

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ENGENHARIA QUÍMICA

Marco Antônio Rudas Napoli, n°USP: 11857970



**Construção de um algoritmo de resfriamento de chips a partir
do método dos elementos finitos**

Análise e resolução de problemas com equações diferenciais

São Paulo

2022

Resumo

Este trabalho visa analisar o comportamento das soluções de equações diferenciais que descrevem a transmissão de calor em um chip ou processador de um computador. O método utilizado para este estudo é o Método dos Elementos Finitos, juntamente com o método de Ritz-Raleigh. Logo, conseguiremos analisar o erro do programa a partir da real solução da equação diferencial em um dado ponto do intervalo descrito.

Introdução

1. Equação diferencial

A equação diferencial é uma equação cuja solução é descrita a partir de uma função, tal que esta função é apresentada sob forma de suas respectivas derivadas. Sabemos que a pode possuir ou não uma solução e, caso possua, esta não necessariamente é única. Muitas equações diferenciais são utilizadas para descrever modelos matemáticos que se aproximam da realidade, como por exemplo nas áreas da dinâmica dos fluidos e fenômenos de transporte.

2. Problema da condução de calor

Suponhamos um processador de computador de tamanho $L \times L$ e altura h . O uso deste gera o seu próprio aquecimento devido ao efeito Joule. Logo, é necessária uma placa refrigeradora para manter a temperatura dentro do intervalo ideal de funcionamento. Este modelo pode ser observado na figura 1.1. Podemos modelar a distribuição de calor a partir da seguinte equação:

$$\rho C \frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T(t, x)}{\partial x} \right) + Q(t, x).$$

- $T(t, x)$ é a temperatura do chip na posição x e instante de tempo t ,
- ρ é a densidade do material do chip (exemplo: o silício tem densidade $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$),
- C é o calor específico do material (exemplo: o calor específico do silício é $C = 750 \text{ J/Kg/K}$),
- k é o parâmetro de condutividade térmica do material (exemplo: o silício tem condutividade de $k = 3,6 \text{ W/(mK)}$),
- Q é uma fonte de calor. É a soma do calor gerado pelo chip (Q_+) com o calor retirado do sistema pelo resfriador (Q_-), tal que $Q = Q_+ - Q_-$.

Entretanto, após um longo tempo de uso, podemos assumir que processador entra em modo estacionário, isto é, a variação da temperatura em relação ao decorrer do tempo é nula, chegando na seguinte equação

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = 0,$$
$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right) = Q(x)$$

3. Objetivo do trabalho

Logo, o objetivo deste trabalho é encontrar soluções e analisar detalhadamente o comportamento da solução da equação de condução de calor estacionária apresentada acima a partir de métodos numéricos de resolução de equações diferenciais.

No nosso caso, utilizaremos o Método dos elementos Finitos, juntamente com o Método de Ritz-Raleigh

Métodos de resolução

Método dos elementos finitos

O método baseia-se em subdividir o problema inicial em partes menores, observando cada elemento

isoladamente, conseguindo compor o problema maior inicial.

No nosso caso iremos dividir a barra em subespaços menores de mesmo tamanho, ou seja, um passo h constante. Definimos o passo como sendo $h = L/(n+1)$, tal que cada x_i será dado por $x_i = h \cdot i$, tendo que $i = 1, 2, \dots, n+1$.

Para obtermos a solução da equação diferencial proposta, utilizaremos o método de Ritz-Raleigh.

Método de Ritz-Raleigh

Vamos assumir a equação diferencial inicial como sendo:

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x)$$

O seu funcional $I[y(x)]$ é dado a partir da seguinte correlação:

$$I[u] = \int_0^1 \{ p(x)[u'(x)]^2 + q(x)[u(x)]^2 - 2f(x)u(x) \} dx$$

Definimos $u(x)$ como sendo uma possível solução de y , tal que:

$$I[\phi] = I \left[\sum_{i=1}^n c_i \phi_i \right]$$

$$\int_0^1 \{ p(x) \left[\sum_{i=1}^n c_i \phi_i'(x) \right]^2 + q(x) \left[\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \right]^2 - 2f(x) \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \} dx$$

Conseguiremos restringir as infinitas soluções do problema inicial com a minimização do funcional, ou seja:

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0$$

A partir disso encontramos a seguinte solução:

$$0 = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 \{ p(x) \phi_i'(x) \phi_j'(x) + q(x) \phi_i(x) \phi_j(x) \} dx \right] c_i - \int_0^1 f(x) \phi_j(x) dx$$

Chamamos a função ϕ_i como “função chapéu”, sendo definida da seguinte maneira:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{(x - x_{i-1})}{h_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{(x_{i+1} - x)}{h_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x_{i+1} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Assim, conseguimos montar um sistema $A^*c = b$, tal que A é a matriz que composta pelo produto interno das funções $\Phi(x)$, b é a matriz composta pelo produto interno de $f(x)$ com a $\Phi(x)$ e c é a matriz dos coeficientes da função un aproximadora.

Os produtos internos são definidos da seguinte maneira:

$$\langle u, v \rangle_L = \int_0^1 [k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx$$

$$\langle f, \phi_i \rangle = \int_0^1 f(x)\phi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x) dx$$

Padronização dos coeficientes da matriz $\Phi(x)$

Ao fazermos a análise mais aprofundada dos produtos internos das funções $\Phi(x)$, descobriremos que a matriz Φ será de formato tridiagonal, portanto, podemos padronizar o formato geral para cada diagonal presente na mesma.

Ao simplificarmos as expressões, chegamos nas seguintes relações das diagonais:

$$a_{i,i-1} = \int_0^1 \{ p(x) \phi_i'(x) \phi_{i-1}'(x) + q(x) \phi_i(x) \phi_{i-1}(x) \} dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 p(x) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 (x_i - x)(x - x_{i-1}) q(x) dx$$

$$\begin{aligned}
a_{ii} &= \int_0^1 \{ p(x)[\phi_i'(x)]^2 + q(x)[\phi_i'(x)]^2 \} dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 p(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h_i} \right)^2 p(x) dx + \\
&\quad + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 (x - x_{i-1})^2 q(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h_i} \right)^2 (x_{i+1} - x)^2 q(x) dx \\
a_{i,i+1} &= \int_0^1 \{ p(x)\phi_i'(x)\phi_{i+1}'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_{i+1}(x) \} dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h_i} \right)^2 p(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h_i} \right)^2 (x_{i+1} - x)(x - x_i) q(x) dx
\end{aligned}$$

Da mesma maneira, conseguimos encontrar uma expressão geral para as células da matriz do produto entre $f(x)$ e $\Phi(x)$. Esta é definida como:

$$\begin{aligned}
b_i &= \int_0^1 f(x)\phi_i(x) dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_{i-1}} (x - x_{i-1}) f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i} (x_{i+1} - x) f(x) dx
\end{aligned}$$

Ao resolver o sistema, basta anexar os coeficientes encontrados à sua respectiva função chapéu na somatória de todas as funções $\Phi(x)$, obtendo como solução da equação diferencial a seguinte função aproximadora:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$$

Portanto, temos todas as ferramentas necessárias para desenvolver um método numérico de cálculo das equações diferenciais no formato citado.

Solução para intervalos diferentes de $x \in [0,1]$

Supondo que x não se limite ao intervalo entre 0 e 1, nós teremos que definir outra função funcional. Assim, podemos definir que a equação diferencial

$$-\frac{d}{dx} \left[a(x) \frac{d\phi}{dx} \right] + c(x)\phi(x) = f(x)$$

possui seu funcional como sendo:

$$I[\phi(x)] = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[a(x) \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + c(x)\phi^2(x) - 2f(x)\phi(x) \right] dx$$

Logo, perceberemos que não haverá mudanças na forma de cálculo dos coeficientes do sistema final, apenas que o produto interno não é mais definido no intervalo $[0, 1]$, mas sim em $[x_1, x_2]$.

Solução para condições de contorno não homogêneas

Quando nos depararmos com uma função $u(x)$ cuja condições de contorno não são homogêneas, basta redefinir a função f da equação diferencial como sendo:

$$f(x) + (b - a)k'(x) - q(x)(a + (b - a)x) = \tilde{f}(x)$$

Desta maneira, seguimos com o procedimento normal já citado neste relatório para cálculo dos coeficientes da função que melhor se aproxima de $u(x)$

Algoritmo do cálculo da função que mais se aproxima de $u(x)$

Recebimento dos parâmetros da equação diferencial

Antes de começarmos a rodar o programa é necessário recebermos os parâmetros que compõem a equação diferencial, isso inclui: $f(x)$, $k(x)$, $q(x)$. Além disso devemos mapear o intervalo de x .

Após isto o usuário inputa qual o grau de análise que ele gostaria de rodar o programa.

Logo após isto, verificamos se a função solução é homogênea, sendo definida a partir da resposta do usuário.

Todo este processo pode ser observado entre as **linhas 9 e 21** do arquivo index.py anexado à pasta arquivada.

Vale lembrar que todos os inputs de expressão devem estar em função de “x” e são armazenadas em *string*, enquanto os valores numéricos são armazenados em formato *float*.

Definição do passo h

Começamos o algoritmo de fato definindo o valor de h. Logo, o seu valor é dado por: $h = (x_{sup_value} - x_{inf_value}) / (number_analysis + 1)$. Este dado é definido na **linha 69** do arquivo index.py.

Caso em que a função solução não é homogênea

Caso o usuário inputa que a função solução não é homogênea, uma condição é ativada, pedindo a introdução dos valores dos extremos da função $u(x)$, juntamente com a derivada de $k(x)$, para que seja possível a transformação da função inicial como proposta no tópico de “Métodos”

Logo após a transformação, o algoritmo segue caminho normalmente.

Esta transformação pode ser observada entre as **linhas 71 e 77** do arquivo index.py.

Mapeamento dos vetores a, b, c do produto interno das funções chapéu

Iniciamos o mapeamento com o vetor b, ou seja, a diagonal principal da matriz do produto interno das funções chapéu.

Sabemos que o número de itens do vetor b é dado pelo número de análises que o usuário escolheu. Sendo assim, rodamos um range entre 0 e *number_analysis*, já definindo os valores de xi, juntamente com seu antecessor e sucessor.

Ao definirmos xi, podemos chamar a função *internal_multiplication_hat()* que retorna o valor da célula A_{ii} da matriz de produto $\Phi(x)$. Ou seja, para cada valor que a função retorna, nós armazenamos no vetor *b_vector*.

O raciocínio é análogo para os vetores a e c.

O mapeamento está sendo feito entre as **linhas 78 e 118** do arquivo index.py.

internal_multiplication_hat() e o seu funcionamento

Foi citada na introdução as fórmulas gerais para o cálculo dos produtos internos das funções $\Phi(x)$. Assim, a função do produto interno funciona em três grandes módulos.

O primeiro módulo é responsável por calcular a diagonal principal da matriz A. Ele calcula separadamente as quatro integrais,

utilizando o método de integração de Gauss desenvolvido no “EP_02” com o índice $n = 6$ e soma o resultado de cada uma delas, resultando no valor final do produto interno.

O segundo e terceiro módulo são responsáveis pelo cálculo das diagonais superiores e inferiores à diagonal principal. Inicialmente separamos em duas integrais principais, calculando separadamente o valor de cada e retornando a soma entre elas. Novamente é utilizado o utilizando o método de integração de Gauss desenvolvido no “EP_02” com o índice $n = 6$.

O código desta função está entre as **linhas 28 e 54** no arquivo `index.py`.

O código da integração de Gauss está no **arquivo `SolverIntegralByString.py`**.

Mapeamento do vetor d da matriz de produto interno entre $f(x)$ e $\Phi(x)$

Iniciamos o mapeamento do vetor d de maneira similar aos anteriores já citados.

Ao definirmos o valor de x_i , chamamos a função `internal_multiplication_function()`. Esta última irá retornar o valor do item i do vetor d .

O mapeamento está sendo feito entre as **linhas 119 e 129** do arquivo `index.py`.

`internal_multiplication_function()` e o seu funcionamento

Diferente da função de cálculo do produto interno das funções chapéu, este opera em módulo único.

Separamos em duas integrais principais definidas na introdução deste relatório e utilizamos novamente o método de integração de Gauss desenvolvido no “EP_02” com o índice $n = 6$, o que resulta no produto interno entre $f(x)$ e $\Phi(x)$. Assim, a função retorna o valor equivalente ao produto interno das funções introduzidas.

O código desta função está entre as **linhas 54 e 61** no arquivo `index.py`.

Cálculo dos coeficientes que compõem a solução aproximada $Un(x)$

Agora que já possuímos os valores de todos os vetores necessários para a resolução do sistema tridiagonal $A \cdot c = b$, basta chamar a função `initial_solution()`, desenvolvida no “EP_01”, que irá retornar um vetor composto pelos coeficientes que compõem a solução aproximada da equação inicial.

Este vetor é adicionado à variável `analysis_value_function`.

A partir daqui nós temos a solução que mais se aproxima, sendo definida como a somatória de cada item do vetor `analysis_value_function` com o sua respectiva função chapéu, como citado na Introdução desse relatório.

A definição da `alfa_matrix` está na **linha 132** do arquivo `index.py`.

A função `initial_solution()` está no **arquivo `SolverTridiagonalSystem.py`**.

Comparação de erro entre a função real e os coeficientes obtidos do algoritmo.

Para efeito de comparação de erro, o usuário deve introduzir o ponto do intervalo que iremos analisar. Logo após isso é necessária a introdução da função solução exata do problema proposto.

Ao adicionarmos um ponto a ser analisado, as funções $\Phi(x)$ que não possuem o valor `analysis_value_function` no seu intervalo se tornarão nulas na solução $Un(x)$, restando apenas duas funções $\Phi(x)$ na solução. Ao substituímos o valor introduzido pelo usuário obteremos o valor aproximado da função $Un(x)$. Este cálculo é feito entre as **linhas 131 e 140** do arquivo `index.py`.

A partir daí chamamos a função `error_validation()`. Ela irá substituir o `analysis_value_function` na função solução real introduzida pelo usuário, obtendo-se o valor real da função solução e, logo depois, irá subtrair o valor obtido pelo algoritmo com o valor real, obtendo-se uma estimativa de erro.

A função `error_validation()` está descrita entre as **linhas 61 e 68** do arquivo `index.py`.

Testagem do algoritmo

Validação 4.2

Suponhamos uma $f(x)$ no seguinte formato e com as seguintes condições:

intervalo $[0, 1]$

onde $k(x) = 1$, $q(x) = 0$, $f(x) = 12x(1 - x) - 2$

Tal que esta é homogênea nas extremidades.

Podemos introduzir alguns valores para testagem no nosso programa, assim poderemos analisar o erro em questão.

Inicialmente temos que o conjunto de dados é:

```
Digite a função f(x) da sua equação diferencial: 12*x*(1-x) - 2
Digite a função k(x) da sua equação diferencial: 1
Digite a função q(x) da sua equação diferencial: 0
Agora iremos analisar o intervalo em que a solução será proposta:
Digite o intervalo inferior da função u(x): 0
Digite o intervalo superior da função u(x): 1
```

Assim, assumimos um valor n , que define o número de pontos exatos. Além disso, iremos analisar o valor da função em $x = 0.64$. Portanto obtemos o seguinte output:

```
Matriz alfa resultante:
[0.01196289 0.03515625 0.05493164 0.0625      0.05493164 0.03515625
 0.01196289]
Sua função foi computada, digite o valor, dentro do intervalo já
citado, que você gostaria de analisar: 0.64
O valor encontrado para o x em questão é de 0.05556640625000002
Digite a solução exata da equação diferencial: (utilize x como va
riável) => (x**2)*((1-x)**2)
O resultado verdadeiro é: 0.05308416. Logo, o erro é da ordem de
0.002482246250000021
```

Agora, analisemos o valor da função para $n = 15, 31$ e 63

$n = 15$

```
Matriz alfa resultante:
[0.00343323 0.01196289 0.02320862 0.03515625 0.04615784 0.05493164
 0.06056213 0.0625      0.06056213 0.05493164 0.04615784 0.03515625
 0.02320862 0.01196289 0.00343323]
Sua função foi computada, digite o valor, dentro do intervalo já
citado, que você gostaria de analisar: 0.64
O valor encontrado para o x em questão é de 0.05451904296874999
Digite a solução exata da equação diferencial: (utilize x como
variável) => (x**2)*((1-x)**2)
O resultado verdadeiro é: 0.05308416. Logo, o erro é da ordem de
0.0014348829687499884
```

$n = 31$

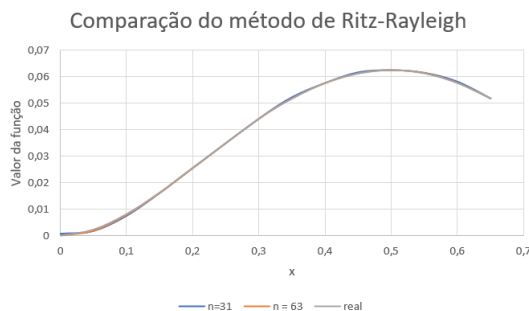
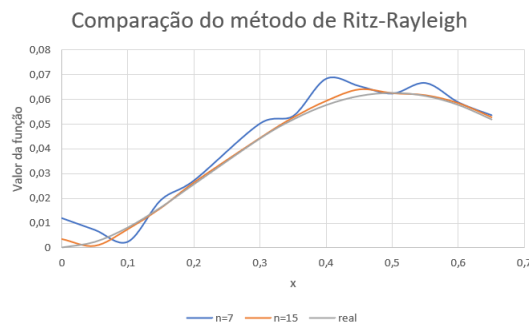
```
Matriz alfa resultante:
[0.00091648 0.00343323 0.00721836 0.01196289 0.01738071 0.02320862
 0.02920628 0.03515625 0.04086399 0.04615784 0.05088902 0.05493164
 0.05818272 0.06056213 0.06201267 0.0625      0.06201267 0.06056213
 0.05818272 0.05493164 0.05088902 0.04615784 0.04086399 0.03515625
 0.02920628 0.02320862 0.01738071 0.01196289 0.00721836 0.00343323
 0.00091648]
Sua função foi computada, digite o valor, dentro do intervalo já
citado, que você gostaria de analisar: 0.64
O valor encontrado para o x em questão é de 0.05334922790527324
Digite a solução exata da equação diferencial: (utilize x como va
riável) => (x**2)*((1-x)**2)
O resultado verdadeiro é: 0.05308416. Logo, o erro é da ordem de
0.0002650679052732391
```

$n = 63$

```
Matriz alpha resultante:
[0.00023657 0.00091648 0.0019961 0.00343323 0.00518709 0.00721836
0.00948912 0.01196289 0.01460463 0.01738071 0.02025896 0.02320862
0.02628035 0.02920628 0.03219992 0.03515625 0.03805166 0.04086399
0.04357249 0.04615784 0.04860216 0.05088902 0.05300337 0.05493164
0.05666167 0.05818272 0.05948855 0.06059213 0.0614062 0.06201757
0.06237799 0.0625 0.06237799 0.06201267 0.0614062 0.06056213
0.0594855 0.05818272 0.05666167 0.05493164 0.05300337 0.05088902
0.04860216 0.04615784 0.04357249 0.04086399 0.03805166 0.03515625
0.03219992 0.02920628 0.02628035 0.02320862 0.02025896 0.01738071
0.01460463 0.01196289 0.00948912 0.00721836 0.00518709 0.00343323
0.0019961 0.00091648 0.00023657]
Sua função foi computada, digite o valor, dentro do intervalo já citado, que você gostaria de
analisar: 0.64
O valor encontrado para o x em questão é de 0.05308794498443557
Digite a solução exata da equação diferencial: (utilize x como variável) => (x**2)*((1-x)**2)
O resultado verdadeiro é: 0.053088416. Logo, o erro é da ordem de 3.7840844355744366e-06
```

Com estes dados podemos concluir que o erro em questão diminui com o aumento do número de análises feitas no programa, ou seja, quanto maior o number_analysis, mais preciso será o nosso programa.

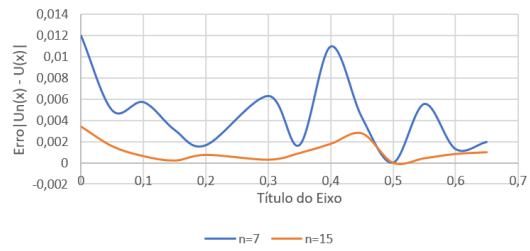
A seguir, conseguimos ver a aproximação para cada valor de n com base na função apresentada no enunciado.



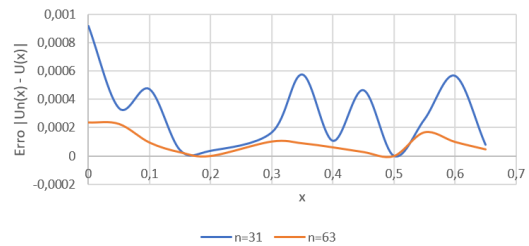
Desta maneira, conseguimos traçar um gráfico do módulo do erro entre a função aproximada e a exata.

Observe que a solução é exata quando x é igual a algum x_i tal que $x_i = h * i$, sendo $i = 1, 2, \dots, n$

Dispersão do módulo do valor real e o seu valor aproximado em função de n



Dispersão do módulo do valor real e o seu valor aproximado em função de n



Equilíbrio com forçantes de calor 4.3

- Consideraremos os valores de $Q_+(x)$ e $Q_-(x)$ constantes

Ao considerarmos os valores de $Q_+(x)$ e $Q_-(x)$ temos que $Q(x)$ será constante. Tendo a seguinte relação:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right) = Q(x)$$

Temos que $Q(x)$ corresponde a $f(x)$ e, além disso, $q(x) = 0$.

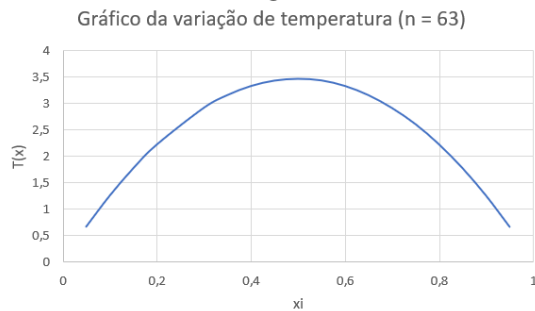
Consideraremos $Q_+(x) = 200 \text{ J}$ e $Q_-(x) = 100 \text{ J}$, sendo assim, $Q(x) = Q_+(x) - Q_-(x) \Rightarrow Q(x) = 100 \text{ J}$.

Vamos introduzir este dado no programa:

```
Digite a função f(x) da sua equação diferencial: 100
Digite a função k(x) da sua equação diferencial: 3.6
Digite a função q(x) da sua equação diferencial: 0
Agora iremos analisar o intervalo em que a solução será proposta:
Digite o intervalo inferior da função u(x): 0
Digite o intervalo superior da função u(x): 1
Digite o número de subdivisões que você gostaria de analisar: 63
As fronteiras do seu intervalo são homogêneas?
Digite 's' para sim e 'n' para não: s
```

```
Sua função foi computada, digite o valor, dentro do intervalo já citado, que
você gostaria de analisar: 0.42
O valor encontrado para o x em questão é de 3.383789062500006
```


Repetindo o mesmo processo para diferentes valores de ξ , obteremos o seguinte gráfico:



Observamos que a variação de temperatura se comporta muito próxima a um parabolóide quando $Q(x)$ é constante.

- Consideraremos os valores de $Q_+(x)$ e $Q_-(x)$ dependentes de x .

Após analisarmos a variação da temperatura em uma situação $Q(x)$ constante, vamos aplicar as seguintes formulações:

$$Q_+(x) = Q_+^0 e^{-(x-L/2)^2/\sigma^2}$$

$$Q_-(x) = Q_-^0 \left(e^{-(x)^2/\theta^2} + e^{-(x-L)^2/\theta^2} \right)$$

Consideraremos $Q_+(x) = 200$ J e $Q_-(x) = 100$ J, além disso, iremos variar o valor de sigma entre 0 e 1.

Portanto, colocando no programa obteremos:

Introduzindo sigma e teta = 0.001, obtemos:

```

Digite a função f(x) da sua equação diferencial: 200*(exp(-(x-(1/2))**2)/(0.001)**2)) -
100*(exp(-(x)**2)/(0.001**2))+exp(-(x-1)**2)/(0.001**2))
Digite a função k(x) da sua equação diferencial: 3.6
Digite a função q(x) da sua equação diferencial: 0
Agora iremos analisar o intervalo em que a solução será proposta:
Digite o intervalo inferior da função u(x): 0
Digite o intervalo superior da função u(x): 1
Digite o número de subdivisões que você gostaria de analisar: 63
As fronteiras do seu intervalo são homogêneas?
Digite 's' para sim e 'n' para não: s

Sua função foi computada, digite o valor, dentro do intervalo já citado, que você gostaria de analisar: 0.42
O valor encontrado para o x em questão é de 0.023687653132511522

```

Introduzindo sigma e teta = 0.01, obtemos:

```

Digite a função f(x) da sua equação diferencial: 200*(exp(-(x-(1/2))**2)/(0.01)**2)) -
100*(exp(-(x)**2)/(0.01**2))+exp(-(x-1)**2)/(0.01**2))
Digite a função k(x) da sua equação diferencial: 3.6
Digite a função q(x) da sua equação diferencial: 0
Agora iremos analisar o intervalo em que a solução será proposta:
Digite o intervalo inferior da função u(x): 0
Digite o intervalo superior da função u(x): 1
Digite o número de subdivisões que você gostaria de analisar: 63
As fronteiras do seu intervalo são homogêneas?
Digite 's' para sim e 'n' para não: s

```

```

Sua função foi computada, digite o valor, dentro do intervalo já citado, que você gostaria de analisar: 0.42
O valor encontrado para o x em questão é de 0.2053973978639898

```

Introduzindo sigma e teta = 0.1, obtemos:

```

Digite a função f(x) da sua equação diferencial: 200*(exp(-(x-(1/2))**2)/(0.1)**2)) -
100*(exp(-(x)**2)/(0.1**2))+exp(-(x-1)**2)/(0.1**2))
Digite a função k(x) da sua equação diferencial: 3.6
Digite a função q(x) da sua equação diferencial: 0
Agora iremos analisar o intervalo em que a solução será proposta:
Digite o intervalo inferior da função u(x): 0
Digite o intervalo superior da função u(x): 1
Digite o número de subdivisões que você gostaria de analisar: 63
As fronteiras do seu intervalo são homogêneas?
Digite 's' para sim e 'n' para não: s

```

```

Sua função foi computada, digite o valor, dentro do intervalo já citado, que você gostaria de analisar: 0.42
O valor encontrado para o x em questão é de 1.8846154943246458

```

Introduzindo sigma e teta = 1, obtemos:

```

Digite a função f(x) da sua equação diferencial: 200*(exp(-(x-(1/2))**2)/(1)**2)) -
100*(exp(-(x)**2)/(1**2))+exp(-(x-1)**2)/(1**2))
Digite a função k(x) da sua equação diferencial: 3.6
Digite a função q(x) da sua equação diferencial: 0
Agora iremos analisar o intervalo em que a solução será proposta:
Digite o intervalo inferior da função u(x): 0
Digite o intervalo superior da função u(x): 1
Digite o número de subdivisões que você gostaria de analisar: 63
As fronteiras do seu intervalo são homogêneas?
Digite 's' para sim e 'n' para não: s

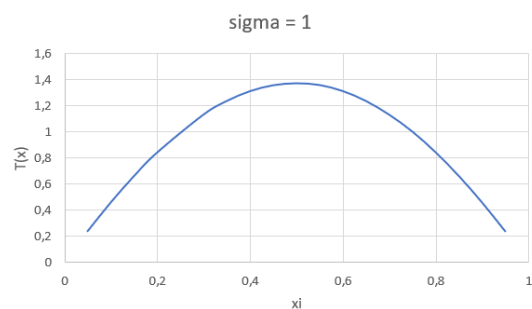
```

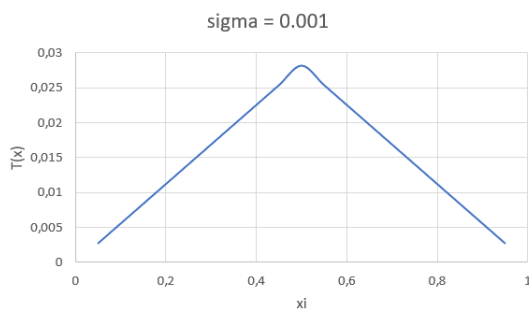
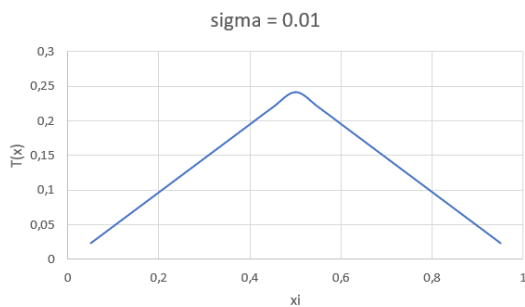
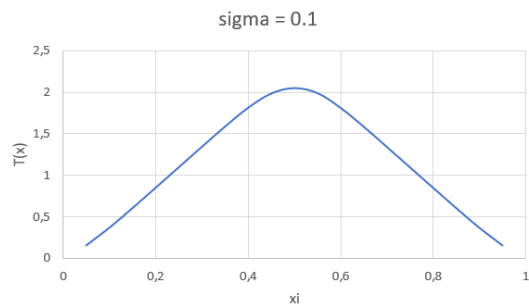
```

Sua função foi computada, digite o valor, dentro do intervalo já citado, que você gostaria de analisar: 0.42
O valor encontrado para o x em questão é de 1.3332044630729551

```

Assim, conseguimos montar um gráfico para comparação, entre ξ e $T(x)$ em função de sigma e teta:





Observe que, conforme há o aumento dos valores de sigma e teta, a discrepância entre temperatura central e seus arredores é menos brusca.

Equilíbrio com variação de material 4.4

Para atacarmos o problema teremos que dividi-lo em três intervalos:

- Primeiro intervalo = $[0, L/2 - d]$
- Segundo intervalo = $[L/2 - d, L/2 + d]$
- Terceiro intervalo = $[L/2 + d, L]$

Realizaremos a testagem da mesma maneira como citada anteriormente. Consideraremos $Q(x) = 100 \text{ J}$,

temperatura nas bordas como sendo 20°C , d como sendo 0.15, $k_s = 30 \text{ W/mK}$ e que a temperatura nas intersecções seja 25°C .

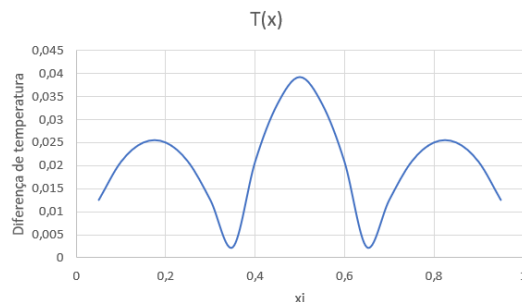
É necessário lembrar que o material no meio não é mais homogêneo, isso porque este está em contato com o material ao redor

Substituindo os valores obteremos:

```
Digite a função f(x) da sua equação diferencial: 100
Digite a função k(x) da sua equação diferencial: 60
Digite a função q(x) da sua equação diferencial: 0
Agora iremos analisar o intervalo em que a solução será proposta:
Digite o intervalo inferior da função u(x): 0
Digite o intervalo superior da função u(x): 0.35
Digite o número de subdivisões que você gostaria de analisar: 63
As fronteiras do seu intervalo são homogêneas?
  Digite 's' para sim e 'n' para não: n
  Digite o valor de u(0): 20
  Digite o valor de u(x) na fronteira superior: 25
  Digite a derivada da função k(x): 0
```

```
Sua função foi computada, digite o valor, dentro do intervalo já citado, que você
gostaria de analisar: 0.15
O valor encontrado para o x em questão é de 0.025022379557298992
```

Repetindo este processo para cada intervalo definido anteriormente. Assim, obteremos o seguinte gráfico:



Logo, é possível verificar as fronteiras não homogêneas entre os intervalos $[0, L/2 - d]$ e $[L/2 + d, L]$, sendo necessária a introdução da derivada de $k(x)$, juntamente com os valores nessas fronteiras.

Conclusão

Podemos concluir que o método dos elementos finitos juntamente com o método de Ritz-Raleigh é um ótimo aproximador para ordens grandes de análises, sendo possível estudar casos complexos, como mostrados nos exemplos 4.3 e 4.4. Logo, tanto o código quanto as análises

apresentaram resultados satisfatórios,
que atendem a realidade cotidiana.

Referências

- *Gustavo de Souza Routman;*
Luís Fernando Hachich de
Souza; Alex Pascoal Palombo,
[http://www1.rc.unesp.br/igce/de
mac/balthazar/analise/cap8.pdf](http://www1.rc.unesp.br/igce/de
mac/balthazar/analise/cap8.pdf)