

Estructuras de Datos.

Grado en Informática, Ingeniería del Software y Computación

ETSI Informática

Universidad de Málaga

Orden Topológico en Digrafos

@ José E. Gallardo, Francisco Gutiérrez, Pablo López, Blas C. Ruiz

Dpto. Lenguajes y Ciencias de la Computación

Universidad de Málaga

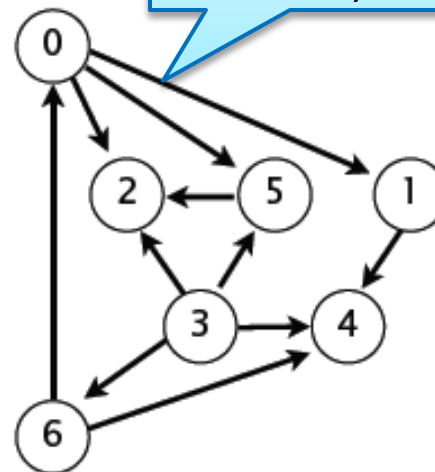
Orden Topológico en DiGrafos

- Dado un DiGrafo acíclico (DAG, Directed Acyclic Graph), un **orden Topológico** es una relación de orden total (\prec) entre vértices tal que:
 - Si existe un arco desde v a w , entonces w es mayor que v en el orden.
$$v \rightarrow w \implies v \prec w$$
- Un DiGrafo puede tener diferentes Ordenes Topológicos
- Si el DiGrafo es cíclico, el Orden Topológico no existe 😞

Orden Topológico en DiGrafos

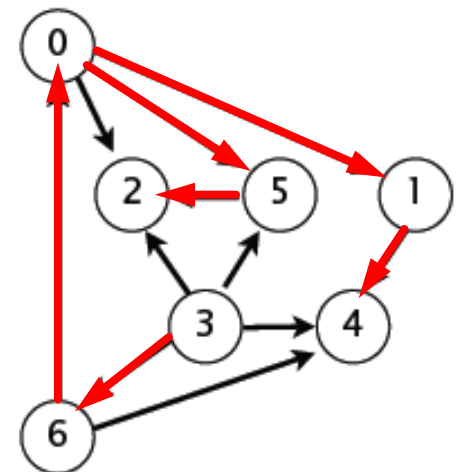
- **Objetivo:** dado un conjunto de tareas que deben terminar antes que otras comiencen (prerrequisitos),
¿En qué orden deben ser planificadas las tareas?
- Modelado por un DiGrafo.
 - vértice= tarea
 - Arco = prerrequisito.

0. Algorithms
1. Complexity Theory
2. Artificial Intelligence
3. Intro to CS
4. Cryptography
5. Scientific Computing
6. Advanced Programming



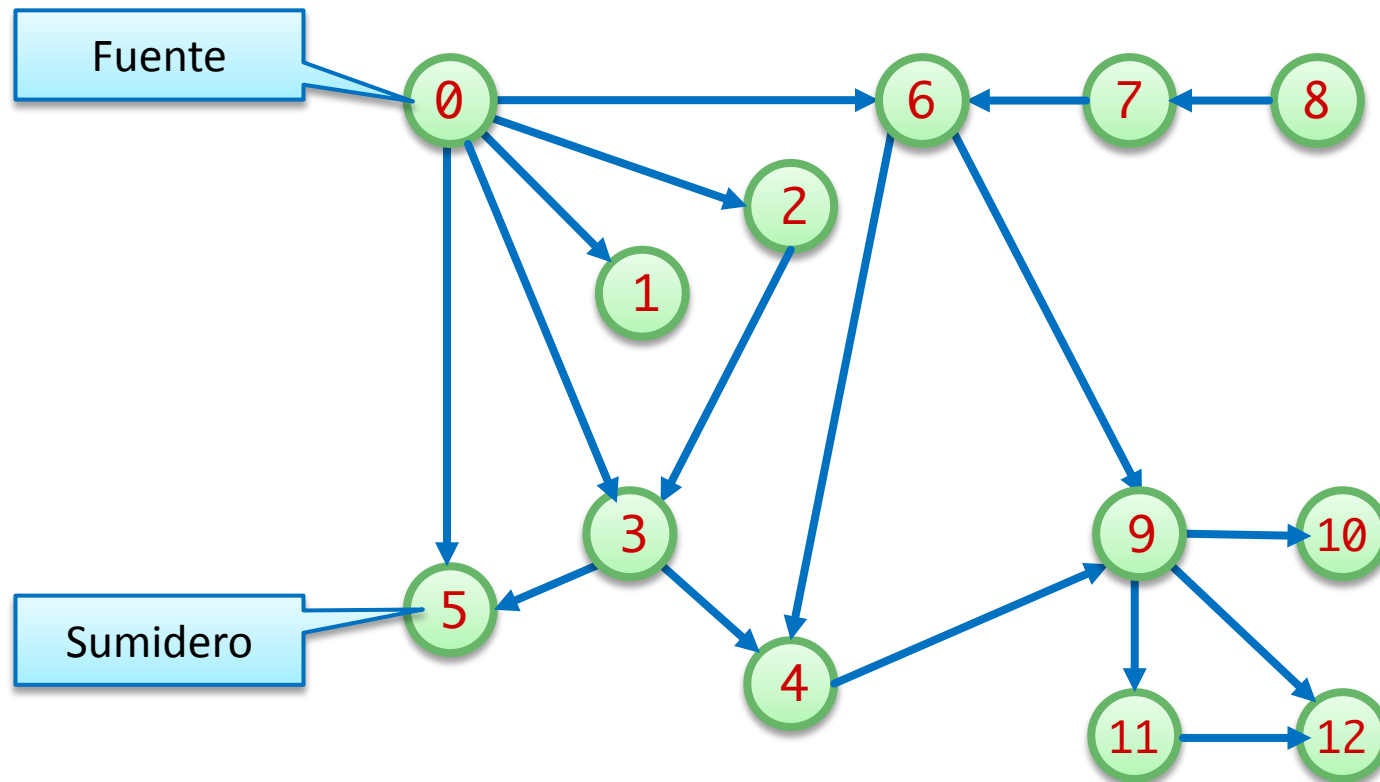
Dos Órdenes Topológicos

3 < 6 < 0 < 5 < 2 < 1 < 4
3 < 6 < 0 < 1 < 4 < 5 < 2



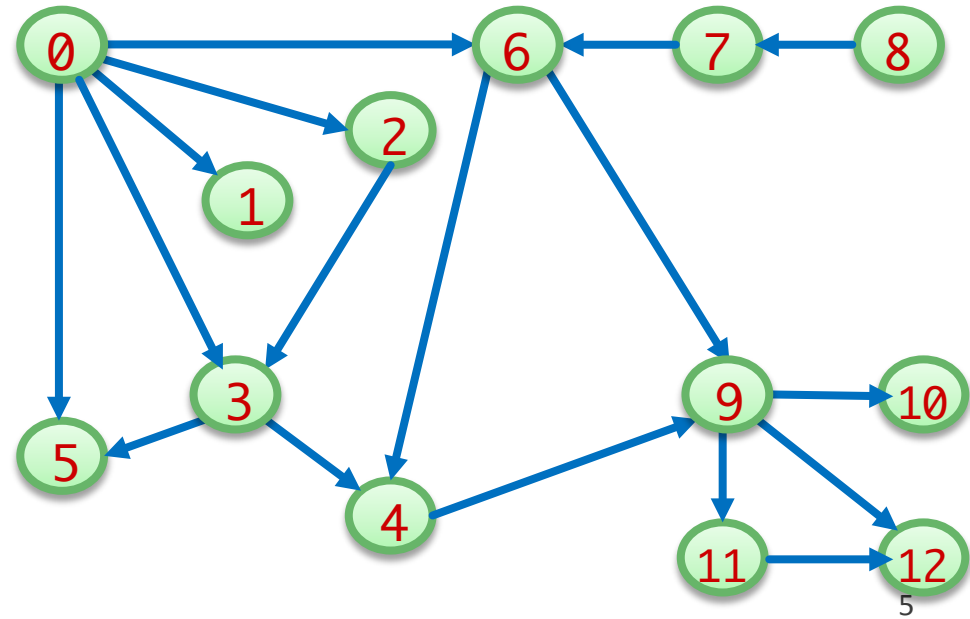
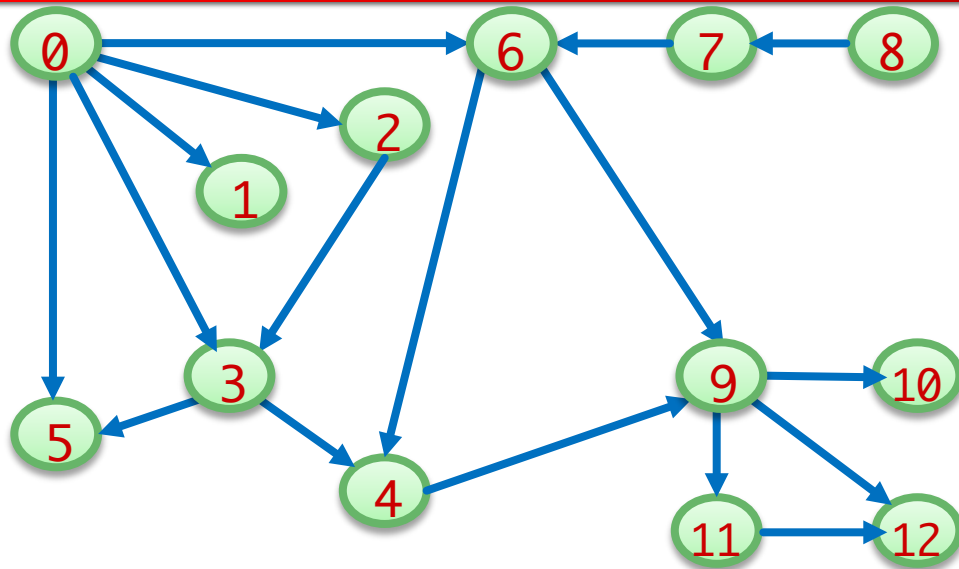
Orden Topológico en DiGrafos

- **Fuente:** vértice cuyo grado de entrada es 0
- **Sumidero:** vértice cuyo grado de salida es 0

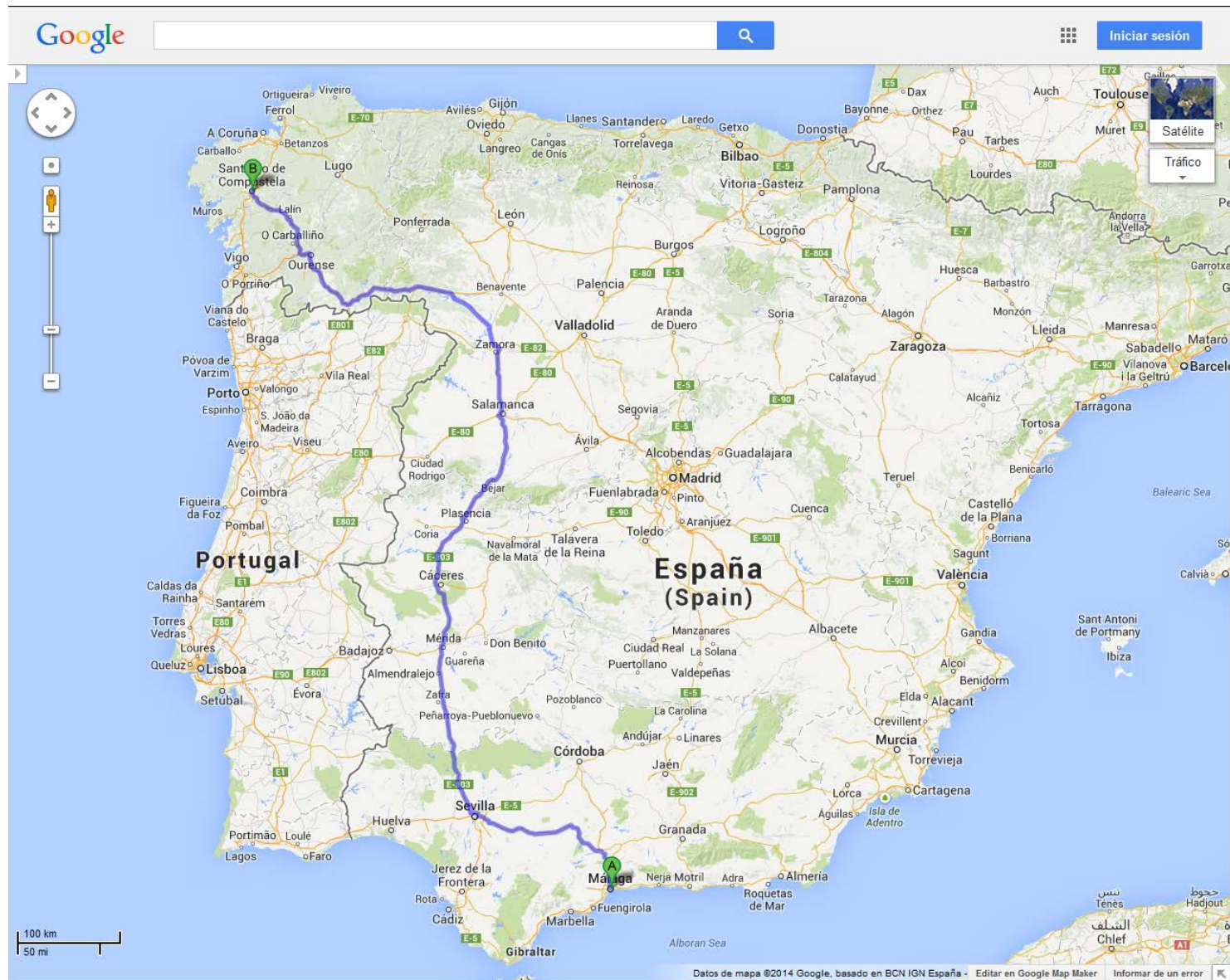


Orden Topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9 < 10 < 11 < 12

El algoritmo visto en clase clona el grafo



Clonar no siempre es adecuado



Un algoritmo que no clona el grafo

- Utilizaremos un diccionario:
 vértice -> # predecesores pendientes
 (# significa *número de*)
- El diccionario se inicializa al comenzar
- El diccionario se actualiza en cada iteración, eliminando fuentes y restando predecesores pendientes
- El grafo **no se modifica**

Pseudocódigo

Inicializar diccionario

Mientras no hayamos acabado ni haya ciclo

 Seleccionar fuentes del diccionario

 Eliminar fuentes del diccionario

 Añadir fuentes al orden topológico

 Restar fuentes del diccionario

Orden Topológico en DiGrafos

Inicializamos diccionario con grados de entrada

vértice -> # predecesores pendientes

0 -> 0

1 -> 1

2 -> 1

3 -> 2

4 -> 2

5 -> 2

6 -> 2

7 -> 1

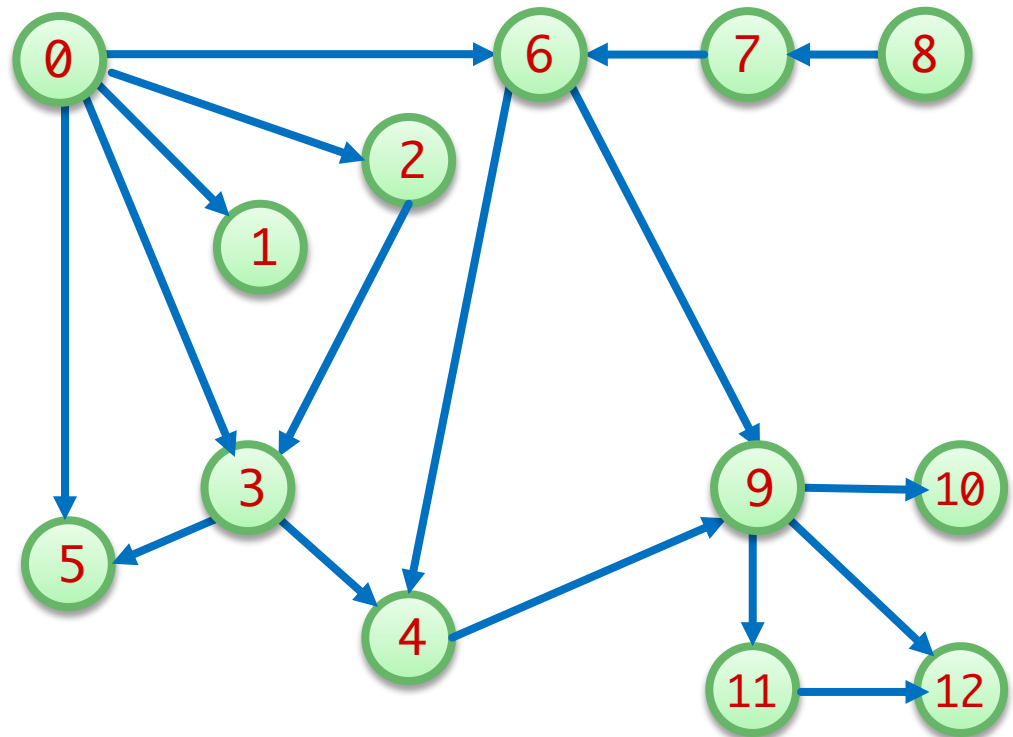
8 -> 0

9 -> 2

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



Orden Topológico en DiGrafos

Seleccionamos fuentes $F = \{0, 8\}$

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

0 \rightarrow 0

1 \rightarrow 1

2 \rightarrow 1

3 \rightarrow 2

4 \rightarrow 2

5 \rightarrow 2

6 \rightarrow 2

7 \rightarrow 1

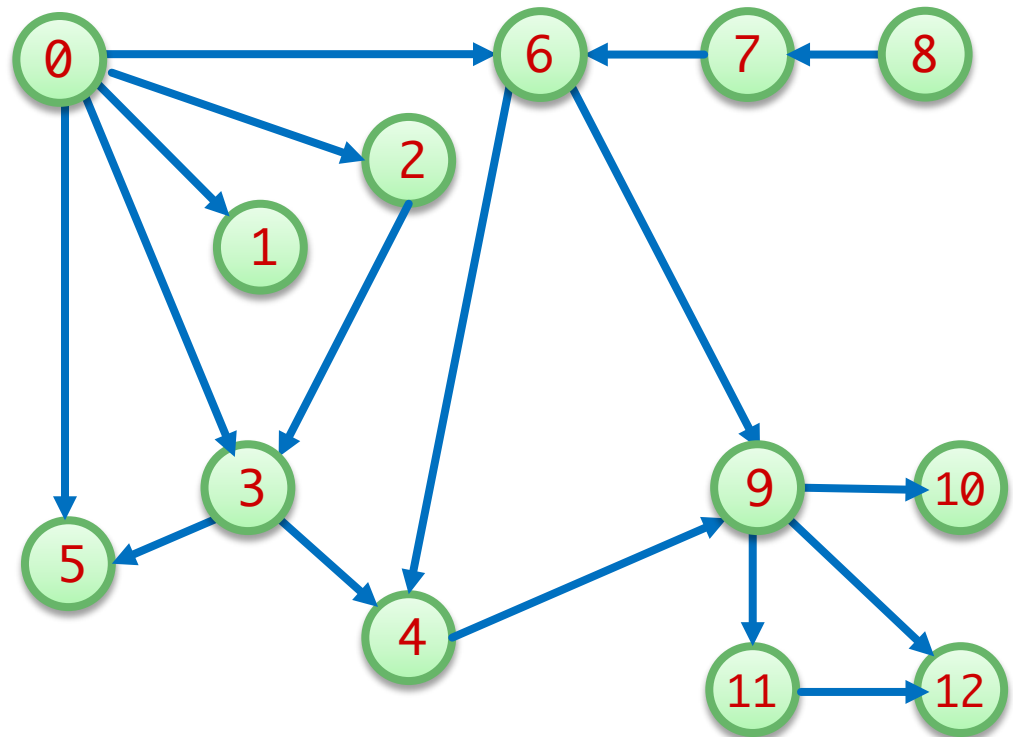
8 \rightarrow 0

9 \rightarrow 2

10 \rightarrow 1

11 \rightarrow 1

12 \rightarrow 2

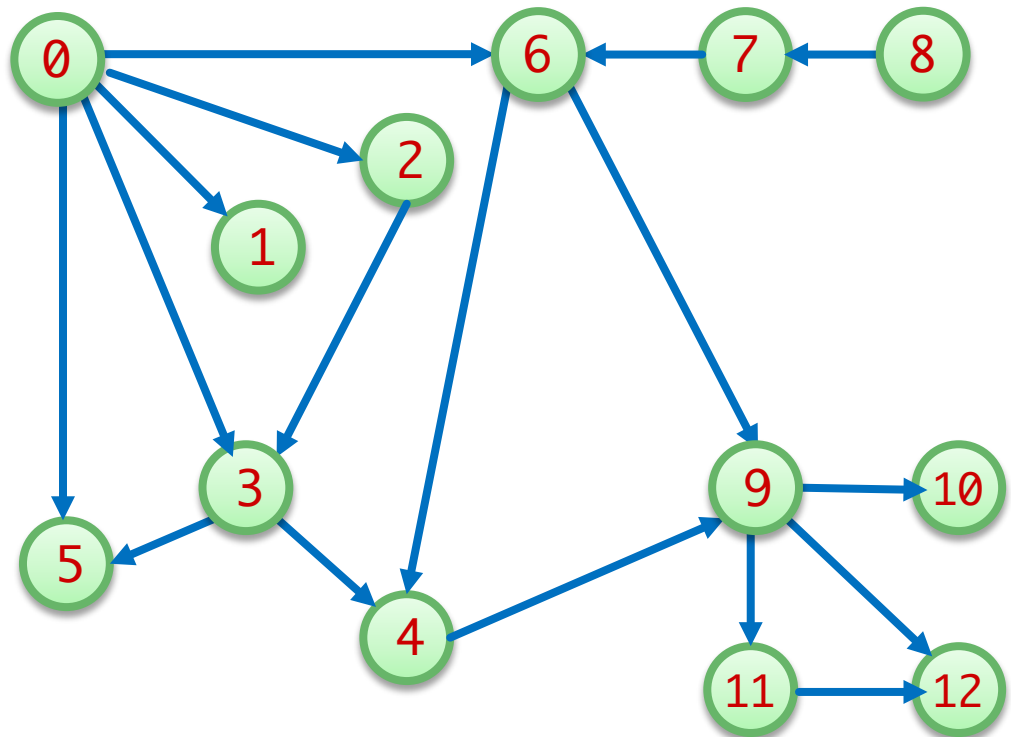


Orden Topológico en DiGrafos

Eliminamos fuentes $F = \{0, 8\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

1 -> 1
2 -> 1
3 -> 2
4 -> 2
5 -> 2
6 -> 2
7 -> 1
9 -> 2
10 -> 1
11 -> 1
12 -> 2



Orden Topológico en DiGrafos

Añadimos fuentes $F = \{0, 8\}$ al orden topológico

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

1 \rightarrow 1

2 \rightarrow 1

3 \rightarrow 2

4 \rightarrow 2

5 \rightarrow 2

6 \rightarrow 2

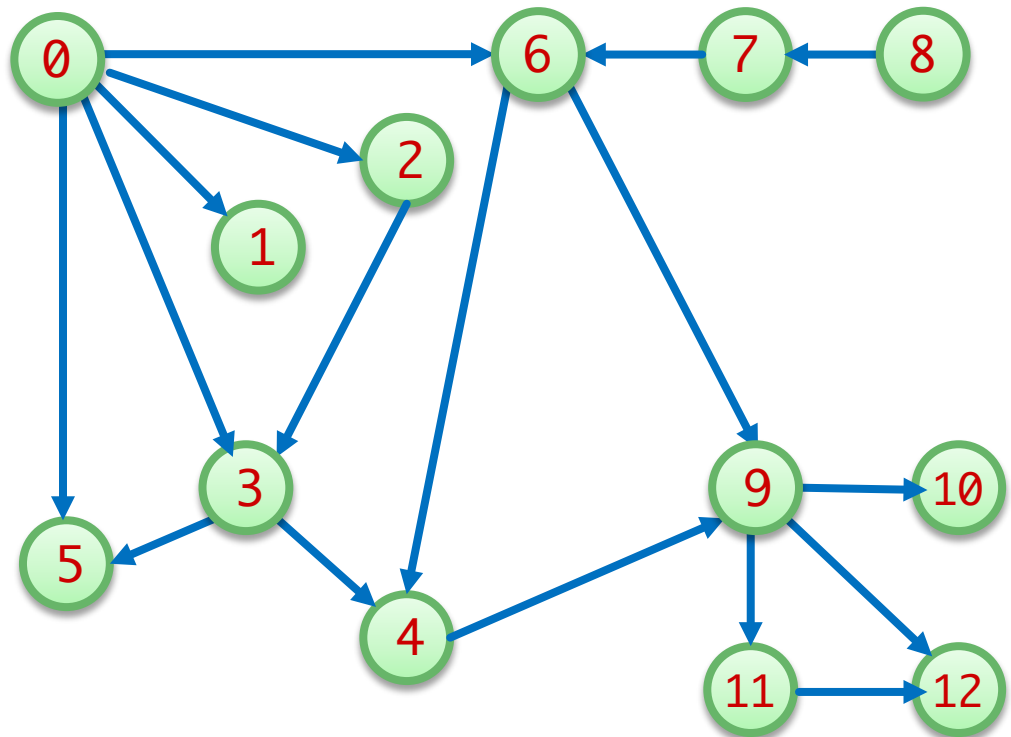
7 \rightarrow 1

9 \rightarrow 2

10 \rightarrow 1

11 \rightarrow 1

12 \rightarrow 2



Orden Topológico: $8 < 0$

Orden Topológico en DiGrafos

Restamos fuentes $F = \{0, 8\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

1 -> 0

2 -> 0

3 -> 1

4 -> 2

5 -> 1

6 -> 1

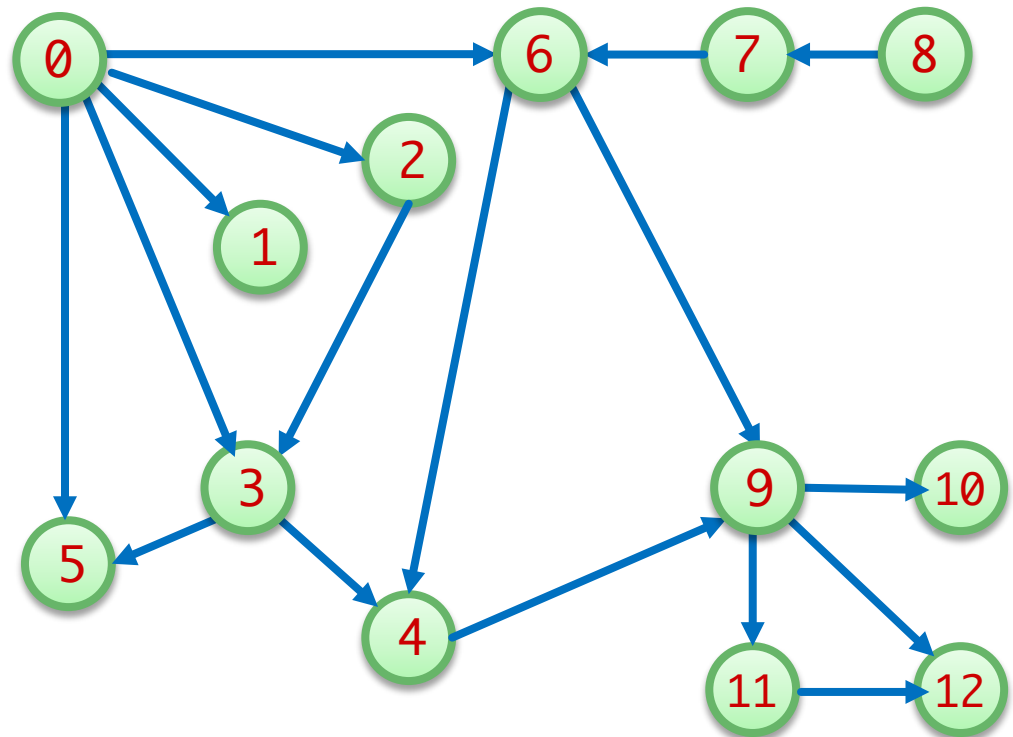
7 -> 0

9 -> 2

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



Orden Topológico: $8 < 0$

Orden Topológico en DiGrafos

Seleccionamos fuentes $F = \{1, 2, 7\}$

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

1 \rightarrow 0

2 \rightarrow 0

3 \rightarrow 1

4 \rightarrow 2

5 \rightarrow 1

6 \rightarrow 1

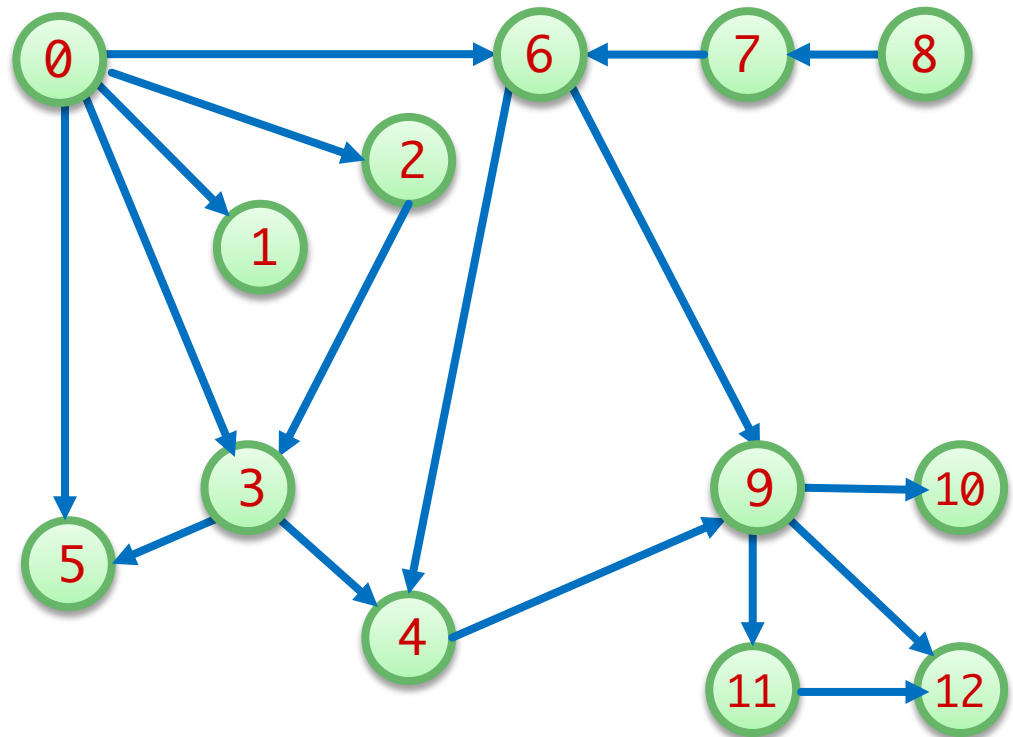
7 \rightarrow 0

9 \rightarrow 2

10 \rightarrow 1

11 \rightarrow 1

12 \rightarrow 2



Orden Topológico: 8 \prec 0

Orden Topológico en DiGrafos

Eliminamos fuentes $F = \{1, 2, 7\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

3 -> 1

4 -> 2

5 -> 1

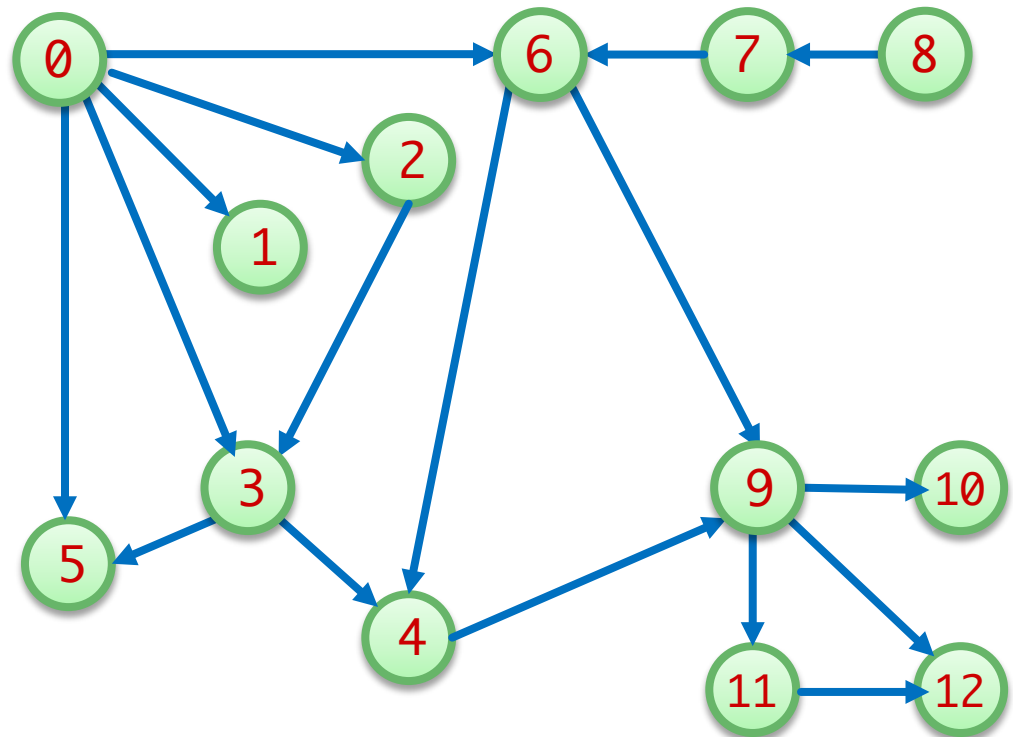
6 -> 1

9 -> 2

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



Orden Topológico: 8 < 0

Orden Topológico en DiGrafos

Añadimos fuentes $F = \{1, 2, 7\}$ al orden topológico

vértice -> # predecesores pendientes

3 -> 1

4 -> 2

5 -> 1

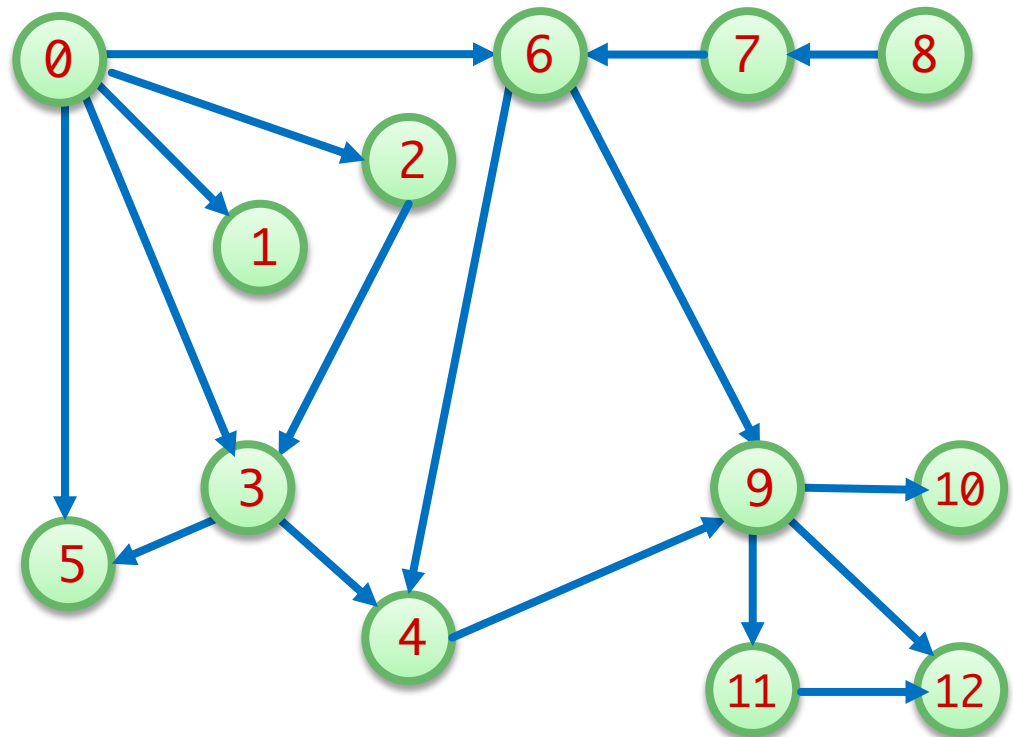
6 -> 1

9 -> 2

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



Orden Topológico: $8 < 0 < 2 < 7 < 1$

Orden Topológico en DiGrafos

Restamos fuentes $F = \{1, 2, 7\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

3 -> 0

4 -> 2

5 -> 1

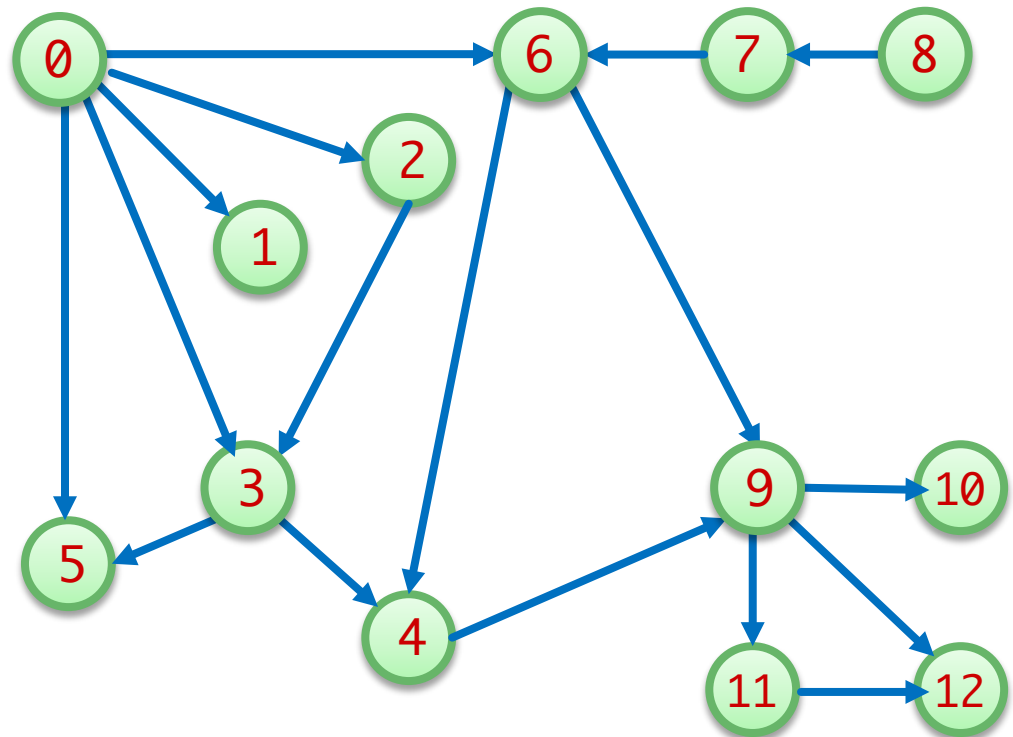
6 -> 0

9 -> 2

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



Orden Topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1

Orden Topológico en DiGrafos

Seleccionamos fuentes $F = \{3, 6\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

3 \rightarrow 0

4 \rightarrow 2

5 \rightarrow 1

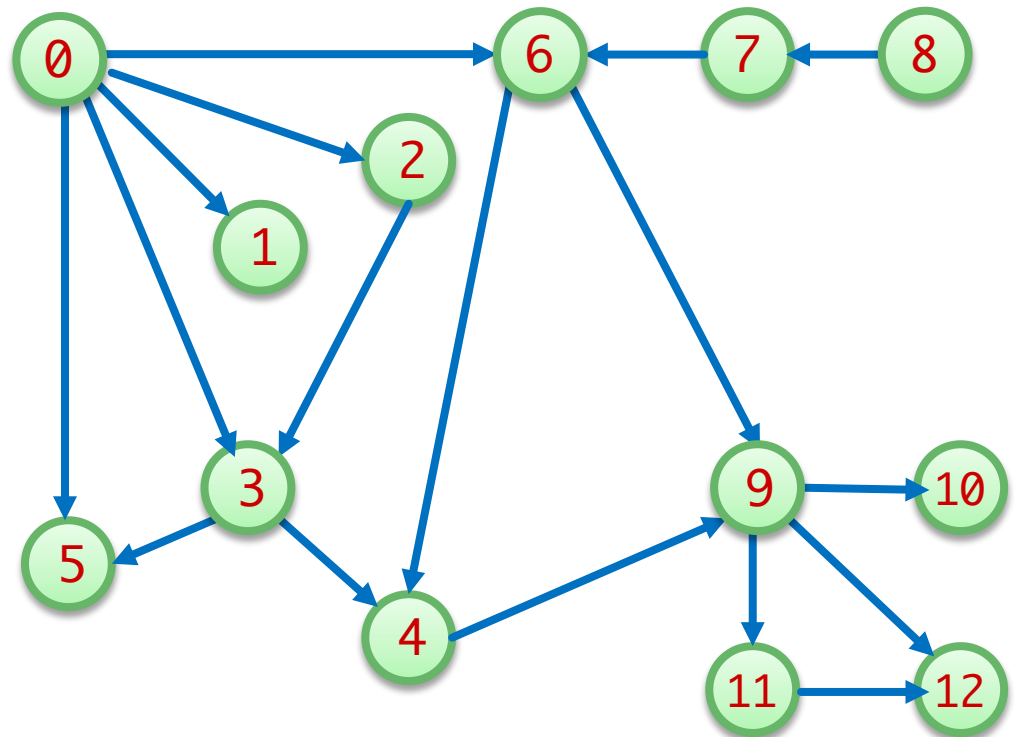
6 \rightarrow 0

9 \rightarrow 2

10 \rightarrow 1

11 \rightarrow 1

12 \rightarrow 2



Orden Topológico: 8 \prec 0 \prec 2 \prec 7 \prec 1

Orden Topológico en DiGrafos

Eliminamos fuentes $F = \{3, 6\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

4 -> 2

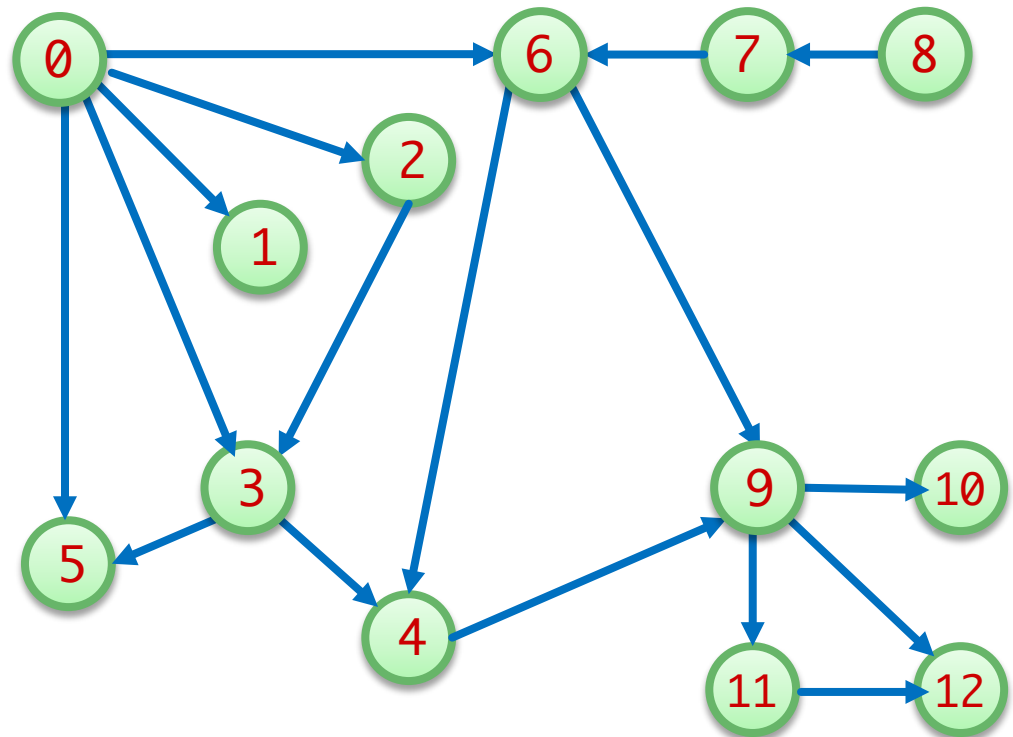
5 -> 1

9 -> 2

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



Orden Topológico: $8 \prec 0 \prec 2 \prec 7 \prec 1$

Orden Topológico en DiGrafos

Añadimos fuentes $F = \{3, 6\}$ al orden topológico

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

4 \rightarrow 2

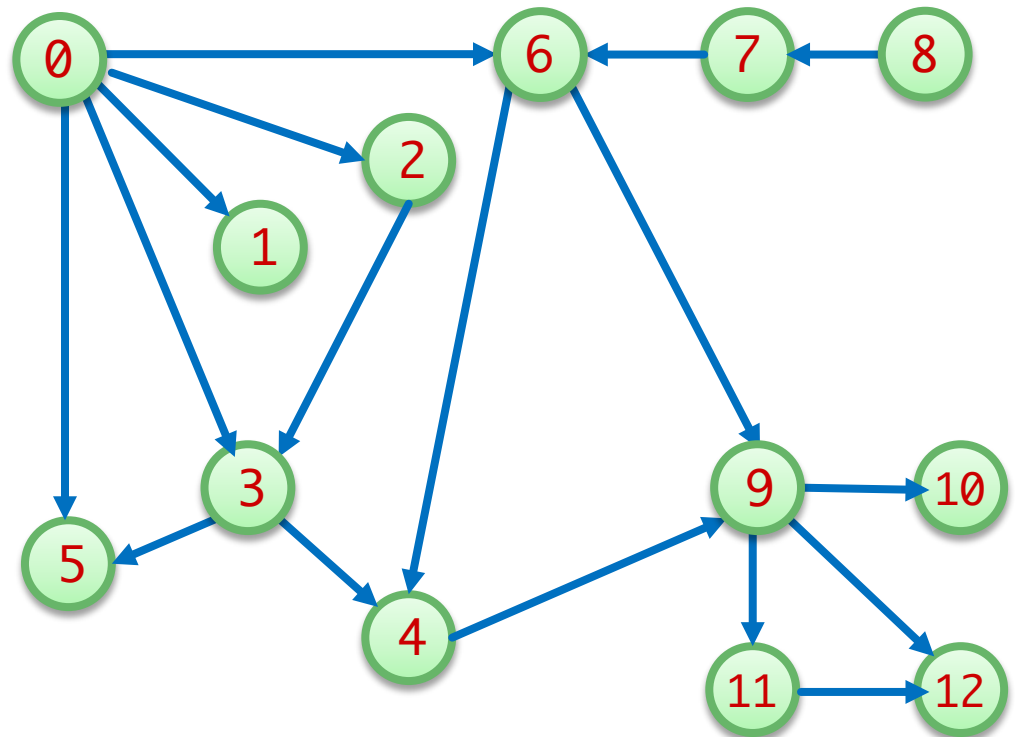
5 \rightarrow 1

9 \rightarrow 2

10 \rightarrow 1

11 \rightarrow 1

12 \rightarrow 2



Orden Topológico: 8 \prec 0 \prec 2 \prec 7 \prec 1 \prec 3 \prec 6

Orden Topológico en DiGrafos

Restamos fuentes $F = \{3, 6\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

4 \rightarrow 0

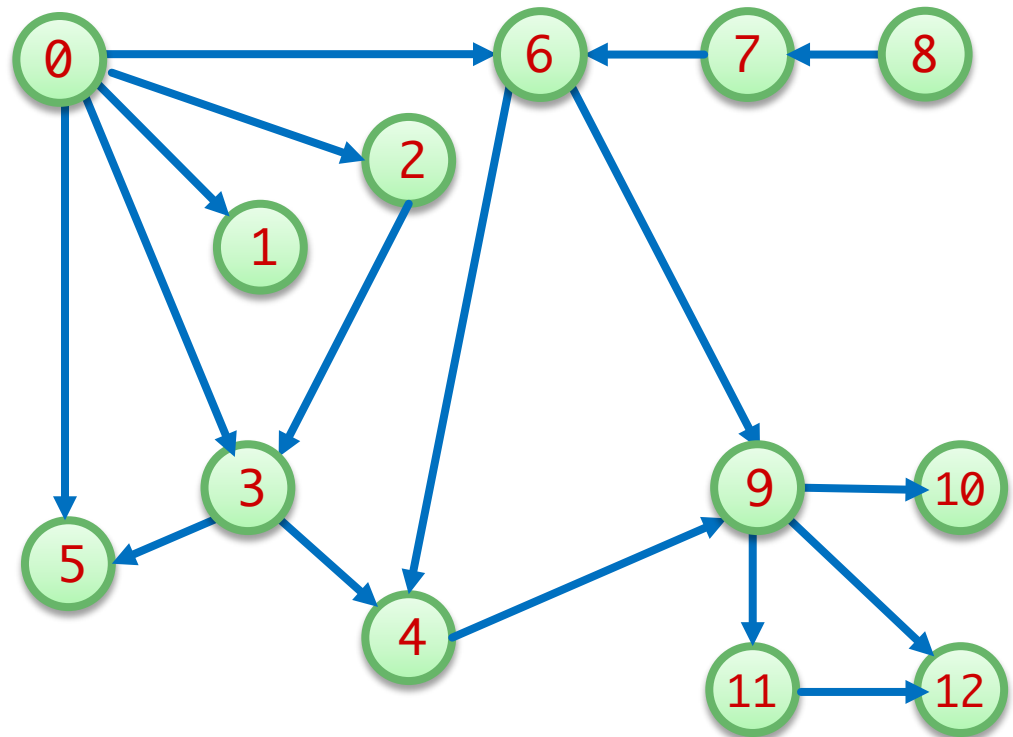
5 \rightarrow 0

9 \rightarrow 1

10 \rightarrow 1

11 \rightarrow 1

12 \rightarrow 2



Orden Topológico: 8 \prec 0 \prec 2 \prec 7 \prec 1 \prec 3 \prec 6

Orden Topológico en DiGrafos

Seleccionamos fuentes $F = \{4, 5\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

4 \rightarrow 0

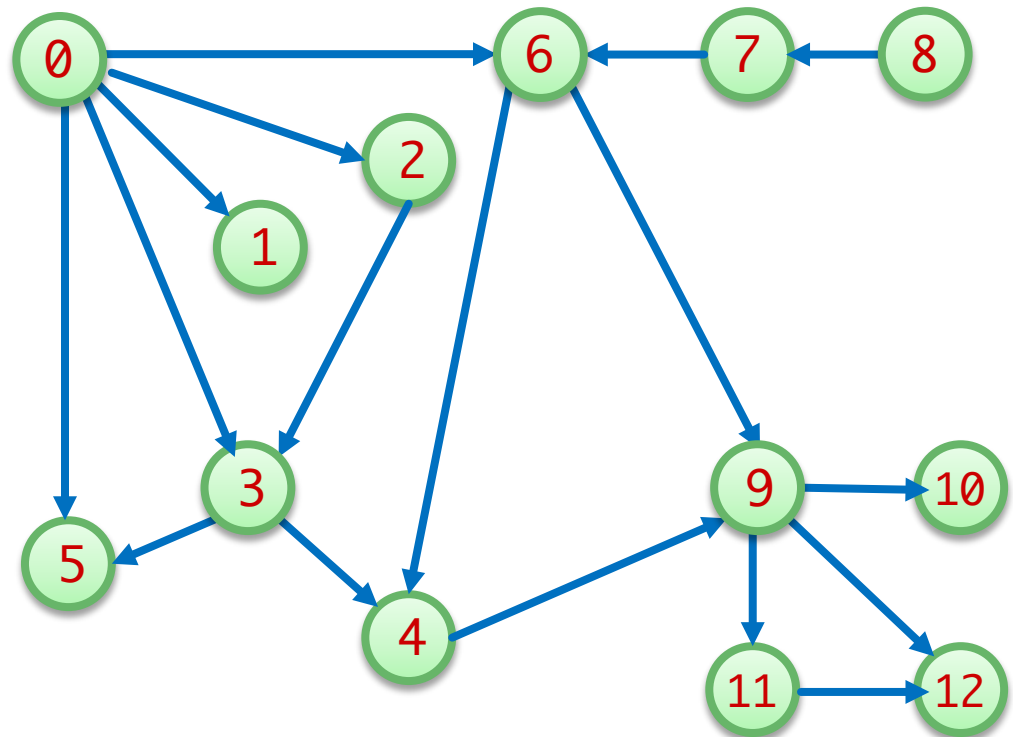
5 \rightarrow 0

9 \rightarrow 1

10 \rightarrow 1

11 \rightarrow 1

12 \rightarrow 2



Orden Topológico: 8 \prec 0 \prec 2 \prec 7 \prec 1 \prec 3 \prec 6

Orden Topológico en DiGrafos

Eliminamos fuentes $F = \{4, 5\}$ del diccionario

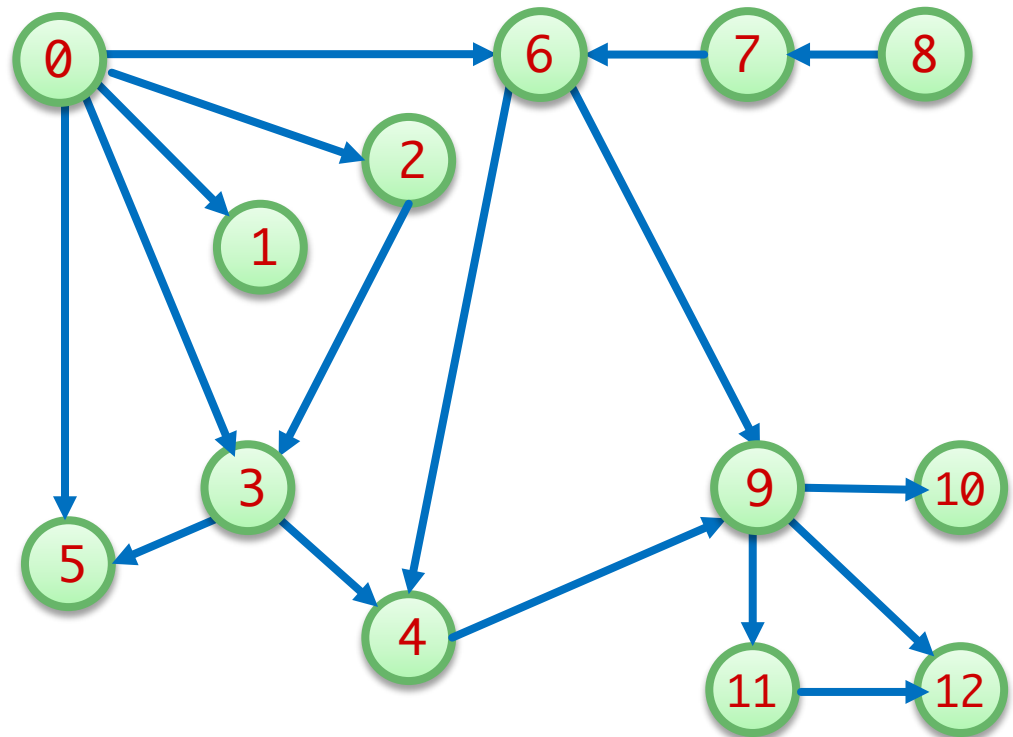
vértice -> # predecesores pendientes

9 -> 1

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



Orden Topológico: $8 \prec 0 \prec 2 \prec 7 \prec 1 \prec 3 \prec 6$

Orden Topológico en DiGrafos

Añadimos fuentes $F = \{4, 5\}$ al orden topológico

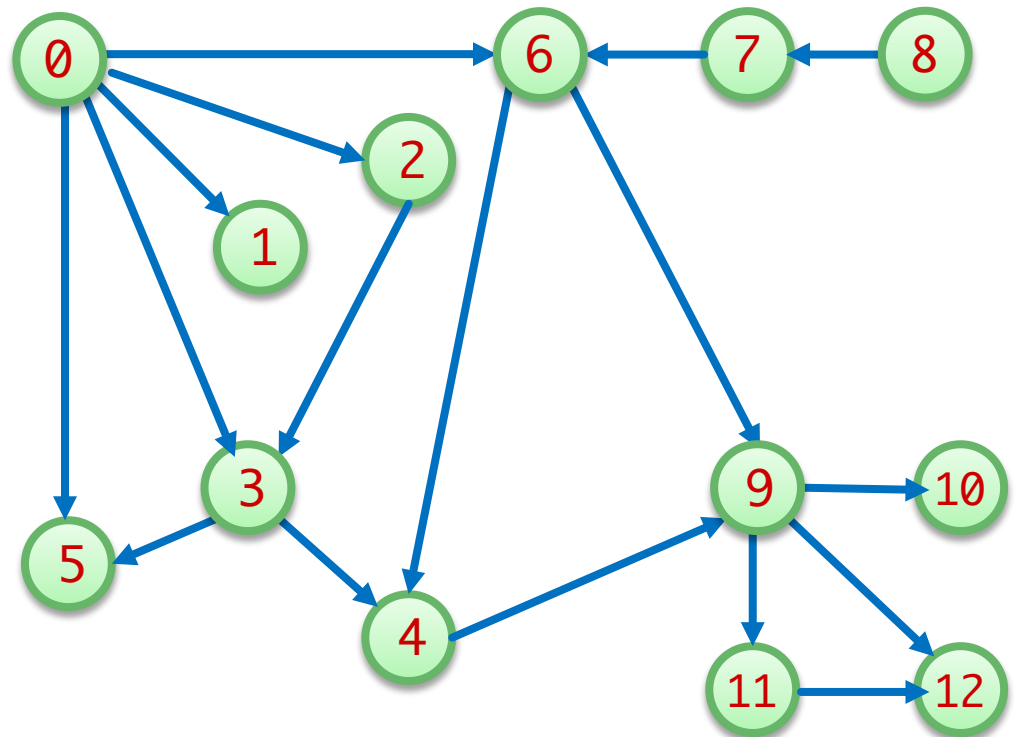
vértice -> # predecesores pendientes

9 -> 1

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



Orden Topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5

Orden Topológico en DiGrafos

Restamos fuentes $F = \{4, 5\}$ del diccionario

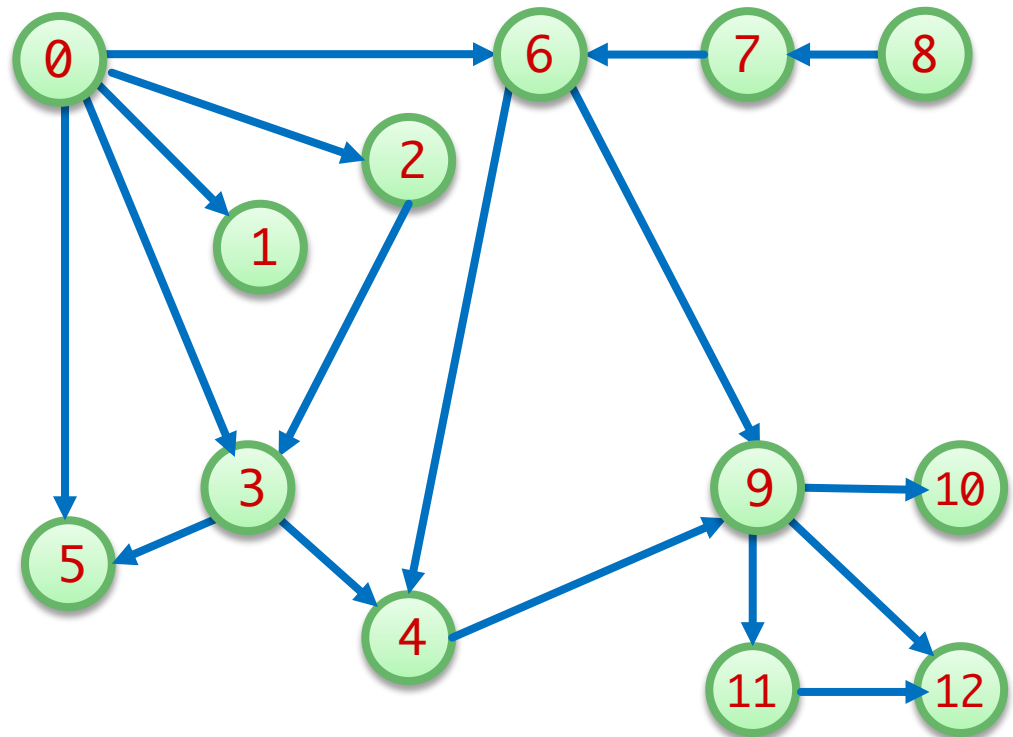
vértice -> # predecesores pendientes

9 -> 0

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



Orden Topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5

Orden Topológico en DiGrafos

Seleccionamos fuentes $F = \{9\}$ del diccionario

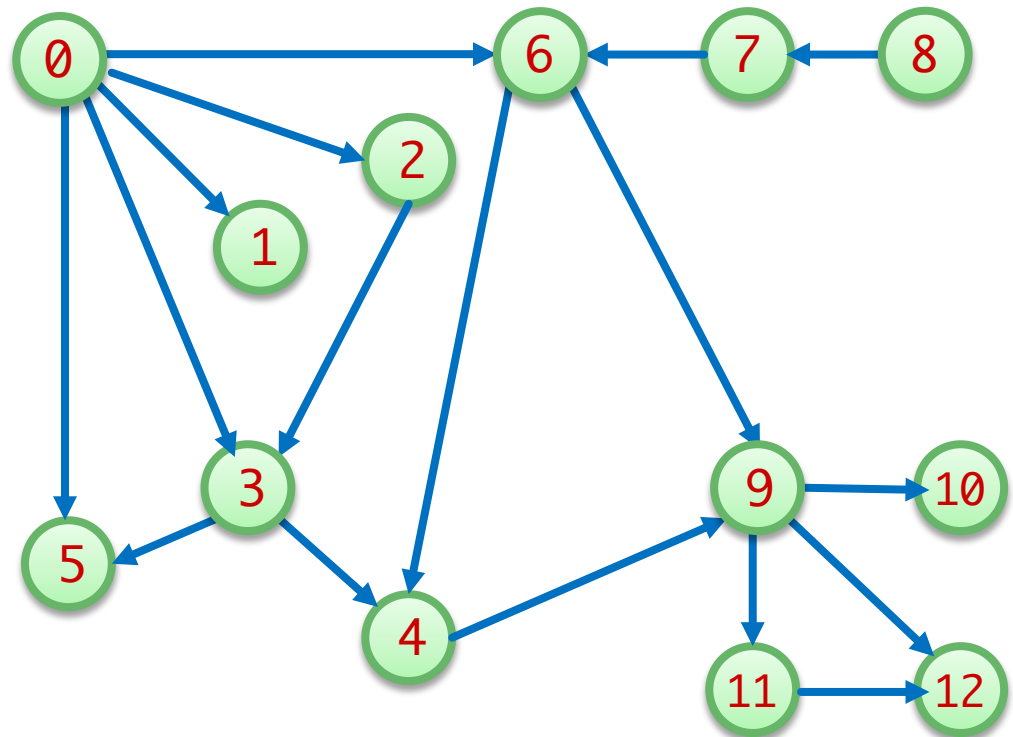
vértice -> # predecesores pendientes

9 -> 0

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



Orden Topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5

Orden Topológico en DiGrafos

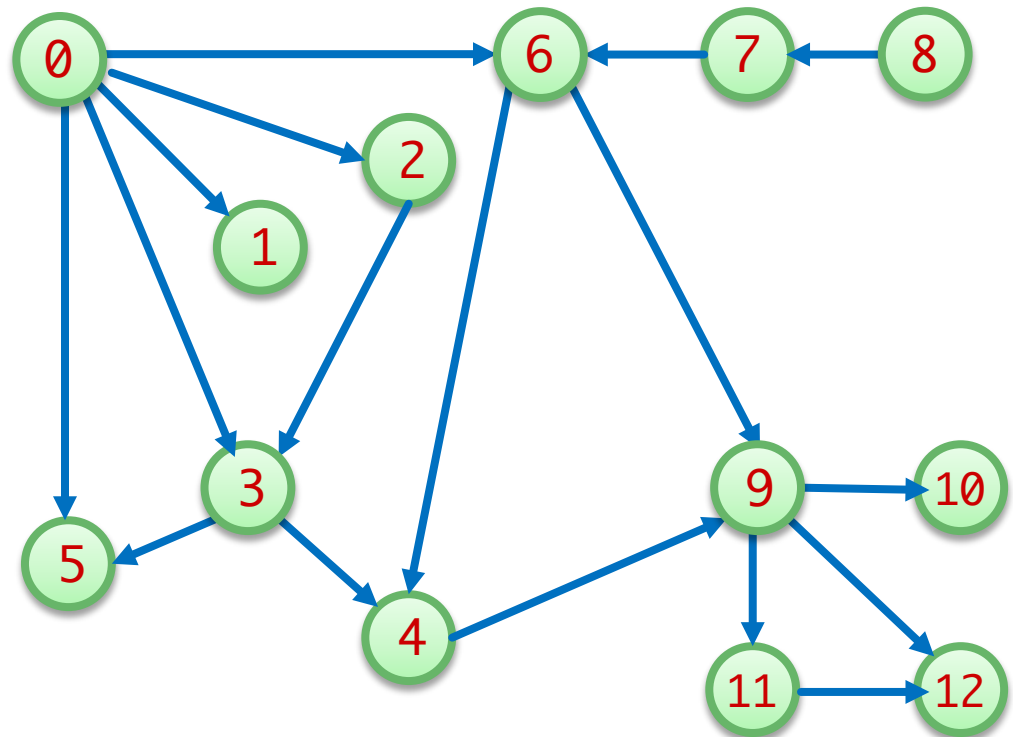
Eliminamos fuentes $F = \{9\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



Orden Topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5

Orden Topológico en DiGrafos

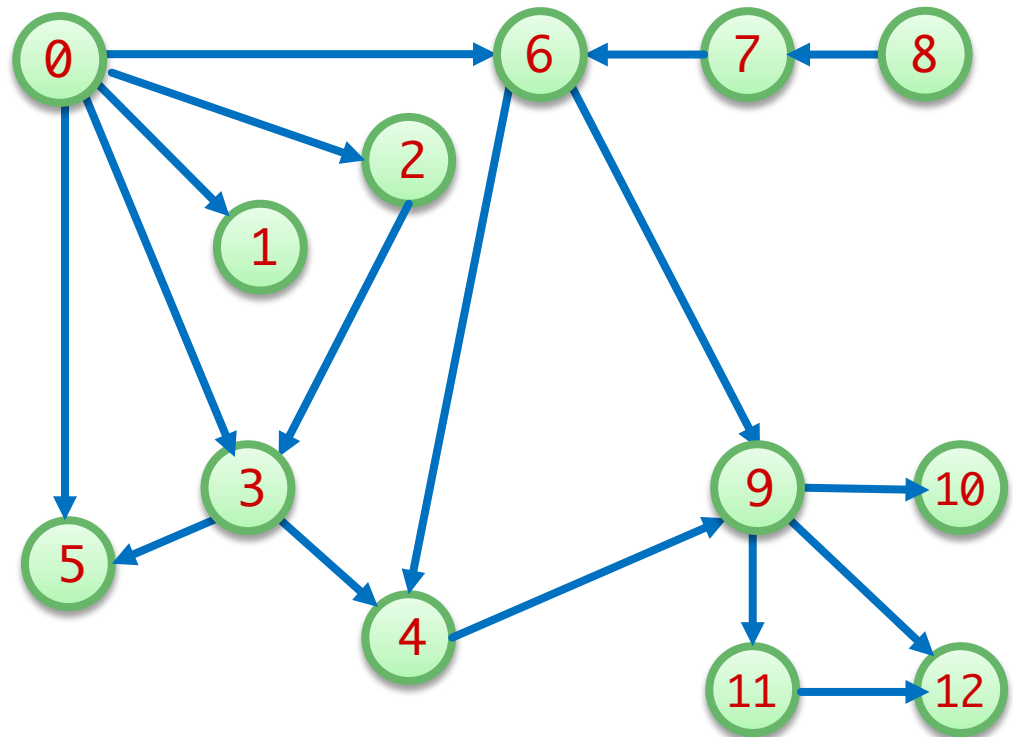
Añadimos fuentes $F = \{9\}$ al orden topológico

vértice -> # predecesores pendientes

10 -> 1

11 -> 1

12 -> 2



Orden Topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9

Orden Topológico en DiGrafos

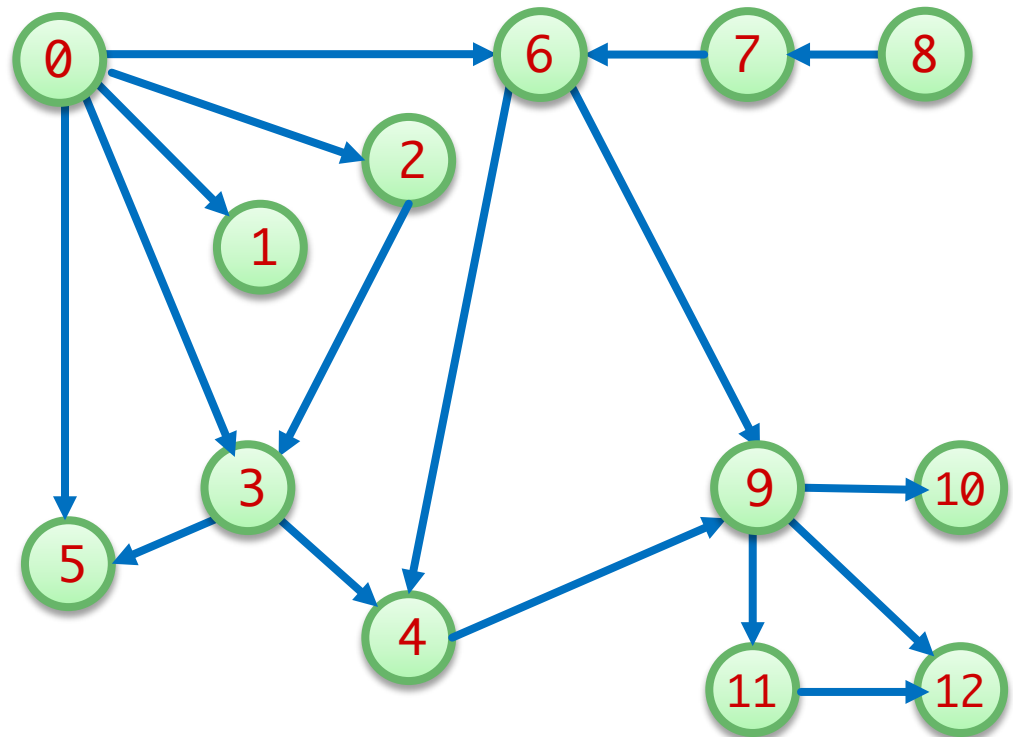
Restamos fuentes $F = \{9\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

10 \rightarrow 0

11 \rightarrow 0

12 \rightarrow 1



Orden Topológico: 8 \prec 0 \prec 2 \prec 7 \prec 1 \prec 3 \prec 6 \prec 4 \prec 5 \prec 9

Orden Topológico en DiGrafos

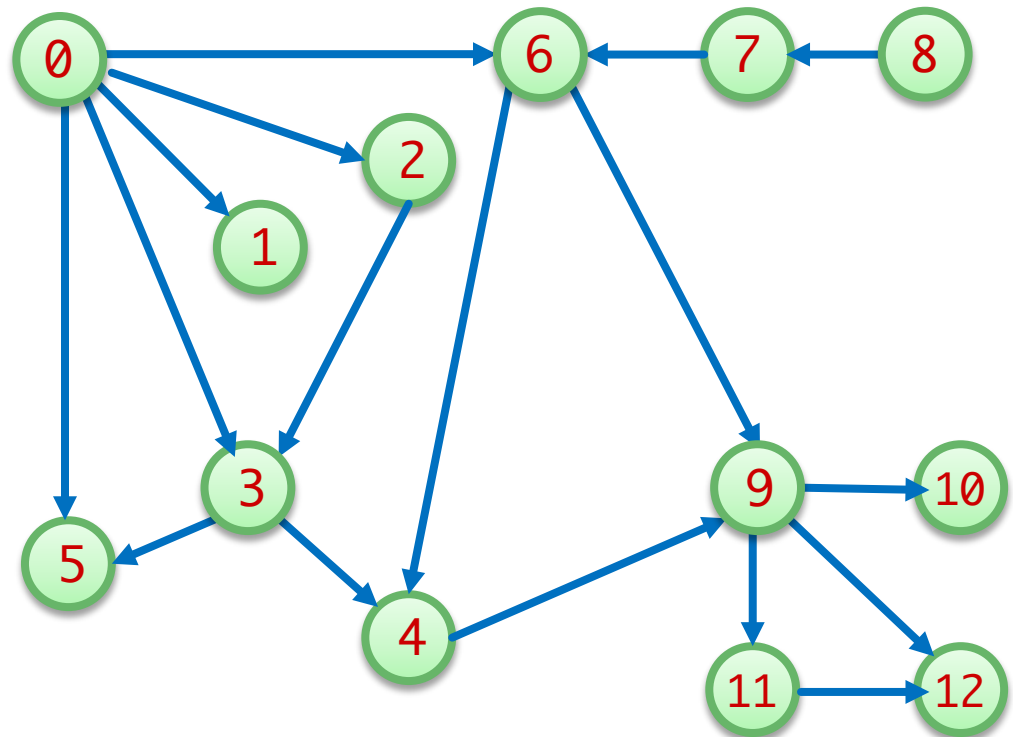
Seleccionamos fuentes $F = \{10, 11\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

10 \rightarrow 0

11 \rightarrow 0

12 \rightarrow 1



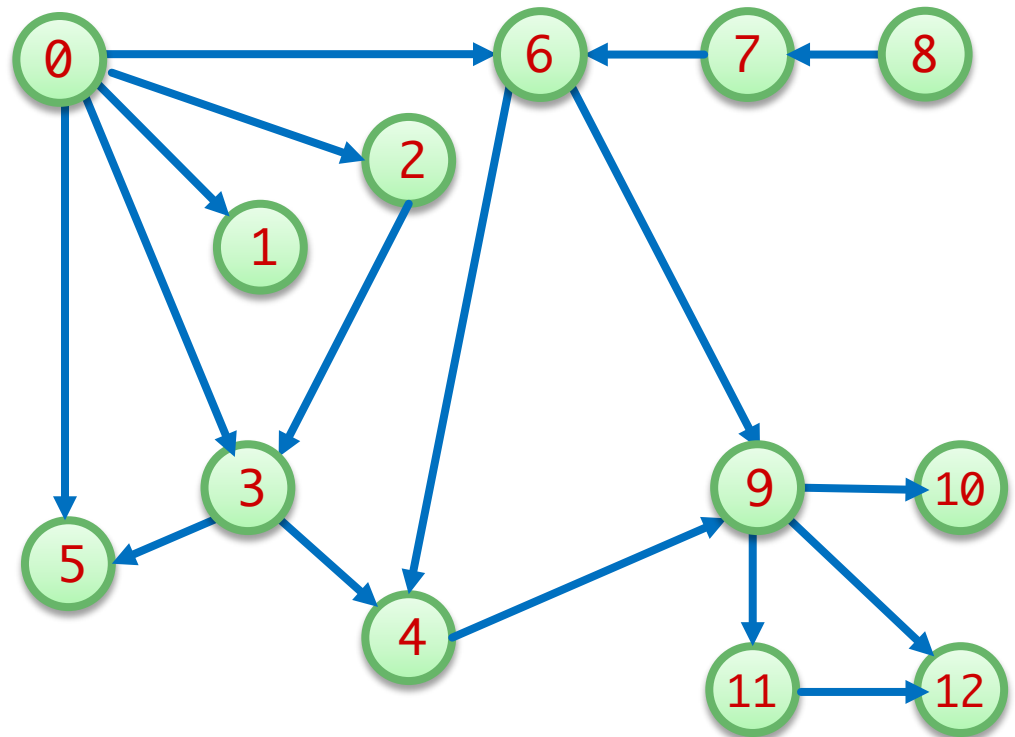
Orden Topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9

Orden Topológico en DiGrafos

Eliminamos fuentes $F = \{10, 11\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

12 \rightarrow 1



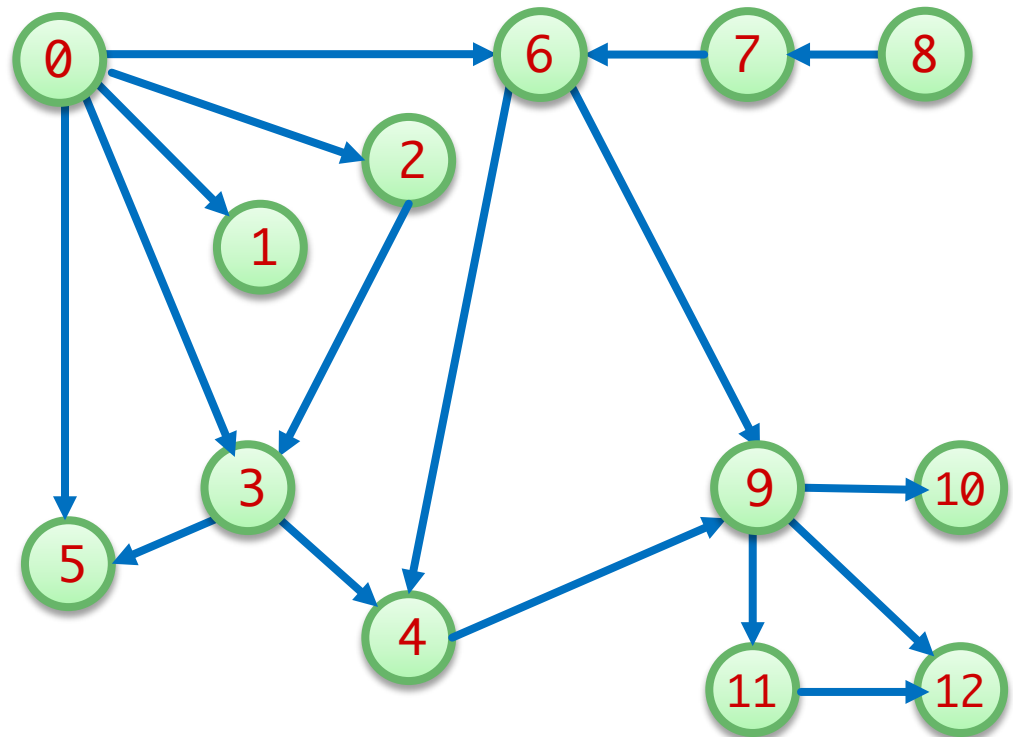
Orden Topológico: 8 \prec 0 \prec 2 \prec 7 \prec 1 \prec 3 \prec 6 \prec 4 \prec 5 \prec 9

Orden Topológico en DiGrafos

Añadimos fuentes $F = \{10, 11\}$ al orden topológico

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

12 \rightarrow 1



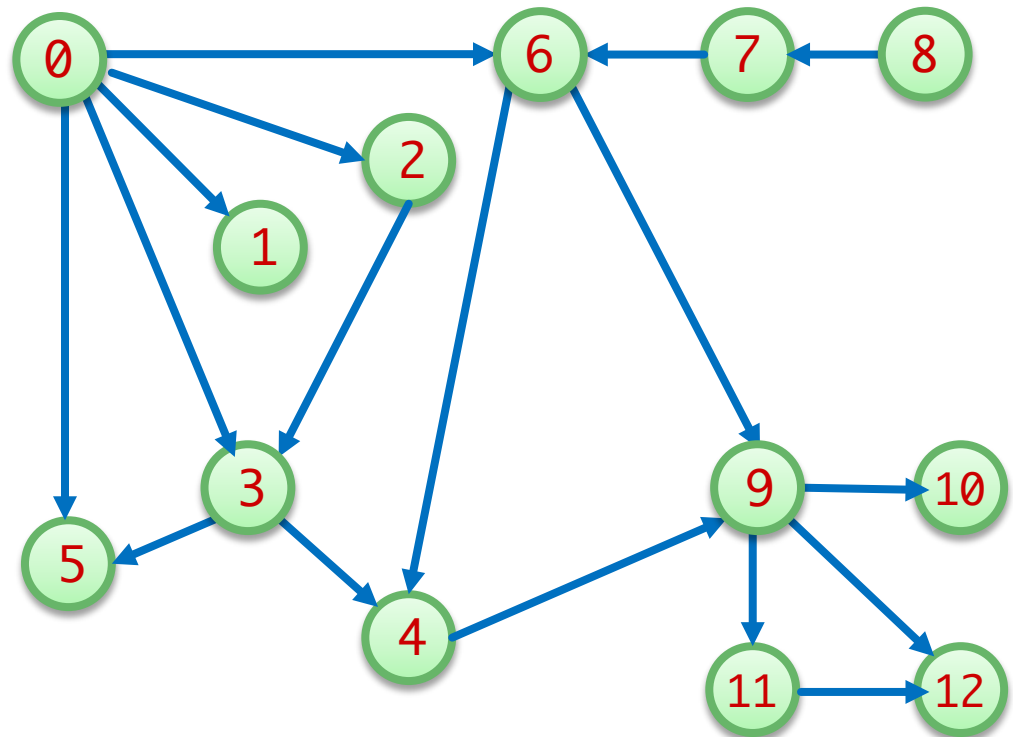
Orden Topológico: 8 \prec 0 \prec 2 \prec 7 \prec 1 \prec 3 \prec 6 \prec 4 \prec 5 \prec 9 \prec 10 \prec 11

Orden Topológico en DiGrafos

Restamos fuentes $F = \{10, 11\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

12 \rightarrow 0



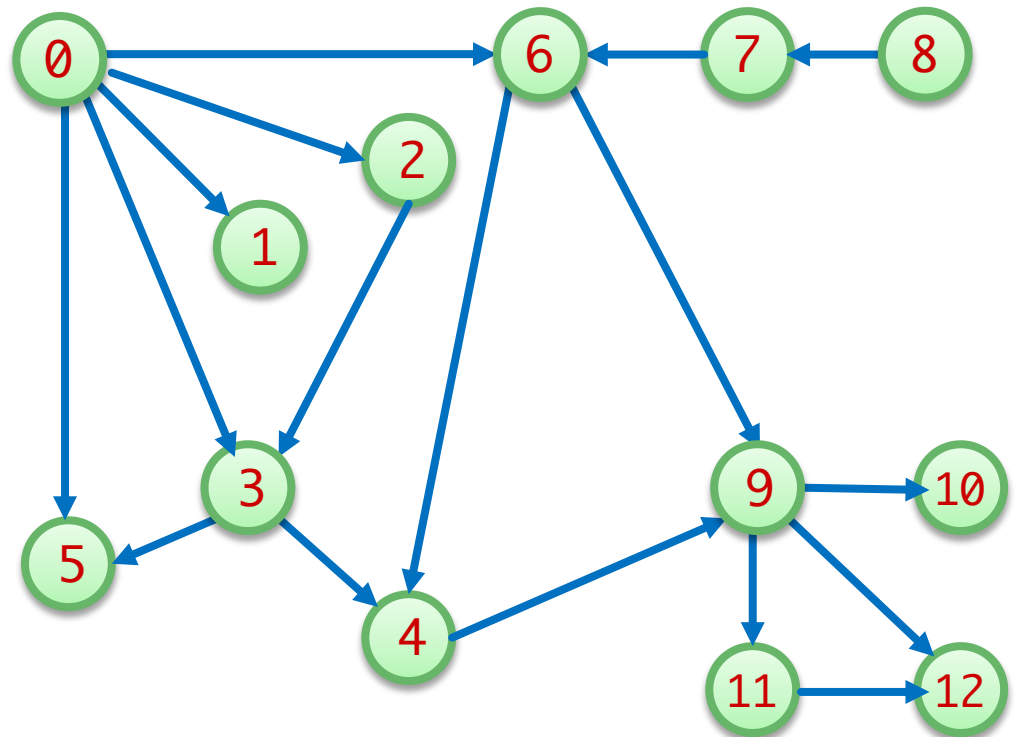
Orden Topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9 < 10 < 11

Orden Topológico en DiGrafos

Seleccionamos fuentes $F = \{12\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

12 \rightarrow 0

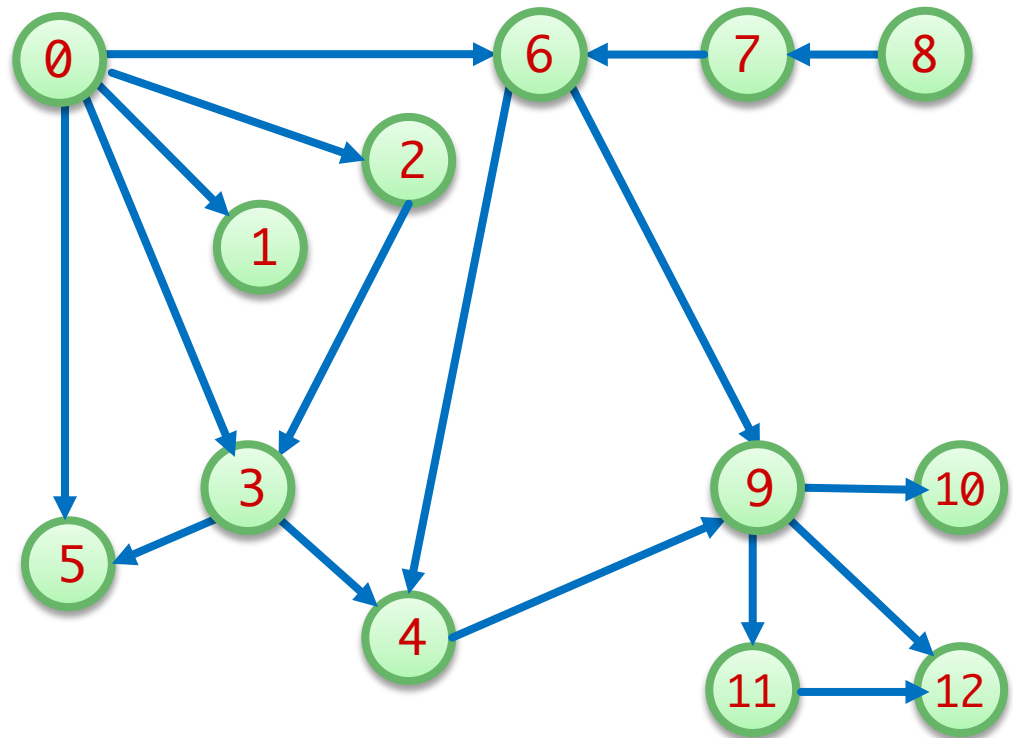


Orden Topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9 < 10 < 11

Orden Topológico en DiGrafos

Eliminamos fuentes $F = \{12\}$ del diccionario

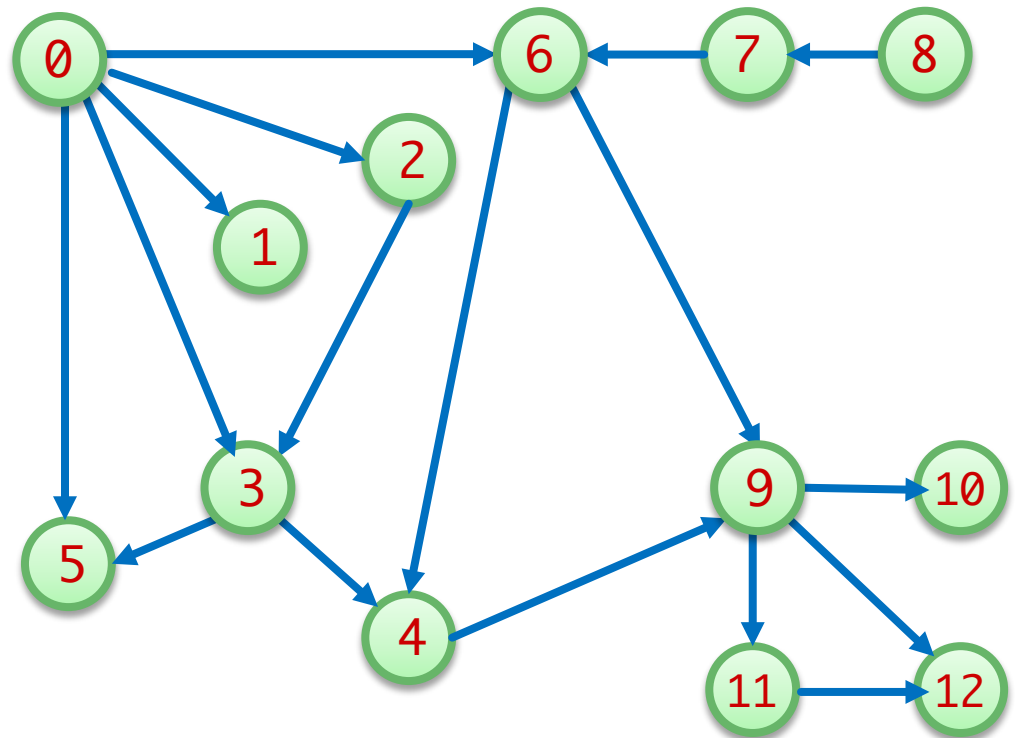
vértice \rightarrow # predecesores pendientes



Orden Topológico: 8 \prec 0 \prec 2 \prec 7 \prec 1 \prec 3 \prec 6 \prec 4 \prec 5 \prec 9 \prec 10 \prec 11

Orden Topológico en DiGrafos

Añadimos fuentes $F = \{12\}$ al orden topológico
vértice \rightarrow # predecesores pendientes

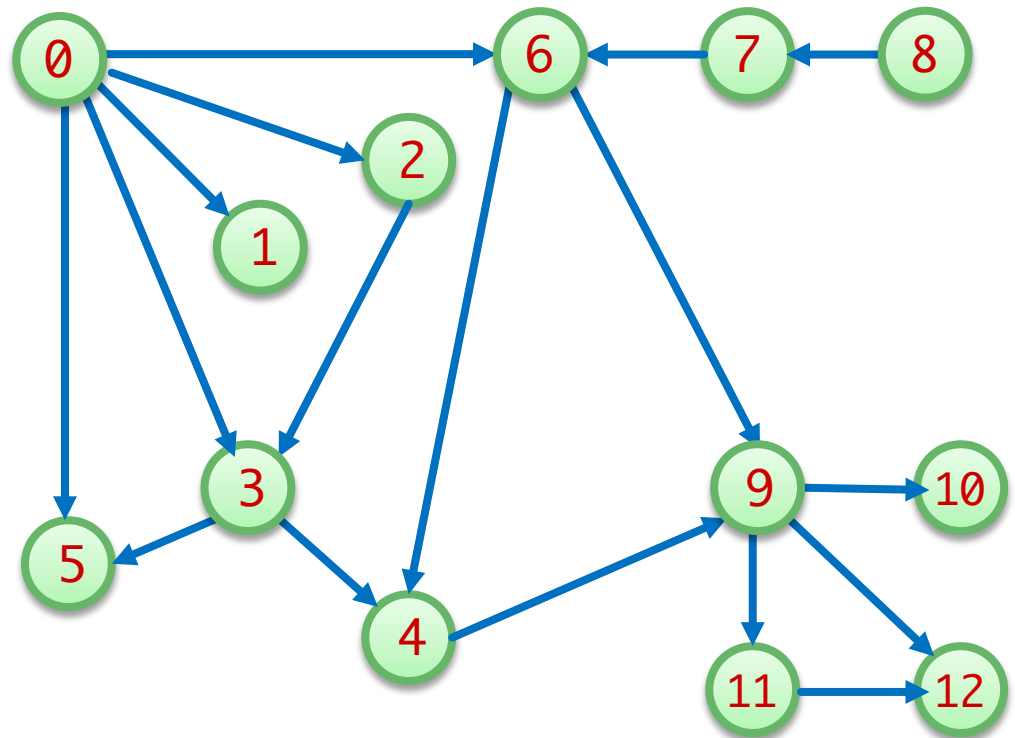


Orden Topológico: $8 \prec 0 \prec 2 \prec 7 \prec 1 \prec 3 \prec 6 \prec 4 \prec 5 \prec 9 \prec 10 \prec 11 \prec 12$

Orden Topológico en DiGrafos

Restamos fuentes $F = \{12\}$ del diccionario

vértice \rightarrow # predecesores pendientes

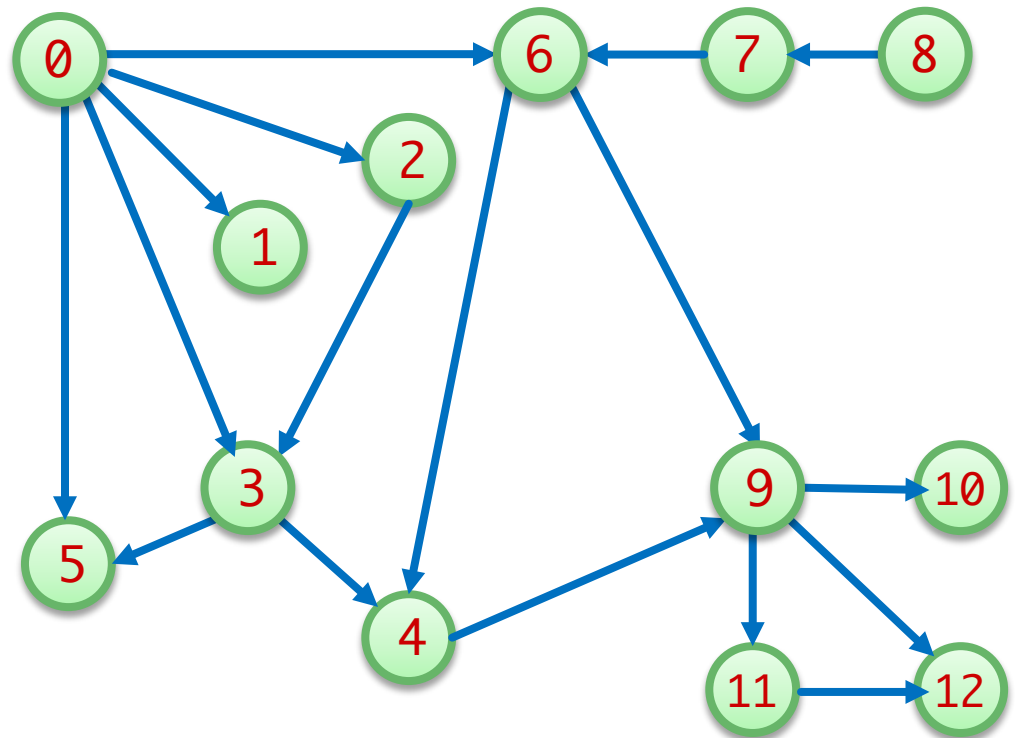


Orden Topológico: 8 \prec 0 \prec 2 \prec 7 \prec 1 \prec 3 \prec 6 \prec 4 \prec 5 \prec 9 \prec 10 \prec 11 \prec 12

Orden Topológico en DiGrafos

El diccionario está vacío: hemos terminado

vértice -> # predecesores pendientes



Orden Topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9 < 10 < 11 < 12

Orden Topológico. DiGrafo cíclico

Inicializamos diccionario con grados de entrada

vértice -> # predecesores pendientes

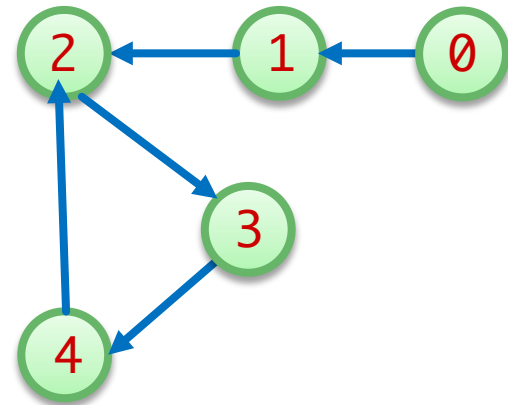
0 -> 0

1 -> 1

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico. DiGrafo cíclico

Seleccionamos fuentes $F = \{0\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

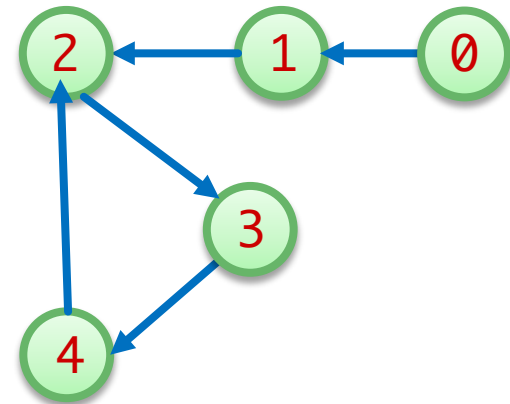
0 -> 0

1 -> 1

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico. DiGrafo cíclico

Eliminamos fuentes $F = \{0\}$ del diccionario

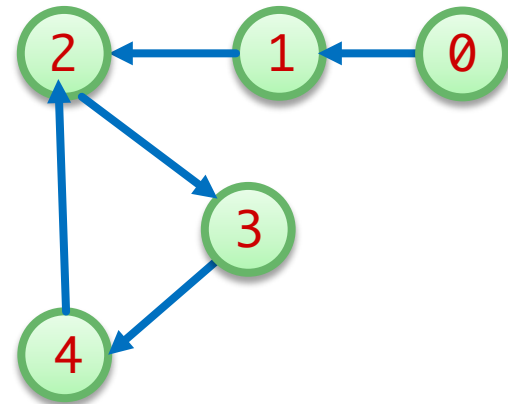
vértice -> # predecesores pendientes

1 -> 1

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico. DiGrafo cíclico

Añadimos fuentes $F = \{0\}$ al orden topológico

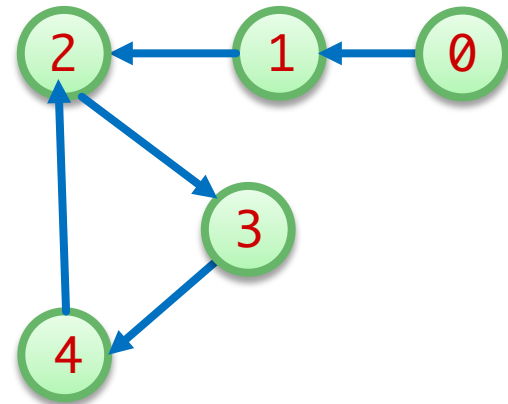
vértice -> # predecesores pendientes

1 -> 1

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico: 0

Orden Topológico. DiGrafo cíclico

Restamos fuentes $F = \{0\}$ del diccionario

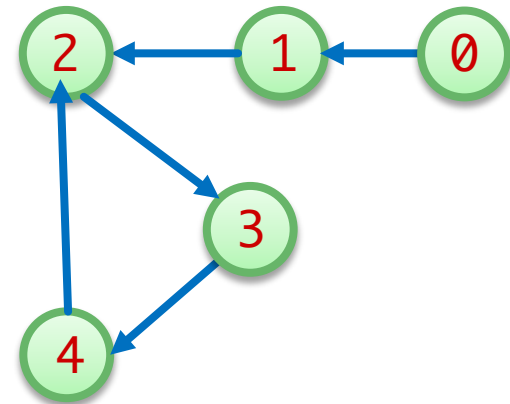
vértice -> # predecesores pendientes

1 -> 0

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico: 0

Orden Topológico. DiGrafo cíclico

Seleccionamos fuentes $F = \{1\}$ del diccionario

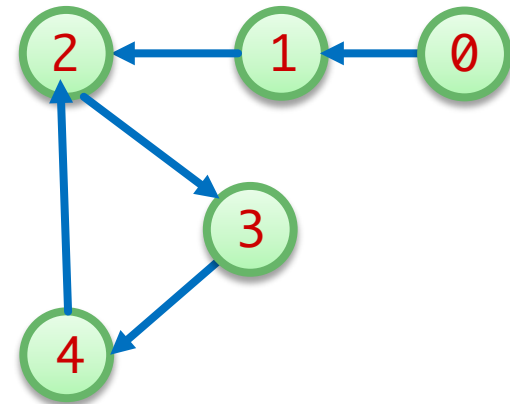
vértice -> # predecesores pendientes

1 -> 0

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico: 0

Orden Topológico. DiGrafo cíclico

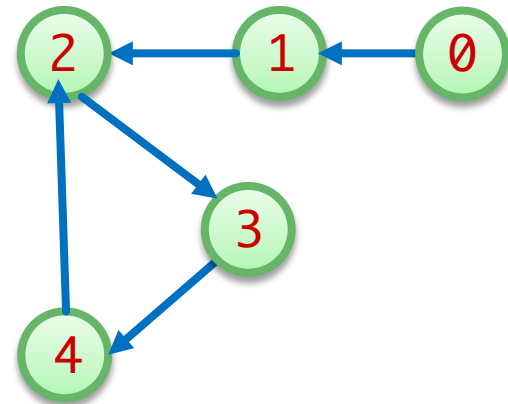
Eliminamos fuentes $F = \{1\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico: 0

Orden Topológico. DiGrafo cíclico

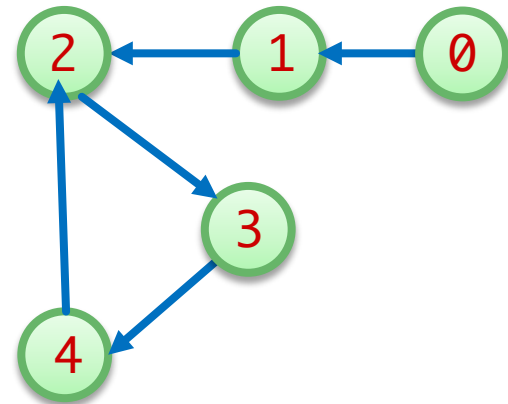
Añadimos fuentes $F = \{1\}$ al orden topológico

vértice -> # predecesores pendientes

2 -> 2

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico: $0 < 1$

Orden Topológico. DiGrafo cíclico

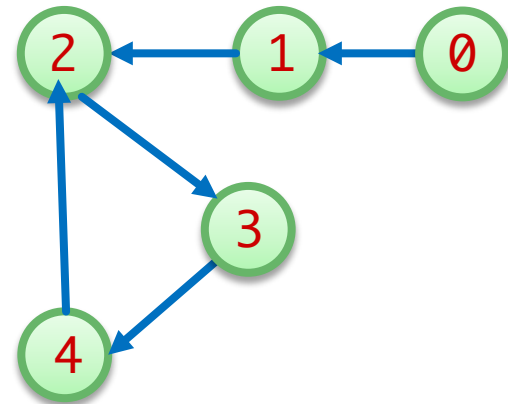
Restamos fuentes $F = \{1\}$ del diccionario

vértice -> # predecesores pendientes

2 -> 1

3 -> 1

4 -> 1



Orden Topológico: 0 < 1

Orden Topológico. DiGrafo cíclico

Seleccionamos fuentes $F = \{\}$ del diccionario

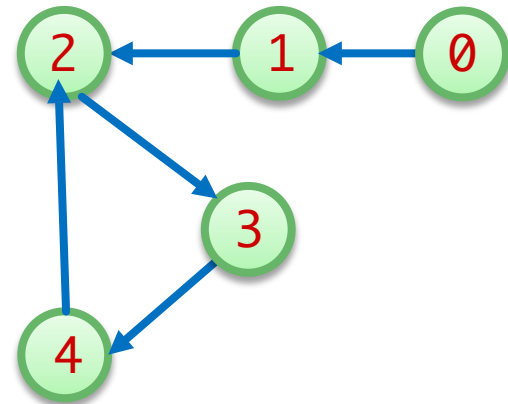
vértice \rightarrow # predecesores pendientes

2 \rightarrow 1

3 \rightarrow 1

4 \rightarrow 1

No hay fuentes. El
DiGrafo tiene un ciclo y
no existe
un Orden Topológico



Orden Topológico: $0 < 1$

Orden Topológico y Paralelismo

- El orden topológico no guarda información sobre la posibilidad de realizar actividades en paralelo:

Orden Topológico: 8 < 0 < 2 < 7 < 1 < 3 < 6 < 4 < 5 < 9 < 10 < 11 < 12

- Recuperamos esta información almacenando el orden topológico en una colección anidada:

Orden Topológico: {8, 0} < {2, 7, 1} < {3, 6} < {4, 5} < {9} < {10, 11} < {12}

Dos implementaciones alternativas

```
public class TopologicalSortingDi c<V> {  
  
    private List<V> topSort;  
    private boolean hasCycle;  
  
    public TopologicalSortingDi c(Di Graph<V> graph) {  
        // completar  
    }  
}  
  
public class TopologicalSortingDi cPar<V> {  
  
    private List<Set<V>> topSort; // colección anidada  
    private boolean hasCycle;  
  
    public TopologicalSortingDi cPar(Di Graph<V> graph) {  
        // completar  
    }  
}
```

Salidas de TopSortDemo.java

Para g1:

- ArrayList(3,7,5,8,11,2,9,10)
- ArrayList(HashSet(3,7),HashSet(5,8),HashSet(11),HashSet(2,9,10))

Para g2:

- ArrayList(0,8,1,2,7,3,6,4,5,9,10,11,12)
- ArrayList(HashSet(0,8),HashSet(1,2,7),HashSet(3,6),HashSet(4,5),HashSet(9),HashSet(10,11),HashSet(12))

Para g3:

- DiGraph is cyclic