# 树

七月算法 邹博

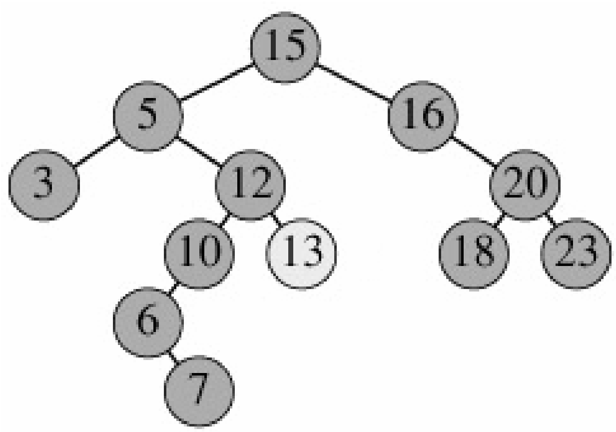
2015年4月16日

# 树——主要内容

- 二叉查找树
  - 增删改查
  - 其他结构的基础：如平衡二叉树
- 前序中序后序遍历
  - 三种遍历本身
  - 通过前序中序求后序
- 平衡二叉树
  - 四种分类：左左、左右、右左、右右
  - 四种旋转：左旋和右旋；单旋转和双旋转
  - 增删改查
- B树及其变种
  - 分裂节点、合并节点
- R树
  - 实践中的应用

# 二叉查找树

- 二叉查找树(二叉搜索树)是满足以下条件的二叉树：
  - 左子树上的所有节点值均小于根节点值，
  - 右子树上的所有节点值均不小于根节点值，
  - 左右子树也满足上述两个条件



# 二叉查找树的查找

- 给定一颗二叉查找树，查找某节点p的过程如下：
  - 将当前节点cur赋值为根节点root；
  - 若p的值小于当前节点cur的值，查找cur的左子树；
  - 若p的值不小于当前节点cur的值，查找cur的右子树；
  - 递归上述过程，直到cur的值等于p的值或者cur为空；
    - 当然，若节点是结构体，注意定义“小于”“不小于”“等于”的具体函数。

# 查找Code

```
struct node
{
    int val;
    pnode lchild;
    pnode rchild;
};
```

```
pnode search_BST(pnode p, int x)
{
    bool solve = false;
    while(p && !solve){
        if(x == p->val){
            solve = true;
        }
        else if(x < p->val){
            p = p->lchild;
        }
        else{
            p = p->rchild;
        }
    }
    if(p == NULL){
        cout << "没有找到" << x << endl;
    }
    return p;
}
```

# 二叉查找树的插入

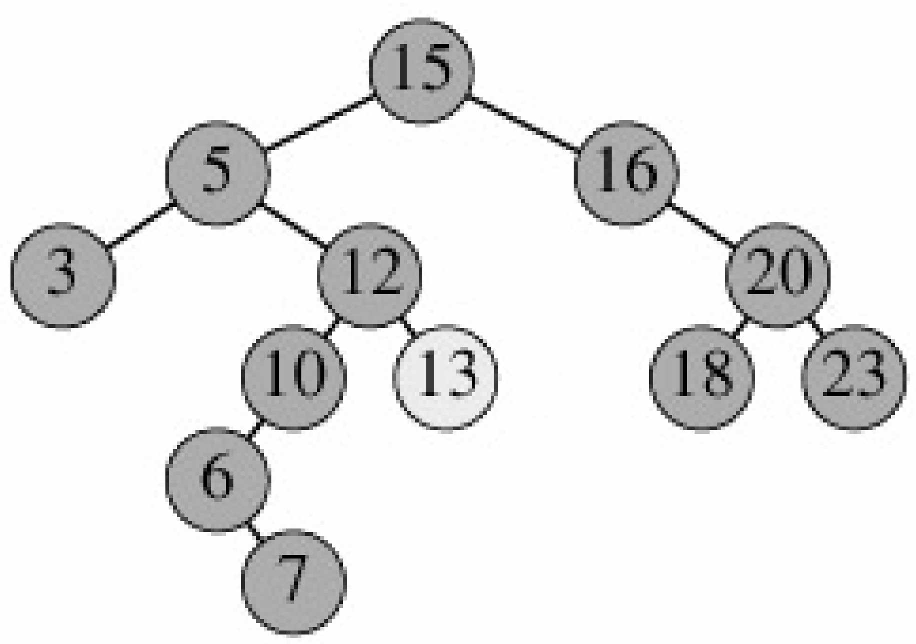
- 插入过程如下：
  - 若当前的二叉查找树为空，则插入的元素为根节点，
  - 若插入的元素值小于根节点值，则将元素插入到左子树中，
  - 若插入的元素值不小于根节点值，则将元素插入到右子树中，
  - 递归上述过程，直到找到插入点为叶子节点。

# 插入实例

```
pnode insert(pnode & root, int x)
{
    if(root == NULL){
            pnode p = (pnode)malloc(LEN);
            p->val = x;
            p->lchild = NULL;
            p->rchild = NULL;
            root = p;
    }
    else if(x < root->val){
          root->lchild = insert(root->lchild, x);
    }
    else{
          root->rchild = insert(root->rchild, x);
    }
    return root;
}
```

# 二叉树的建立

- 依次插入：15,5,3,12,16,20,23,13,18,10,6,7

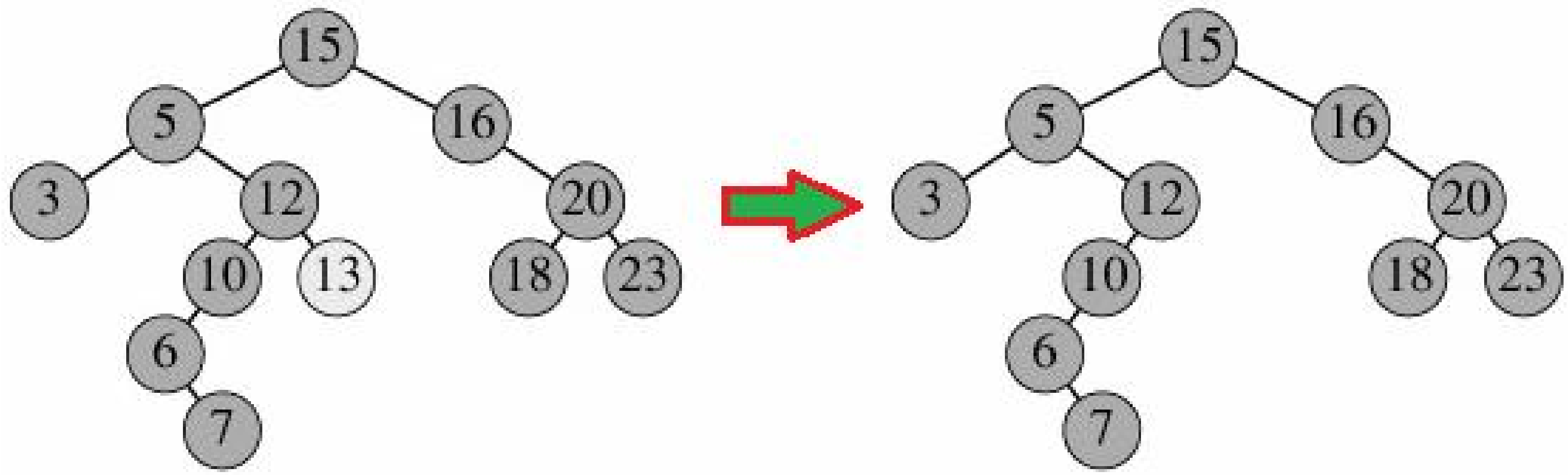


# 二叉查找树的删除

- 记待删除的节点为p，分三种情况进行处理：
  - p为叶子节点
  - p为单支节点
  - p的左子树和右子树均不空

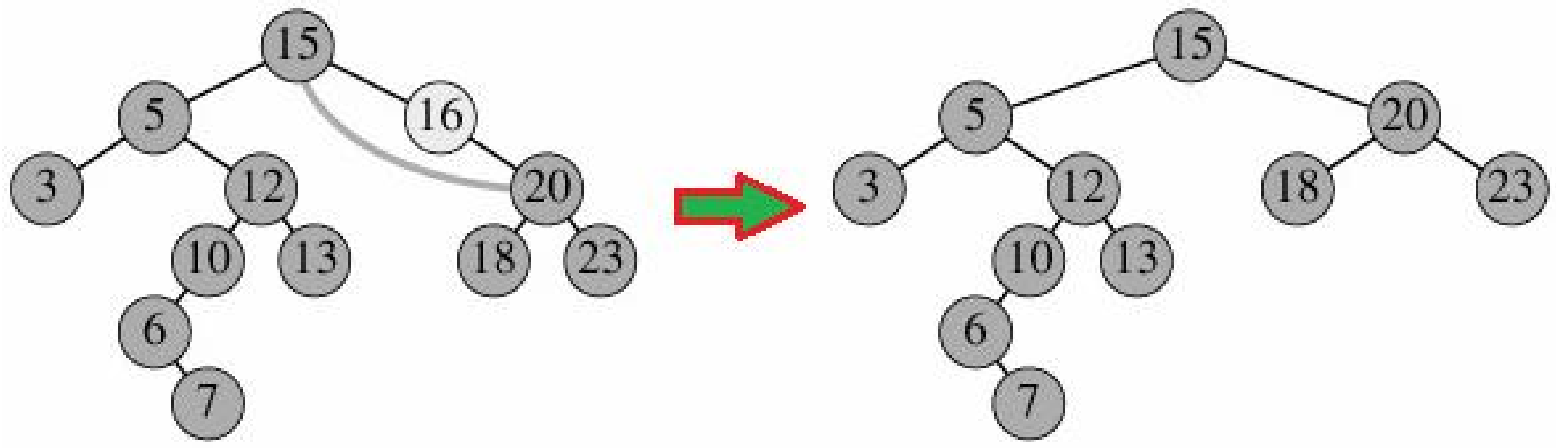
# 待删除点为叶子节点

- p为叶子节点，直接删除该节点，再修改p的父节点的指针

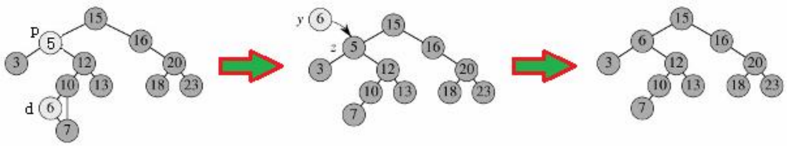


# 待删除点只有一个孩子

- 若p为单支节点（即只有左子树或右子树），则将p的子树与p的父亲节点相连，删除p即可



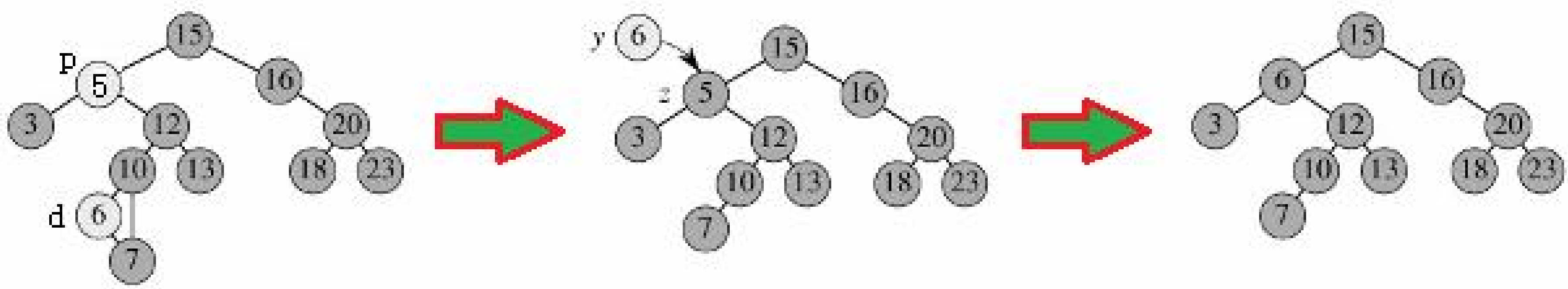
# 待删除点有两个孩子



- 若p的左子树和右子树均不空，则找到p的直接后继d(p的右孩子的最左子孙)，因为d一定没有左子树，所以使用删除单支节点的方法：删除d，并让d的父亲节点dp成为d的右子树的父亲节点；同时，用d的值代替p的值；
  - **对偶的**，可以找到p的直接前驱x(p的左孩子的最右子孙)，x一定没有右子树，所以可以删除x，并让x的父亲节点成为x的左子树的父亲节点。

# 待删除点有两个孩子

- 任务：删除p
- 过程：两步走
  - 将p的直接后继的值拷贝到p处
  - 删除p的直接后继



# 删除Code

- 代码过长，分片来看

```cpp
bool delete_BST(pnode p, int x) //返回一个标志，表示是否找到被删元素
{
    bool find = false;
    pnode q;
    p = BT;
    while(p && !find){  //寻找被删元素
        if(x == p->val){  //找到被删元素
            find = true;
        }
        else if(x < p->val){ //沿左子树找
            q = p;
            p = p->lchild;
        }
        else{   //沿右子树找
            q = p;
            p = p->rchild;
        }
    }
    if(p == NULL){   //没找到
        cout << "没有找到" << x << endl;
    }

    if(p->lchild == NULL && p->rchild == NULL){  //p为叶子节点
        if(p == BT){  //p为根节点
            BT = NULL;
        }
        else if(q->lchild == p){
            q->lchild = NULL;
        }
        else{
            q->rchild = NULL;
        }
        free(p);  //释放节点p
    }
    else if(p->lchild == NULL || p->rchild == NULL){ //p为单支子树
        if(p == BT){  //p为根节点
            if(p->lchild == NULL){
                BT = p->rchild;
            }
            else{
                BT = p->lchild;
            }
        }
        else{
            if(q->lchild == p && p->lchild){ //p是q的左子树且p有左子树
                q->lchild = p->lchild;   //将p的左子树链接到q的左指针上
            }
            else if(q->lchild == p && p->rchild){
                q->lchild = p->rchild;
            }
            else if(q->rchild == p && p->lchild){
                q->rchild = p->lchild;
            }
            else{
                q->rchild = p->rchild;
            }
        }
        free(p);
    }
    else{ //p的左右子树均不为空
        pnode t = p;
        pnode s = p->lchild;  //从p的左子节点开始
        while(s->rchild){  //找到p的前驱，即p左子树中值最大的节点
            t = s;
            s = s->rchild;
        }
        p->val = s->val;   //把节点s的值赋给p
        if(t == p){
            p->lchild = s->lchild;
        }
        else{
            t->rchild = s->lchild;
        }
        free(s);
    }
    return find;
}
```

# 删除Code： part1

```
bool delete_BST(pnode p, int x)
{
    bool find = false;
    pnode q;
    p = BT;
    while(p && !find){  //寻找被删元素
        if(x == p->val){  //找到被删元素
            find = true;
        }
        else if(x < p->val){ //沿左子树找
            q = p;
            p = p->lchild;
        }
        else{   //沿右子树找
            q = p;
            p = p->rchild;
        }
    }
    if(p == NULL){   //没找到
        cout << "没有找到" << x << endl;
    }
```

```
if(p->lchild == NULL && p->rchild == NULL){  //p为叶子节点
    if(p == BT){  //p为根节点
        BT = NULL;
    }
    else if(q->lchild == p){
        q->lchild = NULL;
    }
    else{
        q->rchild = NULL;
    }
    free(p);  //释放节点p
}
```

# 删除Code： part2

```
else if(p->lchild == NULL || p->rchild == NULL){ //p为单支子树
    if(p == BT){  //p为根节点
        if(p->lchild == NULL){
            BT = p->rchild;
        }
        else{
            BT = p->lchild;
        }
    }
    else{
        if(q->lchild == p && p->lchild){ //p是q的左子树且p有左子树
            q->lchild = p->lchild;   //将p的左子树链接到q的左指针上
        }
        else if(q->lchild == p && p->rchild){
            q->lchild = p->rchild;
        }
        else if(q->rchild == p && p->lchild){
            q->rchild = p->lchild;
        }
        else{
            q->rchild = p->rchild;
        }
    }
    free(p);
}
```

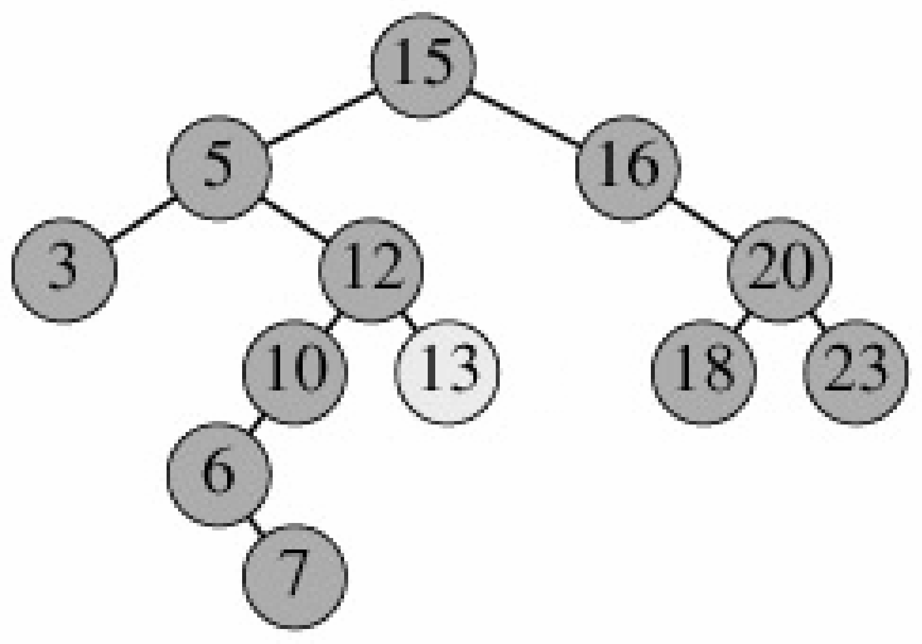
# 删除Code： part3

```
else{ //p的左右子树均不为空
    pnode t = p;
    pnode s = p->lchild;  //从p的左子节点开始
    while(s->rchild){//找到p的前驱，即p左子树中值最大的节点
        t = s;
        s = s->rchild;
    }
    p->val = s->val;   //把节点s的值赋给p
    if(t == p){
        p->lchild = s->lchild;
    }
    else{
        t->rchild = s->lchild;
    }
    free(s);
}
return find;
```

# 二叉树的遍历

- 前序遍历：
  - 访问根节点
  - 前序遍历左子树
  - 前序遍历右子树
- 中序遍历：
  - 中序遍历左子树
  - 访问根节点
  - 中序遍历右子树
- 后序遍历：
  - 后序遍历左子树
  - 后序遍历右子树
  - 访问根节点

# 前序遍历

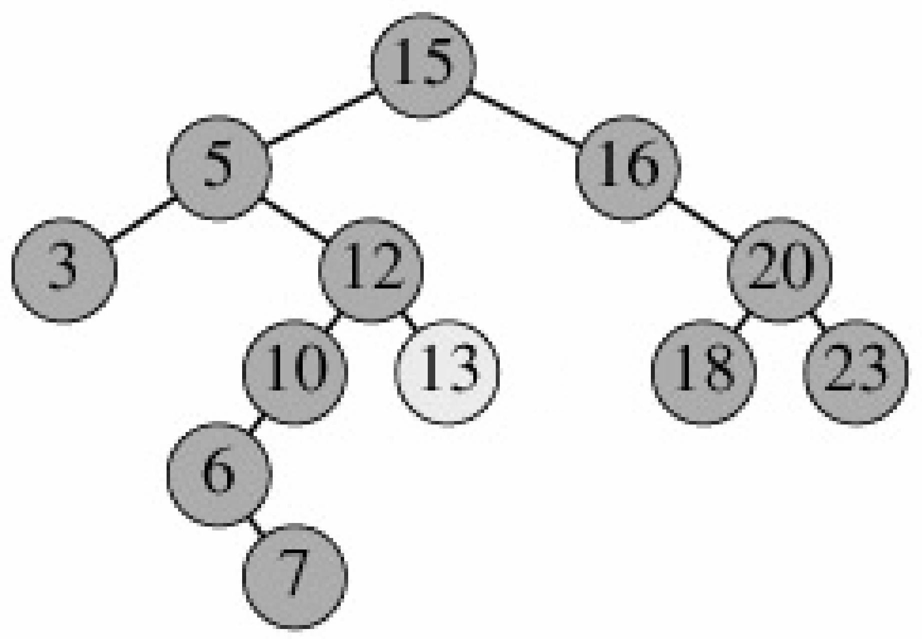



- 前序遍历：15,5,3,12,10,6,7,13,16,20,18,23

# Code

```
void Preorder(BiTree* T)
{
	if(!T)
		return;
	visit(T);
	Preorder(T->lChild);
	Preorder(T->rChild);
}
```

# 中序遍历

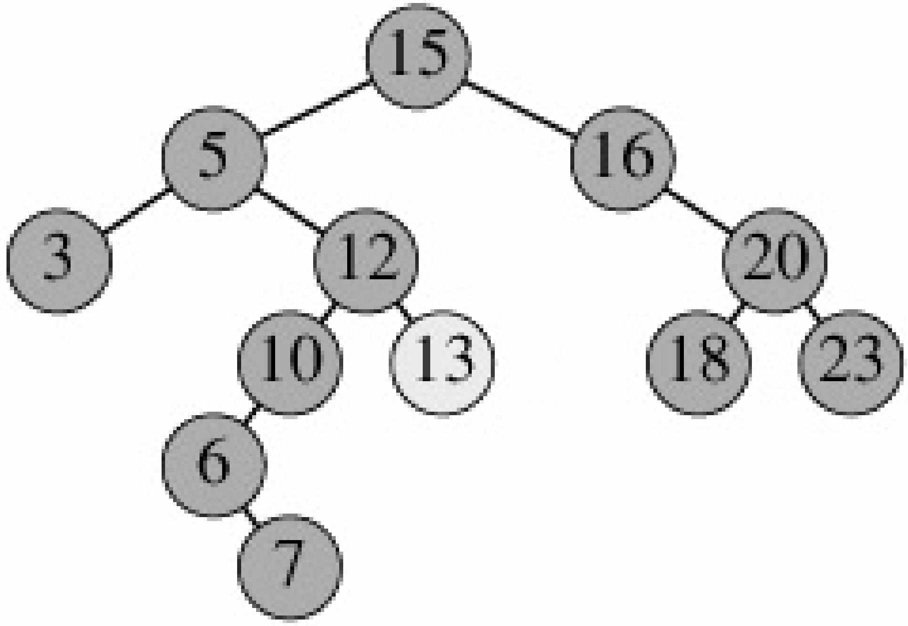



- 中序遍历：3,5,6,7,10,12,13,15,16,18,20,23
  - 二叉查找树的中序遍历，即为数据的升序过程

# Code

```
void Inorder(BiTree* T)
{
        if(!T)
            return;
        Inorder(T->lChild);
        visit(T);
        Inorder(T->rChild);
}
```

# 后序遍历




- 后序遍历：3,7,6,10,13,12,5,18,23,20,16,15

# Code

```
void Postorder(BiTree* T)
{
	if(!T)
		return;
	Postorder(T->lChild);
	Postorder(T->rChild);
	visit(T);
}
```

# 根据前序中序，计算后序

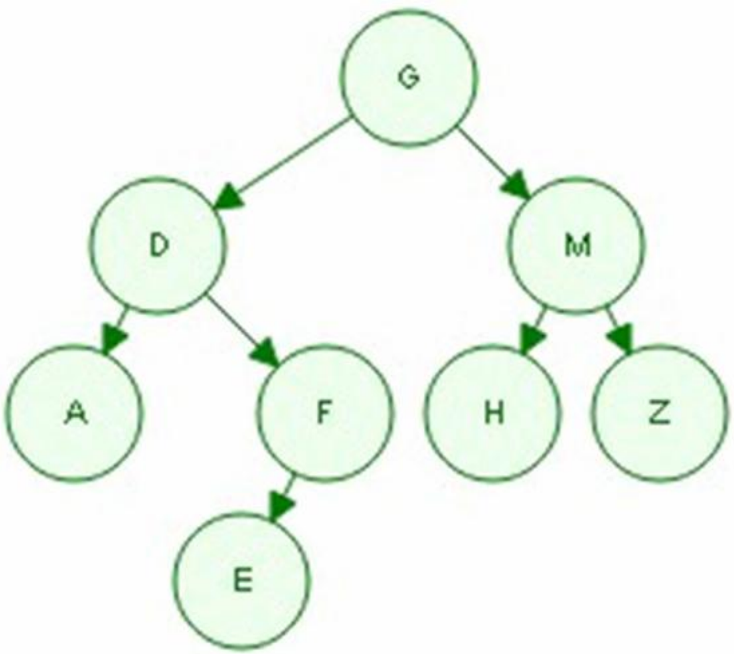
- 如：已知某二叉树的遍历结果如下，求它的后序遍历序列
  - 前序遍历：GDAFEMHZ
  - 中序遍历：ADEFGHMZ
- 两个步骤：
  - 根据前序中序，构造二叉树
  - 后序遍历二叉树

# 根据前序中序，计算后序

- 前序遍历：GDAFEMHZ
- 中序遍历：ADEFGHMZ
- 根据前序遍历的特点得知，根结点为G；
- 根节点将中序遍历结果ADEFGHMZ分成ADEF和HMZ两个左子树、右子树。
- 递归确定中序遍历序列ADEF和前序遍历序列DAEF的子树结构；
- 递归确定中序遍历序列HMZ和前序遍历序列MHZ的子树结构；

# 根据前序中序，构造二叉树

- 前序遍历：GDAFEMHZ
- 中序遍历：ADEFGHMZ



# Code

```cpp
void InPre2Post(const char* pInOrder, const char* pPreOrder, int nLength, char* pPostOrder, int& nIndex)
{
    if(nLength <= 0)
        return;
    if(nLength == 1)
    {
        pPostOrder[nIndex] = *pPreOrder;
        nIndex++;
        return;
    }
    char root = *pPreOrder;
    int nRoot = 0;
    for(;nRoot < nLength; nRoot++)
    {
        if(pInOrder[nRoot] == root)
            break;
    }
    InPre2Post(pInOrder, pPreOrder+1, nRoot, pPostOrder, nIndex);
    InPre2Post(pInOrder+nRoot+1, pPreOrder+nRoot+1, nLength-(nRoot+1), pPostOrder, nIndex);
    pPostOrder[nIndex] = root;
    nIndex++;
}
```

```cpp
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    char pPreOrder[] = "GDAFEMHZ";
    char pInOrder[] = "ADEFGHMZ";
    int size = sizeof(pInOrder) / sizeof(char);
    char* pPostOrder = new char[size];
    int nIndex = 0;
    InPre2Post(pInOrder, pPreOrder, size-1, pPostOrder, nIndex);
    pPostOrder[size-1] = 0;
    cout << pPostOrder << endl;
    return 0;
}
```

# 思考

- 若已知二叉树的中序和后序遍历序列，如何求二叉树、如何求二叉树的前序遍历序列呢？

# 根据中序后序遍历，求前序遍历

- 中序遍历：ADEFGHMZ
- 后序遍历：AEFDHZMG
    - 提示：后序遍历最后一个结点即为根结点，即根结点为G
    - 递归

# Code

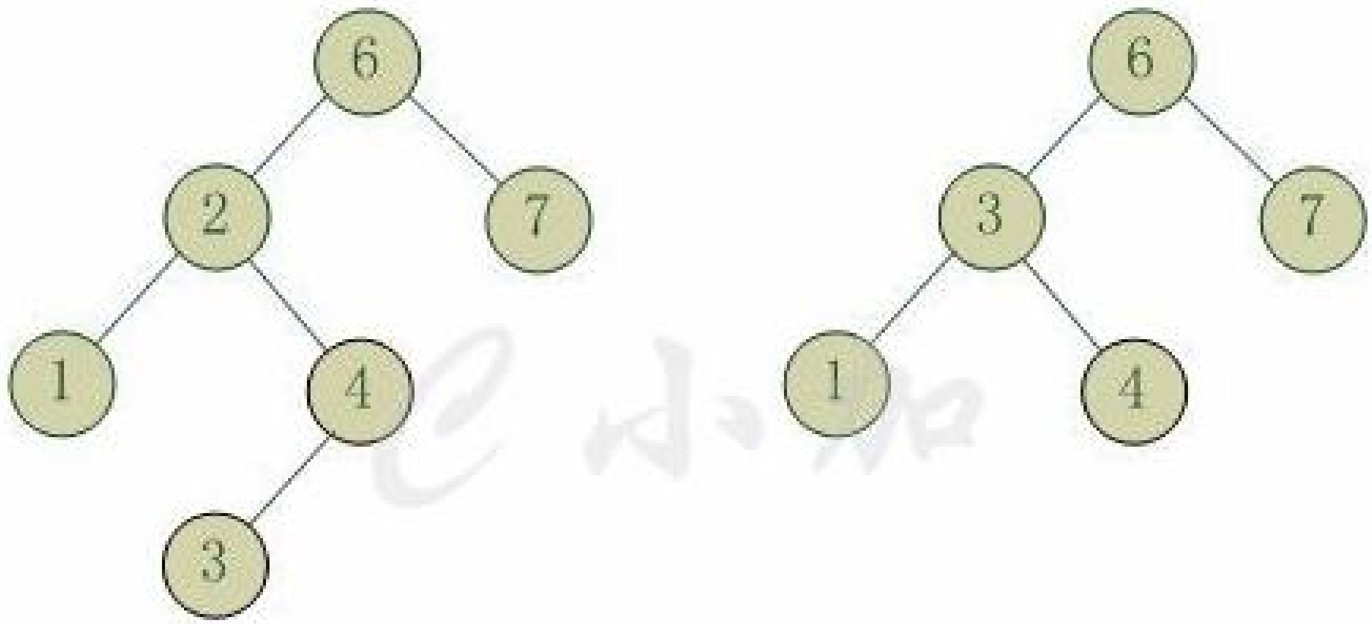
```cpp
void InPost2Pre(const char* pInOrder, const char* pPostOrder, int nLength, char* pPreOrder, int& nIndex)
{
    if(nLength <= 0)
        return;
    if(nLength == 1)
    {
        pPreOrder[nIndex] = *pPostOrder;
        nIndex++;
        return;
    }
    char root = pPostOrder[nLength-1];
    pPreOrder[nIndex] = root;
    nIndex++;
    int nRoot = 0;
    for(;nRoot < nLength; nRoot++)
    {
        if(pInOrder[nRoot] == root)
            break;
    }
    InPost2Pre(pInOrder, pPostOrder, nRoot, pPreOrder, nIndex);
    InPost2Pre(pInOrder+nRoot+1, pPostOrder+nRoot, nLength-(nRoot+1), pPreOrder, nIndex);
}
```

```cpp
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    char pInOrder[] = "ADEFGHMZ";
    char pPostOrder[] = "AEFDHZMG";
    int size = sizeof(pInOrder) / sizeof(char);
    char* pPreOrder = new char[size];
    int nIndex = 0;
    InPost2Pre(pInOrder, pPostOrder, size-1, pPreOrder, nIndex);
    pPreOrder[size-1] = 0;
    cout << pPreOrder << endl;
    return 0;
}
```

# 平衡二叉树

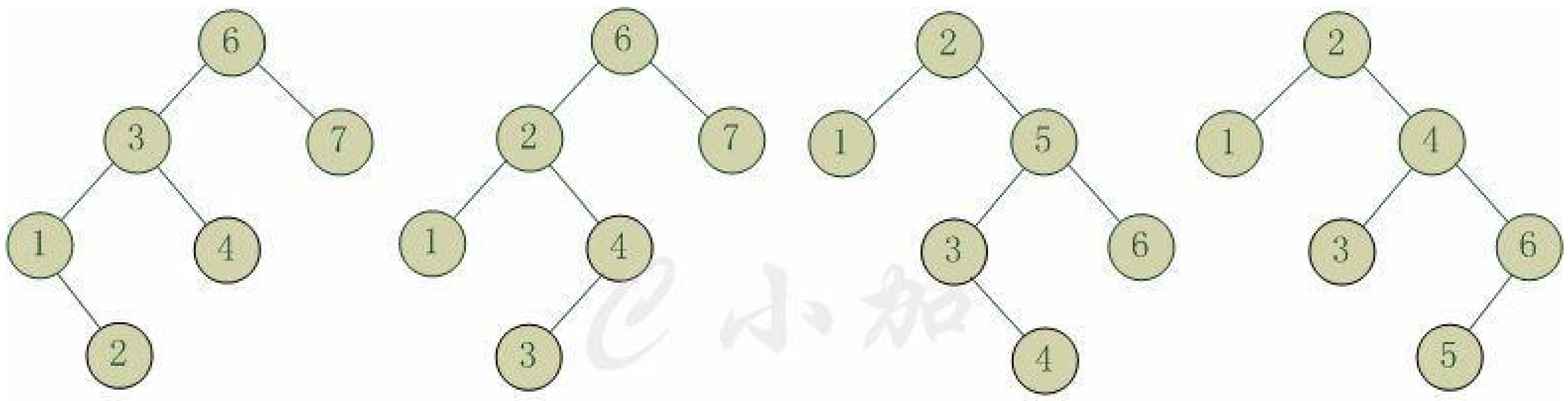
- 平衡二叉树（Balanced Binary Tree）是二叉查找树的一个变体，也是第一个引入平衡概念的二叉树。1962年，G.M. Adelson-Velsky 和 E.M. Landis发明了这棵树，所以它又叫AVL树。平衡二叉树要求对于每一个节点来说，它的左右子树的高度之差不能超过1，如果插入或者删除一个节点使得高度之差大于1，就要进行节点之间的旋转，将二叉树重新维持在一个平衡状态。这个方案很好的解决了二叉查找树退化成链表的问题，把插入，查找，删除的时间复杂度最好情况和最坏情况都维持在O(logN)。

# 二叉查找树与平衡二叉树



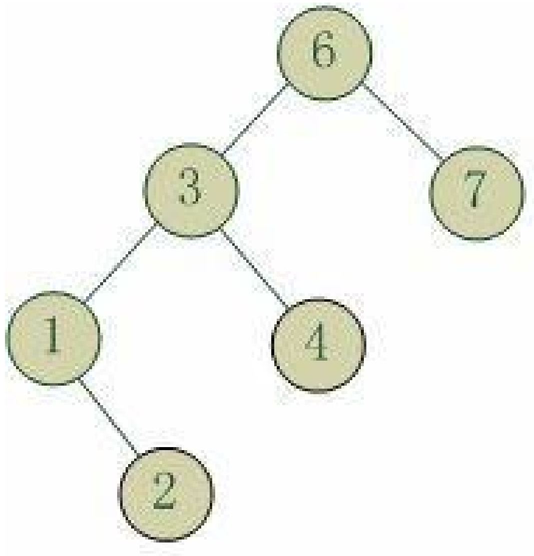
# 分析高度不平衡节点

- 高度不平衡节点的两颗子树的高度差2。只考虑该不平衡节点本身，分四种情况分别讨论：



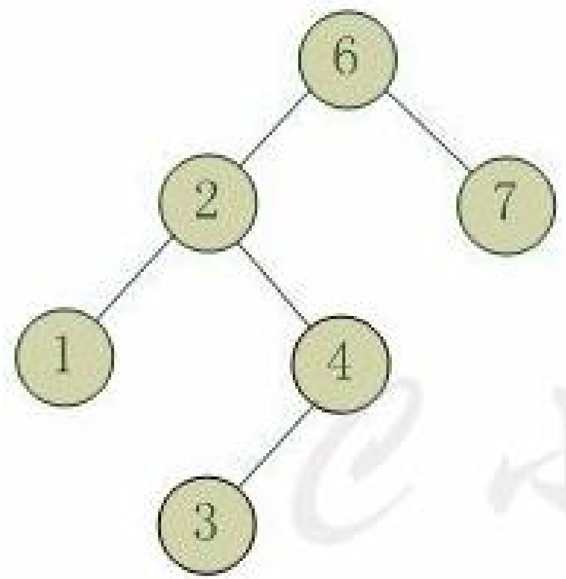
# 高度不平衡1：左左

- 6节点的左子树3节点高度比右子树7节点大2，左子树3节点的左子树1节点高度大于右子树4节点，这种情况成为左左。



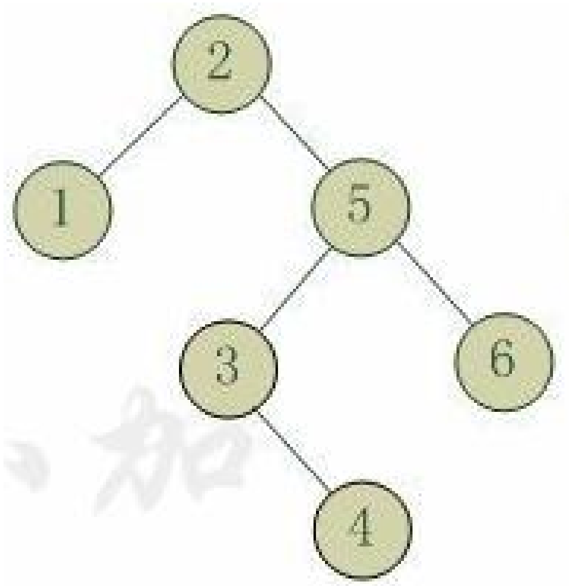
# 高度不平衡2：左右

- 6节点的左子树2节点高度比右子树7节点大2，左子树2节点的左子树1节点高度小于右子树4节点，这种情况成为左右。



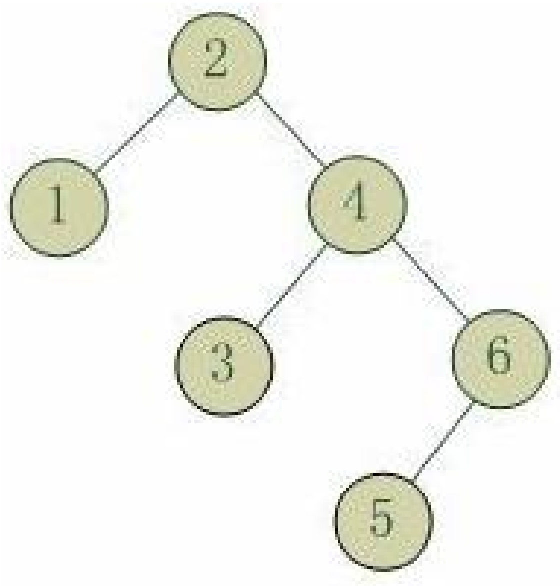
# 高度不平衡3：右左

- 2节点的左子树1节点高度比右子树5节点小2，右子树5节点的左子树3节点高度大于右子树6节点，这种情况成为右左。

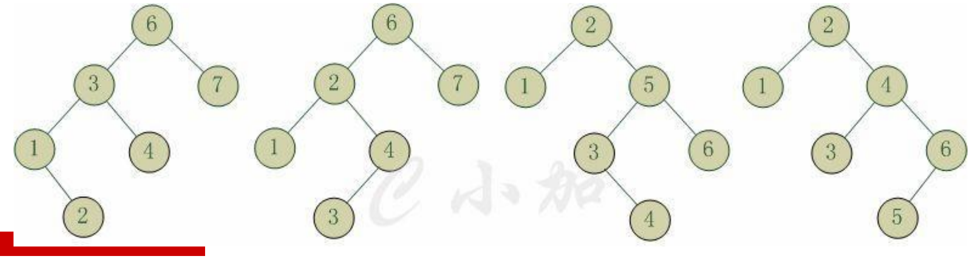


# 高度不平衡4：右右

- 2节点的左子树1节点高度比右子树4节点小2，右子树4节点的左子树3节点高度小于右子树6节点，这种情况成为右右。



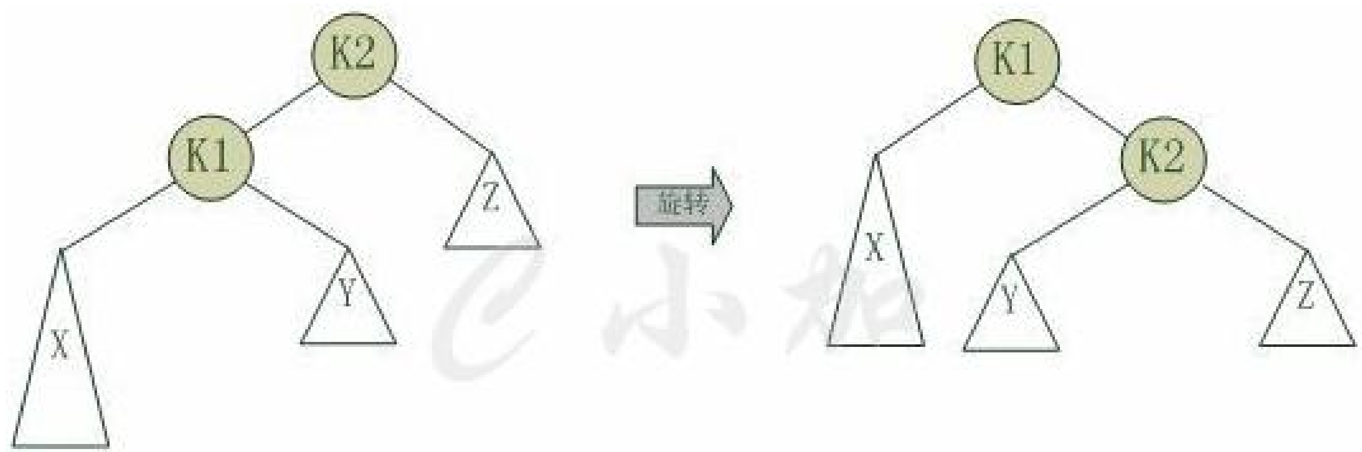
# 对称与旋转




- 左左和右右对称；左右和右左对称
- 左左和右右两种情况是对称的，这两种情况的旋转算法是一致的，只需要经过一次旋转就可以达到目标，称之为单旋转。
- 左右和右左两种情况也是对称的，这两种情况的旋转算法也是一致的，需要进行两次旋转，称之为双旋转。

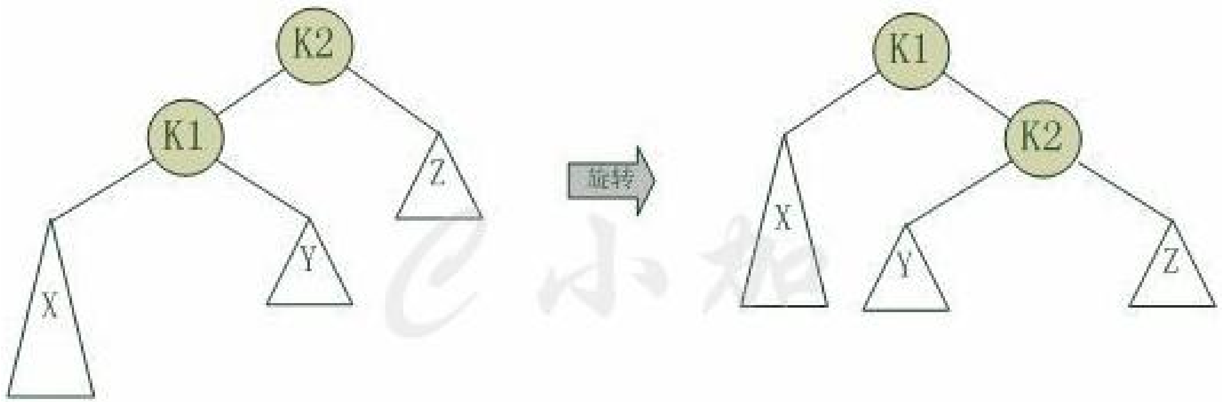
# 左左单旋转

- 节点K2不满足平衡特性，因为它的左子树k1比右子树Z深2层，而且K1子树中，更深的一层的是K1的左子树X子树，所以属于左左情况。



# 单旋转

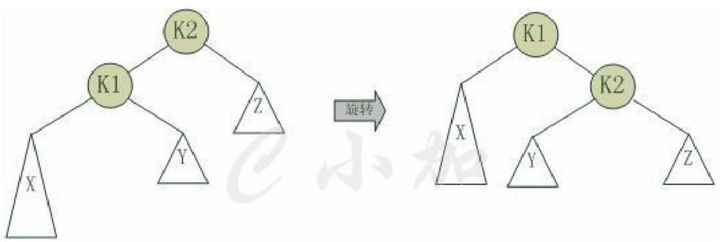
- 如图，假设K2不平衡：
  - 为使树恢复平衡，把K1变成根节点
  - K2大于K1，所以，把K2置于K1的右子树上
  - K1右子树Y大于K1，小于K2，所以，把Y置于k2的左子树上



# AVL单旋转

假设K2不平衡：

- 为使树恢复平衡，把K1变成根节点
- K2大于K1，所以，把K2置于K1的右子树上
- K1右子树Y大于K1，小于K2，所以，把Y置于k2的左子树上

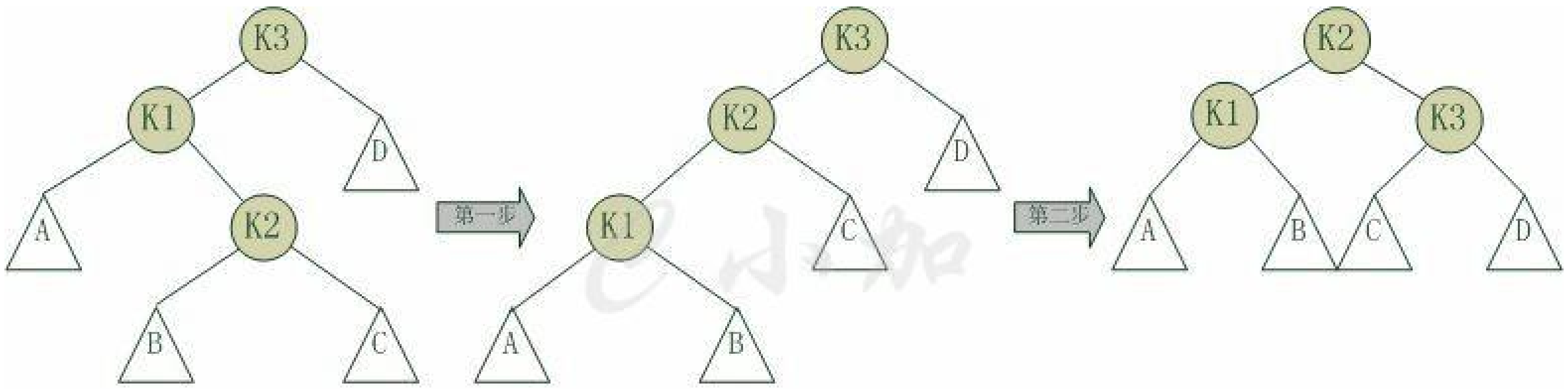



```
//左左情况下的旋转
template<class T>
void AVLTree<T>::SingRotateLeft(TreeNode<T>* &k2)
{
    TreeNode<T>* k1;
    k1=k2->lson;
    k2->lson=k1->rson;
    k1->rson=k2;
    k2 = k1

    k2->hgt=Max(height(k2->lson),height(k2->rson))+1;
    k1->hgt=Max(height(k1->lson),k2->hgt)+1;
}
```

```
//右右情况下的旋转
template<class T>
void AVLTree<T>::SingRotateRight(TreeNode<T>* &k2)
{
    TreeNode<T>* k1;
    k1=k2->rson;
    k2->rson=k1->lson;
    k1->lson=k2;
    k2 = k1

    k2->hgt=Max(height(k2->lson),height(k2->rson))+1;
    k1->hgt=Max(height(k1->rson),k2->hgt)+1;
}
```

# 双旋转

- 对于左右和右左这两种情况，单旋转不能使它达到一个平衡状态，要经过两次旋转。
- 以左右为例：节点K3不满足平衡特性，它的左子树K1比右子树D深2层，且K1子树更深的是右子树K2。



# Code

```
//左右情况的旋转
template<class T>
void AVLTree<T>::DoubleRotateLR(TreeNode<T>* &k3)
{
    SingRotateRight(k3->lson);
    SingRotateLeft(k3);
}
//右左情况的旋转
template<class T>
void AVLTree<T>::DoubleRotateRL(TreeNode<T>* &k3)
{
    SingRotateLeft(k3->rson);
    SingRotateRight(k3);
}
```

# 平衡二叉树的插入

- 插入的方法和二叉查找树基本一样，区别是，插入完成后需要从插入的节点开始维护一个到根节点的路径，每经过一个节点都要维持树的平衡。维持树的平衡要根据高度差的特点选择不同的旋转算法。

# Code

```
template<class T>
void AVLTree<T>::insertpri(TreeNode<T>* &node,T x)
{
   if(node==NULL)//如果节点为空,就在此节点处加入x信息
   {
      node=new TreeNode<T>();
      node->data=x;
      return;
   }
   if(node->data>x)//如果x小于节点的值,就继续在节点的左子树中插入x
   {
      insertpri(node->lson,x);
      if(2==height(node->lson)-height(node->rson))
         if(x<node->lson->data)
            SingRotateLeft(node);
         else
            DoubleRotateLR(node);
   }
   else if(node->data<x)//如果x大于节点的值,就继续在节点的右子树中插入x
   {
      insertpri(node->rson,x);
      if(2==height(node->rson)-height(node->lson))//如果高度之差为2
         if(x>node->rson->data)
            SingRotateRight(node);
         else
            DoubleRotateRL(node);
   }
   else ++(node->freq);//如果相等,就把频率加1
   node->hgt=Max(height(node->lson),height(node->rson))+1;
}
//插入接口
template<class T>
void AVLTree<T>::insert(T x)
{
   insertpri(root,x);
}
```

# 平衡二叉树的查找

- 平衡二叉树和使用和二叉查找树完全相同的查找方法，不过根据高度基本平衡存储的特性，平衡二叉树能保持O(logN)的稳定时间复杂度，而二叉查找树则相当不稳定。

# 平衡二叉树的删除

- 删除的方法也和二叉查找树的一致，区别是，删除完成后，需要从删除节点的父亲开始向上维护树的平衡一直到根节点。

# Code

```
template<class T>
void AVLTree<T>::Deletepri(TreeNode<T>* &node,T x)
{
    if(node==NULL) return ;//没有找到值是x的节点
    if(x < node->data)
    {
        Deletepri(node->lson,x);//如果x小于节点的值,就继续在节点的左子树中删除x
        if(2==height(node->rson)-height(node->lson))
            if(node->rson->lson!=NULL&&(height(node->rson->lson)>height(node->rson->rson)) )
                DoubleRotateRL(node);
            else
                SingRotateRight(node);
    }

    else if(x > node->data)
    {
        Deletepri(node->rson,x);//如果x大于节点的值,就继续在节点的右子树中删除x
        if(2==height(node->lson)-height(node->rson))
            if(node->lson->rson!=NULL&& (height(node->lson->rson)>height(node->lson->lson) ))
                DoubleRotateLR(node);
            else
                SingRotateLeft(node);
    }

    else//如果相等,此节点就是要删除的节点
    {
        if(node->lson&&node->rson)//此节点有两个儿子
        {
            TreeNode<T>* temp=node->rson;//temp指向节点的右儿子
            while(temp->lson!=NULL) temp=temp->lson;//找到右子树中值最小的节点
            //把右子树中最小节点的值赋值给本节点
            node->data=temp->data;
            node->freq=temp->freq;
            Deletepri(node->rson,temp->data);//删除右子树中最小值的节点
            if(2==height(node->lson)-height(node->rson))
            {
                if(node->lson->rson!=NULL&& (height(node->lson->rson)>height(node->lson->lson) ))
                    DoubleRotateLR(node);
                else
                    SingRotateLeft(node);
            }
        }
        else//此节点有1个或0个儿子
        {
            TreeNode<T>* temp=node;
            if(node->lson==NULL)//有右儿子或者没有儿子
            node=node->rson;
            else if(node->rson==NULL)//有左儿子
            node=node->lson;
            delete(temp);
            temp=NULL;
        }
    }
    if(node==NULL) return;
    node->hgt=Max(height(node->lson),height(node->rson))+1;
    return;
}
//删除接口
template<class T>
void AVLTree<T>::Delete(T x)
{
    Deletepri(root,x);
}
```

# Code – part1

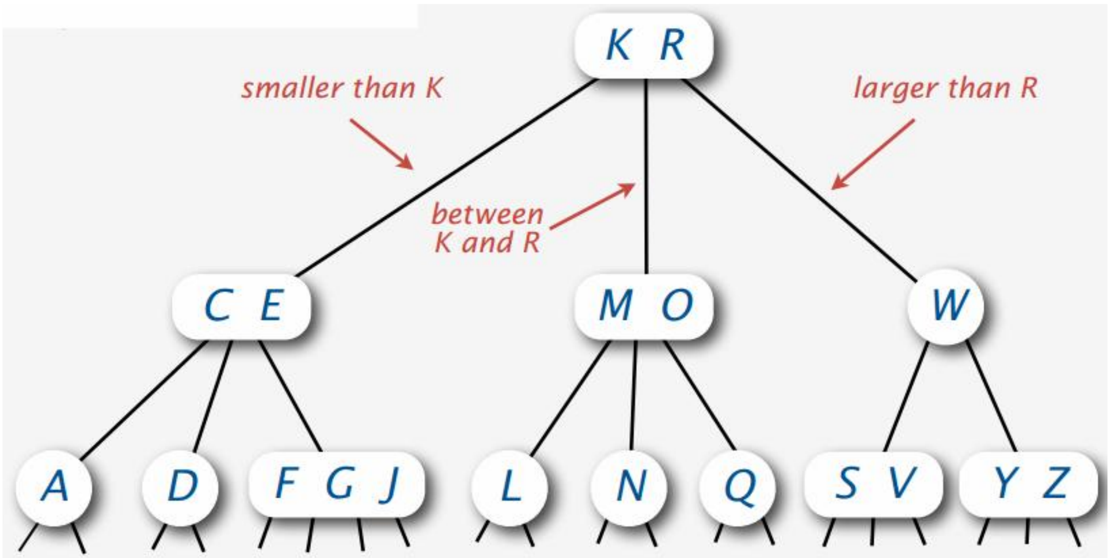
```
template<class T>
void AVLTree<T>::Deletepri(TreeNode<T>* &node,T x)
{
   if(node==NULL) return ;//没有找到值是x的节点
   if(x < node->data)
   {
       Deletepri(node->lson,x);//如果x小于节点的值,就继续在节点的左子树中删除x
       if(2==height(node->rson)-height(node->lson))
          if(node->rson->lson!=NULL&&(height(node->rson->lson)>height(node->rson->rson)) )
              DoubleRotateRL(node);
          else
              SingRotateRight(node);
   }

   else if(x > node->data)
   {
       Deletepri(node->rson,x);//如果x大于节点的值,就继续在节点的右子树中删除x
       if(2==height(node->lson)-height(node->rson))
          if(node->lson->rson!=NULL&& (height(node->lson->rson)>height(node->lson->lson) ))
              DoubleRotateLR(node);
          else
              SingRotateLeft(node);
   }
```

# Code – part2

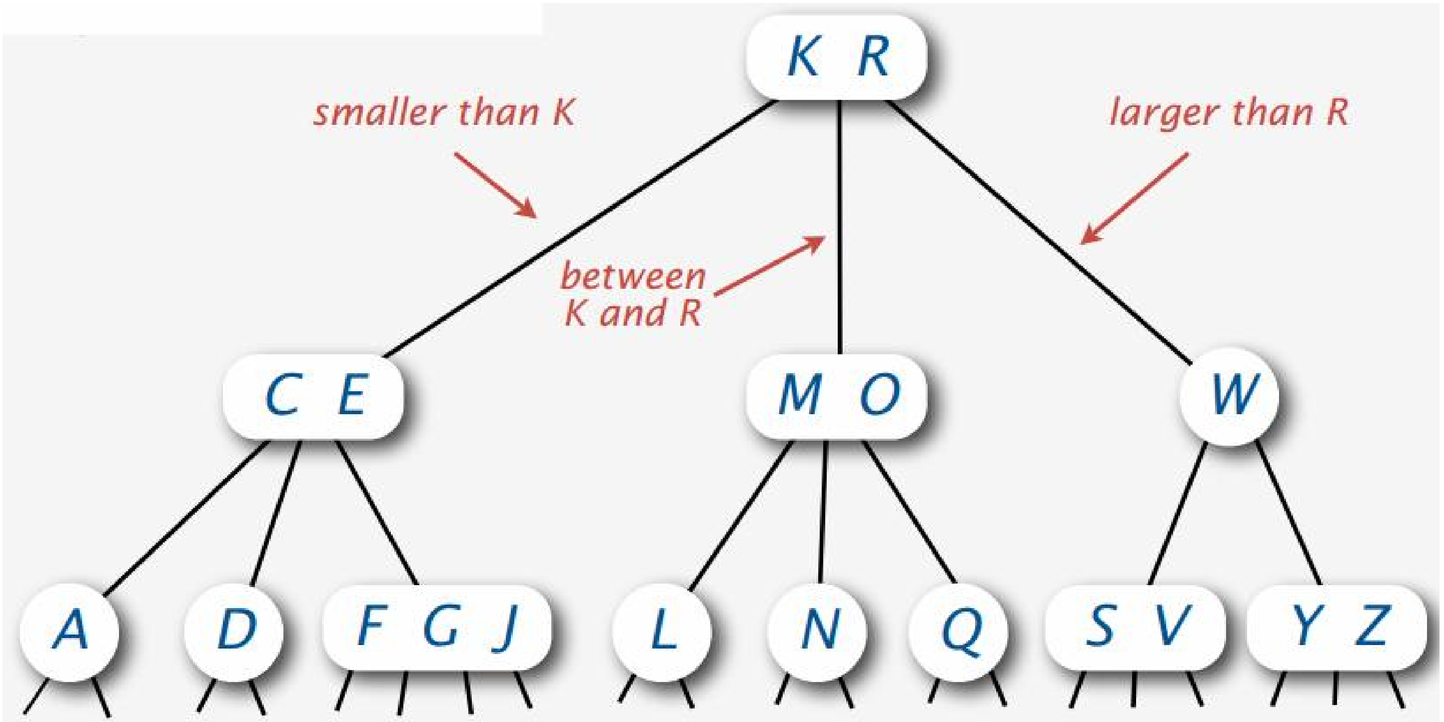
```
    else//如果相等,此节点就是要删除的节点
    {
        if(node->lson&&node->rson)//此节点有两个儿子
        {
            TreeNode<T>* temp=node->rson;//temp指向节点的右儿子
            while(temp->lson!=NULL) temp=temp->lson;//找到右子树中值最小的节点
            //把右子树中最小节点的值赋值给本节点
            node->data=temp->data;
            node->freq=temp->freq;
            Deletepri(node->rson,temp->data);//删除右子树中最小值的节点
            if(2==height(node->lson)-height(node->rson))
            {
                if(node->lson->rson!=NULL&& (height(node->lson->rson)>height(node->lson->lson) ))
                    DoubleRotateLR(node);
                else
                    SingRotateLeft(node);
            }
        }
        else//此节点有1个或0个儿子
        {
            TreeNode<T>* temp=node;
            if(node->lson==NULL)//有右儿子或者没有儿子
            node=node->rson;
            else if(node->rson==NULL)//有左儿子
            node=node->lson;
            delete(temp);
            temp=NULL;
        }
    }
    if(node==NULL) return;
    node->hgt=Max(height(node->lson),height(node->rson))+1;
    return;
}
//删除接口
template<class T>
void AVLTree<T>::Delete(T x)
{
    Deletepri(root,x);
}
```

# 二叉到多叉的思考

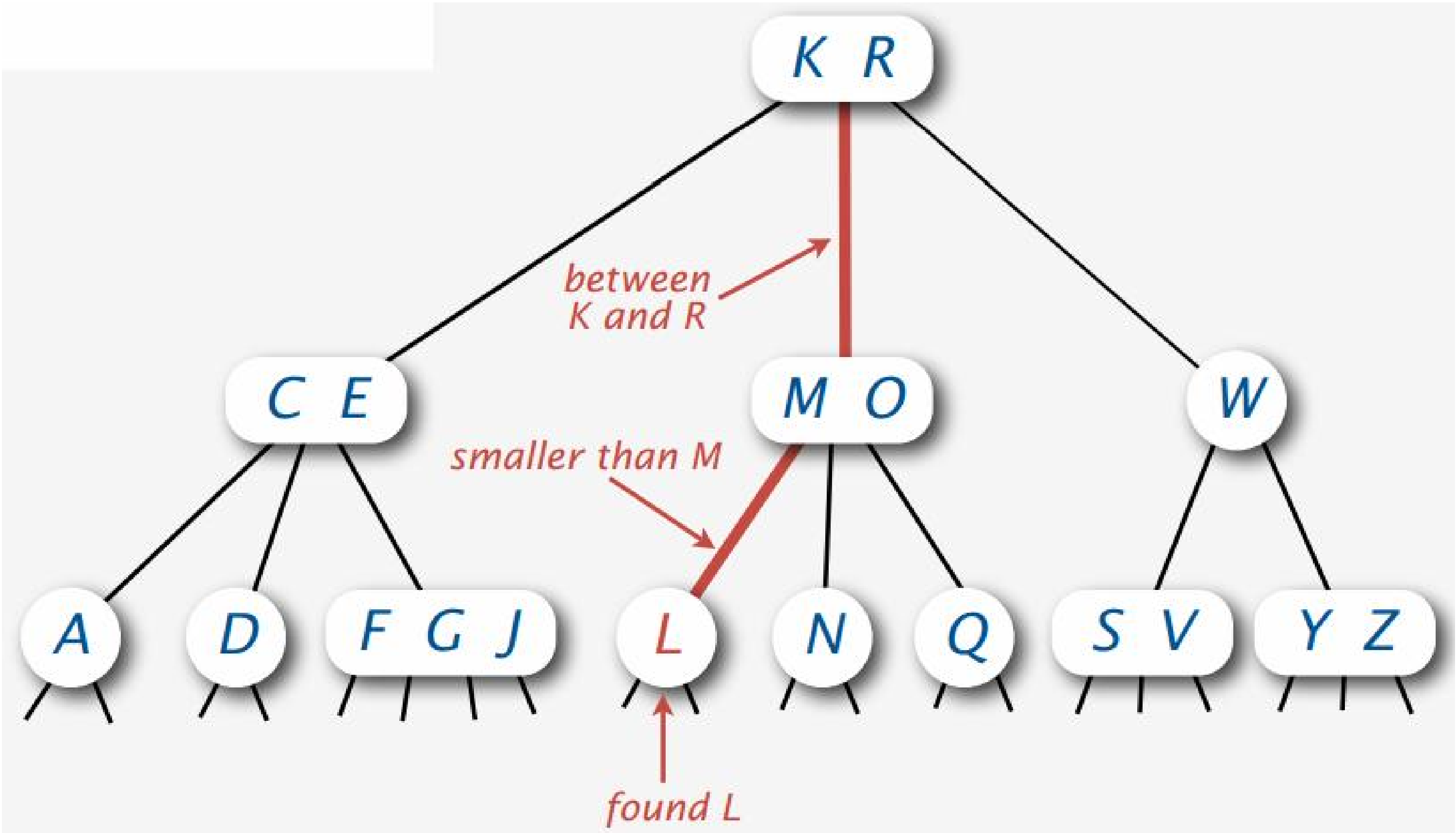
- 一个节点存一个值，则有2个孩子：W
- 一个节点存两个值，则有3个孩子：MO
- 一个节点存三个值，则有4个孩子：MO



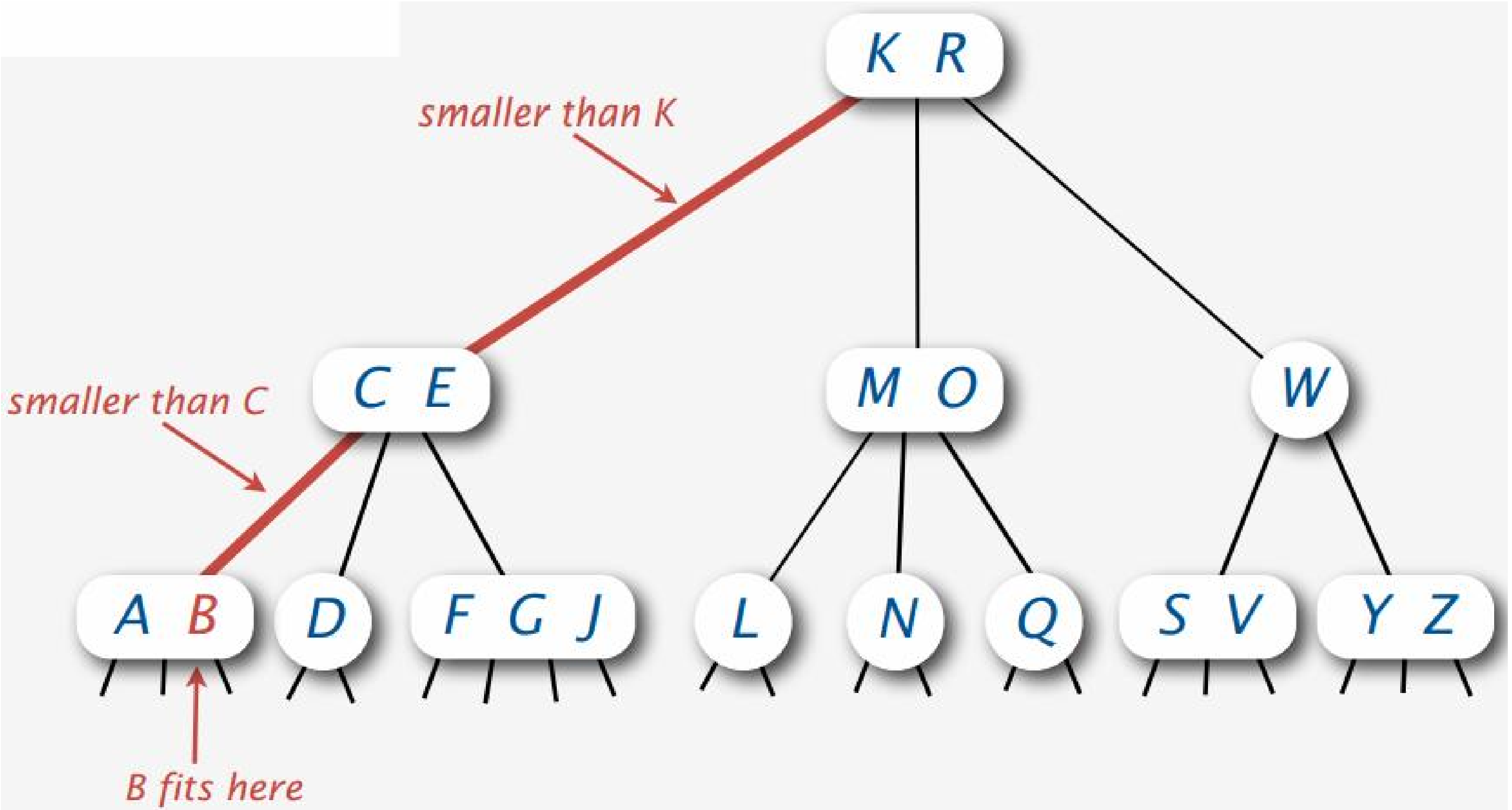
# 2-3-4树


K R
smaller than K
larger than R
between
K and R
C E
M O
W
A
D
F G J
L
N
Q
S V
Y Z

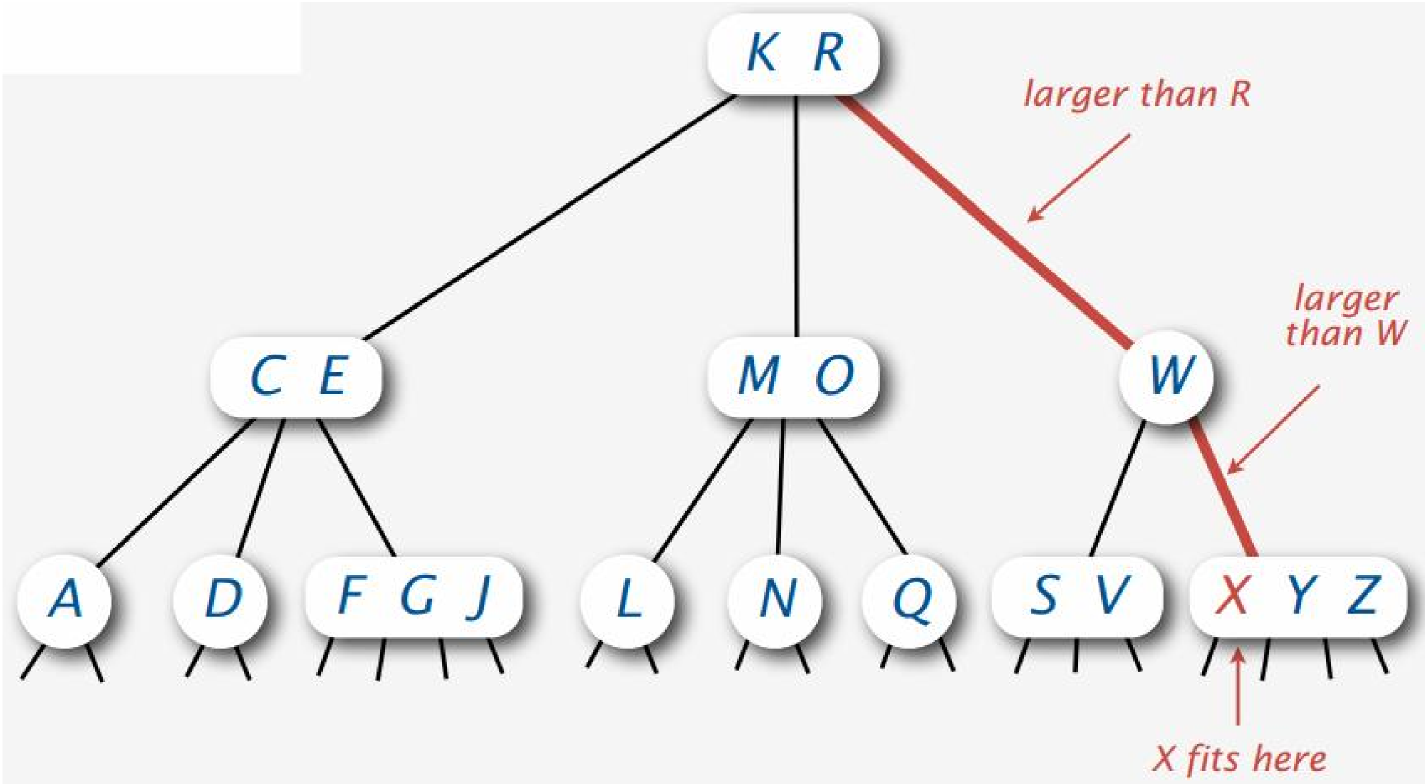
# 查找L



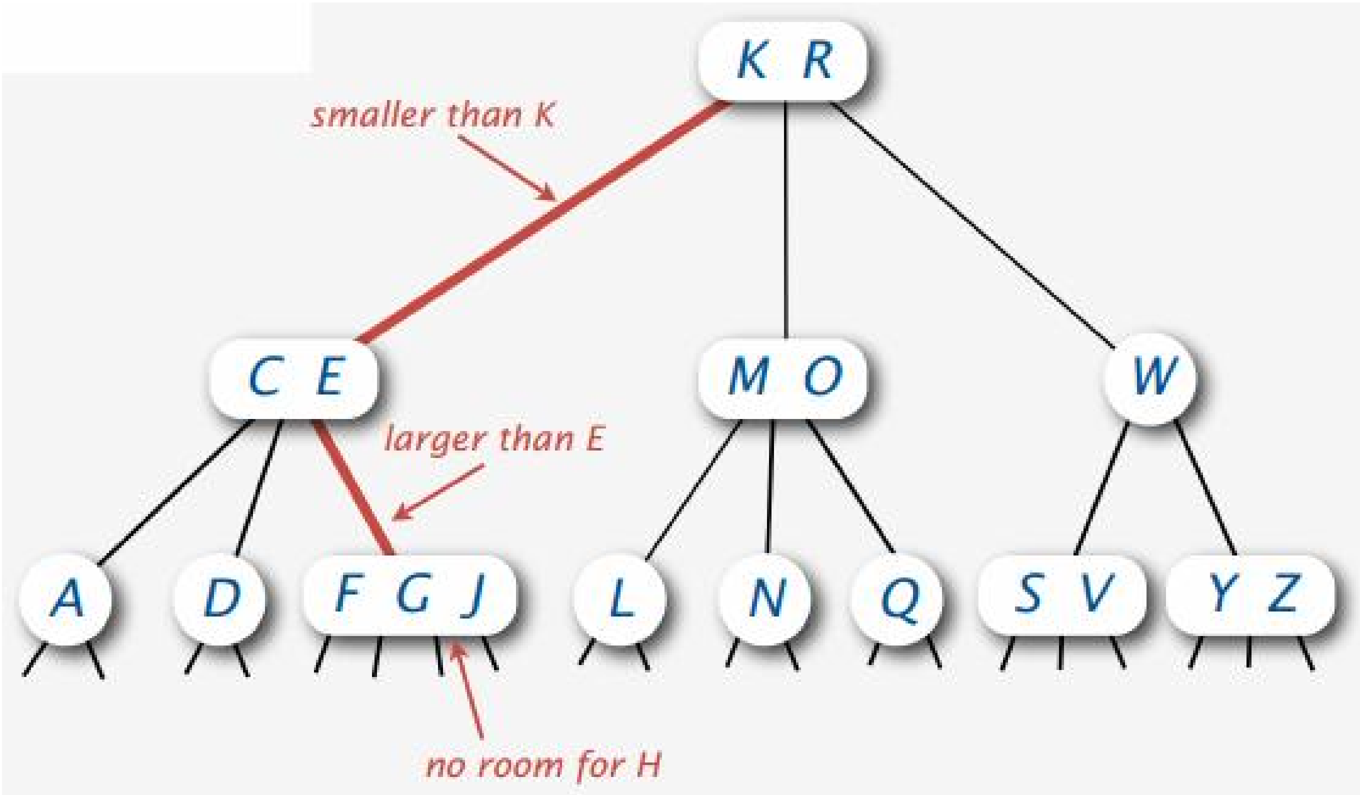
# 插入B


K R
smaller than K
C E
M O
W
smaller than C
A B
D
F G J
L
N
Q
S V
Y Z
B fits here

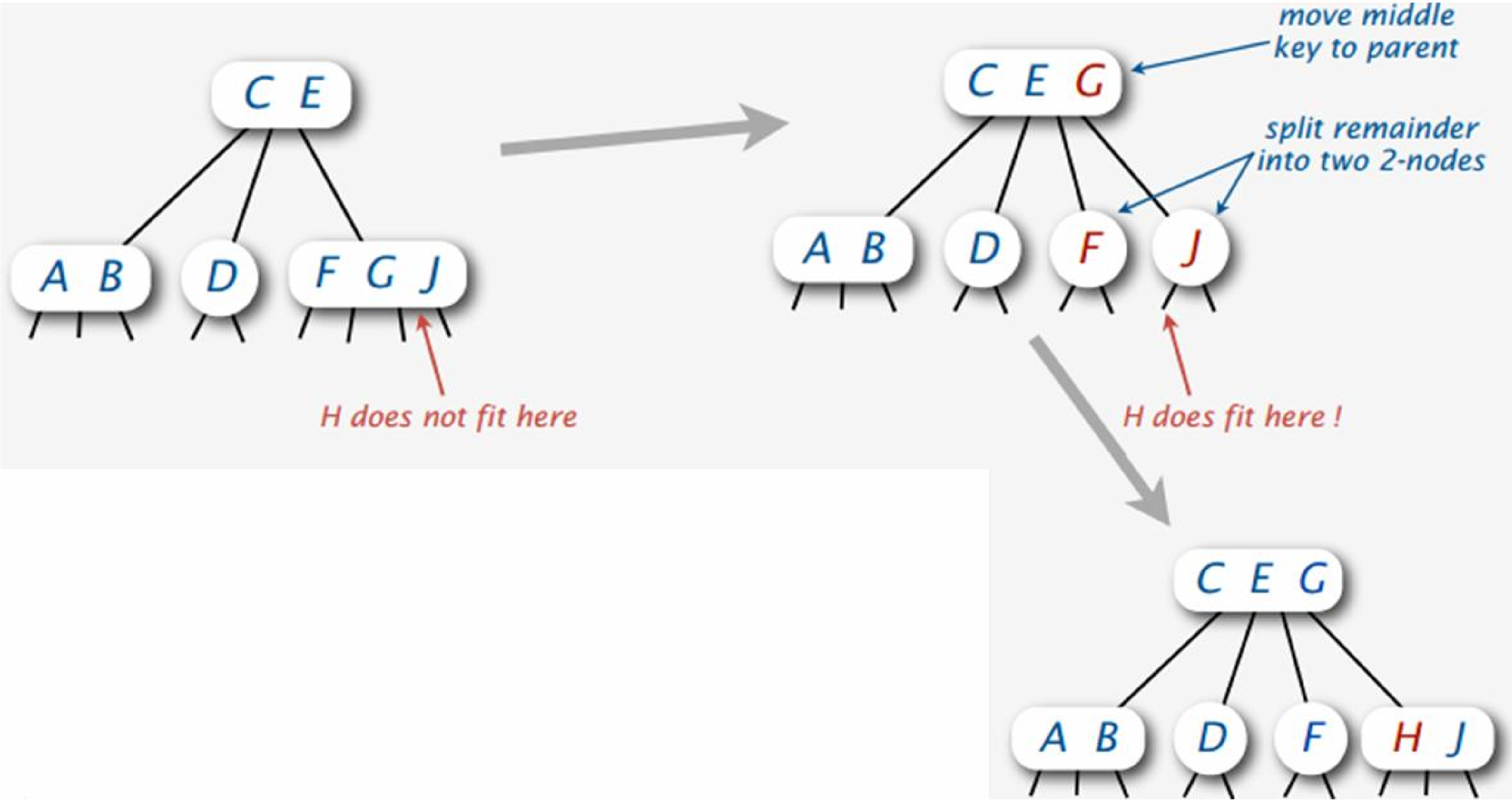
# 插入X


K R
larger than R
C E
M O
W
larger than W
A
D
F G J
L
N
Q
S V
X Y Z
X fits here

# 插入H


K R
smaller than K
C E
M O
W
larger than E
A
D
F G J
L
N
Q
S V
Y Z
no room for H

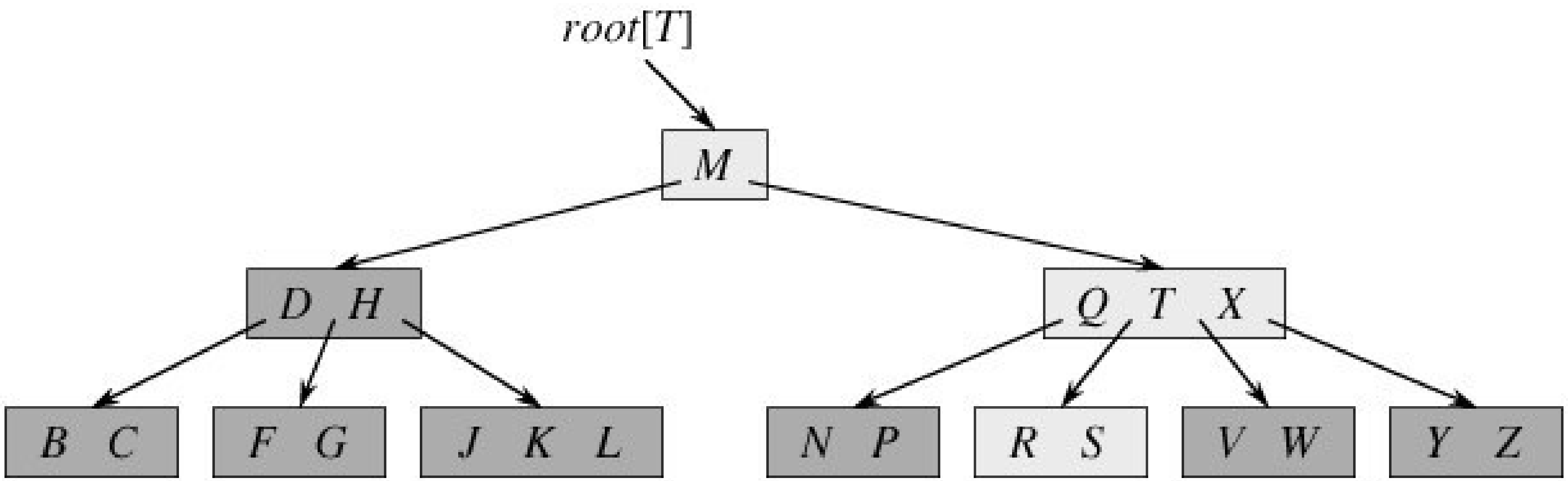
# 分裂节点


C E
A B
D
F G J
H does not fit here
move middle key to parent
C E G
split remainder into two 2-nodes
A B
D
F
J
H does fit here !
C E G
A B
D
F
H J

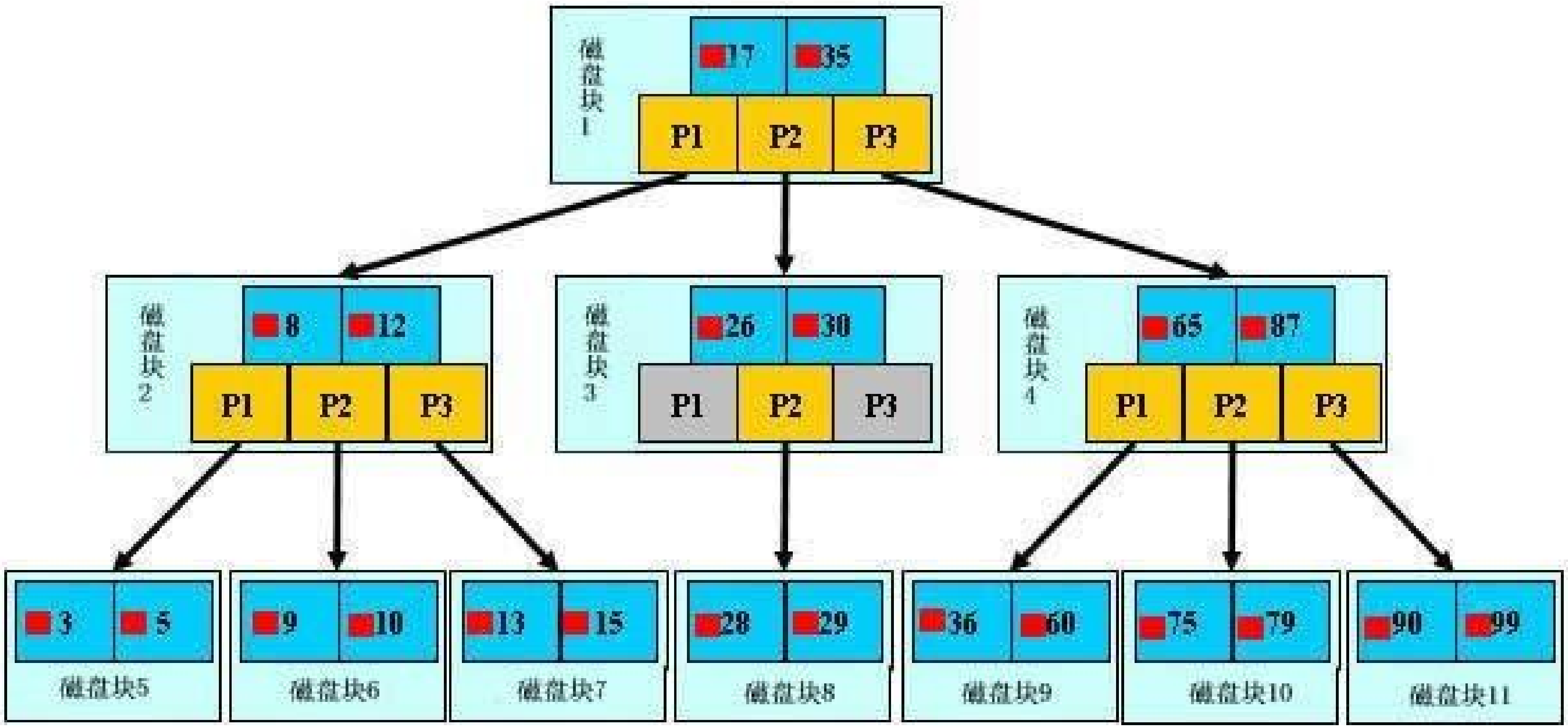
# B树的定义

- m阶B树需要满足的条件：
  - 每个结点至多有m个孩子；
  - 除根结点外，其他结点至少有m/2个孩子；
  - 根结点至少有2个孩子；
  - 所有叶结点在同一层；
  - 有α个孩子的非叶结点有α-1个关键字；结点内部，关键字递增排列。

# B树

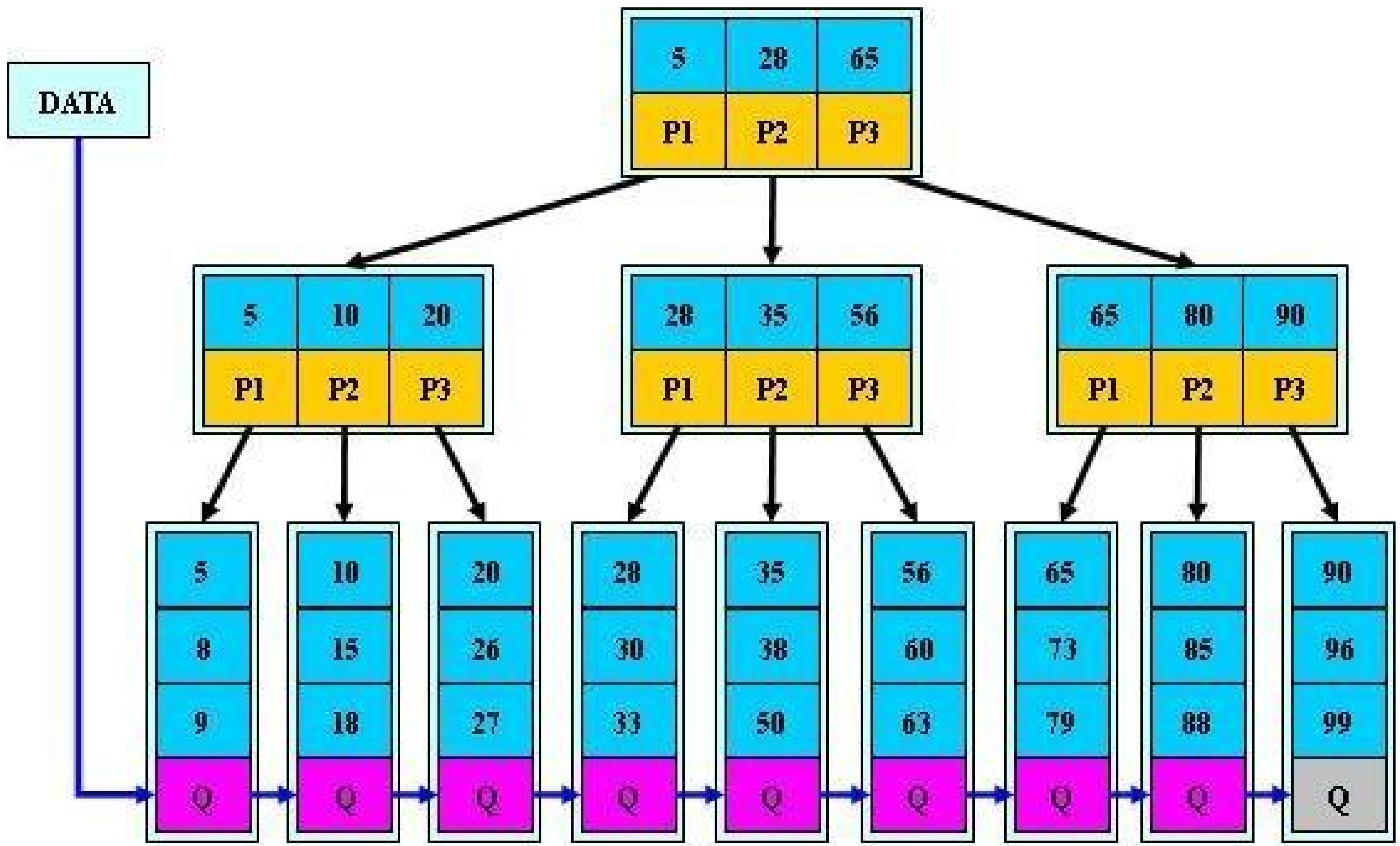


# B树



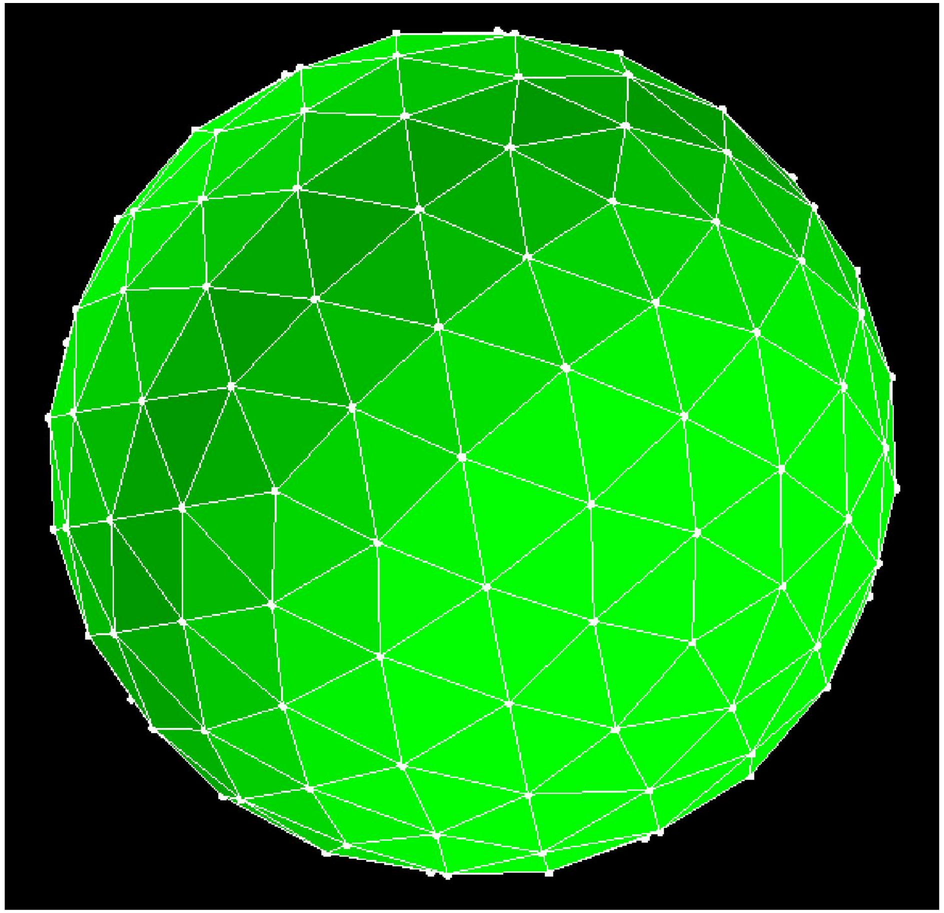
磁盘块1
17
35
P1
P2
P3
磁盘块2
8
12
P1
P2
P3
磁盘块3
26
30
P1
P2
P3
磁盘块4
65
87
P1
P2
P3
3
5
磁盘块5
9
10
磁盘块6
13
15
磁盘块7
28
29
磁盘块8
36
60
磁盘块9
75
79
磁盘块10
90
99
磁盘块11

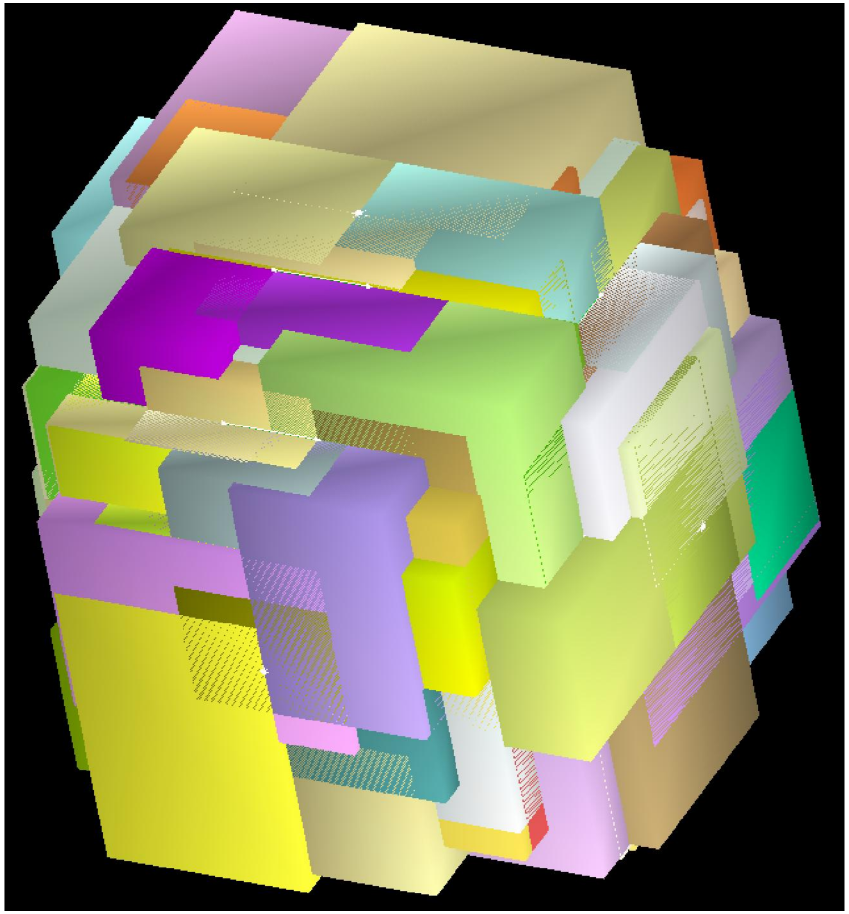
# B树的变种


DATA
5 28 65
P1 P2 P3
5 10 20
P1 P2 P3
28 35 56
P1 P2 P3
65 80 90
P1 P2 P3
5 8 9 Q
10 15 18 Q
20 26 27 Q
28 30 33 Q
35 38 50 Q
56 60 63 Q
65 73 79 Q
80 85 88 Q
90 96 99 Q

# 二维上的B树——R树

# 三维空间中的R树





# 参考文献


- 陈海波，王申康，RTree的查询代价模型分析及算法改进，计算机辅助设计与图形学学报[J]， 15,2003(3)
- 程昌秀，矢量数据多尺度空间索引方法的研究，武汉大学学报·信息科学版[J], 34,2009(5)
- Eric Redmond, etc, 王海鹏等 译，七周七数据库[M], 7th,2013
- http://www.cnblogs.com/aiyelinglong/archive/2012/03/27/2419972.html(二叉树)
- http://m.blog.csdn.net/blog/zh_qd1014/6879083(LCA&RMQ)
- http://www.redisbook.com/en/latest/toc.html(Redis&Hash)
- http://www.cse.yorku.ca/~oz/hash.html(djb2 Hash)
- http://blog.csdn.net/jsjwk/article/details/7964108(rehash)
- http://zh.wikipedia.org/wiki/Murmur%E5%93%88%E5%B8%8C(MurmurHash)
- http://baike.baidu.com/view/676861.htm(倒排索引)
- http://www.coderplusplus.com/?p=393(笛卡尔树)
- http://wenku.baidu.com/view/c197275e804d2b160b4ec0c4.html（LCA&RMQ）
- http://blog.163.com/clevertanglei900@126/blog/static/1113522592011914148467/(单链公共结点问题)
- http://baike.baidu.com/view/6667519.htm(笛卡尔树)
- http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%AC%9B%E5%8D%A1%E5%B0%94%E6%A0%91 (笛卡尔树)
- http://m.blog.csdn.net/blog/zh_qd1014/6879083 （LCA&RMQ）

# 我们在这里

- 更多算法面试题在 7 七月算法
  - http://www.julyedu.com/
    - 免费视频
    - 直播课程
    - 问答社区
- contact us：微博
  - @研究者July
  - @七月问答
  - @邹博_机器学习

感谢大家

恳请大家批评指正！