infinitos lados de longitud 0. Para ello tendré que demostrar que:

$$\lim_{N\to\infty}\left(N\tan\frac{180}{N}\right) = \pi$$

1 PARTES COMUNES

Primero quisiera recordar un par de conceptos referentes al triángulo rectángulo, abordados en el trabajo anterior:

- El ángulo agudo más pequeño de los dos que tiene todo triángulo rectángulo es el **Ángulo** del triángulo rectángulo y le da nombre.

- Sólo existen los triángulos rectángulos de 45 o menos grados. Con arreglo a dicho Ángulo se pueden agrupar en clases de equivalencia.

Cada polígono regular se puede descomponer en triángulos isósceles idénticos (equiláteros en el caso de hexágono); tantos como lados tiene el correspondiente polígono regular, y todos iguales entre sí. El ángulo interior de cada uno de dichos triángulos, el que tiene su vértice en el centro del polígono, medirá pues: θ $= 360/número\ de\ lados$.

A su vez, las apotemas dividen cado uno de esos triángulos isósceles en dos triángulos rectángulos iguales, cuyos Ángulos miden $\theta = 180/número\ de\ lados$ cada uno; triángulos rectángulos de Ángulo θ**.**

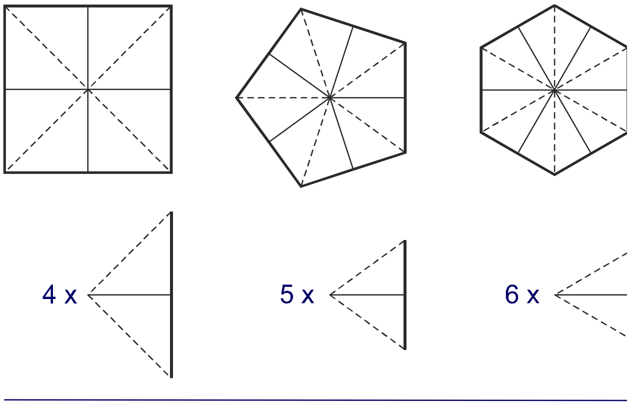

Figura 1

Ese Ángulo, ahora, será el ***Ángulo del polígono regular*** correspondiente. El ángulo de 36º, por ejemplo, sólo podrá pertenecer al pentágono, formado por 10 triángulos rectángulos de 36º, y lo podríamos definir como el Polígono Regular de 36 grados.

Todos los polígonos regulares (incluido el cuadrado) se pueden resolver de la misma manera:

$$P = \ell \cdot número\ de\ lados \qquad S = \frac{\ell a}{2} \cdot número\ de\ lados \quad [\,'a'\ es\ la\ apotema\,]$$

Para averiguar el perímetro basta con saber cuánto mide el lado; para el área, además, necesitamos conocer la apotema. Si desconocemos este último dato siempre lo podemos deducir, puesto que el ángulo interior es inherente al polígono regular, de la fórmula: $a = \ell / (2\,\mathrm{tg}\,\theta)$

2 DEFINICIONES

Para referirme al número de lados de un polígono regular, siempre emplearé la variable *"N"*, en mayúscula, para no confundirla con un subíndice cualquiera, y porque ese dato es, en cierta forma, el apellido del polígono en cuestión: por ejemplo, desde el punto de vista genérico, polígonos regulares de cinco lados sólo hay uno, el pentágono. $N = 5$ sería su identificador.

A partir de ahora, a cada dato o magnitud de cualquier polígono regular, le asignaré como subíndice el número de lados (N) de la correspondiente figura, para referenciar el polígono regular en discusión y así simplificar el trabajo. Por ejemplo, y siempre en términos genéricos: a_6 se referirá a la apotema del hexágono y a_N a la apotema del polígono regular de N lados.

2.1 EL ÁNGULO REGULAR

DEFINO: Ángulo Regular es todo ángulo de tipo: $\alpha = 180/n \mid n \in \mathbb{N}$

Lo llamo "***Regular***" porque es característico del polígono ***regular*** al que pertenece. Los Ángulos de todos y cada uno de los $2N$ triángulos rectángulos en que se descomponen los polígonos regulares son ángulos regulares idénticos. De esta forma, cuando diga: ÁNGULO REGULAR DEL PENTAGONO, sabremos enseguida que me refiero al Ángulo de cualquiera de los triángulos rectángulos que componen un pentágono, y que este mide: $180/5 = 36º$. Recuerde que, cuando hablo de Ángulo (con mayúscula) de un triángulo rectángulo, por definición, me estoy refiriendo al ángulo agudo más pequeño de los dos agudos que tiene.

Para designarlo emplearé la notación α_N. Así, α_8 se referirá al Ángulo Regular del Octágono.

Si dividimos un ángulo regular por un número entero obtenemos otro ángulo regular, porque la multiplicación entre enteros da como resultado otro entero.

$$\forall\, x, N \in \mathbb{N} \mid \alpha_N = \frac{180}{N} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\alpha_N}{x} = \frac{180/N}{x} = \frac{180}{xN} = \alpha_{xN} \ \mid xN \in \mathbb{N}$$

2.2 EL TRIÁNGULO REGULAR

DEFINO: Triángulo Regular es cualquier triángulo rectángulo cuyo Ángulo es un ángulo regular.

También lo llamo "***Regular***" porque es característico del polígono ***regular*** al que pertenece. Así, cuando hable del TRIÁNGULO REGULAR DEL HEXÁGONO, sabremos enseguida que me estoy refiriendo a cualquiera de los 12 triángulos rectángulos idénticos de $30º$ que componen el hexágono.

Las partes y medidas de un triángulo regular quedarán definidas como en la figura 2:

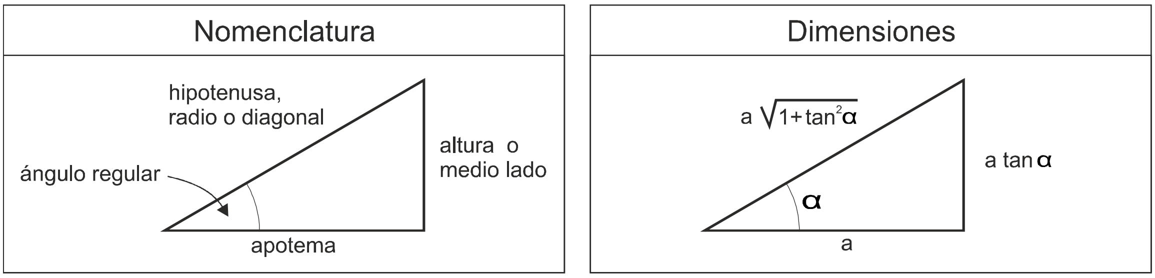

Figura 2

En mi trabajo anterior, aprendimos que podemos establecer tres fórmulas fundamentales para la secante:

1) $Sec\ \alpha = \sqrt{1 + tan^2\alpha}$ (En el esquema utilizo esta porque es la que usé cuando empecé el estudio)

2) $Sec\ \alpha = {}^{1}/_{\cos\alpha}$

3) $Sec\ \alpha = 1 + \tan\alpha \cdot \tan ½\alpha$

Hemos visto que el ángulo regular vale $\alpha_N = 180/N$. ¿Existirá un triángulo regular para $N{=}2$? Es decir: $\alpha_2 = 180/2 = 90$. Observemos la figura 3. Son dos líneas paralelas unidas por un segmento perpendicular. En teoría, las paralelas se unen en el infinito. ¿Con que ángulo? Forzosamente el ángulo con que inciden ambas rectas ha de ser *0º*. Si fuera mayor que *0º*, aunque fuese ínfimamente, esas dos líneas no serían paralelas, pues una de ellas tendría que estar forzosamente ínfimamente inclinada con respecto a la otra y se unirían antes del infinito.

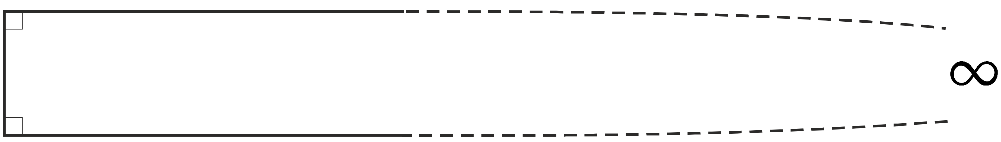

Figura 3

Tenemos pues una figura cerrada formada por tres segmentos rectos cuyos ángulos internos suman *90+90+0=180º*, ¿un triángulo? Puesto que alguno de sus ángulos es recto, se trataría de un triángulo rectángulo, y como el otro es α_2, *90º*, estaríamos ante el triángulo regular del hipotético polígono regular de dos lados.

A partir de ahora, y para evitar confusiones, siempre que hable de "Ángulo Regular", me estaré refiriendo a cualquier $\alpha_N = 180/N$ que no sea el ángulo recto del triángulo rectángulo. En este último caso, puesto que hay dos ángulos de *90º*, uno es el recto y el otro sería el Regular.

¿Y para α_N, con $N{=}1$, y donde $\alpha_1 = 180/1$?

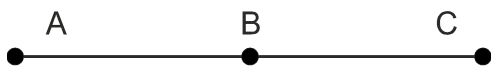

Figura 4

Cojamos el segmento recto $\overline{ABC}$ de la figura 4 Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ forman un ángulo de *180º*, pero también está el segmento $\overline{AC}$, los tres se confunden en una misma línea, pero se puede considerar que este último forma ángulos de 0º grados con los otros dos. Tenemos pues una figura compuesta de tres segmentos con ángulos *180+0+0=180º*, es decir α_1*+0+0*. ¿Es un triángulo?

El problema sería que no tiene ningún ángulo de *90º*. ¿Pero, podría haber un ángulo recto entre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$? Según la figura 4 – B, un triángulo rectángulo de perfil visto desde arriba, ¿podría ser?

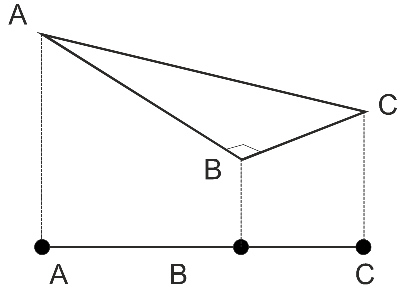

Figura 4-B

Por último, el caso de $N = 0$. Si representamos un triángulo rectángulo de altura 0 ¿obtendríamos la figura 5?

α_0, en teoría significa *180/0*, indeterminado, pero en la figura 5 podríamos establecer un $\alpha_0 = 0$. Se trata de coger un triángulo rectángulo de altura *0*. La base $\overline{AB}$ y la hipotenusa $\overline{AC}$ se confunden en un solo segmento, y la altura $\overline{BC}$ valdría 0. Pero, ¿sigue siendo un triángulo rectángulo? ¿Por qué no? Tiene todas sus aristas, aunque en un mismo lugar y, al menos, un ángulo recto, por ejemplo entre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, sólo que una de sus aristas, la $\overline{BC}$, mide 0.

Figura 5

2.3 POLÍGONOS REGULARES EXTRAORDINARIOS

TEOREMA: Todo polígono regular de *N* lados contiene *2N* triángulos regulares idénticos distribuidos uniformemente, de dos en dos, alrededor del punto central.

Este teorema que, en principio, no entraña ningún misterio, puede dar lugar a polémicas de índole subjetivo para $N < 3$. Por ejemplo: ¿Qué ocurre cuando $N = 2$?

Para dibujar un polígono regular de N lados a partir de uno de $2N$ lados vamos a proceder como muestra la figura 6.

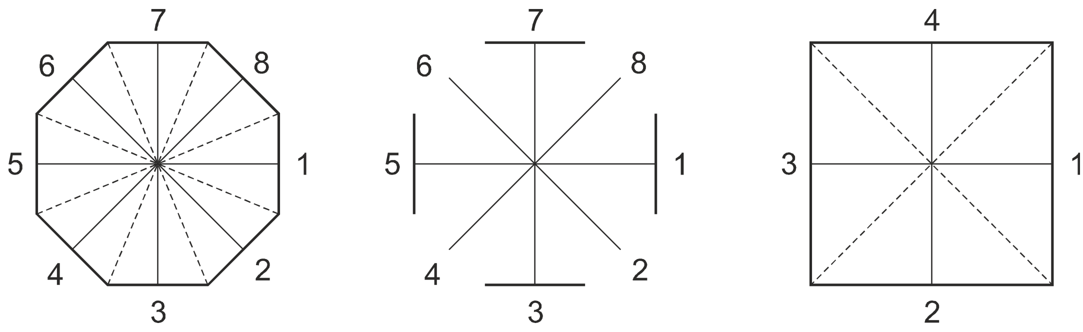

Figura 6

Se enumeran los lados, se eliminan los lados pares y todas las diagonales (se dejan las apotemas). Se prolongan los lados impares por ambos lados hasta que se formen los nuevos vértices. Las apotemas de los lados eliminados se alargan y se convierten en las nuevas diagonales. La longitud de cada tramo añadido es directamente proporcional a la tangente del ángulo regular resultante de la transformación.

En la figura 7, vemos que si tomamos el Polígono de la izquierda, de la figura 6, de $2N = 8$ lados y alargamos el medio lado número 1 hasta que corte la prolongación del medio lado número 7, se obtiene un triángulo rectángulo de Ángulo α_{4N}. Por lo tanto, como aprendimos en el trabajo sobre el triángulo rectángulo, comprobamos que cada lado se prolonga proporcionalmente $tan\ \alpha_{4N}/\cos\alpha_{2N}$, por cada extremo. Pero $tan\ \alpha_{2N} + tan\ \alpha_{2N}/\cos\alpha_N = tan\ \alpha_N$, luego, acabamos de construir un medio lado del polígono de $N = 4$ lados a partir del de $2N = 8$ lados.

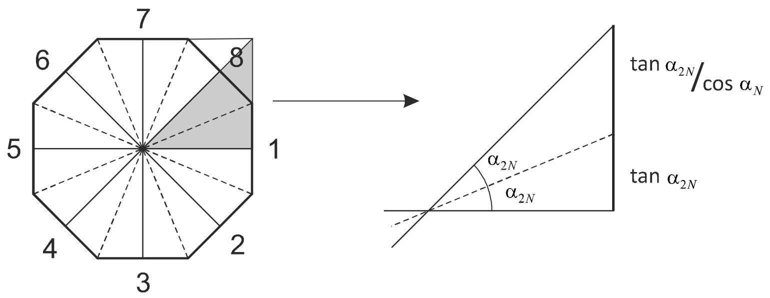

Figura 7

Si con un cuadrado procedemos como acabo de exponer, deberíamos obtener el polígono de 2 lados. Observemos la figura 8. Nos da dos segmentos rectos paralelos. El ángulo regular resultante es $180/2 = 90$, y puesto que $tan\ 90 = \infty$, habrá que prolongar esos segmentos, así como las apotemas sueltas, hasta el infinito.

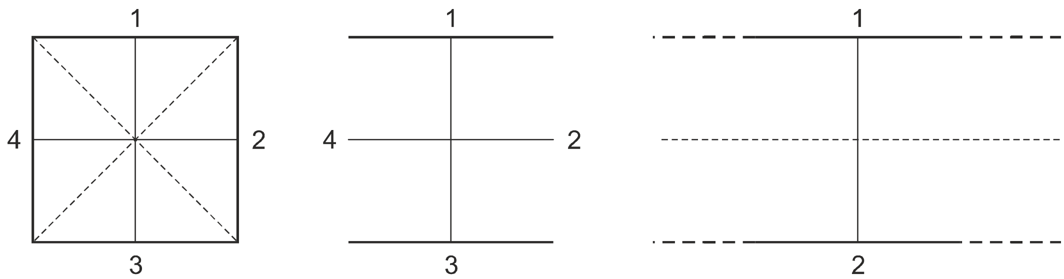

Figura 8

¿Las paralelas se unen en el infinito?, si conseguimos imaginarnos la figura resultante, intuimos cuatro triángulos regulares de ángulos regulares de *90º*, como los de la figura 3, distribuidos alrededor del centro, todos ellos encerrados entre dos rectas paralelas cerradas por el infinito. ¿Se trataría del polígono regular de dos lados?

Ahora transformaremos esa nueva figura para intentar llegar al polígono de un solo lado. Eliminamos la recta inferior, la de número par, y las dos diagonales. Nos queda una recta y dos apotemas. Tendremos que modificar la longitud de esos segmentos conforme a tan $180 = 0$. Puesto que los lados median infinito, y que infinito por cero es indeterminado, supongo que podremos darle la longitud que nos venga en gana al segmento resultante. Lo represento en la figura 9.

Ese segmento, lo representaremos con una magnitud que nos quepa en esta página, es decir infinitamente más pequeña. La apotema suelta, por su parte, medirá lo que medía por cero, o sea 0.

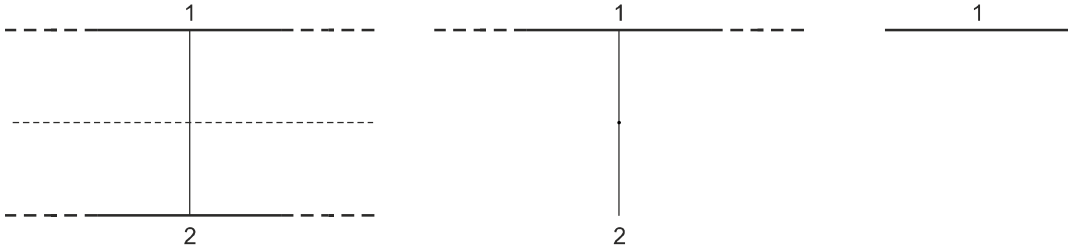

Figura 9

Puesto que los lados medían infinito y ahora le hemos dado un valor infinitamente inferior, la apotema original que nos queda medirá también, en proporción, infinitamente menos, o sea prácticamente cero, ya que era de por si infinitamente más pequeña que el lado. La figura resultante es un simple segmento recto, pero recuerde que la apotema, aunque mida cero, sigue estando ahí dividiendo la recta en dos trozos iguales. Cada trozo es idéntico al segmento de la figura 5. Si esas líneas fueran elásticas y pudiéramos tirar de la apotema hacia abajo ¿se podría obtenerse el dibujo de la figura 10?

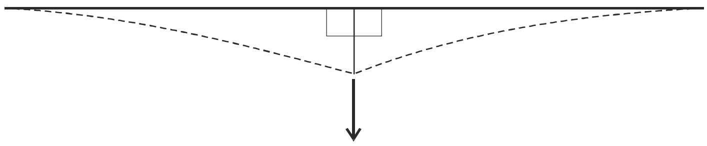

Figura 10

Llamar, al polígono resultante de la figura 10, Polígono Regular de una sola cara, dependerá sólo de la subjetividad de cada persona. Las polémicas filosóficas que se puedan generar en torno a esta indeterminación (y otras que se han podido plantear anteriormente) no entran dentro del ámbito de este trabajo. No obstante, si disfrutan polemizando, intente ahora realizar los pasos contrarios, pasar del polígono de un solo lado al de dos, y del siguiente a cuadrado, etc. Una pista: hay que duplicar la figura y girarla tantos grados como su propio ángulo regular indica, eliminar las aristas que sobresalen, alargar las apotemas y diagonales en proporción a las tangentes del polígono resultante, y finalmente dibujar las diagonales que faltan. (Empiece con el cuadrado y después con otros más pequeños)

¿Y el polígono de 0 lados? Simplemente no hay figura. Pero, ¿existe? ¿El punto podría ser un buen candidato?…

Para evitar porfías y discusiones, a los polígonos regulares de menos de cuatro lados los llamaré Polígonos Regulares Extraordinarios, y no volveré a mencionarlos en lo que queda de trabajo. A los demás los llamaré ordinarios o simplemente polígonos regulares; como todo la vida.

Los tres primeros, los de cero, uno y dos lados, es fácil obviarlos, pues nunca se han considerado como tales, o simplemente, para muchos, no existen. En cuanto al de tres lados, el triángulo equilátero, es muy diferente a los demás polígonos regulares. Las aristas de todos los polígonos regulares forman entre sí ángulos de 90 o más grados, salvo el del triángulo equilátero. Los ángulos regulares de cualquier polígono regular son todos de 45 o menos grados, salvo el del triángulo equilátero que sería de 60º, si existiese, pues es el mismo que el del hexágono, el de 30º, aunque invertido. Además, el triángulo equilátero ya forma parte del hexágono.

Podríamos estar tentado de excluir al cuadrado del conjunto de polígonos regulares ordinarios, pues es el único cuyas aristas forman ángulos de 90 grados y sus triángulos regulares son también peculiares. Sin embargo, hay al menos un par de detalles que son comunes a todos ellos salvo al triángulo equilátero:

Cuando multiplicamos la tangente del ángulo regular por la tangente de la mitad del ángulo regular obtenemos siempre un valor inferior a 1 (incluido el cuadrado) salvo con el hipotético ángulo regular del triángulo equilátero que da 1 (valor muy alejado de los demás).

$tan\ 60 \cdot tan\ 30$	=	1	Triángulo equilátero
$tan\ 45 \cdot tan\ 22{,}5$	=	$0{,}4141213$	Cuadrado
$tan\ 36 \cdot tan\ 18$	=	$0{,}236$	Pentágono
$tan\ 30 \cdot tan\ 15$	=	$0{,}1547$	Hexágono
$tan\ 1 \cdot tan\ 0{,}5$	=	$0{,}00015$	180 lados

Lo mismo ocurre con la división, siempre da un valor menor que 3 salvo para el triángulo equilátero que da 3 (valor también muy alejado de los demás).

$tan\ 60\ /\ tan\ 30$	=	3	Triángulo equilátero
$tan\ 45\ /\ tan\ 22{,}5$	=	$2{,}4141213$	Cuadrado
$tan\ 36\ /\ tan\ 18$	=	$2{,}236$	Pentágono
$tan\ 30\ /\ tan\ 15$	=	$2{,}1547$	Hexágono
$tan\ 1\ /\ tan\ 0{,}5$	=	$2{,}00015$	180 lados

Se han fijado que: $tan\ \alpha_N\ /\ tan\ \alpha_{2N} = 2 + tan\ \alpha_N \cdot tan\ \alpha_{2N}$ Pero eso ya nos suena del trabajo anterior sobre los triángulo rectángulos.

3 UNA CONSTANTE PECULIAR

La resolución tradicional de los polígonos regulares es bien sencilla y eficaz. Como apuntábamos en el capítulo 1, hallamos cuánto mide un lado, lo multiplicamos por el número de lados y obtenemos el perímetro de la figura. Y, midiendo el área de uno de los triángulos isósceles que componen cada polígono regular, multiplicado por el número de lados obtenemos la superficie.

$$P = N \cdot \ell \qquad \text{y} \qquad S = N\frac{a\ell}{2}$$

Para el cuadrado, en concreto, preferimos: $P = 4 \cdot \ell$ y $S = \ell^2$

La circunferencia tiene sus propias fórmulas: $P = 2\pi r$ y $S = \pi r^2$

No obstante, propongo un método alternativo basado en el ángulo regular.

Si nos fijamos en las medidas del triángulo regular del párrafo 2.2 podemos intentar resolverlos a mi manera sustituyendo el valor del lado por $2 \cdot a_N \tan \alpha_N$:

$$P = N \cdot 2 \cdot a_N \tan \alpha_N \qquad \Rightarrow \qquad P = 2 \cdot N \tan \alpha_N\ a_N$$

$$S = 2N\frac{a_N \cdot a_N \tan \alpha_N}{2} \qquad \Rightarrow \qquad S = N \tan \alpha_N \cdot a_N^2$$

Vemos en seguida que se repite el factor $\boldsymbol{N \cdot tan\ \alpha_N}$ en ambas fórmulas.

Por otra parte, N es constante para un mismo tipo de polígono regular; siempre vale 5 para cualquier pentágono, o 6 para cualquier hexágono. Lo mismo ocurre con $tan\ \alpha_N$, es constante para un mismo tipo de polígono regular, por lo tanto $N \cdot tan\ \alpha_N$ siempre es constante para un mismo tipo de polígono regular.

Por ello, a ese producto lo denominaré **CONSTANTE REGULAR** y la representaré con la letra: "ρ" con el subíndice correspondiente al número de lados. Existe una constante regular propia para cada tipo de polígono regular: "ρ_N".

Así pues, todos los polígonos regulares, incluido el cuadrado se pueden resolver como sigue:

$$P = 2\rho_N \cdot a_N \qquad \text{y} \qquad S = \rho_N \cdot a_N^2$$

Ya sólo necesitamos conocer el valor de la apotema para resolverlos, como la circunferencia, que sólo necesitamos conocer el valor del radio. Además, si substituimos ρ_N por π, y a_N por r, tenemos las fórmulas de la circunferencia. ¿Cabe afirmar que π sea la constante regular de la circunferencia?

La siguiente tabla muestra los valores de algunos coeficientes regulares:

N	α_N	tg 180/N	ρ_N = N · tg 180/N
4	45	1	4
5	36	0,72654	3,63271
6	30	0,57735	3,46410
7	25,7143	0,48157	3,37102
8	22,5	0,41421	3,31371
9	20	0,36397	3,27573
10	18	0,32492	3,32492
11	16,3636...	0,29362	3,22989
12	15	0,26795	3,21539
500	0,36	0.006283	3,141634
9000	0,02	0,00035	3,1415928 ≈π

Teniendo en cuenta que generalmente trabajamos, como mucho, con $\pi = 3{,}141592$ podríamos considerar $\rho_N = \pi$ para valores de N mayores o iguales a 9000.

Como curiosidad: $\rho_{999.999.999} = 3{,}1415926535897932\,48$ coinciden los 16 primeros decimales con los del número π.

4 REGULARIDAD DE LA CIRCUNFERENCIA

Según la tabla anterior, parece obvio que ρ_N decrece cuando crece N y que se acerca a π. Claro que eso habrá que demostrarlo. Intentaré demostrar que $\rho_N = \pi$ cuando N tiende a infinito, es decir que $\rho_\infty = \pi$.

Pero resulta que: $\lim_{N\to\infty}\left(N \tan\frac{180}{N}\right) = \infty \cdot 0$ (INDETERMINADO) ¿∞ lados de longitud 0?

Intuimos que estamos ante el límite de una sucesión de Cauchy. Por eso, como dije explícitamente en el capítulo anterior, empezaré la serie de polígonos regulares por el cuadrado hasta el de infinitos lados. O sea, emplearé siempre $N \geq 4$ como cota inferior de la sucesión

Tomemos $N, M \in \mathbb{N} \ / \ N \geq 4,\ M = N + 1$. Obviamente $M > N$. Entonces podemos decir que: $M = N \cdot x,\ x \in \mathbb{R}\ /$ Así, por ejemplo, $5 = 4 \cdot 1{,}25$. De donde $x = M/N$. Vemos que x decrece cuando crece N, pero permanece siempre mayor que 1 puesto que N es siempre más pequeña que M.

De la misma manera, puesto que $tan(180/N) > tan(180/M)$, podemos afirmar que: $tan(180/N) = tan(180/M) \cdot y,\ \ y \in \mathbb{R}$, de donde $y = tan(180/N) \,/\, tan(180/M)$. *'y'* también decrece cuando crece N y permanece mayor que 1. Finalmente, como vemos en la tabla siguiente, en principio, $y > x$.

N	X = M/N	Y = Tg(180/N) / tg(180/M)
4	1,25	1,37638
5	1,20	1,25840
6	1,1666…	1,1989
7	1.14286	1,1621
8	1,125	1,13804
…	Tiende a 1	Tiende a 1

Ponemos *'x'* e *'y'* en función de N y estudiamos sus respectivas derivadas:

$$x(N) = \frac{N+1}{N} \qquad x'(N) = -\frac{1}{N^2} \quad \text{(decreciente)}$$

$$y(N) = \frac{\tan\left(\frac{180}{N}\right)}{\tan\left(\frac{180}{N+1}\right)} \qquad y'(N) = 180\left(-\frac{sec^2\left(\frac{180}{N}\right)\cdot\tan\left(\frac{180}{N+1}\right)}{N^2 tan^2\left(\frac{180}{N+1}\right)} + \frac{sec^2\left(\frac{180}{N+1}\right)\cdot\tan\left(\frac{180}{N}\right)}{(N+1)^2 tan^2\left(\frac{180}{N+1}\right)}\right) \Rightarrow$$

$$y'(N) = \frac{180}{tan^2\left(\frac{180}{N+1}\right)}\cdot\left(-\frac{sec^2\left(\frac{180}{N}\right)\cdot\tan\left(\frac{180}{N+1}\right)}{N^2} + \frac{sec^2\left(\frac{180}{N+1}\right)\cdot\tan\left(\frac{180}{N}\right)}{(N+1)^2}\right)$$

Analicemos el interior del paréntesis de $y'(N)$:

Primero hay que recordar que todos los ángulos con los que estamos tratando son de 45 o menos grados, por lo que todas las razones trigonométricas con las que vamos a tratar son positivas y están comprendidas entre 0 y 1. Dicho esto, el paréntesis contiene la suma de dos cocientes; uno negativo y otro positivo. Ambos numeradores son muy similares, secantes al cuadrado por tangentes de ángulos regulares consecutivos (todo menor que 0). Sin embargo, denominador del cociente positivo es muy superior al del cociente negativo, $(N+1)^2$ frente a N^2. Luego el cociente negativo es mayor, en valor absoluto, que el positivo. Significa que la derivada $y'(N)$ es negativa; es decir decreciente.

Así pues, para $N \leq 4$, ambas funciones son continuas y decrecientes en todos sus puntos como vemos en la gráfica de la página siguiente. Por otro lado, comprobamos en la tabla anterior que $y(N)$ empieza por encima de $x(N)$ (1,3 frente a 1,25) y ambas tienden a 1. Además las curvas no se cruzan, pues para ello debería de ocurrir que:

$$\frac{N+1}{N} = \frac{\tan(180/N)}{\tan(180/N+1)} \ \Rightarrow\ N\cdot\tan(180/N) = (N+1)\cdot\tan(180/N+1) \ \ \text{totalmente absurdo.}$$

Por lo tanto, *y(N)* siempre será mayor que *x(N)* en todos sus puntos, independientemente de que lleguen o no a valer 1.

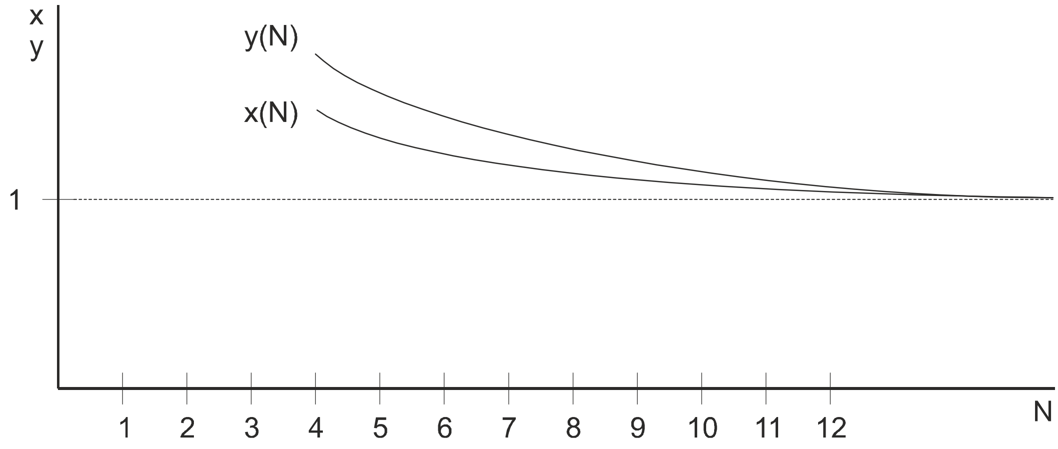

Figura 11

Ahora bien, dado:

$\forall N, M \in \mathbb{N} \mid N \geq 4, M = N+1,\ \exists\, x, y \in \mathbb{R} \mid x = \frac{M}{N},\ y = \frac{tan(^{180}/_{N})}{tan(^{180}/_{M})} \Longrightarrow y > x$

Podemos deducir que:

$$N \cdot \tan(180/N) = \frac{x}{x} N \cdot \tan(180/N) \quad \Rightarrow$$

$$N \cdot \tan(180/N) = xN \cdot \frac{\tan(180/N)}{x} \quad \Rightarrow \textit{ Sustituimos } (M = xN)$$

$$N \cdot \tan(180/N) = M \cdot \frac{\tan(180/N)}{x} \quad \Rightarrow \textit{ Resulta que } (x<y)$$

$$N \cdot \tan(180/N) > M \cdot \frac{\tan(180/N)}{y} \quad \Rightarrow \textit{ Sabemos } \left(Y = \frac{\tan(180/N)}{\tan(180/M)} \Rightarrow \frac{\tan(180/N)}{y} = \tan(180/M) \right)$$

$$N \cdot \tan(180/N) > M \cdot \tan(180/M)$$

Luego: $\rho_N > \rho_M$ siempre.

Por otro lado, todo polígono regular contiene una circunferencia inscrita de radio $r = a_N$. El perímetro de la misma será menor que el del polígono regular que la contiene. Lo mismo ocurre con la superficie de la circunferencia, será menor que la del polígono que la contiene.

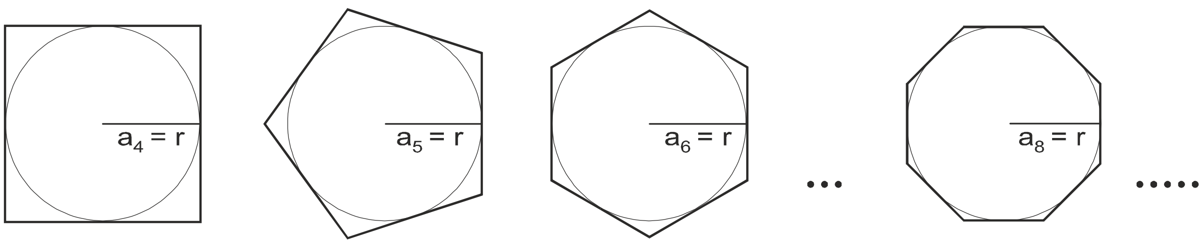

Figura 12

Luego:

$2\rho_N a_N > 2\pi r \quad y \quad \rho_N a_N^2 > \pi r^2 \quad$ como $a_N = r$ entonces: $2\rho_N a_N > 2\pi a_N \quad y \quad \rho_N a_N^2 > \pi a_N^2$

Significa: $\forall \boldsymbol{N} \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{N} \geq \boldsymbol{4},\ \boldsymbol{4} \geq \boldsymbol{\rho_N} > \boldsymbol{\rho_M} > \boldsymbol{\pi}$

De acuerdo con esto, puesto que ρ_N decrece cuando crece N, los perímetros de los sucesivos polígonos regulares decrecen acercándose al de la circunferencia. Lo mismo ocurre con las áreas. Recuerde que, por ejemplo, que para $N = 9000$, $\rho_{9000} = 3{,}141592 \cong \pi$.

Representemos la función: $y = f(x) = x \cdot tan(180/x) = \rho_x$

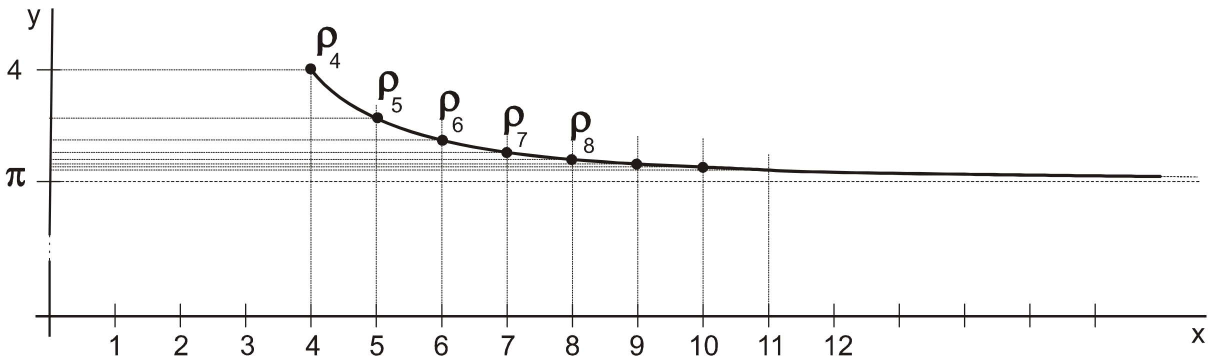

Figura 13

La derivada de dicha función será:

$$f'(x) = \tan(180/x) - \frac{180/x}{\cos^2(180/x)} = \frac{\operatorname{sen}(180/x) \cdot \cos(180/x) - 180/x}{\cos^2(180/x)}$$

Puesto que: $sen(180/x) \cdot cos(18/x < 180/x$, la derivada es negativa; vemos pues que para $x \geq 4$, $y = f(x)$ es continua y decreciente en todos los puntos del intervalo $[4,\infty)$. Ya tenemos pues todos los coeficientes situados:

$$4 \geq \rho_4 > \rho_5 > \rho_6 > \rho_7 > \rho_8 > \cdots > \rho_N > \rho_{N+1} > \pi$$

Ahora bien: $\forall N, M \in \mathbb{N} \mid M \geq 4, N = M + 1$. Dado el hueco $\varepsilon > 0 \mid \varepsilon = \rho_M - \pi$. Se cumple, como acabamos de ver que $\rho_{M+1} < \rho_M$, entonces $\rho_{M+1} - \pi < \rho_M - \pi$. Y, puesto que $\rho_{M+1} > \pi$, implica:

$|\rho_{M+1} - \pi| < (\rho_M - \pi)$. Pero $N = M + 1$, además $\varepsilon = \rho_M - \pi$. Entonces:

$$\boldsymbol{|\rho_{M+1} - \pi| < (\rho_M - \pi) \quad \Rightarrow \quad |\,N \cdot tan(180/N)\,| - \pi < \varepsilon}$$

Significa que, dado un intervalo cualquiera $(\rho_N - \pi)$, por pequeño que sea, siempre podemos encontrar otro más pequeño $(\rho_{N+1} - \pi)$. Lo que demuestra que:

$$\boldsymbol{\lim_{N\to\infty}\left(N \tan\frac{180}{N}\right) = \pi}$$

Por lo tanto, la sucesión $a(n) = n \cdot \tan(180/n)$ es convergente. Luego, es de Cauchy. Significa que está acotada. Por lo tanto los coeficientes regulares se sitúan definitivamente como sigue:

$$4 \geq \rho_4 > \rho_5 > \rho_6 > \rho_7 > \rho_8 > \cdots > \rho_N > \rho_{N+1} \geq \pi$$

Ahora podemos decir que: $\forall N \in \mathbb{N} \mid N \geq 4, \quad \rho_4 \geq \rho_N \geq \rho_\infty \quad \Rightarrow \quad \rho_4 \geq \rho_N \geq \pi$, y que la circunferencia es el último polígono regular, el de infinitos lados de longitud 0.

4 LA CONSTANTE REGULAR

4.1 MORFOLOGÍA DE ρ

A mi parecer, ‘ρ’ es como si fuera la semilla de cada polígono regular. Como si ‘ρ’ aportara un código genético propio, con al menos dos genes muy importantes que determinan la forma que ha de tener cada polígono regular. Uno, la tangente del ángulo regular, nos indica cuál va a ser la proporción entre el lado y la apotema, y otro, el número de lados, que le dará la forma definitiva.

Ese mismo bagaje “genético” lo incorpora ‘π’ a la hora de generar la circunferencia, que, según hemos visto, puede tratarse como polígono regular de infinitos lados; cada lado mediría 0. Pero debe de haber algo más, pues con estos datos $(0{\cdot}\infty)$, se podrían construir infinidad de figuras, y supongo que con ρ_5 , atendiendo sólo a tangente y número de lados, se podría construir otro tipo de polígono de 5 lados (no regular).

Por eso, ‘ρ’ aporta otro “gen” importante, el **ANGULO REGULAR**, que también es característico del polígono regular al que representa, y por eso, además de lo que ya expuse al principio, le asigné el apodo de **REGULAR**. Ahora sí podemos construir un único tipo de polígono con ρ_5, el pentágono, y ninguno más: 5 lados situados a una distancia proporcional a tan α_5, montados sobre una carcasa de apotemas, que forman ángulos $2\alpha_5$ entre si, y dispuestas alrededor del centro como radios de una rueda.

La **CONSTANTE REGULAR** también puede medirse de otra manera, ya que $a = P/(2 \cdot \tan \alpha_N)$:

$$\rho_N = N \cdot \tan \alpha_N \implies \rho_N = \frac{a_N}{a_N} N \cdot \tan \alpha_N \implies \rho_N = \frac{\ell}{a_N \cdot 2 \tan \alpha_N} \tan \alpha_N \cdot N \implies \rho_N = \frac{\ell/2}{a_N} \cdot N$$

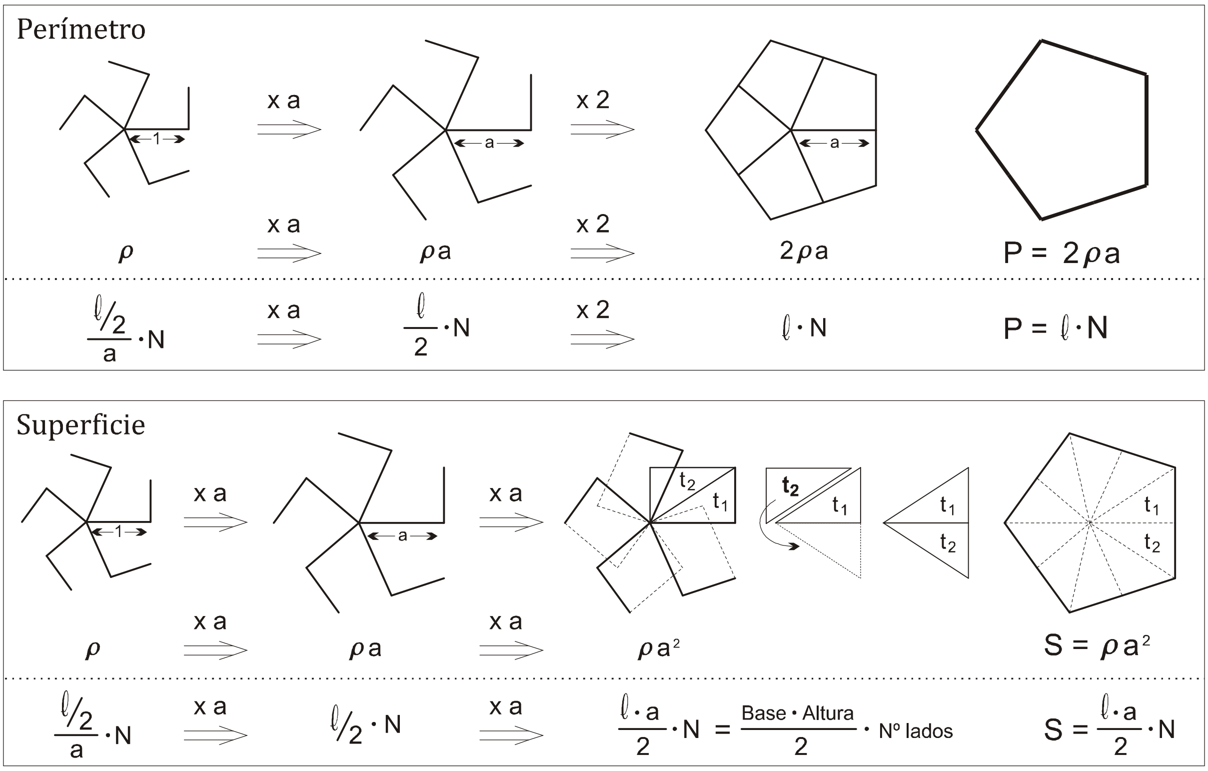

Figura 14

La **CONSTANTE REGULAR** ‘ρ’ representa pues a una carcasa de tamaño unitario, que si la multiplicamos por ‘a’ crece hasta alcanzar la escala *‘a’* y después, dependiendo de si la multiplicamos por *2* o por *‘a’* otra vez, nos dará el perímetro o la superficie respectivamente como intento mostrar en la figura 14.

Volviendo a la gráfica de la función $y = f(x) = \rho_x$ vemos que podrían existir otros valores $f(x)$ fuera de la sucesión, entre los distintos ρ_x , como por ejemplo $\rho_{4,5}$ aunque, en principio, no podemos determinar a qué polígono o figura representan.

Por lo pronto: $\rho_{4,5} = 3{,}775948$ correspondiéndole un ángulo de 40º. Comprobamos a simple vista que $\rho_4 > \rho_{4,5} > \rho_5$, luego debe de tratarse de algún polígono (no regular) intermedio entre el cuadrado y el pentágono.

El valor $\rho_{4,5}$ nos indica que la proporción de la apotema con respecto al medio lado es menor que la del cuadrado, pero mayor que la del pentágono, y que el ángulo implícito (no regular) está comprendido entre 45º y 36º (concretamente 40º). En cuanto al número de lados, en principio podría dar a entender que hay cuatro lados iguales y otro de la mitad de su tamaño: *4,5·tan40 =* $(4 + 0{,}5) \cdot tg\ 40$. Pero, por qué no pensar en $(2 + 1{,}8 + 0{,}7) \cdot tan\ 40$, o cualquier otra combinación.

Lo que sí parece seguro es que tendrá cinco lados, con al menos uno que mida $2a$, y que las apotemas que correspondan a los lados iguales serán algo mayores que las del cuadrado (menores que las del pentágono), siendo también mayores que las demás apotemas suyas.

Es muy probable que su superficie sea $S = \rho_{4,5} a^2$, tomando la mayor de las apotemas. Sería interesante comprobarlo, pero no es el propósito final de este estudio.

En este sentido, a mi parecer, el polígono que se genera con $\rho_{4,5}$ es un paso intermedio entre el cuadrado y el pentágono, la etapa central de un, podríamos llamarlo, "morphing informático" entre esas dos figuras como pretendo representar burdamente en la figura 15.

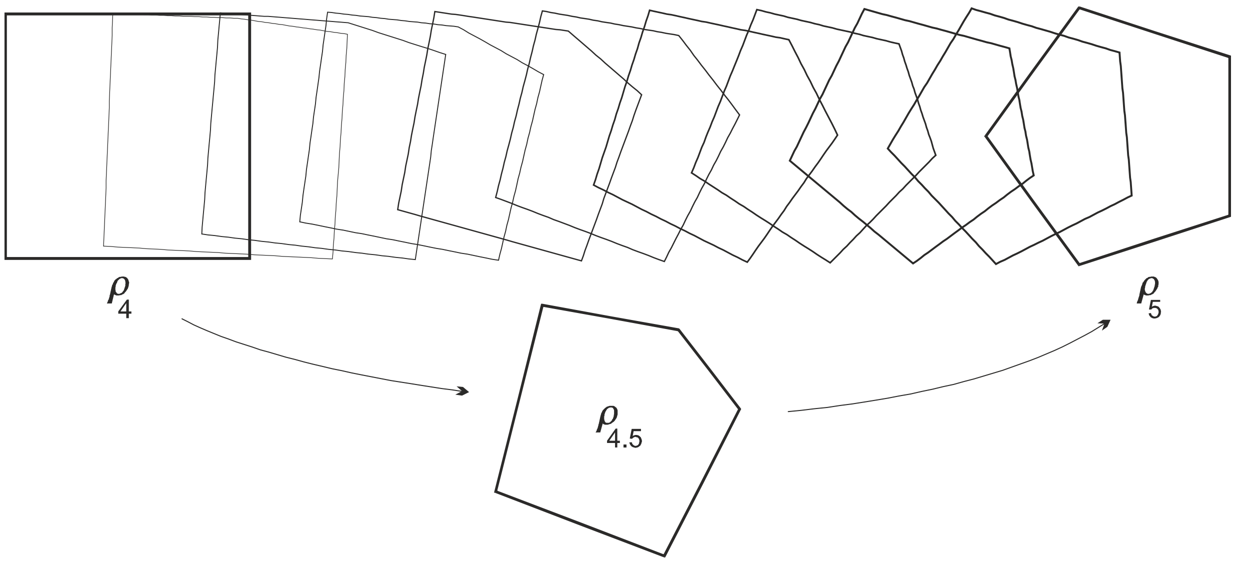

Figura 15

¿Entre medias podríamos situar $\rho_{4,2}$ o $\rho_{4,77}$? Quién sabe.

4.1 SIMILITUDES ENTRE ρ y π

Desde el momento en que comprobamos que 'ρ' y 'π' presuntamente son guarismo de la misma categoría, podemos adivinar que van a tener comportamientos prácticamente idénticos. Es cierto, ahí van algunas comprobaciones:

1) Ambos se utilizan en las mismas fórmulas para resolver las figuras correspondientes:

   Polígonos: $P = 2\rho a$ y $S = a^2\rho$ Circunferencia: $P = 2\pi a$ y $S = a^2\pi$

2) La apotema (el radio) está contenida 2ρ veces (2π veces) en el perímetro del polígono regular (de la circunferencia). En cuanto a la superficie, con apotema (radio) igual a 1, medirá exactamente: $S = \rho$ ($S = \pi$).

3) El trozo de perímetro abarcado por el ángulo regular, en cualquier polígono regular es el medio lado. Y vale, con apotema = 1, $\tan \alpha_N$. Pero ¿cuánto es en comparación al perímetro?

   Como $P = 2a\,\rho_N$, y puesto que, como sabemos, el medio lado vale $\tan \alpha_N$; puesto que hay 2N medios lados, con $a = 1$, el trozo de perímetro abarcado por el ángulo regular será:

$$P' = \frac{2\rho_N}{2N} \quad \Longrightarrow \quad P' = \frac{\rho_N}{N}$$

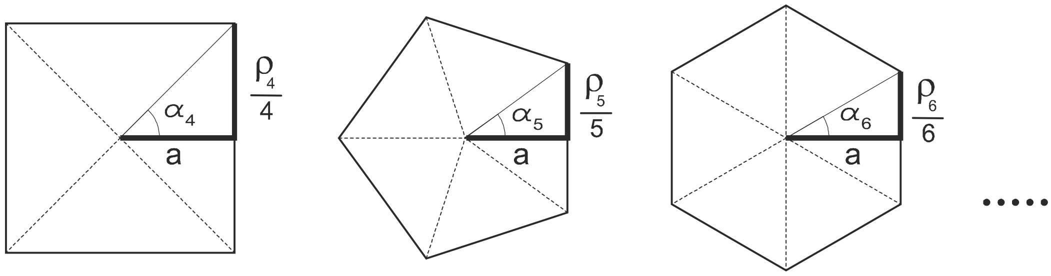

Figura 16

Si representamos el ángulo α_N en una circunferencia, la cuerda resultante valdrá: $P' = \frac{\pi}{N}$

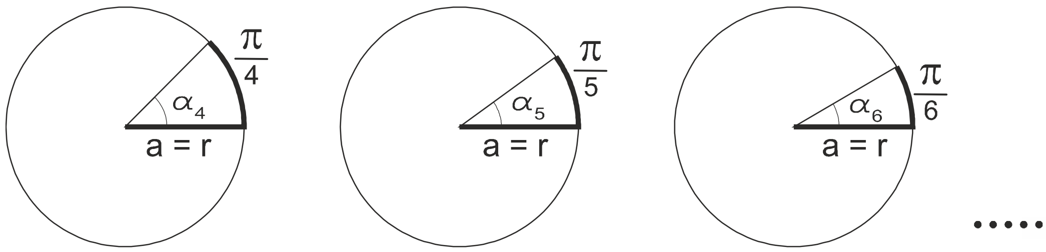

Figura 17

4) Con la superficie de dichos sectores ocurre un tanto de lo mismo:

   Polígonos: $S' = a^2\,\frac{\rho_N}{2N}$ Circunferencia: $S' = r^2\,\frac{\pi}{2N}$

   Con apotema = 1

   Polígonos: $S' = \frac{\rho_N}{2N}$ Circunferencia: $S' = \frac{\pi}{2N}$

   La fórmula siguiente constituye una conclusión interesante a estos puntos:

$$\rho_N = N \cdot \tan(180/N) \quad \Longrightarrow \quad \tan(180/\mathrm{N}) = \frac{\rho_N}{\mathrm{N}}$$

Se podrían encontrar otras comprobaciones, todas ellas motivo de estudio aparte, como por ejemplo, funciones trigonométricas basadas en distintos ρ_N en lugar de en π, como senos cuadráticos, cosenos pentagonales, etc.

La curva del seno cuadrático podría ser algo así:

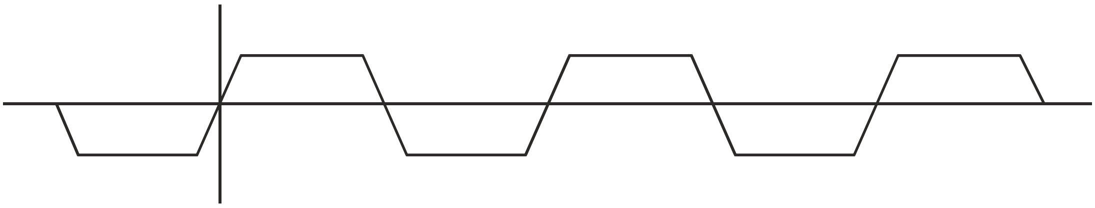

Figura 18

La del seno octogonal se parecería a lo siguiente:

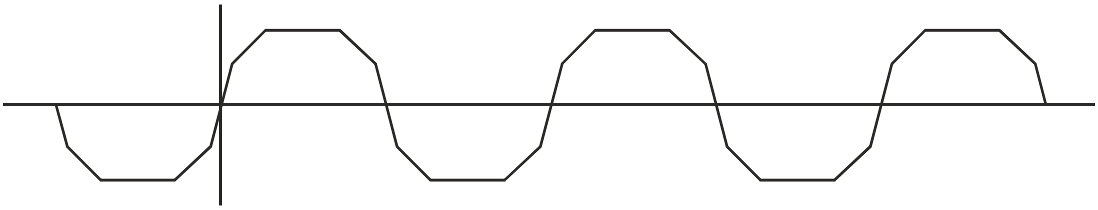

Figura 19

Si las unimos a la sinusoide tradicional en una misma representación gráfica, seguramente obtendríamos algo así:

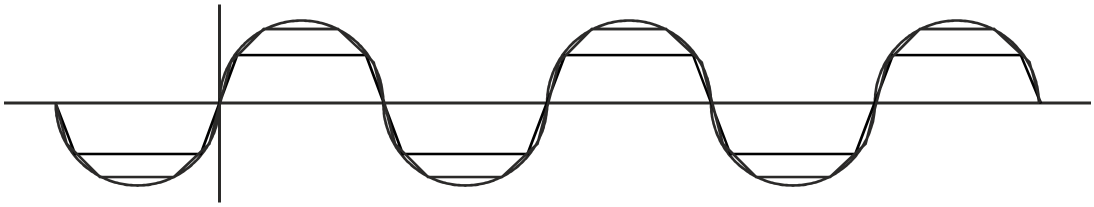

Figura 20

5.2 PARADIGMA NUMÉRICO

Me da en la nariz que los Coeficientes Regulares pertenecen todos ellos a un mismo subconjunto de los Números Reales. Y, que al margen de tal paradigma, tienen más en común con π de lo anteriormente descrito.

No puedo demostrarlo, no sabría cómo, pero estoy convencido de que son todos del mismo género que el propio π. Es decir números irracionales especiales: con infinito decimales que nunca se repiten, y con los que además se pueden construir figuras concretas; cada uno la suya.

No quedaría más que ponerle nombre a dicho subconjunto. He pensados en muchos de ellos, pero al final, me quedaría con ***NÚMEROS EMPÍRICOS***, entre otras cosas porque son dígitos que salen de mi propia observación y que no puedo demostrar que son tal y cómo siento que son.

Hemos llegado al final de este trabajo. Entiendo que se trata de una exposición bastante polémica en algunos aspectos, pero la he confeccionado de acuerdo a mi criterio, y con la máxima sinceridad. El trabajo siguiente, dedicado a la elipse, tampoco estará exento de controversia.

Manuel Ramos Framit
ramosframit@gmail.com
En Jerez de la Frontera
Diciembre 2022