Relatório EP2 – Métodos Numéricos e Aplicações

Quadratura Gaussiana:

A quadratura Gaussiana é uma aproximação de uma integral a partir de uma somatória da função em pontos específicos dentro do domínio de integração.

Logo, a resolução apresentará a seguinte estrutura:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\ dt \approx \sum_{j=1}^{n} w_j f(t_j)$$

Entretanto, observe que isso é apenas válido quando os intervalos de integração estão entre -1 e 1. Para ficarmos de acordo com a regra temos que fazer uma transformação do intervalo. A transformação é feita da seguinte maneia:

$$\bar{x}_i = \alpha t_i + \beta, \quad \alpha = (b-a)\,/\,2, \quad \beta = (b+a)\,/\,2$$

Tal que:

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(\bar{x}_i)(b-a) \Big/ 2$$

Aplicando essa nova estrutura, conseguimos atingir o valor da integral proposta. Ademais, observe que os valores de t_i e w_i são tabelados, ou seja, para esse trabalho só serão considerados os cálculos para 6, 8 e 10 nós. Em que seus valores são apresentados abaixo:

```
n=6

          x_j                            w_j
0.2386191860831969086305017     0.4679139345726910473898703
0.6612093864662645136613996     0.3607615730481386075698335
0.9324695142031520278123016     0.1713244923791703450402961


n=8

          x_j                            w_j
0.1834346424956498049394761     0.3626837833783619829651504
0.5255324099163289858177390     0.3137066458778872873379622
0.7966664774136267395915539     0.2223810344533744705443560
0.9602898564975362316835609     0.1012285362903762591525314


n=10

          x_j                            w_j
0.1488743389816312108848260     0.2955242247147528701738930
0.4333953941292471907992659     0.2692667193099963550912269
0.6794095682990244062343274     0.2190863625159820439955349
0.8650633666889845107320967     0.1494513491505805931457763
0.9739065285171717200779640     0.0666713443086881375935688
```

Quadratura Gaussiana para integral dupla:

A quadratura gaussiana para integral dupla é de mesmo formato, entratanto, deixaremos o multiplicador (b-a)/2 em função e x. Tornando a nossa nova função de integração a seguinte expressão: f(xi)*(b-a)/2.

$$I = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\, dy \right] dx$$

$$I = \sum_{i=1}^{n} u_i F(x_i)$$

Tal que:

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} f(x_i, y_{ij}),$$

Como o programa funciona:

O programa trabalha com o input do usuário relacionado à expressão, ou seja, temos que transformar o input em parte do código. Para isso, utilizamos a função eval().

```
def value_function(function, x):
    new_function = eval(function)
    value = new_function
```

Além disso, no loop para troca temos que deixar toda a expressão em função de x. Assim utilizamos a função transform_y():

```
def transform_y(function, y_value):
    new_function = function.replace('y', y_value)
    return new_function
```

Ainda é necessário tratar os dados dos pesos e xi, já que são dados apenas os valores positivos ou iguais a 0. Para isso utilizamos a função nodules_analisys(), para adicionar à lista os valores negativos faltantes:

```python
def nodules_analisys(n):
    if n == 6:
        x_j =  [0.2386191860831969086305017, 0.6612093864662645136613996, 0.9324695142031520278123016]
        w_j = [0.4679139345726910473898703, 0.3607615730481386075698335, 0.1713244923791703450402961]
    elif n== 8:
        x_j = [0.1834346424956498049394761, 0.5255324099163289858177390, 0.7966664774136267395915539, 0.9602898564975362316
        w_j = [0.3626837833783619829651504, 0.3137066458778872873379622, 0.2223810344533744705443560, 0.1012285362903762591
    else:
        x_j= [0.1488743389816312108848260,0.4333953941292471907992659, 0.6794095682990244062343274, 0.8650633666889845107320
        w_j= [0.2955242247147528701738930, 0.2692667193099963550912269, 0.2190863625159820439955349, 0.1494513491505805931457

    x_j_copy = x_j.copy()
    w_j_copy = w_j.copy()
    for i in range(len(x_j)):
        index = -1-i
        x_j_copy.append((x_j[index])*(-1))
        w_j_copy.append(w_j[index])
    x_j=x_j_copy
    w_j=w_j_copy

    return x_j, w_j
```

Agora, podemos iniciar o código, retirando a estrutura de repetição para o usuário o código se resume no cálculo das transformações de intervalo e e substituição dos “y” presentes na expressão.

```python
for i in range(len(x_j)):
    for j in range(len(x_j)):      You, 3 hours ago • add: FinalProject
        x_x_i = c*x_j[j] + d
        new_ysup_value = value_function(y_sup, x_x_i)
        new_yinf_value = value_function(y_inf, x_x_i)
        y_x_i = (1/2)*(((new_ysup_value - new_yinf_value)*x_j[i])+(new_ysup_value + new_yinf_value))
        new_function = '(('+str(y_sup)+'-'+ str(y_inf) +')/2)'+'*'+str(w_j[i])+'*('+transform_y(function, str(y_x_i)
        x_new_function = value_function(new_function, x_x_i)*((x_sup-x_inf)/2)*w_j[j]
        total_value = total_value + x_new_function
print(f'\n O valor da sua integral é: {"%.5f" % total_value}\n')
```

Inicialmente ele troca os valores que seriam substituídos nos “x”s já no intervalo de y. Abrindo espaço para o cálculo de y_x_y, valor que será substituído em todos os y da função inicial, e, em seguida, reescrevemos a nova expressão completamente em função de x. Logo em seguida, calculamos o (b-a)/2 de x, devido a transformação de intervalo e substituímos todos os “x”s pelo valor de x_x_i. No final obtemos o valor de cada função (6 nós dão 36 expressões, 8 para 64 e 10 para 100). Todos os valores são somados, no que resulta no valor da integral.

Exercícios:

Exemplo 01: Calcule os volumes do cubo cujas arestas tem comprimento 1 e do tetraedro com vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1). Você deve obter resultados exatos, exceto por erros de arredondamento (por quê?).

Solução:

Para calcular o volume de um cubo de arestas de comprimento 1 basta definirmos um função f(x,y) = 1 e calcularmos a sua integral nos intervalos $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. Com o método de Gauss, obtemos os seguintes valores com os seguintes nós:

$$\int_0^1 \int_0^1 1 \, dydx$$

```
Digite uma função: 1
Digite o valor inferior do intervalo externo: 0
Digite o valor superior do intervalo externo: 1
Digite o valor inferior do intervalo interno: 0
Digite o valor superior do intervalo interno: 1
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 6

 O valor da sua integral é: 1.00000

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 8

 O valor da sua integral é: 1.00000

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
 s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 10

 O valor da sua integral é: 1.00000
```

Logo, o volume do cubo é de 1 um^3.

Para calcularmos o volume do tetraedro, primeiro temos que descobrir a sua função e seu intervalo. Entretanto, sabemos que o volume de um tetraedro é igual a um sexto do volume de um cubo de mesma aresta que compõe o ângulo reto. Assim, podemos escrever a seguinte expressão:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{6} dydx$$

```
Digite uma função: 1/6
Digite o valor inferior do intervalo externo: 0
Digite o valor superior do intervalo externo: 1
Digite o valor inferior do intervalo interno: 0
Digite o valor superior do intervalo interno: 1
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 6

 O valor da sua integral é: 0.16667

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
 s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 8

 O valor da sua integral é: 0.16667

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
 s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 10

 O valor da sua integral é: 0.16667
```

A Quadratura de Gauss escolhe os pontos para cálculo de uma forma ótima, em vez de igualmente espaçada. Ao adicionarmos funções que apresentam um polinômio de grau menor ou igual a 2n-1, o resultado será exato.

Exemplo 02: A área A da região no primeiro quadrante limitada pelos eixos e pela curva $y = 1-x^2$ pode ser obtida por:

$$A = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x^2} dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y}} dx\right] dy = \frac{2}{3}$$

Solução:

Para a primeira integral, temos:

```
Digite uma função: 1
Digite o valor inferior do intervalo externo: 0
Digite o valor superior do intervalo externo: 1
Digite o valor inferior do intervalo interno: 0
Digite o valor superior do intervalo interno: 1-x**2
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 6

 O valor da sua integral é: 0.66667

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
 s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 8

 O valor da sua integral é: 0.66667

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
 s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 10

 O valor da sua integral é: 0.66667
```

Para a segunda integral temos:

```
Digite uma função: 1
Digite o valor inferior do intervalo externo: 0
Digite o valor superior do intervalo externo: 1
Digite o valor inferior do intervalo interno: 0
Digite o valor superior do intervalo interno: sqrt(1-x)
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 6

 O valor da sua integral é: 0.66705

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
 s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 8

 O valor da sua integral é: 0.66684

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
 s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 10

 O valor da sua integral é: 0.66676
```

Observe que quanto mais maior o número de nós, mais próximo o resultado é de 2/3.

Exemplo 03: Considere a superfície descrita por $z = e^{y/x}$, $0.1 \leq x \leq 0.5$, $x^3 \leq y \leq x^2$. Calcule a sua área e o volume da região abaixo dela (a área de uma superfície descrita por $z = f(x, y)$, $(x, y) \in R$ é igual a:

$$\iint_R \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1}\,dx\,dy$$

Solução:

Para calcular o volume da superfície descrita pelos intervalos acima temos a seguinte integral:

$$\int_{0.1}^{0.5} \int_{x^3}^{x^2} e^{\left(\frac{y}{x}\right)} dydx$$

```
Digite uma função: e**(y/x)
Digite o valor inferior do intervalo externo: 0.1
Digite o valor superior do intervalo externo: 0.5
Digite o valor inferior do intervalo interno: x**3
Digite o valor superior do intervalo interno: x**2
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 6

 O valor da sua integral é: 0.03331

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
 s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 8

 O valor da sua integral é: 0.03331

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
 s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 10

 O valor da sua integral é: 0.03331
```

O valor exato para os resultados está em torno de: V = 0.03330

Para calcular a área, podemos resumir a expressão anterior em:

$$\int_{0.1}^{0.5}\int_{x^3}^{x^2}\sqrt{e^{\left(\frac{2y}{x}\right)}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\left(y^2\cdot\frac{1}{x^2}+1\right)+1}$$

Assim, aplicando o resultado no programa, obtemos:

```
Digite uma função: sqrt((exp(2*y/x)/x**2) * (y**2/x**2 + 1) + 1)
Digite o valor inferior do intervalo externo: 0.1
Digite o valor superior do intervalo externo: 0.5
Digite o valor inferior do intervalo interno: x**3
Digite o valor superior do intervalo interno: x**2
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 6

 O valor da sua integral é: 0.10550

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
 s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 8

 O valor da sua integral é: 0.10550

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
 s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 10

 O valor da sua integral é: 0.10550
```

Exemplo 04: Considere uma região fechada R do plano xy e seja γ uma reta no mesmo plano que não intercepta o interior de R. O volume V do sólido de revolução obtido da rotação da região R em torno de γ é igual a:

$$V = 2\pi \iint_R d_\gamma(x, y)\, dx\, dy$$

onde $d_\gamma(x, y)$ é a distância do ponto (x, y) à reta γ. Use esta expressão para calcular o volume da calota esférica de altura 1/4 da esfera de raio 1, e o volume do sólido de revolução obtido da rotação da região, em torno do eixo y, delimitada por x = 0, $x = e^{-y^2}$, y = −1 e y = 1.

Solução:

O volume da calota é dado pela seguinte expressão:

$$\int_0^{0.25} \int_0^{\sqrt{1-\left(x+\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2}} 2 \cdot \pi \cdot\ y\, dydx$$

```
Digite uma função: 2*pi*y
Digite o valor inferior do intervalo externo: 0
Digite o valor superior do intervalo externo: 0.25
Digite o valor inferior do intervalo interno: 0
Digite o valor superior do intervalo interno: sqrt(1-(x+(3/4))**2)
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 6

 O valor da sua integral é: 0.17999

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
 s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 8

 O valor da sua integral é: 0.17999

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
 s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 10

 O valor da sua integral é: 0.17999
```

O volume do sólido de revolução é dado pela seguinte expressão:

$$\int_{-1}^{1} \int_0^{e^{-x^2}} 2 \cdot \pi \cdot\ y\, dydx$$

```
Digite uma função: 2*pi*y
Digite o valor inferior do intervalo externo: -1
Digite o valor superior do intervalo externo: 1
Digite o valor inferior do intervalo interno: 0
Digite o valor superior do intervalo interno: e**(-x**2)
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 6

 O valor da sua integral é: 3.75817

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
 s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 8

 O valor da sua integral é: 3.75825

Gostaria de analisar para outros nós?: (6/8/10)
 Responda com 's' para sim e 'n' para não.
 s
Digite quantos nós você gostaria de analisar: (6/8/10) 10

 O valor da sua integral é: 3.75825
```

Ao final da realização de todos os exercícios chegamos à conclusão que o programa oferece bons resultados na maioria dos exemplos, não apresentando resultados exatos em 3 e 4 devido aos arredondamentos dos algarismos significativos quando passados de “float” para “string” e o grau da expressão. Entretanto, nos demais exemplos o programa respondeu bem às situações.

Referências:

https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-sci/in-quadratura_de_gauss-legendre.html

https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7041254/mod_resource/content/2/tarefa2_2022.pdf