DISTRIBUSI PROBABILISTIK

TEKNIK INFORMATIKA
APRIANI PUTI PURFINI,S.KOM.,M.T.

Konsep dan Definisi Peubah Acak

- Ruang sampel adalah suatu himpunan/set S yang memiliki anggota semua titik sampel
- Peubah acak bisa didefinisikan sebagai suatu fungsi yang mengaitkan suatu bilangan real pada setiap unsur dalam ruang sampel
- Peubah acak dinyatakan dengan huruf besar, misalnya X, sedangkan nilainya dinyatakan dengan huruf kecil padanannya, misalnya x

Contoh :

Diambil 2 Bola sekaligus dari 6 **Bola Kuning (K)** dan 5 Bola Merah (M)

P1	P2
K	K
K	M
M	K
M	M

Variabel acak X didefinisikan : " **Banyaknya Bola Kuning Yang Terambil**"

Kemungkinan banyak Bola Kuning yang terambil

Ruang Sample	Nilai Variabel Acak
MM	0
KM,MK	1
KK	2

X menyatakan variabel acaknya

$X = \{0,1,2\}$

x menyatakan nilai variabel acaknya

$x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2$

Konsep dan Definisi Peubah Acak

- Peubah acak juga bisa didefinisikan sebagai sebuah fungsi yang memetakan hasil dari sebuah percobaan acak (random experiment) menjadi nilai numerik.
- Dengan kata lain, peubah acak merupakan variabel yang nilainya bergantung pada hasil percobaan acak (random/probabilistic experiment).
- Nilainya tidak diketahui sebelumnya, tetapi nilainya akan diketahui setelah hasil dari percobaannya dilaku kan.

Percobaan Acak (Random Experiment)

- Sebuah percobaan acak merupakan proses yang mengarah kepada hasil yang tidak pasti (lead to uncertain outcome)

Misalnya, saat anda melempar sebuah koin, maka hasil yang muncul bisa berupa Angka atau Gambar.

- Bahkan jika anda melempar koin tersebut hingga tak terhingga kali hasilnya pasti berupa Angka atau Gambar.
- Anda tidak akan pernah tahu hasil yang muncul sebelumnya sampai anda melempar koin tersebut dan mendapatkan hasilnya.

Mengapa kita perlu peubah acak? Karena dalam percobaan acak, hasil (outcomes) yang muncul tidak selalu berupa bilangan numerik.

Percobaan Acak (Random Experiment)

Mengapa kita perlu peubah acak? Karena dalam percobaan acak, hasil (outcomes) yang muncul tidak selalu berupa bilangan numerik.

Contoh :

Misalnya kita melemparkan koin sebanyak 10 kali. Kita menyatakan G apabila muncul gambar dan A apabila muncul angka, hasilnya diberikan berikut ini :

A,G,A,G,G,G,A,A,G,A

Misalkan kita akan menggunakan sebuah peubah acak X

X = 1 jika yang muncul adalah Angka dan X = 0 jika yang muncul adalah Gambar.

Sehingga hasil dari pelemparan sebanyak 10 kali koin di atas akan menjadi

$$X = \{1,0,1,0,0,0,1,1,0,1\}$$

X = 5 jika jika ada lima angka yang muncul

VARIABEL ACAK DISKRIT

- Varibel acak diskrit adalah variabel acak yang tidak mengambil seluruh nilai yang ada dalam sebuah interval atau variabel yang hanya memiliki nilai tertentu.
- Nilainya merupakan bilangan bulat dan asli, tidak berbentuk pecahan.
- Variabel acak diskrit jika digambarkan pada sebuah garis interval, akan berupa sederetan titik-titik yang terpisah

Contoh :

1. Banyaknya pemunculan sisi muka atau angka dalam pelemparan sebuah koin (uang logam).
2. Jumlah anak dalam sebuah keluarga.
3. Banyaknya kecelakaan mobil per tahun di Jakarta

VARIABEL ACAK KONTINU

- Varibel acak kontinu adalah variabel acak yang mengambil seluruh nilai yang ada dalam sebuah interval atau variabel yang dapat memiliki nilai-nilai pada suatu interval tertentu.
- Nilainya dapat merupakan bilangan bulat maupun pecahan.
- Varibel acak kontinu jika digambarkan pada sebuah garis interval, akan berupa sederetan titik yang bersambung membantuk suatu garis lurus.

Contoh :

1. Usia penduduk suatu daerah.
2. Panjang beberapa helai kain.

Distribusi Peubah Acak Diskrit

1. Distribusi Uniform Diskrit

Definisi :

Bila peubah acak X mendapat nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dengan peluang yang sama, maka distribusi seragam diskret :

$$f(x;n) = \frac{1}{n}; x = x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Lambang $f(x;n)$ dipakai sebagai pengganti $f(x)$ untuk menunjukkan bahwa distribusi seragam tersebut bergantung pada parameter n.

Contoh:

Bila sebuah bola lampu dipilih secara acak dari sekotak bola lampu yang berisi 1 yang 40-watt, 1 yang 60 watt, 1 yang 75 watt, dan 1 yang 100 watt

Maka tiap unsur ruang sampel T={40,60,75,100} muncul dengan peluang ¼

$$\boxed{f(x;4) = \frac{1}{4}; x = 40{,}60{,}75{,}100}$$

Distribusi Peubah Acak Diskrit

2. Distribusi Binomial

Definisi :

Jika percobaan Bernoulli menghasilkan sukses dengan peluang p dan gagal dengan peluang $q = 1 - p$, maka distribusi peluang peubah acak Binomial X, yaitu banyaknya sukses dalam n percobaan bebas, ialah

$$f(x;n) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 \;\; , x \; lainnya \end{cases}$$

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

Dengan :

$n =$ banyak percobaan

$x =$ banyak berhasil/gagal

$p =$ peluang berhasil/gagal

$q =$ peluang gagal/berhasil

Distribusi Peubah Acak Diskrit

2. Distribusi Binomial

Contoh :

Suatu penelitian dilakukan untuk mengetahui minat mahasiswa jurusan ekonomi. 10 orang mahasiswa dipilih secara acak. Misalkan $p = \frac{1}{2}$ adalah peluang memilih jurusan ekonomi,

a. Berapa peluang bahwa dari 10 mahasiswa yang diteliti, 7 orang memilih jurusan ekonomi?

Penyelesaian:

Misalkan sebaran atau distribusi binomial terpenuhi, dengan $n = 10 \; dan \; p = \frac{1}{2}$. Dengan demikian, kita peroleh

$$a. P(X = 7) = \binom{10}{7}(0.5)^7(0.5)^{10-7} = \left(\frac{10!}{7!(10-7)!}\right)(0.5)^7(0.5)^{10-7} = \left(\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!(3\cdot 2)}\right)(0.5)^7(0.5)^3 = 0.1172$$

Distribusi Peubah Acak Diskrit

2. Distribusi Binomial

Contoh :

Suatu penelitian dilakukan untuk mengetahui minat mahasiswa jurusan ekonomi. 10 orang mahasiswa dipilih secara acak. Misalkan $p = \frac{1}{2}$ adalah peluang memilih jurusan ekonomi,

b. Berapa peluang paling banyak 4 mahasiswa memilih jurusan ekonomi?

Penyelesaian:

Misalkan sebaran atau distribusi binomial terpenuhi, dengan $n = 10\ dan\ p = \frac{1}{2}$. Dengan demikian, kita peroleh

b. $P(X \leq 4)$ $= \sum_{x=0}^{4} \binom{10}{x} (0.5)^x (0.5)^{10-x}$

$= (\binom{10}{0} (0.5)^0 (0.5)^{10-0}) + (\binom{10}{1} (0.5)^1 (0.5)^{10-1}) + (\binom{10}{2} (0.5)^2 (0.5)^{10-2}) + (\binom{10}{3} (0.5)^3 (0.5)^{10-3}) + (\binom{10}{4} (0.5)^4 (0.5)^{10-4})$

$=$ (0.0010)+(0.0098) +(0.0439) +(0.1172) +(0.2051)

$= 0.3770$

Distribusi Peubah Acak Diskrit

2. Distribusi Binomial

Contoh :

Suatu penelitian dilakukan untuk mengetahui minat mahasiswa jurusan ekonomi. 10 orang mahasiswa dipilih secara acak. Misalkan $p = \frac{1}{2}$ adalah peluang memilih jurusan ekonomi,

c. Berapa peluang paling sedikit 5 mahasiswa memilih jurusan ekonomi?

Penyelesaian:

Misalkan sebaran atau distribusi binomial terpenuhi, dengan $n = 10\ dan\ p = \frac{1}{2}$. Dengan demikian, kita peroleh

c. $P(X \geq 5)$ = $1 - P(X \leq 4)$

$= 1 - 0.3770$

$= 0.6230$

Distribusi Peubah Acak Diskrit

2. Distribusi Binomial

Latihan

Sebuah perusahaan alat-alat elektronik memutuskan bahwa pengepakan suatu transistor ke dalam kotak paling banyak berisi 10% rusak. Untuk mengadakan pengujian, maka pimpinan perusahaan mengambil secara acak 30 buah transistor dari suatu kotak tersebut. Berapakah peluang bahwa dari 30 transistor.

a. Terdapat paling banyak 3 yang rusak?
b. Terdapat antara 2 sampai dengan 4 yang rusak?
c. Terdapat antara 1 sampai dengan 5 yang rusak?
d. Minimal 3 yang rusak?
e. Berapakah kemungkinan yang baik ada 5?

Distribusi Peubah Acak Diskrit

3. Distribusi Multinominal

Definisi :

Bila suatu usaha tertentu dapat menghasilkan k macam hasi $E_1, E_2, \ldots, Ek$ dengan peluang $p_1, p_2, \ldots, p_k$ maka distribusi peluang peubah acak $x_1, x_2, \ldots, x_k$ yang menyatakan banyak terjadinya $E_1, E_2, \ldots, Ek$ dalam n usaha bebas ialah

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k; p_1, p_2, \ldots, p_k, n) = \binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}, \ldots, p_k^{x_k}$$

Dengan :

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

Distribusi Peubah Acak Diskrit

3. Distribusi Multinominal

Contoh :

Bila dua dadu dilantunkan 6 kali, berapakah peluang mendapat jumlah 7 atau 11 muncul dua kali, sepasang bilangan yang sama satu kali, dan kombinasi lainnya 3 kali?

Penyelesaian:

Misalkan p_1 menyatakan jumlah 7 atau 11 muncul, p_2 menyatakan pasangan bilangan yang sama muncul, p_3 menyatakan baik pasangan yang sama maupun jumlah 7 atau 11 tidak muncul.

$\mathrm{N} = 6^2 = 36$

D1	D2
1	6
6	1
2	5
5	2
3	4
4	3

$$p_1(7) = \frac{n}{N} = \frac{6}{36}$$

D1	D2
5	6
6	5

$$p_1(11) = \frac{n}{N} = \frac{2}{36}$$

$$\boldsymbol{p_1(7 \cup 11) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36}}$$

D1	D2
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6

$$\boldsymbol{p_2 = \frac{n}{N} = \frac{6}{36}}$$

$$p_3 = \frac{n}{N} = \frac{36}{36} - \frac{8}{36} + \frac{6}{36} = \frac{22}{36}$$

$x_1 = 2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 3$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k; p_1, p_2, \dots, p_k, n) = \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}, \dots, p_k^{x_k}$$

$$f\left(2,1,3; \frac{8}{36}, \frac{6}{36}, \frac{22}{36}, 6\right) = \binom{6}{2,1,3} \left(\frac{8}{36}\right)^2 \left(\frac{6}{36}\right)^1 \left(\frac{22}{36}\right)^3$$

$$= \left(\frac{6!}{2!1!3!}\right) \left(\frac{8}{36}\right)^2 \left(\frac{6}{36}\right)^1 \left(\frac{22}{36}\right)^3$$

$$= 0{,}1127$$

Distribusi Peubah Acak Diskrit

4. Distribusi Hipergeometrik

- Distribusi hipergeometrik merupakan distribusi diskrit
- Setiap hasil (outcome) terdiri dari keberhasilan atau kegagalan.
- Pengambilan sampel (sampling) dilakukan tanpa pengembalian.
- Populasi (N) adalah terbatas dan diketahui.
- Jumlah keberhasilan dalam populasi, kk, diketahui.

Definisi :

Distribusi peluang peubah acak hipergeometrik X, yaitu banyaknya sukses dalam sampel acak ukuran n yang diambil dari N benda yang mengandung k bernama sukses dan $N - k$ bernama gagal, ialah

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, x = 0,1,2, \ldots, n$$

Dengan :

$N =$ ukuran populasi

n $=$ ukuran sample

$k =$ banyaknya unsur yang sama pada populasi

$x =$ banyaknya peristiwa sukses

Distribusi Peubah Acak Diskrit

4. Distribusi Hipergeometrik

Contoh :

Dalam suatu gudang terdapat 60 dus obat-obatan di mana diketahui 10 dus di antaranya rusak. Dari gudang tersebut diambil se banyak 15 dus secara acak. Berapa:

a. Peluang terdapat 12 dus yang baik?

b. Peluang paling sedikit terdapat 10 dus yang baik?

c. Peluang terdapat antara 5 s/d 10 dus yang baik?

Penyelesaian:

Diketahui bahwa N=60, k=50, n=15 . Dengan demikian, kita peroleh

a. $\mathrm{P}(\mathrm{X}=12)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{50}{12}\binom{60-50}{15-12}}{\binom{60}{15}} = \frac{\binom{50}{12}\binom{10}{3}}{\binom{60}{15}} = \frac{14567958132000}{53194089192720} = 0.2739$

b. $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 10)=\sum_{x=10}^{15}\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = 0.0487 + 0.1475 + 0.2739 + 0.3002 + 0.1736 + 0.0423 = 0.0889$

c. $\mathrm{P}(5 < X < 10)=\sum_{x=6}^{9}\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = 0.0000029873 + 0.0000844981 + 0.0012111390 + 0.0098909688 = 0.0111895932$

Distribusi Peubah Acak Kontinu

1. Distribusi Uniform Kontinu

Definisi :

Suatu peubah acak X pada interval (a,b)(a,b) dikatakan berdistribusi uniform kontinu jika nilai f(x)f(x) adalah te tap untuk tiap x dalam interval (a,b) dengan *probability density function (pdf)*

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & ,a<x<b\\ 0 & ,x\ lainnya\end{cases}$$

Dengan :

$N=$ ukuran populasi

$\mathrm{n}=$ ukuran sample

$k=$ banyaknya unsur yang sama pada populasi

$x=$ banyaknya peristiwa sukses

Distribusi Peubah Acak Kontinu

1. Distribusi Uniform Kontinu

Contoh :

Jumlah pengunjung dalam suatu gedung pertunjukan diketahui paling sedikit 400 dan paling banyak 600 orang.

Dengan menganggap X adalah peubah acak yang menyatakan jumlah pengunjung dan ternyata mempunyai distribusi uniform dalam interval (400,600), maka tentukan peluangnya bahwa:

a. Jumlah pengunjung paling sedikit 550 orang

b. Jumlah pengunjung antara 450 dan 550 orang

Penyelesaian:

X mempunyai distribusi uniform dalam interval (400,600)

Dapat juga ditulis sebagai X ~ U(400,600)

$$a.\mathrm{P}\ (\mathrm{X}\ \geq 500) = 1\ - P(X < 550)\ = 1\ - \frac{550-400}{600-400} = 1 - \frac{150}{200} = 1 - \frac{3}{4}\ \ = \frac{1}{4}$$

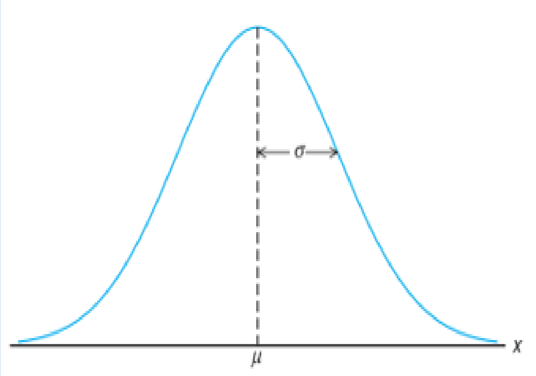
$$\mathrm{b.P}\ (450\ \leq\ \mathrm{X}\ \geq 500)\ = \frac{100}{200}\ \ = \frac{1}{2}$$

Distribusi Peubah Acak Kontinu

2. Distribusi Normal

- Suatu peubah acak X yang distribusinya berbentuk lonceng disebut peubah acak normal.
- Disribusi peluang peubah normal bergantung pada dua parameter μ dan σ, yaitu rataan dan simpangan bakunya.
- Luas daerah grafik selalu sama dengan 1 unit persegi

Perubahan σ meningkatkan atau menurunkan penyebaran data



Perubahan μ menyebabkan pergeseran distribusi ke kiri atau ke kanan

Definisi :

Fungsi kepadatan peluang peubah acak normal X, dengan rataan μ dan varians σ^2, dengan *probability density function (pdf)* ialah

$$f(X;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} \; ; \quad -\infty < x < \infty$$

Dimana

π = 3.14159…

$e = 2.71828 \ldots$

μ = mean dari populasi

σ = standar deviasi dari populasi

X = variable kontinyu

Distribusi Peubah Acak Kontinu

2. Distribusi Normal

- Distribusi Normal dengan mean dan variasi dapat ditransformasikan menjadi distribusi normal Standar (Z) dengan $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$
- Membutuhkan transformasi dari X unit menjadi Z unit , yaitu dengan formula sebagai berikut :

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{X} - \mu}{\sigma}$$

- Setelah X ditranformasi menjadi Z , maka pdf untuk distribusi Z menjadi :

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{Z^2}{2}}$$

Dimana

π = 3.14159…

$e = 2.71828$ ...

μ = mean dari populasi

σ = standar deviasi dari populasi

Z = nilai dari distribusi normal standar

Distribusi Peubah Acak Kontinu

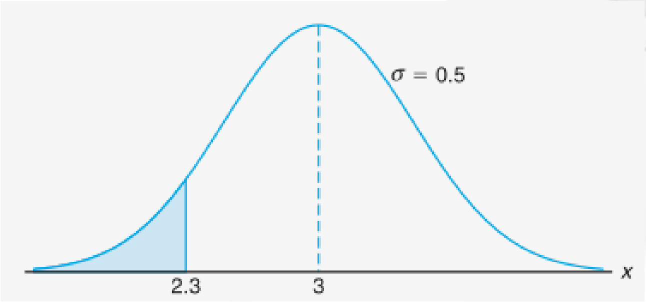
2. Distribusi Normal

Contoh :

Suatu jenis baterai mobil rata-rata berumur 3.0 tahun dengan simpangan baku 0.5 tahun. Bila dianggap umur baterai berdistribusi normal, carilah peluang suatu baterai tertentu akan berumur kurang dari 2.3 tahun.

Penyelesaian:

Perhatikan Gambar di bawah ini yang menunjukkan distribusi umur baterai yang diberikan dan luas daerah yang ditanyakan. Untuk menghitung P(X<2.3), hitunglah luas di bawah kurva normal sebelah kiri titik 2.3.



ini sama saja dengan menghitung luas daerah sebelah kiri nilai z padanannya. Jadi diperoleh

$$z = \frac{2.3 - 3}{0.5} = -1.4$$

dan kemudian dengan menggunakan tabel luas di bawah kurva normal diperoleh

$$P(X < 2.3) = P(Z < 1.4) = 0.0808$$

Distribusi Peubah Acak Kontinu

3. Distribusi Eksponensial

Definisi :

Peubah acak kontinu X akan berdistribusi eksponensial X$\sim Exp(\lambda)$ dengan parameter λ yang terdefinisi pada selang (0,∞), maka fungsi padat peluang (pdf) dari X adalah

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0, & x\ lainnya \end{cases}$$

Apabila dinyatakan dalam rate parameter, maka rata-rata dan varians dari distribusi eksponensial, yaitu:

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \text{ dan } \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Aplikasi Distribusi Eksponensial

- Dalam teori antrian, jarak antar kedatangan pelanggan di fasilitas pelayanan (seperti bank, loket kereta api, tukang cukur,dsb) memenuhi distribusi eksponensial.
- Lama waktu mulai dipakai sampai rusaknya suatu suku candang dan alat listrik memenuhi distribusi eksponensial

Distribusi Peubah Acak Kontinu

3. Distribusi Eksponensial

Contoh :

Lamanya waktu untuk melayani konsumen di suatu kafetaria merupakan suatu peubah acak berdistribusi eksponensial dengan rata-rata 4 menit. Berapakah peluang seseorang akan dilayani dalam waktu kurang dari 3 menit?

Penyelesaian:

$$\mu = 4 = \frac{1}{\lambda} \quad \rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0, & x \ lainnya \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} & , x \geq 0 \\ 0, & x \ lainnya \end{cases}$$

$$P(X \leq 3) = \int_{-\infty}^{3} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{3} f(x)\, dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{3} \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} dx$$

$$P(X \leq 3) = \int_{0}^{3} \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} dx$$

$$\boxed{\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c}$$

$$= \frac{1}{4} \int_{0}^{3} e^{-\frac{1}{4}x} dx$$

$$= \cancel{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-1/4}} e^{-\frac{1}{4}x} \Big|_0^3 \quad = -e^{-\frac{1}{4}x} \Big|_0^3$$

$$= -(e^{-\frac{3}{4}} - e^{0}) \quad = -(e^{-\frac{3}{4}} - 1)$$

= - 0.472 +1 = 0.527