

TURUNAN

JUMLAH PERTEMUAN : 4 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

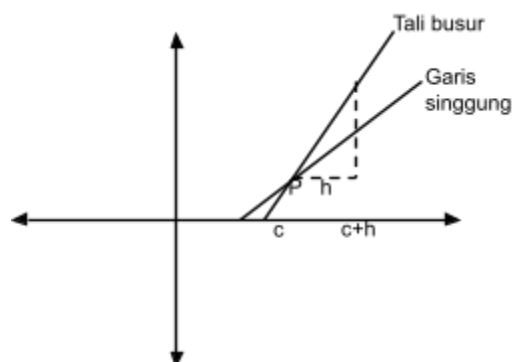
Memahami konsep dasar turunan fungsi dan menggunakan turunan fungsi pada permasalahan yang ada

Materi :

5.1 Pendahuluan

Ide awal adanya turunan adalah karena adanya permasalahan garis singgung di titik

$P(c, f(c))$



\overline{PQ} adalah tali busur untuk kurva $f(x)$, dengan kemiringan $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

Maka kemiringan garis singgung di titik P:



$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Contoh:

Jika $f(x) = x^2 - 1$, tentukan kemiringan garis di titik:

- a. $(1, 0)$
- b. $(2, 3)$
- c. $(3, 8)$

Jawab:

Untuk menyelesaikan permasalahan diatas karena hanya yang berubah hanya titiknya saja maka dapat dikerjakan secara langsung, dengan cara mengerjakan secara umum untuk di titik $(c, f(c))$:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} =$$

Karena $f(x) = x^2 - 1$ maka $f(c) = c^2 - 1$ dan

$$f(c + h) = (c + h)^2 - 1 = c^2 + 2ch + h^2 - 1$$

Maka

$$\frac{(c^2+2ch+h^2-1)-(c^2-1)}{h} = \frac{c^2+2ch+h^2-1-c^2+1}{h} = \frac{2ch+h^2}{h} = \frac{h(2c+h)}{h} = (2c + h) = 2c$$



Maka kemiringan garis singgung kurva $f(x) = x^2 - 1$ adalah $2c$, jadi

- kemiringan garis singgung fungsi $f(x) = x^2 - 1$ di titik $(c, f(c))$ adalah $2c$, maka kemiringan garis singgung di titik $(1, 0)$ adalah $2(1) = 2$
- kemiringan garis singgung fungsi $f(x) = x^2 - 1$ di titik $(c, f(c))$ adalah $2c$, maka kemiringan garis singgung di titik $(2, 3)$ adalah $2(2) = 4$
- kemiringan garis singgung fungsi $f(x) = x^2 - 1$ di titik $(c, f(c))$ adalah $2c$, maka kemiringan garis singgung di titik $(3, 8)$ adalah $2(3) = 6$

Dapat dilihat bahwa kemiringan garis singgung fungsi $f(x) = x^2 - 1$ di titik $(c, f(c))$ adalah $2c$, maka kemiringan garis singgung di titik $(x, f(x))$ adalah $2x$. Ini sama seperti ketika kita mencari turunan fungsi $f(x) = x^2 - 1$ yaitu $f'(x) = 2x$

5.2 Definisi

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca “ f aksen”) yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limitnya ini ada.

5.3 Notasi dari turunan



1. Notasi aksen, $f'(x)$
2. Notasi d, $D_x y$
3. Notasi Leibniz, $\frac{dy}{dx}$

Contoh:

Andaikan $f(x) = x^2 - x$. Cari $f'(3)$.

Jawab:

$$f'(3) = \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{[(3+h)^2-(3+h)]-[3^2-3]}{h} = \frac{5h+h^2}{h} = 5 + h = 5$$

Contoh:

Jika $f(x) = x^3 + 2$, cari $D(f(x))$!

Jawab:

$$D(x^3 + 2) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{[(x+h)^3+2]-[x^3+2]}{h} = \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$$

Contoh:

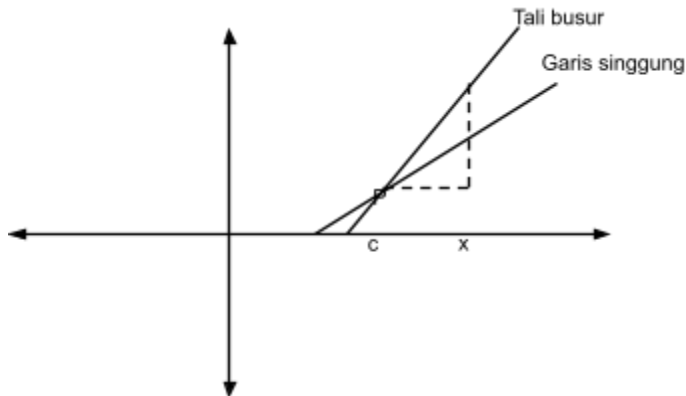


Jika $f(x) = \frac{2}{x+2}$, cari $\frac{df}{dx}$!

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{2}{(x+h)+2} - \frac{2}{x+2}}{h} = \frac{\frac{2(x+2)-2(x+h+2)}{(x+h+2)(x+2)}}{h} = \frac{\frac{2x+4-2x-2h-4}{(x+h+2)(x+2)}}{h} = \frac{-2h}{(x+h+2)(x+2)} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-2}{(x+h+2)(x+2)} = -\frac{2}{(x+2)^2}$$

5.4 Bentuk yang setara untuk turunan



Kemiringan garis yang melalui $(c, f(c))$ dan $(x, f(x))$ adalah

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Maka kemiringan garis singgung di titik $(c, f(c))$:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Seperti yang dikatakan diatas bahwa ketika mencari kemiringan garis singgung dari suatu fungsi sama saja seperti kita mencari turunan fungsi tersebut titik yang tersinggung oleh garis singgung maka



$$f'(c) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Maka kemiringan garis singgung di titik $(x, f(x))$:

$$f'(x) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

Contoh:

Andaikan $f(x) = x^2 - x$. Cari $f'(3)$.

Jawab:

$$f'(3) = \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{[x^2-x]-[3^2-3]}{x-3} = \frac{x^2-x-6}{x-3} = (x+2) = 5$$

Jika $f(x) = \frac{2}{x+2}$, cari $\frac{df}{dx}$!

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \frac{\frac{2}{t+2} - \frac{2}{x+2}}{t-x} = \frac{\frac{2(x+2)-2(t+2)}{(t+2)(x+2)}}{t-x} = \frac{\frac{2x+4-2t-4}{(t+2)(x+2)}}{t-x} = \frac{\frac{2(x-t)}{(t+2)(x+2)}}{t-x} = \frac{-2(t-x)}{(t+2)(x+2)} \cdot \frac{1}{t-x} = \frac{-2}{(t+2)(x+2)} = -\frac{2}{(t+2)(x+2)}$$

5.5 Keterdiferensialan menunjukkan kekontinuan

Jika sebuah kurva mempunyai sebuah garis singgung di sebuah titik, maka kurva itu tidak dapat melompat atau sangat berayun di titik tersebut. Perumusan yang persis dari kenyataan ini merupakan sebuah teorema penting.



Teorema

Jika $f'(c)$ ada, maka f kontinu di c .

Kebalikan dari teorema ini tidak berlaku.

Contoh:

Jika $f(x) = x^2$, tentukan apakah fungsi f kontinu di $x = 0$?

Jawab:

Tanpa harus membuktikan

1. $f(c)$ ada
2. $f(x)$ ada
3. $f(x) = f(c)$

Berdasarkan teorema diatas maka:

$$f'(0) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2-0}{x} = \frac{x^2}{x} = x = 0$$

Karena fungsi $f(x) = x^2$ ada turunannya di $x = 0$, maka dapat dikatakan fungsi $f(x) = x^2$ kontinu di $x = 0$

Contoh (penyangkal teorema):

Jika $f(x) = |x|$, tentukan $f'(0)$

Jawab:

$$f'(0) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|-|0|}{x} = \frac{|x|}{x}$$



Limit ini tidak ada karena

$$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

Sedangkan

$$\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

Karena limit kanan dan limit kirinya tidak sama.

5.6 Aturan Pencarian Turunan

5.6.1 Fungsi konstanta

Fungsi konstanta $f(x) = k$ mempunyai grafik berupa garis horisontal, sehingga kemiringannya nol dimana-mana.

Teorema (Aturan Fungsi Konstanta)

Jika $f(x) = k$ dengan k suatu konstanta maka untuk sebarang x , $f'(x) = 0$, yakni

$$D(k) = 0$$

Bukti

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0 = 0$$

5.6.2 Fungsi identitas

Teorema (Aturan Fungsi Identitas)

Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$, yakni

$$D(x) = 1$$



Bukti

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

5.6.3 Fungsi polinom

Teorema (Aturan Pangkat)

Jika $f(x) = x^n$, dengan $n \in B^+$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$, yakni

$$D(x^n) = nx^{n-1}$$

Bukti

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} = \frac{h\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right)}{h}$$

Contoh:

Jika $f(x) = x^3$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$f'(x) = D(x^3) = 3x^2$$

5.6.4 D adalah sebuah operator linier

Teorema (Aturan Kelipatan Konstanta)

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka

$(kf)'(x) = k \cdot Df(x)$, yakni

$$D[k \cdot f(x)] = kDf(x)$$



Bukti

Andaikan $F(x) = kf(x)$. Maka

$$F'(x) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} = k \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k \cdot f'(x)$$

Contoh:

Jika $f(x) = 10x^{10}$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$D[10x^{10}] = 10D(x^{10}) = 10(10x^9) = 100x^9$$

Teorema (Aturan Jumlah)

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, yakni

$$D[f(x) + g(x)] = Df(x) + Dg(x)$$

Contoh:

Jika $f(x) = x^2 + 4x + 4$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$D[x^2 + 4x + 4] = D(x^2) + 4D(x) + D(4) = 2x + 4$$

Teorema (Aturan Selisih)

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$, yakni

$$D[f(x) - g(x)] = Df(x) - Dg(x)$$



Contoh:

Jika $f(x) = x^2 - 4x$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$D[x^2 - 4x] = D(x^2) - 4D(x) = 2x - 4$$

Teorema (Hasil kali)

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka

$(f \cdot g)'(x) = g'(x)f(x) + g(x)f'(x)$, yakni

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x)$$

Contoh:

Jika $f(x) = 3x(x^2 + 2)$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$D[3x(x^2 + 2)] = 3xD(x^2 + 2) + (x^2 + 2)D(3x) = 3x(2x) + (x^2 + 2)3 = 6x^2 + 3(x^2 + 2)$$

Teorema (Aturan Hasilbagi)

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, yakni

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{g^2(x)}$$

Contoh:



Jika $f(x) = \frac{1}{3x^2+1}$, cari $f'(x)$

Jawab:

$$D\left(\frac{1}{3x^2+1}\right) = \frac{(3x^2+1)D(1) - 1D(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2} = \frac{(3x^2+1)0 - (6x)}{(3x^2+1)^2} = \frac{-6x}{(3x^2+1)^2}$$