Algoritmo de Prim

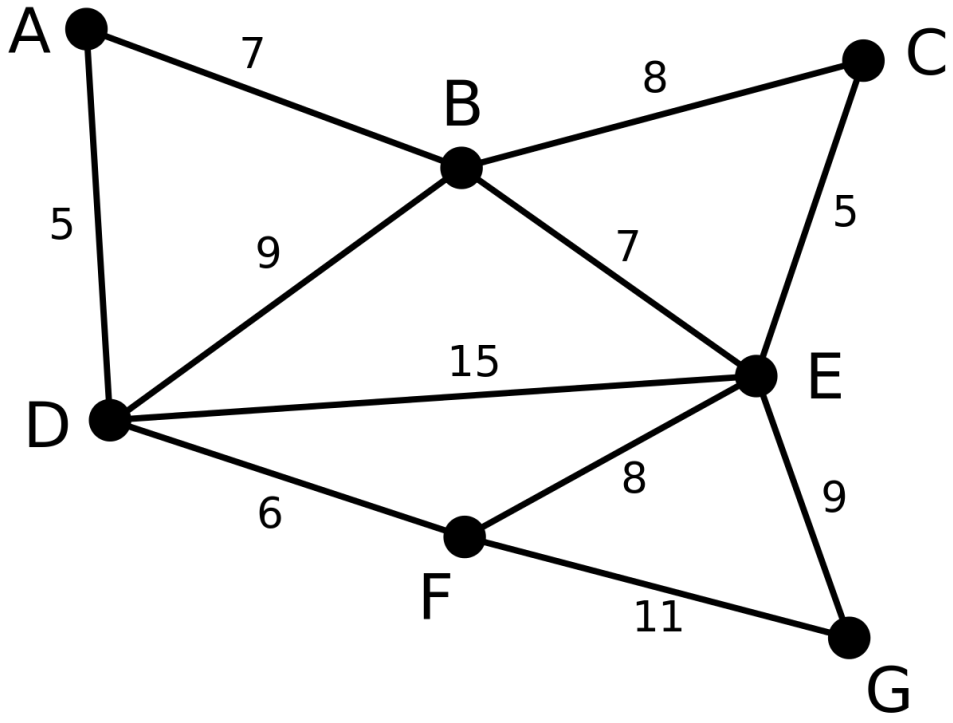
Estructuras de Datos

Grado en Ingeniería Informática, del Software y de Computadores

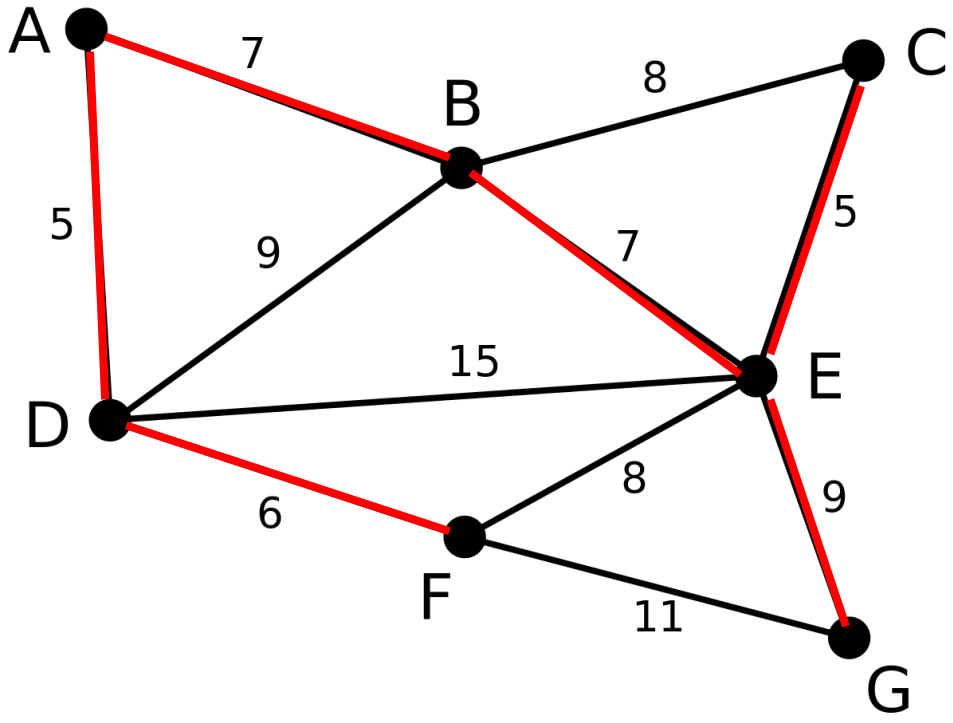
Objetivo del algoritmo de Prim

- Dado un grafo no orientado, conexo y con pesos, encontrar un árbol de expansión de peso mínimo
- El peso del árbol de expansión es la suma de los pesos de las aristas que lo componen
- Se trata de un algoritmo voraz: en cada paso elige el mínimo local

Dado el siguiente grafo



Obtenemos el siguiente árbol



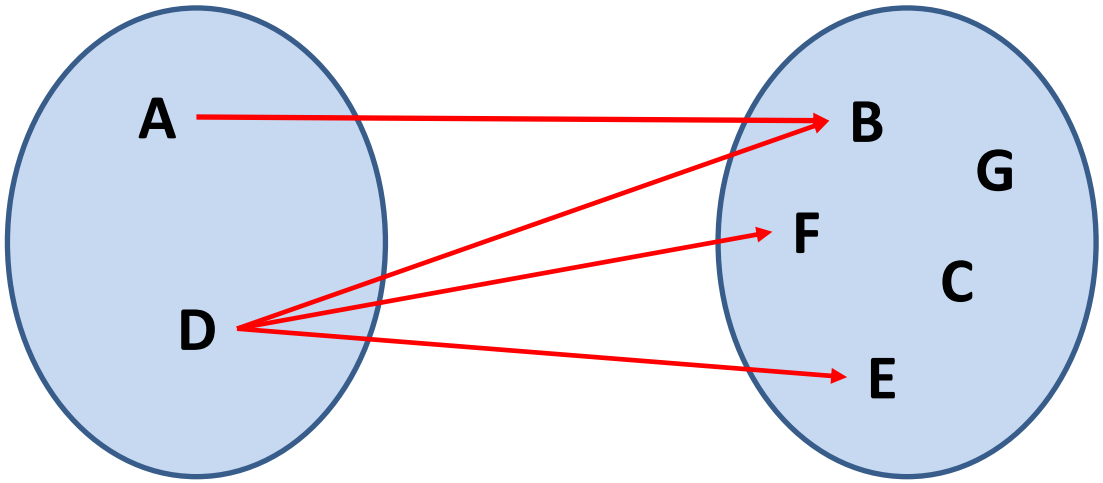
Estructuras de datos del algoritmo

El algoritmo maneja tres estructuras:

- VS = conjunto de nodos visitados
- RS = conjunto de nodos por visitar
- ST = árbol de expansión con nodos en VS

Corte y cruce de un grafo

- **Corte**: partición de sus vértices en dos conjuntos disjuntos
- **Cruce**: arista que une vértices de conjuntos distintos de un corte

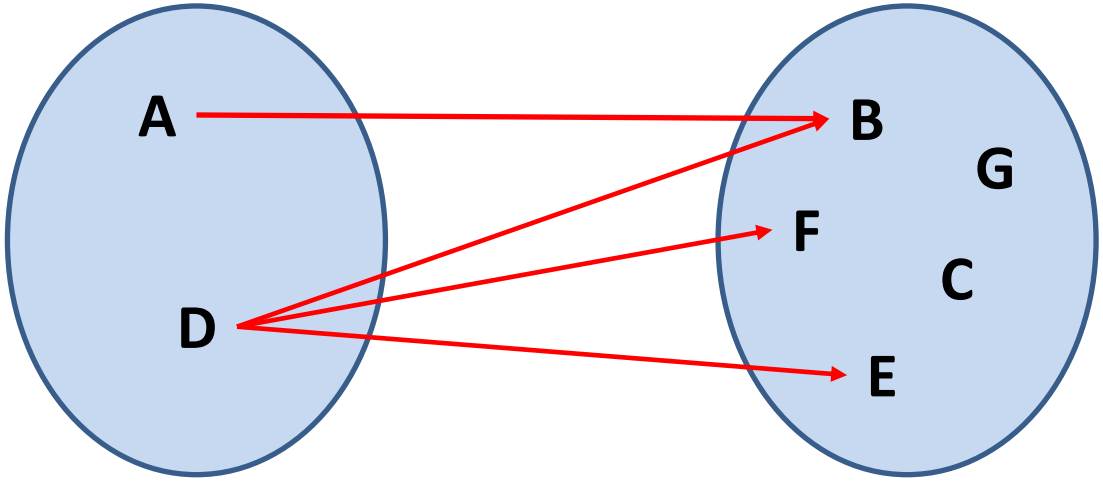


Prim, cortes y cruces

- VS y RS forman un corte
- En cada paso se determinan los cruces (v, r)

de VS a RS y se selecciona el mínimo

- El vértice r pasa de RS a VS



El algoritmo de Prim

Dados G=(V, E) y v0 un vértice cualquiera de G

1. Inicializar VS = {v0}, RS = V \ {v0}, ST = {}
2. Mientras RS no sea vacío

   Sea (v, w, r) una arista de menor coste w de un vértice v de VS a un vértice r de RS

   VS = VS U {r}

   RS = RS \ {r}

   ST = ST U {(v, w, r)}
3. Devolver ST

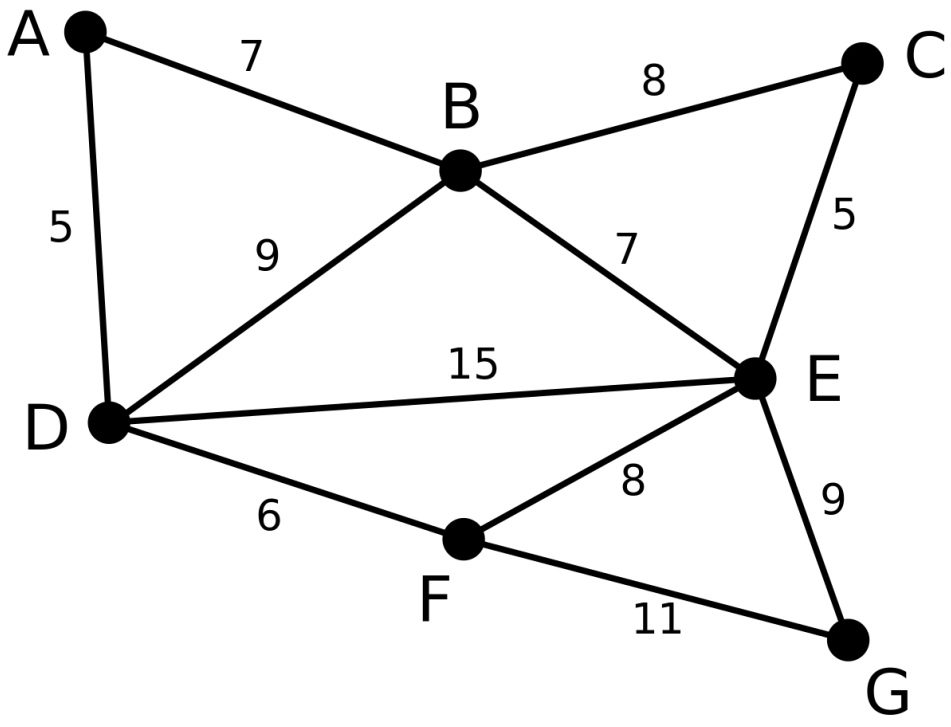
Inicialización

- Elegir inicial: D

VS = {D}

RS = {A, B, C, E, F, G}

ST = {}



Añadir la arista más ligera de VS a RS

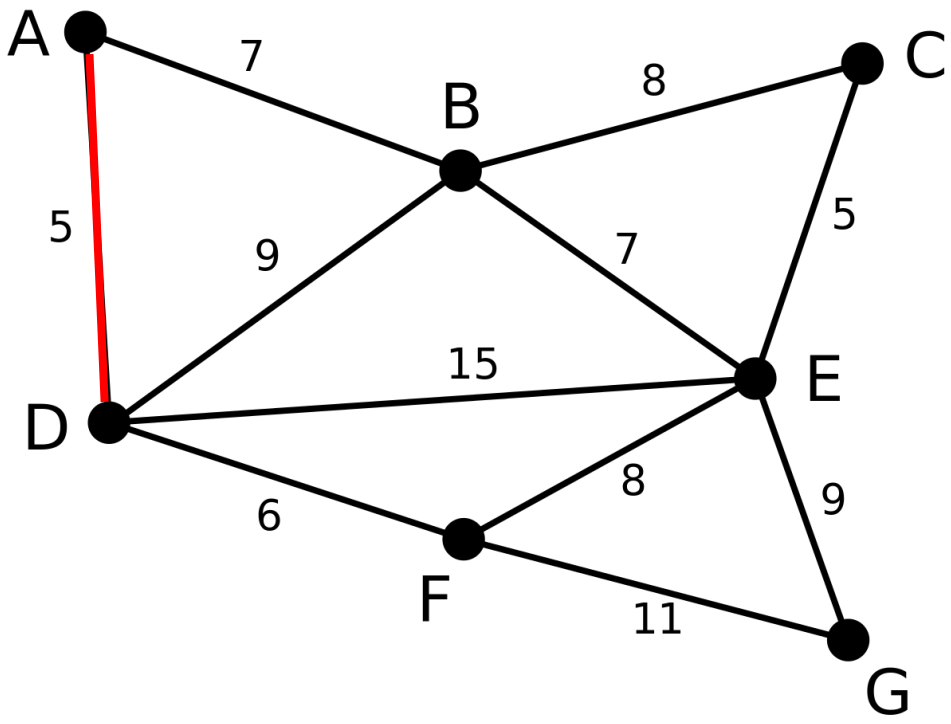
VS = {D}

RS = {A, B, C, E, F, G}

ST = {}

Aristas de VS a RS:

- D 5 A
- D 9 B
- D 15 E
- D 6 F



Añadir la arista más ligera de VS a RS

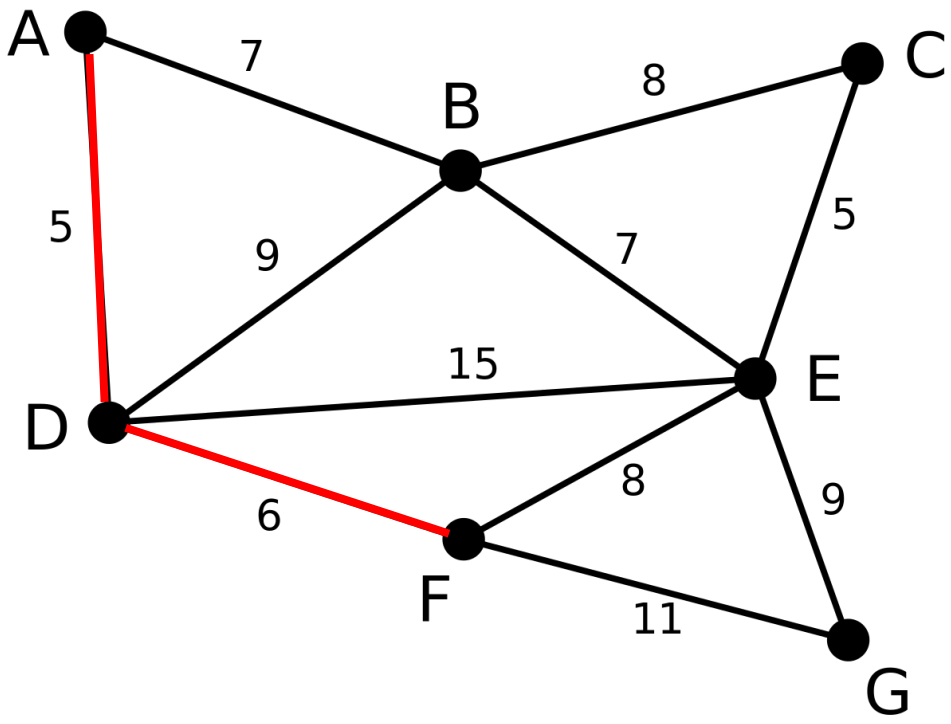
VS = {D, A}

RS = {B, C, E, F, G}

ST = {(D, A)}

Aristas de VS a RS:

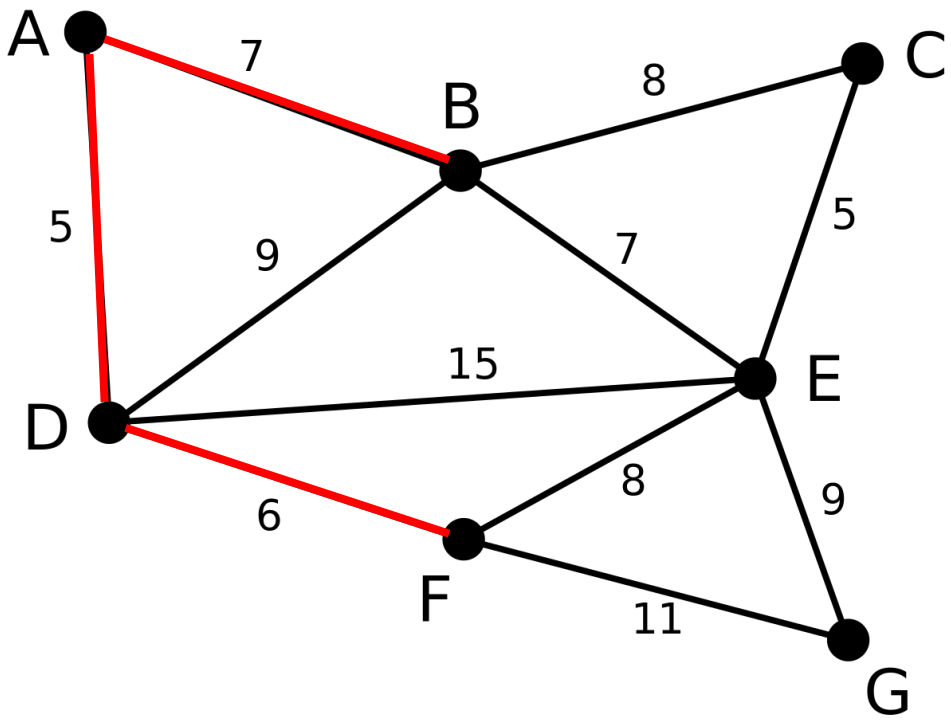
- D 9 B
- D 15 E
- D 6 F
- A 7 B



Añadir la arista más ligera de VS a RS

VS = {D, A, F}
RS = {B, C, E, G}
ST = {(D, A), (D, F)}
Aristas de VS a RS:

- D 9 B
- D 15 E
- A 7 B
- F 8 E
- F 11 G



Añadir la arista más ligera de VS a RS

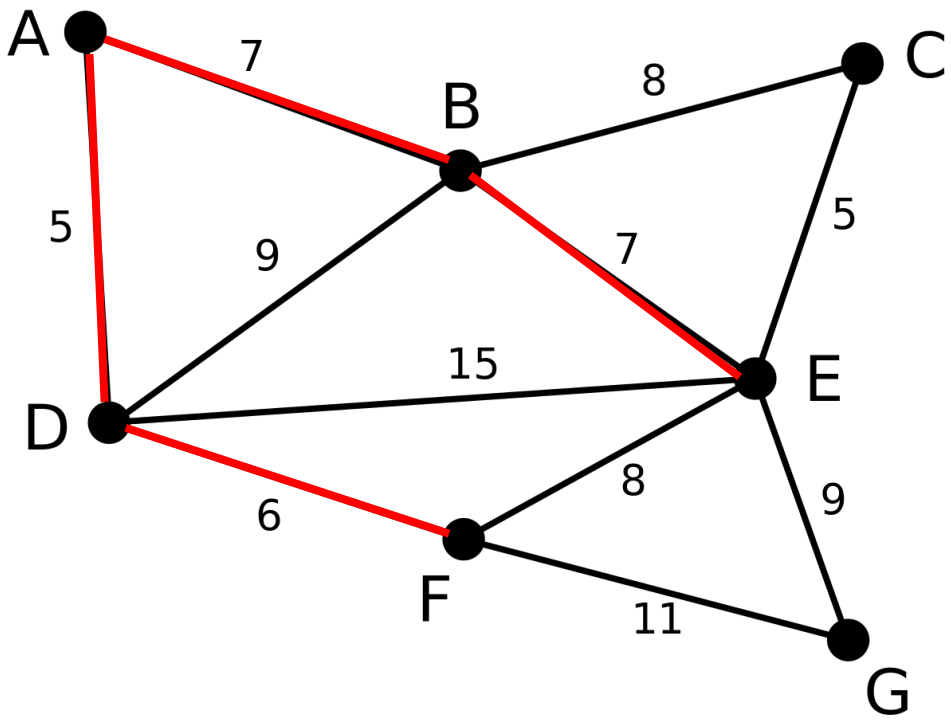
VS = {D, A, F, B}

RS = {C, E, G}

ST = {(D, A), (D, F), (A, B)}

Aristas de VS a RS:

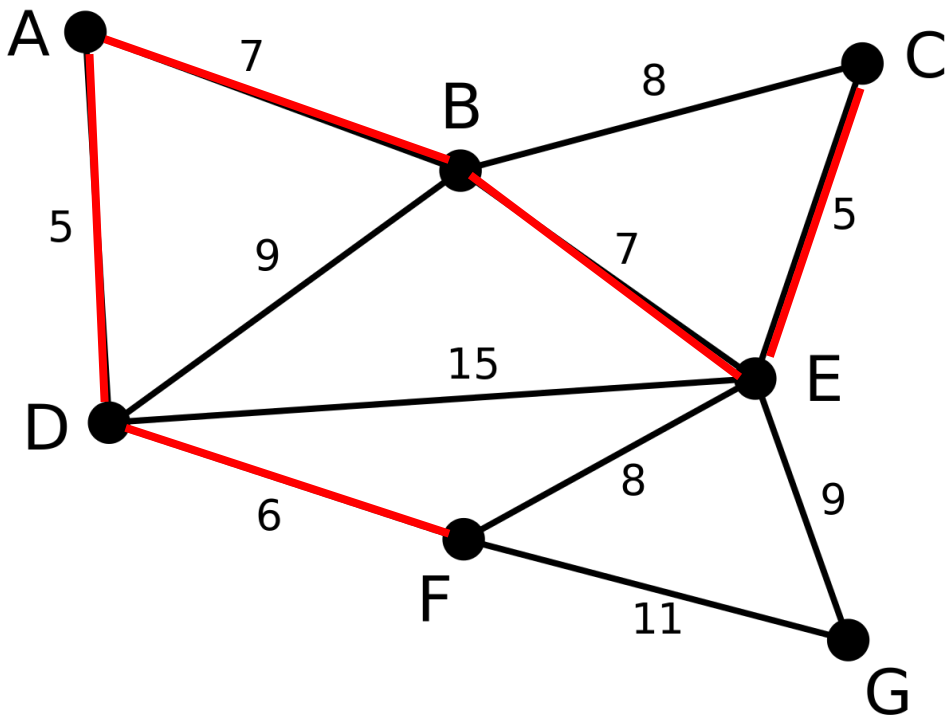
- D 15 E
- F 8 E
- F 11 G
- B 8 C
- B 7 E



Añadir la arista más ligera de VS a RS

VS = {D, A, F, B, E}
RS = {C,G}
ST = {(D, A), (D, F), (A, B),
(B, E)}
Aristas de VS a RS:

- D 15 E
- F 8 E
- F 11 G
- B 8 C
- E 5 C
- E 9 G



Añadir la arista más ligera de VS a RS

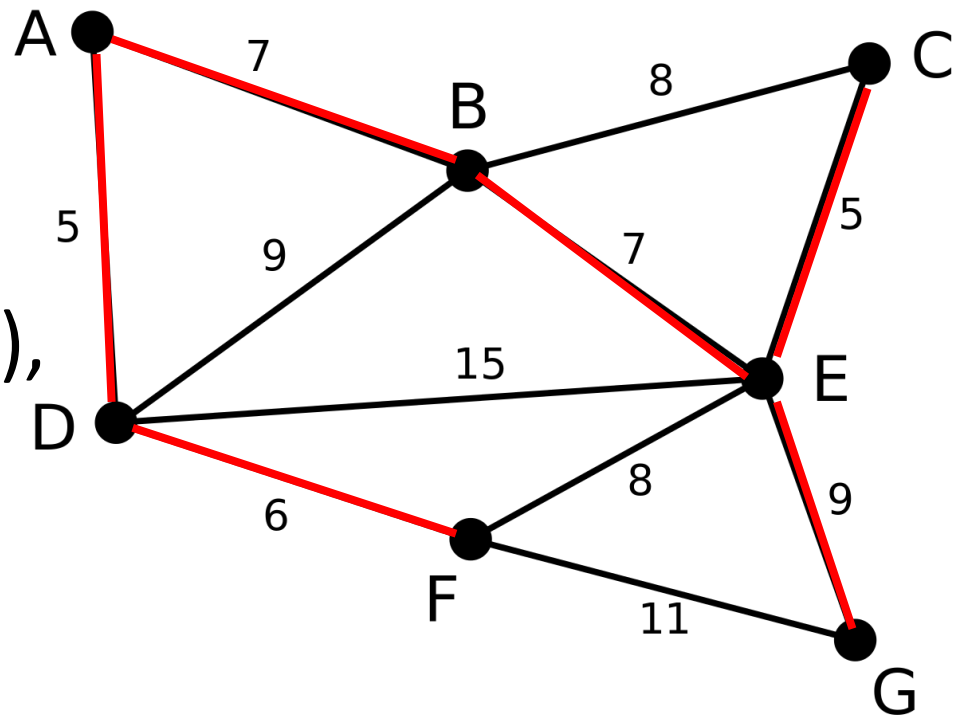
VS = {D, A, F, B, E, C}

RS = {G}

ST = {(D, A), (D, F), (A, B),
(B, E), (E, C)}

Aristas de VS a RS:

- F 11 G
- E 9 G

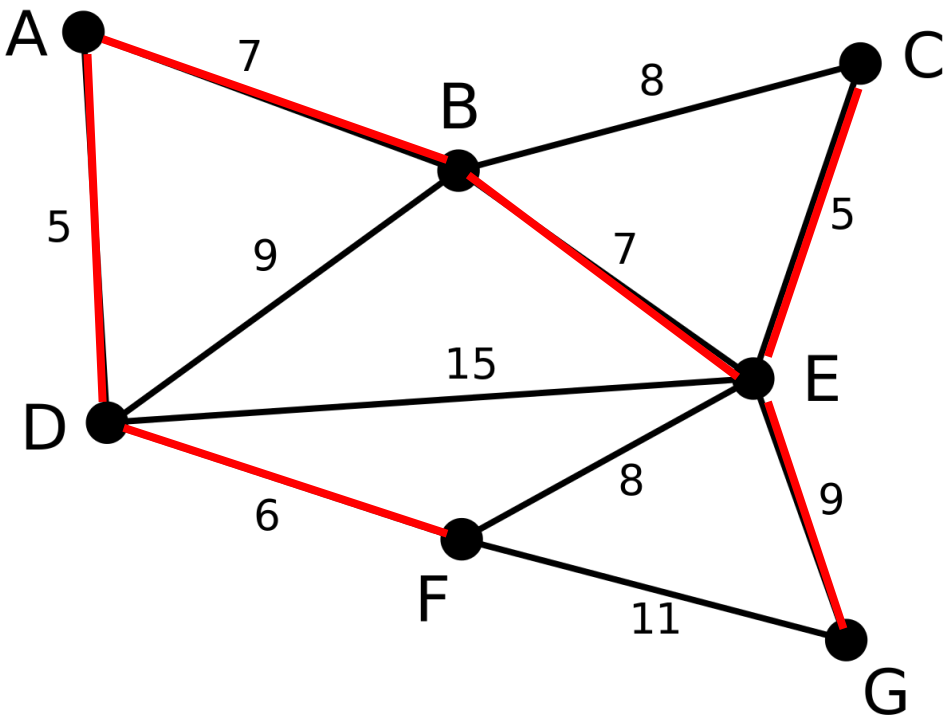


RS vacío, VS y ST completos

VS = {D, A, F, B, E, C, G}

RS = {}

ST = {(D,A), (D,F), (A,B),
(B,E), (E,C), (E,G)}



Grafos con peso en Haskell

Tipo **`WeightedGraph a w`**

- **`a`** tipo de los vértices
- **`w`** tipo del peso de las aristas

Dos constructores:

- **`mkWeightedGraphAdj`**
- **`mkWeightedGraphEdges`**

Un grafo con peso en Haskell

```
data WeightedEdge a w = WE a w a

g1 :: WeightedGraph Char Int
g1 = mkWeightedGraphEdges
        ['a', 'b', 'c', 'd', 'e']
        [ WE 'a' 3 'b', WE 'a' 7 'd'
        , WE 'b' 4 'c', WE 'b' 2 'd'
        , WE 'c' 5 'd', WE 'c' 6 'e'
        , WE 'd' 5 'e'
        ]
```

Sucesores de un nodo

```
successors :: WeightedGraph a w -> a -> [(a, w)]

> successors g1 'a'
[('b',3),('d',7)]
```

El tipo **Ordering**

```
data Ordering = LT | EQ | GT

compare :: Ord a => a -> a -> Ordering

> compare 5 5
EQ
> compare 5 6
LT
> compare 6 5
GT
```

La función **comparaArcos**

Compara los arcos teniendo en cuenta solo los pesos:

```
> comparaArcos (WE 'a' 3 'c') (WE 'b' 1 'd')
GT

> comparaArcos (WE 'a' 3 'c') (WE 'b' 3 'd')
EQ
```

La función **minimumBy**

```
minimumBy :: (a -> a -> Ordering) -> [a] -> a

> minimumBy comparaArcos [WE 'a' 3 'b',
                          WE 'a' 2 'c',
                          WE 'a' 7 'd']
WE 'a' 2 'c'

> minimumBy comparaArcos [WE 'a' 3 'b',
                          WE 'x' 2 'y']
WE 'x' 2 'y'
```