No.

Date :

Catatan - Latihan Soal Materi Ke.1 - MSD 1

Nama : Hanif Ahmad Syaqi

NIM : 1012161

Kelas : IF - 4

Kelompok 1

1. Contoh Soal turunan Cosinus dan Sinus

Jika $f(x) = \tan x$, tentukan $f'(x)$

Jawab :

Karena $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Misalkan $g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x$ dan

$h(x) = \cos x \Rightarrow h'(x) = -\sin x$

maka sesuai aturan hasil bagi

$$f'(x) = \frac{g'(x)\,h(x) - h'(x)\,g(x)}{(h(x))^2} =$$

$$\frac{(\cos x)(\cos x) - (-\sin x)(\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

2. Aturan rantai

Jika $y = (2x - 9x^2)^{15}$, cari $D_x y$

misal $v = 2x - 9x^2$ dan $y = v^{15}$, maka ~~$D_x y = 2$~~

$D_x v = 2 - 18x$ dan $D_v y = 15v^{14}$

Jadi $D_x y = D_v y \cdot D_x v = (15v^{14})(2 - 18x) = 15(2x - 9x^2)^{14}(2 - 18x)$

3. Aturan rantai berurutan

A. Cari $y = \sin^3(4x)$

B. Cari $y = \sin^{15}(4x)$

A. $v = 4x$ maka $D_x v = 4$

$y = \sin v$ maka $D_v y = \cos v$ dan $4 = v^2$ maka,

$D_v y = 3v^2$

$D_x y = D_v y \cdot D_x v = (3v^3)(\cos v)(4)$

jangan lupa untuk mengganti lagi semua yang sebelumnya yaitu $v = 4x$, $v = \sin 4x$ dan $4 = v^3$ maka di peroleh $12(\cos 4x)(\sin 4x)^2$

B. $v = 4x$ maka $D_x v = 4$

$v = \sin v$ maka $D_v v = \cos v$ dan

$y = v^5$ maka $D_v y = 5v^4$

$D_x y = D_u v \cdot D_x u$

Jadi kita untuk menyelesaikan permisalan yang sebelumnya $u = ax$, $v = \sin u$ dan $y = v^2$ maka penyelesaian

$D_x y = (3v^2)(\cos u)(a)$

$D_x y = (3(\sin(ax))^2)(\cos ax)(a)$

$D_x y = 12 \cos 4x (\sin 4x)^2$

4. Contoh untuk lebih jelas cari $\frac{dy}{dx}$, jika $y = x^3 - 3x^2 + 7x$

Penyelesaian

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 7x) = \frac{d(x^3)}{dx} - 3\frac{d(x^2)}{dx} + 7\frac{d(x)}{dx}$$

$$= 3x^2 - 3(2x) + 7(1)$$

$$= 3x^2 - 6x + 7$$

5. Aturan rantai dengan notasi leibniz

Andaikan bahwa $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ dalam notasi leibniz, aturan rantai

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh : Cari $\frac{dy}{dx}$ jika $y = \sqrt{3ux^2}$

misal $u = x^2$, $z = 3uv$ dan $v = z^{\frac{1}{2}}$

maka $\frac{dv}{dx} = 2x$ $\frac{dv}{dx} = \cos v$ dan $\frac{dy}{dx} = 3z\,3z = \frac{1}{3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dv}\frac{dv}{dx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)(\cos v)2x) =$

$x(\cos x^2)\left(\frac{1}{3\sin v}\right) = \frac{y\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$

6. Contoh Turunan tingkat tinggi

jika $y = x^{10} - x^5$, Cari $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^3v}{dx^3} \cdot \frac{d^{12}y}{dx^{12}}$

Jawab : $\frac{dy}{dx} = 10x^9 - 3x^9$

$= 90x^8 - 20x^3$

$= \frac{d^{12}y}{dx^{12}} = 0$

a

Kelompok 2

2. Contoh Soal turunan Pertama dan kemonotonan

Jika $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ cari dimana f naik dan dimana turun

jawab : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$

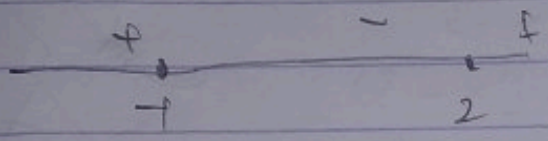
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$= 6(x^2 - x - 2)$

$= x = -1 \; x = 2$

$R'(x) > 0$ = naik

$f'(x) < 0$ => turun



naik : $(-\infty, -1] [2, \infty)$

turun : $[-1, 2]$

$x = -2$

$f'(-2) = 6x^2 - 6x - 12$

$= 6(-2)^2 - 6(-2) - 12$

$= 24 + 12 - 12$

$= 24 \; (+)$

$x = 3$

$f'(3) = 6x^2 - 6x - 12$

$= 6(3)^2 - 6(3) - 12$

$= 54 - 18 - 12$

$= 24 \; (+)$

naik : $(-\infty, -1] [2, \infty)$

turun : $[-1, 2]$

$x = 0$

$f'(0) = 6x^2 - 6x - 12$

$= 6(0)^2 - 6(0) - 12$

$= 0 - 0 - 12$

$= -12$ (-)

2. Contoh Soal turunan kedua dan kecekungan

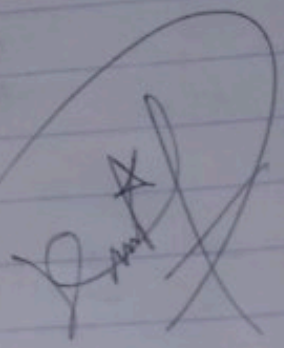
Diketahui $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ naik, turun, cekung ke atas dan cekung ke bawah

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

$f'(x) = x^2 - 2x - 3$

$= (x+1)(x-3)$

$x = -1 \quad x = 3$



$f'(x) > 0 \Rightarrow$ naik

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ turun

(+) (-) (+)

naik : $(-\infty, -1], [3, \infty)$

turun : $[-1, 3]$

$x = -2$

$f'(-2) = x^2 - 2x - 3$

$= (-2) - 2(-2) - 3$

$= 4 + 4 - 3 = 5$ (+)

x = 0

$f'(0) = x^2 - 2x - 3$

$= 0^2 - 2(0) - 3$

$= 0 - 0 - 3$

$= -3$ (-)

x = a

$f'(a) = x^2 - 2x - 3$

$= a^2 - 2(a) - 3$

$= 16 - 8 - 3$

$= 5$ (a)

naik = $(-\infty, -1], [3, \infty)$

turun = $(-1, 3)$

Cekung keatas dan Cekung kebawah

$f'(x) = x^2 - 2x - 3$

$f''(x) = 2x - 2$

$= 2(x - 1)$

$2x = 1$

x = 0

$f''(0) = 2x - 2$

$= 2(0) - 2$

$= 0 - 2$

$= -2$ (-)

x = 2

$f''(2) = 2x - 2$

$= 2(2) - 2$

$= 4 - 2$

$= 2$ (+)

$f''(x) > 0$: Cekung ke atas — Cekung ke atas : $(1, \infty)$

$f''(x) < 0$: Cekung kebawah — Cekung ke bawah : $(-\infty, 1)$

3. Penyimpangan grafik cartesius

Kesimetrian

Sketsa grafik $f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{30}$

Langkah

1. menentukan daerah asal
2. titik potong dengan sumbu koordinat
3. fungsi genap dan ganjil
4. kesimetrian dan asimtot
5. kecekungan dan titik belok (jika ada)

No:

Date :

Jawab

1. Karena $f(-x) = -f(x)$, maka $f(x)$ adalah fungsi ganjil, maka grafik simetris terhadap titik asal

2. mencari titik potong $x = \pm\sqrt{\frac{20}{3}} = 2.6$

3. memeriksa genap dan ganjil

$f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{32}$

$f(-x) = \frac{-(3x^5 - 20x^3)}{32}$

$f(-x) = -f(x)$ → ganjil

4. menentukan nilai stasioner

$f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{32}$

$f'(x) = \frac{15x^4 - 60x^3}{32} = \frac{15x^2 - (x-2)(x+2)}{32}$

5. kecekungan

$f'(x) = \frac{15x^4 - 60x^2}{30}$

$f''(x) = 60x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

No.

Date :

Q. Contoh Soal

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Selang kemonotonan & Ekstrim fungsinya

$u = x^2 - 1$

$u' = 2x$

$v = x - 1 = 1$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{v \cdot u' - v' \cdot u}{v^2}$$

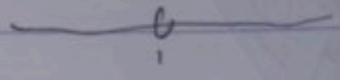
$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1(x^2-1)}{(x-1)^2} > 0$$

$$= 2x^2 - 2x - x^2 + 1 > 0$$

$$= x^2 - 2x + 1$$

$$(x-1)(x-1)$$

$x = 1$ dan $x = 1$



$(0-1)(1-1) = -(-1) = 1$

$(-1-1)(-1-1) = (-2)(-2) = 4$

Jadi selang kecekungan dan titik belok

$x^2 - 2x + 1 > 0$

$2x - 2 > 0$

$2x > 2$

terdefinisi $x > 1$

Ekstrim fungsi

titik stasioner

$f'(x) = 0$

$(x-1)(x-1) = 0$

$x = 1$

$$f(1) = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$ tak terdefinisi

f cekung keatas pada $(1, \infty)$

f cekung kebawah pada $(-\infty, 1)$

titik belok

$f''(x) = 0$

$2x - 2 = 0$

$2x = 2$

$x = 1$

$f(1) = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} = \infty$

$(1, \infty)$

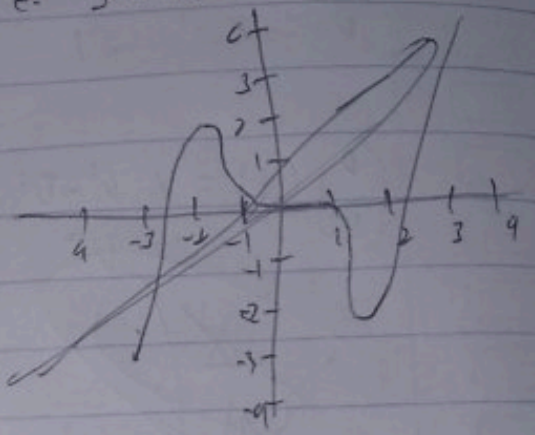
c. Asimtot

Asimtot datar : tidak ada

Asimtot tegak : tidak ada

Asimtot miring : $y = x + 1$

d. gerafik



Kelompok 3

1. Contoh soal anti turunan dari fungsi $f(x) = 3x^2$

Penyelesaian

$F''(x) = 3x^2$ maka solusi anti turunan $f(x) = x^3$ tetapi solusinya $F(x) = x^3 + C$

2. Sifat-sifat integral tak tentu

a. $\int dx = x + C$

Contoh $\int 4\,dx = 4x + C$

b. Selang kecekungan dan titik belok

$x^2 - 2x + 1 > 0 \Rightarrow$ cekung ke atas

$2x - 2 > 0$

$2x > 2$ Jawaban terdiri

$x > 1$

f cekung ke atas pada $(1, \infty)$

f cekung kebawah pada $(-\infty, 1)$

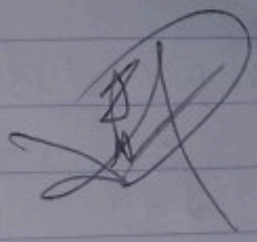
titik balok

$f''(x) \geq 0$

$2x - 2 = 0$ $(1, \infty)$

$2x = 2$

$x = 1$



2. $\int 2 dx = 2x + C$

Contoh $\int f x \, dx = a x + C$

b. $\int 2 f(x) dx = 2 \int f(x) dx$

Contoh $\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx$

$= 3 \frac{1}{3} x^3 + C$

$= x^3 + C$

c. $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Contoh $\int 4x^3 + 2x^{\frac{1}{3}} dx = \int 4x^3 dx + \int 2x^{\frac{1}{3}} dx$

$= \frac{4}{4} x^{4+2} + \frac{2}{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}+1} + C$

$= x^{4+2} + \frac{2}{\frac{1}{3}} x^{\frac{4}{3}} + C$

3. hitung $\int e^{2x}\,dx$? konstanta

Penyelesaian

misal $u = 2x \rightarrow du = 2dx \rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

maka

$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x}\,du = \frac{1}{2}e^{x} + C$

$= \frac{1}{2}e^{2x} + C$

4. $\int (2x^3 + 3x^2 + 7)\,dx$

$\frac{2}{3+1}x^{3+1} + \frac{3}{2+1}x^{2+1} + 7x + C$, $C \in$

$\frac{2}{6}x^6 + \frac{2}{3}x^3 + 7x + C$, $C \in$

$\frac{1}{3}x^6 + x^3 + 7x + C$ $C \in R$

5. $\int (2x+1)(x-5)\,dx$

Jawab

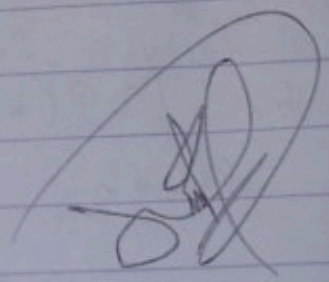
$\int (2x+1)(x-5)\,dx$

$2x^2 - 10x + x - 5$

$2x^2 - 9x - 5$

$\frac{2}{2+1}x^{2+1} - \frac{9}{1+1}x^{1+1} - 5x + C$

$\frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 5x + C$



Kelompok 4

1. Pengintegralan dengan substitusi

2. $\int \sin x \cos^2 x \, dx$

Cara Penyelesaian

$dv = -\sin x \, dx$

$-dv = \sin x \, dx$

b. $\int \sin^3 x \, dx$

$\int \sin^2 x \sin x \, dx$

$\int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$

$\int [\sin x - \sin x (\cos^2 x)] \, dx$

$= -\cos x - (-\frac{1}{3} \cos^3 x) + C$

$= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$

c. $\int 2x (x^2+1)^3 \, dx$

$= \int v^3 \, dv$

$= \frac{\int v^{3+1}}{3+1} + C$

$= \frac{\int v^4}{4} + C$

$= \frac{(x^2+1)}{4}$

$[v = x^2 + 1]$

2. Pengintegralan fungsi Trigonometri

2. $\int (8 \sin x + 2 \cos x) \, dx$

$\int (8 \sin x + 2 \cos x) \, dx$

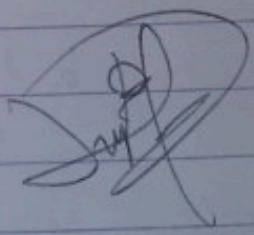
$= -8 \cos x + 2 \sin x + C$

b. $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

$\int \sin^3 x \cos x \, \frac{dx}{3+1}$

$= \frac{1}{3+1} \sin^{3+1} x + C$

$= \frac{1}{4} \sin^4 x + C$



3. Substitusi yang mengubahkan
a. tentukan integralan berikut ini
$\int x^2 \sqrt{10-x^3}\, dx$

jawab
misalkan $v = 10-x^3$ maka $dv = -3x^2 dx$

Sehingga
$= -\frac{1}{3} \int \sqrt{v}\, dv$

$= -\frac{1}{3} \int v^{\frac{1}{2}} dv$

$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{9} (10-x^3)\sqrt{10-x^3} + c$

$= \frac{2}{9} \sqrt{10-x^3} + 2x^3 \sqrt{10-x^3}$

b. tentukan integralan berikut ini
$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$

jawab
kita gunakan substitusi
$x = a \sin t \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

maka $dx = a \cos t\, dt$
$\sqrt{a^2-x^2} = a^2 \cos^2 t$

Sehingga
$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx \int a \cos t \cdot a \cos t\, dt$
$= a^2 \int \cos^2 t\, dt$
$= \frac{1}{2} a^2 (t + \sin t \cos t) + c$

No.

Date :

4 Pengintegralan parsial

Tentukan $\int x \cos x \, dx$

Jawaban : kita ubah $x \cos x \, dx$ dengan $u \, dv$ cara terbaik memisalkan $u = x$ dan $dv = \cos x \, dx$ dapat $du = dx$ dan $v = \int \cos x \, dx = \sin x$ (dapat mengabaikan konstanta pengintegralan sementara) maka dan menghasilkan pemisalan

$u = x$ $\qquad dv = \cos x \, dx$

$du = dx$ $\qquad v = \sin x$

Pengintegralan parsial menghasilkan

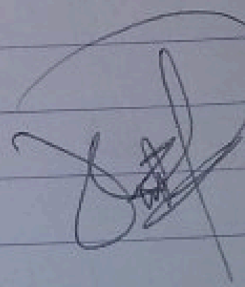
$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x + C_1$

$= x \sin x + \cos x + C$

5 Integral fungsi rasional

Perhatikan contoh soal berikut ini

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} \, dx$$



Jawab

$$\int \frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{x^2-3x+2}$$

$2x+1 = A(x-2) + B(x-1)$

$2x+1 = (A+B)x + (-2A)-B$

$A+B = 2$ dan $-2A-B = 1$

$(A+B) = 2 \times 1 \quad A+B = 2$

$-2-B = 1 \times 1 \quad -2A-B = 1$

$-A = 3$

$A = -3$

Dapatkan nilai $A = -3$ dan $B = 5$

$(2x+3)$

$A+B = 2$

$-3+B = 2$

$B = 2+3$

$B = 5^{-2}$

6. Hasilkan soal

2. hasil dari $\int x^2(2-x^3)\frac{1}{2}\,dx$

jawab

misal $v = 2-x^3$

$dv = -3x^2\,dx$ atau $x^2\,dx = \frac{1}{3}dv$

$\int (2-x^3)\frac{1}{2}x^2\,dx = \int v\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\,dv$

$\int v\frac{1}{3}\,dv = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}v^{\frac{1}{3}+1} - \frac{1}{3}+C$

$= \frac{1}{\frac{4}{3}}v^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{3}C = -\frac{2}{4}(2-x^3)^{\frac{1}{3}+C}$

b. hasil dari $\int_2^4 (-x^2+6-0)\,dx$ adalah

$= \int_2^4 -\frac{1}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 0x$

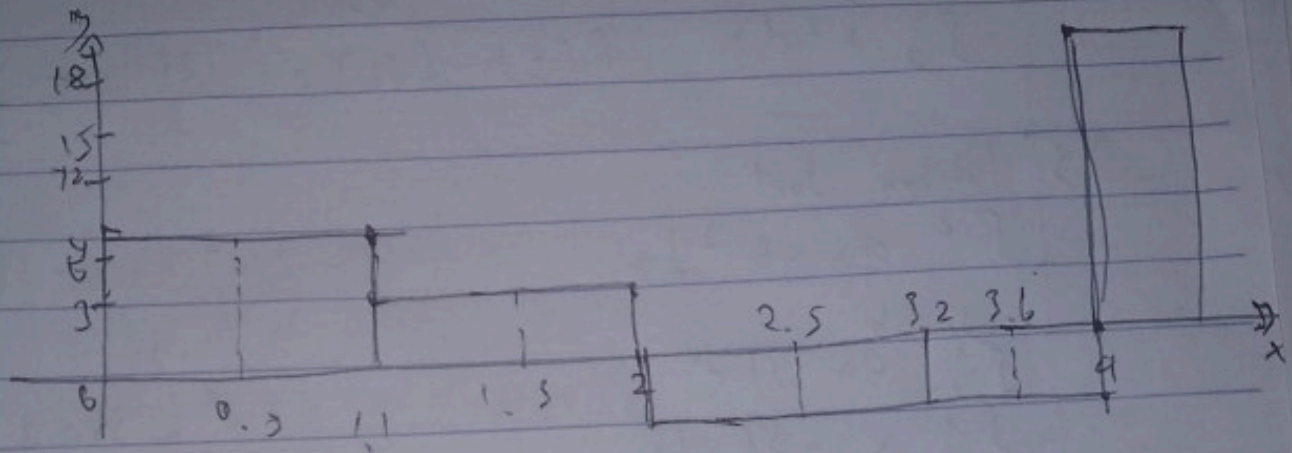
$= \left(-\frac{1}{3}4^3 + 6(4^2-8)\right) - \left(-\frac{1}{3}2^3 + 6(2^2-0)\right) = \frac{-36+20}{3} = \frac{5}{4}$

Kelompok 5

1. $f(x) = (x+1)(x-2)(x-4) = x^3 - 3x^2 + 2x + 8$

Jawab

$\bar{x_1} = 0.5$; $\bar{x_2} = 1.5$; $\bar{x_3} = 2.5$; $\bar{x_4} = 3.6$; $\bar{x_5} = 5$



$$L_1 = \sum_{i=1}^{5} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

$= f(\bar{x}_1)\Delta x_1 + f(\bar{x}_2)\Delta x_2 + f(\bar{x}_3)\Delta x_3 + f(\bar{x}_4)\Delta x_4 + f(\bar{x}_5)\Delta x_5$

$= f(0,5)(1.1-0) + f(1,5)(2-1.1) + f(2.5)(3.2-2) + f(3.6)(4-3.2) + f(5)(5-4)$

$= (7.875)(1.1) + (3.125)(0.9) + (-2.625)(1.2) + (-2.944)(0.8) + (18)(1)$

$= 25.9648$

Misalkan kita perlu menyelesaikan
$\int_2^5 x^2\,dx$
disini $f(x) = x^3$ dan kita diminta menggunakan
$f(x) = \frac{x^3}{3}$

sebagai acuan dimana sehingga
$\int_2^5 x^2\,dx = f(5) - f(2) = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = \frac{117}{3} = 39$

3. Latihan Soal
$\int_{-1}^{2} 9x - 6^2\,dx$

$\int_{-1}^{2+a+b} 9x - 36\,dx$

$\int 9x - 36\,dx$

$\int 9x\,dx + \int -36\,dx$

$\int x\,dx + \int -36\,dx$

$2x^2 + \int -36\,dx$

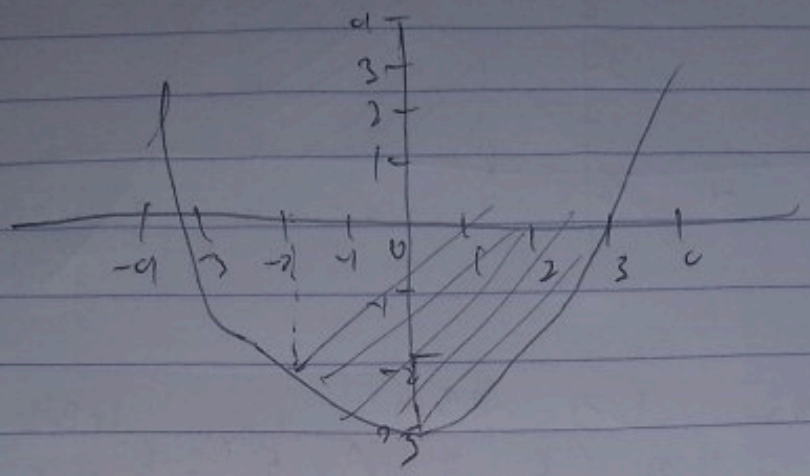
$2x^2 - 36x$

$2x2^2 - 36x2 - (2(-1)^2 - 36(-1))$

-10^2

Kelompok 6

1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = \frac{x^2}{3} - 3$ dan $x = -2$ dan $x = 3$



Rumus : $L = A = \int_a^b [h(x) - g(x)]\, dx$

$L = \int_{-2}^{3} \frac{x^2}{3} - 3\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x\right]_{-2}^{3}$

$= -\left[\left(\frac{1}{3}3\right)^3 - 9.3\right] - \left[\left(\frac{1}{3}(-2)^2 - 9(-2)\right]\right.$

$= -\left[\frac{27}{9} - 12\right] - \left[\left(\frac{-8}{9} + 6\right)\right]$

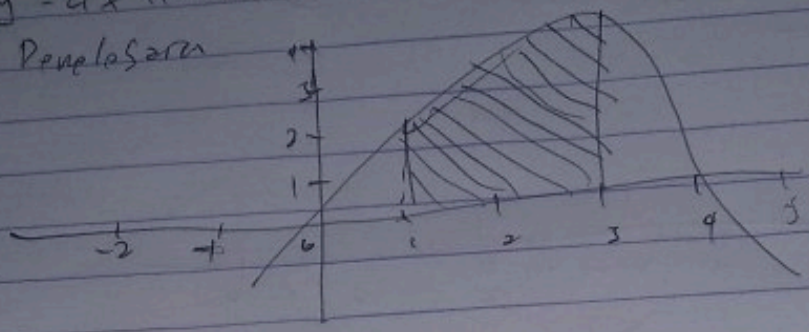
$= -\left[\frac{-9}{9}\right] - \left[\frac{61}{9}\right]$

$= -\left[\frac{-135}{9}\right]$

$= \frac{135}{9}$

2. hitunglah luas daerah yang dibatasi kurva $y = 4x - x^2$, $x = 1$, $x = 3$ dan sumbu x

Penyelesaian



menentukan luas daerah

Rumus = luas $R = A \int_a^b [h(x) - g(x)] dx$

luas daerah $= \int_1^3 f(x)\, dx$

$= \int_1^3 (4x - x^2)\, dx$

$= \left[2x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_1^3$

$= \left[2 \cdot 3^2 - \frac{1}{3} 3^3 \right] - \left[2 \cdot 1^2 - \frac{1}{3} 1^3 \right]$

$= [18 - 9] - \left[2\frac{1}{3} \right]$

$= 2\frac{1}{2}$

No.

Date :

3. Hitung lah luas dzerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 2x$ dan $y = 6 - x^2$

Jwab

Rumus : Luas R $= A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

1) menentukan titik potong kedua kurva

$y_1 = y_2$

$x^2 - 2x = 6x - x^2$

$2x^2 - 8x = 0$

$2x(x - 4) = 0$

$x = 0$ v $x = 4$

Arsiran titik potong kedua kurva $x = 0$ dan $x = 4$

4. menentukan luas daerah arsiran

dzerah arsiran yang dibatasi oleh dua kurva

$Y = x^2 - 2x$ (diarsir) dan $y = 6x - x^2$ (diblush)

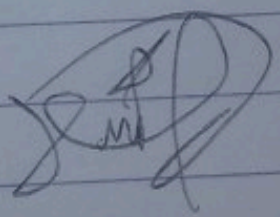
Luas arsiran $= -\int_0^4 ((x^2 - 2x) - (6x - x^2))\, dx$

$= \int_0^4 ((2x^2 - 8x))$

$= [\frac{2}{3}x^3 - 4x^2]_0^4$

$= 21\frac{1}{3}$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah $21\frac{1}{3}$ satuan luas



5. Jika kurva $y = 6x$ $1 \leq x \leq 2$ diputar terhadap sumbu x, tentukan (->) Permukaan benda putar yang terjadi.

$y = 6x$

$\frac{dy}{dx} = 6$

$L = \int_1^2 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$dx = \int_a^3 12\pi x \sqrt{37}\, dx$

$= 12\sqrt{37}\,\pi \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^2$

$= 6\sqrt{37}\,\pi x^2 \Big|_1^2$

$= 6\sqrt{37}\,\pi x^2 \Big|_1^2$

$= 6\sqrt{37}\,\pi (9 - 1)$

$= 48\sqrt{37}\,\pi$