Pertemuan ke-5

Ruang Vektor

Pengertian Ruang Vektor dan Sub ruang, Operasi Vektor Membangun, Bebas Linear, Basis dan Dimensi, Vektor koordinat, Matriks transisi, Rank dan Nullitas

Sub CPMK Pertemuan 5

4. Mampu menganalisis karakteristik ruang vektor dan sifat-sifatnya.

Pengertian Vektor, Vektor di R2, R3 beserta sifat-sifatnya

Pengertian Vektor

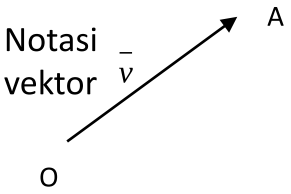
Vektor adalah ruas garis yang memiliki panjang dan arah.

Vektor digunakan untuk menggambarkan besarnya perubahan dari sebuah pergerakan dan arah perubahannya

Contoh

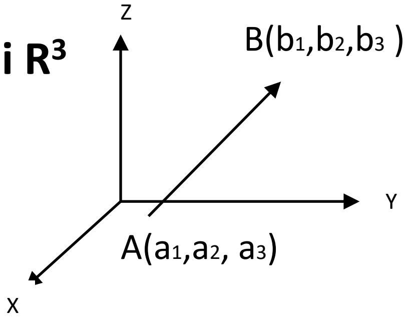
- Benda berpindah sejauh 2 cm ke arah utara
- Sebuah orbit bergerak dengan kecepatan 2 km/jam,searah jarum jam
- Sistem rekomendasi memunculkan kedekatan positif antara barang - barang yang dijual dengan barang yang telah dibeli oleh pembeli online.

Vektor di R^2 dan R^3



Disebut **vektor standar** jika titik pangkal vektor tersebut berada pada titik *O*(0,0).

di R^3

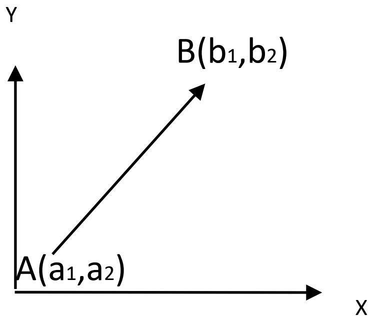


Vektor punya arah dan panjang

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

di R^2



$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

Panjang Vektor R^2 dan R^3

R^2

$\bar{v}$

R^3

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad \left\| \bar{v} \right\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$$

$$\left\| \bar{v} \right\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$$

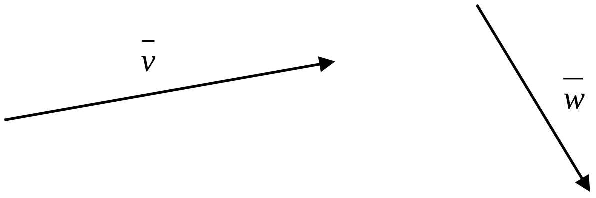
$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \left\| \bar{v} \right\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}$$

$$= 6$$

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\left\| \bar{v} \right\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Jarak Antar Dua Vektor



$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \| \bar{v} - \bar{w} \|$$

Hitunglah $d(\bar{v}, \bar{w})$

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \bar{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vektor di R^n (Ruang Euclidis)

- Panjang vektor

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\left\| \bar{v} \right\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + \ldots + {v_n}^2}$$

$$\left\| \bar{v} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2}$$

- Jarak dua vektor

$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \| \; \bar{v} - \bar{w} \; \|$$

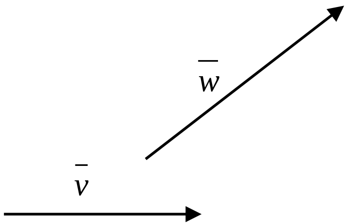
$$\bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

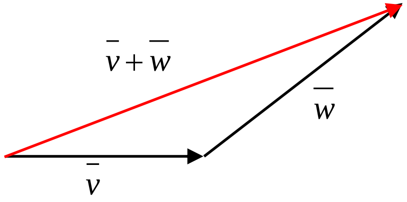
$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (v_i - w_i)^2}$$

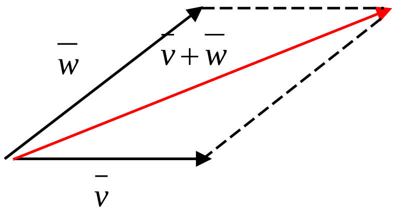
$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + \ldots + (v_n - w_n)^2}$$

Operasi –Operasi Vektor

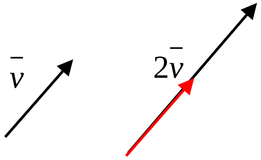
- **Penjumlahan Vektor**







- **Perkalian vektor dengan skalar**



- **Vektor negatif**

✍ Latihan

Misalkan

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix},\ \overline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix},\ \overline{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Hitunglah ekspresi yang ditunjukkan:

$3\overline{u} - 5\overline{v} + \overline{w}$

$\frac{1}{2}\overline{u} - \overline{v} + 2\overline{w}$

$d(\overline{u}, \overline{w})$

$\frac{1}{\|w\|} w =$ vektor normal/vektor satuan

$\|u\| + \|v\|$

$\|\overline{u} + \overline{v}\|$

$\|\overline{u} + \overline{v}\|^2 \le \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2$ Pertidaksamaan Cauchy

$\frac{1}{\|w\|} w$

Ruang Vektor

- Vektor – vektor yang dikumpulkan dalam suatu himpunan dan punya sifat-sifat yang sama -> ruang vektor.
- Apa sifat-sifat tersebut?
- Salah satu kegunaan pengetahuan tentang RV dan subruang akan membantu kita untuk mengenali bentuk dan karakteristik dari solusi SPL yang dicari.
- Berikut ini diberikan definisi dari ruang vektor dan subruang.

Aksioma Ruang Vektor

Misalkan *V* suatu **himpunan** tak kosong dimana operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan, jika untuk setiap $\bar{u},\ \bar{v}, \bar{w}$ anggota *V* dan α,β adalah skalar berlaku:

$$\bar{u}, \bar{v} \in V \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in V$$

$$\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$$

$$\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$$

$$\exists \bar{0} \in V \ni \bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}, \forall \bar{u} \in V$$

$$\forall \bar{u} \in V, \exists -\bar{u} \in V \ni \bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$$

α skalar, $\bar{u} \in V \Rightarrow \alpha \bar{u} \in V$

$$\alpha(\beta \bar{u}) = (\alpha\beta)\bar{u}$$

$$\alpha(\bar{u} + \bar{v}) = \alpha \bar{u} + \alpha \bar{v}$$

$$(\alpha + \beta)\bar{u} = \alpha \bar{u} + \beta \bar{u}$$

$$1\bar{u} = \bar{u}$$

Maka *V* disebut **ruang vektor** dan anggota dalam *V* disebut **vektor**.

Contoh Ruang Vektor

1. Misalkan $V = M_{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in R \right\}$

Didefinisikan aturan perkalian skalar dan aturan penjumlahan

$\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$

Dapat ditunjukkan bahwa $M_{2\times 2}$

adalah ruang vektor matriks yang sering disebut dengan ruang matriks.

Contoh Ruang Vektor

2. Misalkan $V = P_2 = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \middle| a_0, a_1, a_2 \in R \right\}$

didefinisikan aturan perkalian skalar dan aturan penjumlahan

$$\alpha(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

P_2 adalah Ruang Polinom orde *2*

3. Ruang Vektor yang dimunculkan diawal yaitu R^2 dan R^3 adalah contoh dari Ruang Vektor Euclidean. Secara umum ruang vektor Euclidean berlaku untuk ruang vektor berdimensi *n* (R^n)

Latihan

- Periksalah himpunan berikut adalah ruang vektor atau tidak

1. Himpunan K = semua pasangan (x,y,z), x,y,z anggota bilangan real dengan operasi

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$\alpha(x_1, y_1, z_1) = (0,0,0), \quad \alpha \text{ adalah skalar}$$

2. Himpunan A= semua matriks 2x2 berbentuk

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Dengan aturan penjumlahan matriks dan perkalian skalar pada matriks

Subruang

Jika diberikan suatu ruang vektor *V*, maka kita dapat membentuk ruang vektor lain *S* yang merupakan himpunan bagian dari *V* dan menggunakan operasi-operasi pada *V*.

Jika *S* adalah himpunan bagian tidak kosong dari suatu ruang vektor *V* dan *S* memenuhi syarat-syarat berikut ini maka berlaku :

$\alpha \bar{x} \in S$ jika $x \in S$ dan α untuk sembarang skalar

$x + y \in S$ jika $x \in S,\ y \in S$

maka *S* disebut **subruang** dari *V*.

Tunjukkan himpunan bagian ini adalah subruang

1. Misalkan *S* = $\left\{\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, x \in R \right\}$ Tunjukkan *S* adalah subruang dari R^2.

2. Diketahui *K* = $\left\{\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, x \geq 0 \right\}$

Periksalah apakah *K* adalah subruang dari R^2.

Membangun, Bebas Linear dan Basis

Kombinasi Linear

Definisi 3.3

Suatu vektor $\overline{w}$ disebut suatu **kombinasi linear** dari vektor-vektor $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_r}$ jika bisa dinyatakan dalam bentuk :

$$\overline{w} = \alpha_1 \overline{v_1} + \alpha_2 \overline{v_2} + \ldots + \alpha_n \overline{v_n}$$

Dengan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ adalah skalar.

Contoh

Diketahui $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan $\bar{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ dalam R^3.

Periksalah apakah $\bar{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ dan $\bar{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah kombinasi linear dari vektor $\bar{u}$ dan $\bar{v}$.

Jika $\bar{w}$ kombinasi linear dari $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ maka $\bar{w}$ dapat dituliskan menjadi $\bar{w} = \alpha_1 \bar{u} + \alpha_2 \bar{v}$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & -4 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & 8 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

α_1 dan α_2 punya solusi maka dikatakan $\bar{w}$ adalah kombinasi linear dari vektor $\bar{u}$ dan $\bar{v}$

Tunjukkan bahwa vektor $\bar{a}$ bukan kombinasi dari vektor $\bar{u}$ dan $\bar{v}$

Membangun

Diketahui *V* adalah ruang vektor dan $S = \{\overline{s_1}, \overline{s_2}, \dots, \overline{s_n}\}$ dimana $\overline{s_1}, \overline{s_2}, \dots, \overline{s_n} \in V$

S dikatakan **membangun (merentang)** *V* jika $\forall \bar{v} \in V$, $\bar{v}$ merupakan kombinasi linear dari *S*, yaitu :

$$\bar{v} = \alpha_1 \overline{s_1} + \alpha_2 \overline{s_2} + \dots + \alpha_n \overline{s_n} \qquad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \ skalar$$

S disebut **ruang rentang** dan $\overline{s_1}, \overline{s_2}, \dots, \overline{s_n}$ disebut **rentang** dari *V*.

Contoh:

Apakah $\overline{u} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \overline{v} = \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}, \overline{w} = \begin{bmatrix}3\\4\\7\end{bmatrix}$ membangun di R^3?

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}3\\4\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 4\\3 & 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 4\\3 & 6 & 7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & -2\\0 & 0 & -2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0}\end{bmatrix}$$

Ruas kanan tidak nol jadi tidak punya solusi

Karena ada baris yang 0 maka pastilah ada vektor di R^3yang bukan merupakan kombinasi linear dari $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$. Jadi $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ tidak membangun di R^3.

Latihan

Diketahui $\overline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\overline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\overline{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Apakah $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ membangun di R^2?

Bebas Linear

Definisi

Misalkan S = $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor tak kosong, vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_r$ disebut **bebas linear** jika untuk persamaan vektor

$$\alpha_1 \overline{v_1} + \alpha_2 \overline{v_2} + \ldots + \alpha_r \overline{v_r} = 0$$

mempunyai satu-satunya penyelesaian yaitu

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \ldots,\ \alpha_r = 0$$

Himpunan vektor yang tidak memenuhi sifat bebas linear disebut bergantung linear

Contoh :

- Apakah $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ saling bebas linear di R^2?

$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ maka $\alpha_1+\alpha_2=0$ dan $\alpha_1+2\alpha_2=0$

sehingga diperoleh $\alpha_1=\alpha_2=0$

- Apakah dua vektor $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-3\end{bmatrix}$ saling bebas linear di R^2?

$\alpha_1\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix}4\alpha_1-4\alpha_2=0\\3\alpha_1-3\alpha_2=0\end{matrix}$ maka $\alpha_2=t$ dan

$\alpha_1=t$ sehingga kedua vektor bergantung linear

Latihan

Periksalah apakah vektor-vektor berikut ini bebas linear atau bergantung linear

a. $\overline{u} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \overline{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

b. $\overline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \overline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \overline{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Basis

Definisi 3.7

Misalkan *V* ruang vektor dan $S = \{\overline{s_1}, \overline{s_2}, \ldots, \overline{s_n}\}$. *S* disebut **basis** dari *V* jika memenuhi dua syarat, yaitu :

S bebas linear

S membangun *V*

Basis terbagi 2

Basis standar

$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ adalah basis dari M_{22}

$S = \{1, x, x^2, x^3\}$ adalah basis dari P^3

$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ adalah basis dari R^3

Basis yang tidak standar

Ruang vektor berdimensi terhingga

Definisi

Suatu ruang vektor tak nol *V* disebut **berdimensi terhingga** jika *V* berisi suatu himpunan vektor terhingga $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\}$ yang membentuk suatu basis. Jika tidak ada himpunan seperti itu maka *V* disebut berdimensi tak hingga. Ruang vektor nol berdimensi hingga.

Sifat-sifat basis

Teorema

Jika *V* adalah suatu ruang vektor berdimensi terhingga dan $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\}$ adalah sembarang basis, maka:

Setiap himpunan yang>*n* vektor adalah tak bebas linear.

Tidak ada himpunan dengan vektor yang <*n* yang membangun *V*.

Semua basis untuk suatu ruang vektor berdimensi terhingga mempunyai jumlah vektor yang sama.

Dimensi

Definisi

Dimensi suatu ruang vektor berdimensi terhingga V, yang dinyatakan dengan dim(V), didefinisikan sebagai jumlah vektor dalam suatu basis untuk V.

Teorema

Jika V adalah suatu ruang vektor berdimensi n , dan jika S adalah suatu himpunan dalam V dengan tepat n vektor, maka S adalah suatu basis untuk V jika S merentang V atau S bebas linear.

Contoh

Misalkan $\overline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \overline{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \overline{v_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Tunjukkan bahwa

himpunan $S=\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$ adalah suatu basis dari R^3.

Latihan

Tunjukkan bahwa $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ adalah basis R^3

Periksa apakah $\left\{x^2, x^2 - x - 1, x + 1\right\}$ adalah basis bagi P_2

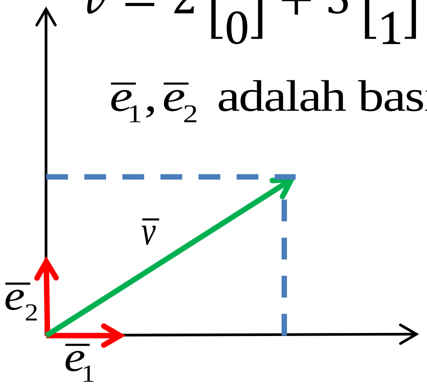
Vektor koordinat, matriks transisi, rank dan nullitas

Ilustrasi konsep vektor basis yang membangun dan bebas linear

R2

$$\bar{v} = 2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

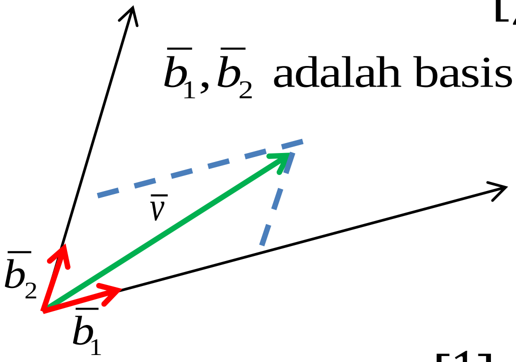
$\bar{e}_1, \bar{e}_2$ adalah basis bagi R^2



$$\bar{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \bar{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\bar{v} = 4\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$\bar{b}_1, \bar{b}_2$ adalah basis bagi R^2



$$\bar{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad \bar{b}_2 = \begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Vektor Koordinat

Definisi 3.10

- Misalkan *V* adalah suatu ruang vektor dengan basis *B* = $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_n}\}$ dan $\bar{v} \in V$.Vektor koordinat $\bar{v}$ terhadap basis *B* adalah :

$$[\bar{v}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Dimana $\alpha_1 \overline{b_1} + \alpha_2 \overline{b_2} + \ldots + \alpha_n \overline{b_n} = \bar{v}$

Contoh

- Tentukan vektor koordinat dari $\overline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ terhadap basis $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

- Koordinat $\overline{v}$ terhadap *B* adalah vektor $[\overline{v}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ yang memenuhi

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Jadi $[\overline{v}]_B = \begin{bmatrix} -\frac{9}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Contoh (lanjutan)

- Perhatikan bahwa urutan vektor di basis menentukan vektor koordinat.
- Jika

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Maka vektor koordinat *v* terhadap *B*′ adalah $[\overline{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{-9}{4} \end{bmatrix}$

Ruang Baris,Kolom dan Null

- **Definisi 3.12**

  Jika *A* adalah matriks *mxn* maka

1. Subruang dari R^n yang direntang oleh vektor-vektor baris dari *A* disebut *ruang baris* dari *A*.
2. Subruang dari R^m yang direntang oleh vektor-vektor kolom dari *A* disebut *ruang kolom* dari *A*.
3. Ruang penyelesaian dari sistem persamaan homogen R^n adalah subruang dari $A\overline{x} = 0$ disebut ruang null/ruang kosong dari *A* dinotasikan *N*(*A*) .

Rank dan Nullitas

- **Definisi 3.13**
- *Rank* dari suatu matriks *A* adalah dimensi dari ruang baris/ruang kolom dari *A*. *Nulitas* adalah dimensi dari ruang nol.
- Pada umumnya jumlah rank dan nulitas akan selalu sama dengan banyak kolom dari matriks.

Contoh

- Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Tentukan ruang baris, ruang kolom

Ruang baris adalah $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

Ruang kolom adalah $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

Contoh

- Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Tentukan basis untuk ruang null A ($N(A)$)

- Menggunakan operasi baris elementer diperoleh matriks U yang merupakan matriks bentuk eselon baris tereduksi dari A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh (lanjutan)

Karena persamaan $A\overline{x} = 0$ ekivalen dengan $U\overline{x} = 0$ maka $\overline{x} \in N(A)$ jika dan hanya jika

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \quad\quad 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{sehingga} \qquad \begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - 3x_4 \\ x_3 &= -2x_4 \end{aligned}$$

Misalkan $x_2 = \alpha$ dan $x_4 = \beta$ maka vektor-vektor $\overline{x} \in N(A)$ berbentuk

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha - 3\beta \\ \alpha \\ -2\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk $N(A)$ adalah $[-2,1,0,0]^T$ dan $[-3,0,-2,1]^T$

Nullitas dari matriks A adalah 2

Contoh

- Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Dari soal yang sama tentukan rank dari A

Ubah jadi A^T lakukan OBE dan tentukan basis-basisnya dari A^T. Jumlah basis tersebut adalah rank. Periksa bahwa jumlah rank + nulitas = 4 untuk kasus ini