

# Laser-Optik\_\_Teil\_\_B

July 15, 2024

## 1 Fakultät für Physik

### 1.1 Physikalisches Praktikum P2 für Studierende der Physik

Versuch P2-23, 24, 25 (Stand: April 2023)

[Raum F1-16](#)

Tin Vrkic E-Mail: [uyvpq@student.kit.edu](mailto:uyvpq@student.kit.edu)

Mika Nock E-Mail: [uttzi@student.kit.edu](mailto:uttzi@student.kit.edu)

Gruppennummer: Mo32

Betreuer: Simon Geisert

Versuch durchgeführt am: 08.07.2024

## Beanstandungen:

Testiert am: \_\_\_\_\_ Vermerk: \_\_\_\_\_

## 2 Laser-Optik, Teil B

### 2.1 Motivation

Im Versuch [Laser-Optik, Teil A](#) haben Sie sich mit Hilfe einfacher Messungen mit den grundlegenden Eigenschaften und den Anwendungen von Lasern vertraut gemacht. In diesem Versuch können Sie Ihre experimentellen Erfahrungen um die Anwendung komplexerer interferometrischer Methoden zur Bestimmung kleinster Längenänderungen und um die Untersuchung der Eigenschaften doppelbrechender Kristalle mit Hilfe von linear polarisiertem Laserlicht erweitern. Den eigentlichen Versuchsteilen ist ein Demonstrationsversuch zur Veranschaulichung der Fourier-Transformation und ihrer Bedeutung in der Physik vorangestellt, der nahtlos an die Aufgaben des Versuchs “Laser-Optik, Teil A” anschließt. Beachten Sie hierzu die Hinweise zu diesem Versuch.

### 2.2 Lernziele

Wir listen im Folgenden die wichtigsten **Lernziele** auf, die wir Ihnen mit dem Versuch **Laser-Optik, Teil B** vermitteln möchten:

- Sie untersuchen den Zusammenhang zwischen dem physikalischen Phänomen der Beugung, als Streuung von (kohärentem) Licht und der Fourier-Transformation, am Beispiel der Beugung am Einfachspalt. Dabei haben Sie die Möglichkeit eine vollautomatisierte Messanordnung genauer kennenzulernen.
- Sie untersuchen zwei Anwendungen für exakte interferometrische Messungen kleinster Längenänderungen. Dabei handelt es sich um die sehr kleinen ([magnetostriktiven](#)) [Längenänderung](#) von Nickel und um die direkte Bestimmung der Wellenlänge des verwendeten Laserlichts selbst.
- Sie untersuchen den [Dopplereffekt von Licht](#), als intelligent durchdachte Anwendung des [Michelson-Interferometers](#).
- Sie verwenden die Eigenschaft der linearen Polarisation des Laserlichts um den (Kristall im  $\vec{B}$ -Feld) [Faraday-](#) und (Kristall im  $\vec{E}$ -Feld) [Pockels-Effekt](#) zu studieren. Dabei bestimmen Sie verschiedene Materialkonstanten entsprechender [doppelbrechender Kristalle](#).

- Sie untersuchen die [optische Aktivität](#) von Zuckerlösungen. Auch hierzu verwenden Sie die Eigenschaft der linearen Polarisierung des kohärenten Laserlichts.

## 2.3 Versuchsaufbau

Auf einer optischen Bank können neben einem He-Ne-Laser die optischen Aufbauten für die durchzuführenden Versuche montiert werden. Die Versuche befinden sich in separaten Kabinen. Ein Beispielaufbau ist in der folgenden Photographie abgebildet: ([Link](#))

Für die verschiedenen Versuchsteile stehen Ihnen die folgenden Geräte und Materialien zur Verfügung:

- Ein Experimentiertisch (mit 3 m-Zeisschiene) mit diversen Verschiebereitern.
- Ein 2 mW-He-Ne-Laser mit  $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$  Wellenlänge (in geschlossener Bauweise mit integriertem Netzteil, mit polarisiertem Licht).
- Ein Strahlaufweitungssystem (wie im Versuch Laser-Optik, Teil A), Justieraufbau mit Fassungen, Halter für Linsen und Blenden und ein großer weißer Schirm.
- Ein Multimeter (Vocraft in verschiedenen Ausführungen).
- Ein Ampèremeter (Gossen Manometer, ohne Zusatzwiderstände 100 mV/1 mA (Vorsicht bei der Bedienung!), dazu [Shunt](#)-Widerstände für 500 mA und für 5 A zur Messung der Spulenströme.
- Ein Funktionsgenerator FG 800/0, 2 Hz–200 kHz.
- Ein Netzgerät für die Gleichspannung an der Pockelszelle, einstellbar bis  $\approx 1900 \text{ V}$  mit integriertem Modulationstransformator.
- Jeweils ein Nieder (NF)- und Audiofrequenz(AF)-Verstärker.
- Ein Stromversorgungsgerät/Labor-Netzgerät (stufenlos und kurzzeitig bis zu 4 A einstellbar).
- Ein Glan-Thompson Polarisationsfilter; Durchmesser  $d = 10 \text{ mm}$ , auf einem Stift drehbar montiert mit Winkelskala ([Extinktionsverhältnis](#):  $10^5/1$ ). **Diesen Filter dürfen Sie nicht im unaufgeweiteten Strahl benutzen!**
- In 25 mm-Fassungen:
  - Ein Polarisationsfilter ohne Skala (nicht an allen Plätzen verfügbar),
  - Ein Spalt der Breite  $b = 0,4 \text{ mm}$ ,
  - Eine Lochblende mit Durchmesser  $d = 1 \text{ mm}$  (nicht an allen Plätzen verfügbar),
  - Eine Irisblende,
  - Ein [Achromat](#) mit Brennweite  $f = 10 \text{ mm}$ ,
  - Sammellinsen mit Brennweiten  $f = 30 \text{ mm}$ ,  $60 \text{ mm}$  und  $150 \text{ mm}$  (die Linse mit  $f = 60 \text{ mm}$  ist nicht an allen Plätzen verfügbar),
  - Tischlampe, Taschenlampe, 2 Laserschutzbrillen (nicht vollständig an allen Plätzen verfügbar).
- Im Schrank:
  - Lichtdetektor Si-Photoelement BPW34 (kleinflächig),  $2,7 \text{ mm} \times 2,7 \text{ mm}$ , nur im Elementbetrieb, d.h. ohne Betriebsspannung direkt an Spannungs- oder Strommessgerät angeschlossen, zu verwenden. Der Anschluss erfolgt an den mit “+” und “-” bezeichneten Stiften mit jeweils spezieller Leitung (einfach vorhanden).
  - Lichtdetektor Si-Photoelement, Durchmesser  $d = 12 \text{ mm}$ , wie bei Versuchsteil A (einfach vorhanden).
  - Lichtdetektor für modulierte Licht (mit Photoelement  $2,7 \text{ mm} \times 2,7 \text{ mm}$ , NF-Verstärker und Lautsprecher).
  - Ein Michelson-Interferometer mit Feinverstellung eines Spiegels durch (10 : 1)-

- Hebeluntersetzung und Mikrometerschraube, eine dazu aufsteckbare Antriebsrolle für Motorantrieb (drei mal vorhanden).
- Ein Michelson-Interferometer, ein Spiegel auf einem Ni- bzw. Fe-Stab befestigt, Länge  $\ell = 105$  mm, in einer Spule mit  $n = 2000$  Windungen (jeweils einmal vorhanden).
  - Ein Synchronmotor (1 U/min, mit Antriebsrolle und Gummiriemen für die Bewegung des Interferometerspiegels).
  - Eine Küvette (198 mm  $\times$  58 mm), in einem Halter auf einem Stift, für optisch aktive Lösungen (zweimal in Plastik- und einmal in Glasausführung).
  - Haushaltszucker in zwei Gefäßen.
  - Eine Chemikalienwaage, 1  $\times$  Mettler H 315 auf einem Wägetisch und drei verschiedene mechanische Waagen.
  - Bechergläser, Messzylinder, Trichter.
  - Sorbose-Lösung (optisch aktiv, linksdrehend, Massenkonzentration  $\beta = 0,33$  g cm<sup>-3</sup>).
  - Faraday-Modulator, Bleisilikatglas der Länge  $\ell = 75$  mm in einer Spule mit  $n = 800$  Windungen.
  - Ein Radioapparat mit Zweitlautsprecherausgang und zugehöriger Anschlussleitung, als Modulationsquelle.
  - Ein Lichtdetektor für moduliertes Licht (mit Photoelement 2,7 mm  $\times$  2,7 mm, NF-Verstärker und Lautsprecher).
  - Pockelszelle im Drehhalter mit Skala zur Angabe des Winkels zwischen Feld- und Laserpolarisationsrichtung, Lithiumniobat-Kristall, Höhe  $h = 2$  mm (entspricht dem Elektrodenabstand), Länge  $\ell = 20$  mm, optische Achse parallel zur Feldrichtung.
  - Stimmgabel 1700 Hz (2 $\times$ ), Maßband (1 $\times$ ), Stoppuhr (5 $\times$ ).
  - Aufbau für die optische Bank mit Fototransistor, Schrittmotor und Endschaltern.
  - Vorverstärker, Schrittmotor- und Relais-Schnittstelle.
  - 2 Laserschutzbrillen (für das Betreuungspersonal).
  - Rechner (IBM-kompatibler PC 386SX) mit VGA-Graphikkarte, Graphik-Drucker, Maus, Festplatte, 1,2 MB und 1,44 MB-Laufwerk und spezieller Schnittstellen-Karte (ADC, DAC, PIO), (nur einmal vorhanden).

## 2.4 Wichtige Hinweise

- Bei diesem Versuch arbeiten Sie mit einem Laser, der entsprechend **gefährlich für Ihre Augen** sein kann. Gehen Sie daher **vorsichtig und verantwortungsbewusst** mit dem Laser um und halten Sie sich an die Anweisungen des/der Tutor:in.
- Achten Sie darauf, dass alle Personen im Raum bei der Durchführung des Versuchs eine **Schutzbrille** tragen.
- Vermeiden Sie direkten Blickkontakt mit dem Laserstrahl und richten Sie ihn niemals auf andere Personen. Bleiben Sie beim Experimentieren in der Regel stehen, mit den Augen also weit oberhalb der Strahlhöhe.
- Stellen Sie sicher, dass die Laserleistung und -frequenz auf die vorgesehenen Werte eingestellt sind und überprüfen Sie dies regelmäßig während des Experiments.
- Beachten Sie, dass der Laserstrahl bei falscher Handhabung Schäden an optischen Elementen verursachen kann. Verwenden Sie nur die bereitgestellten optischen Elemente und reinigen Sie sie nur mit geeigneten Materialien.
- Vor dem Einschalten des Lasers müssen alle Geräte sorgfältig aufgebaut und justiert werden. Führen Sie diese Schritte **erst nach Rücksprache mit dem/der Tutor:in** durch.

---

```

[1]: import pathlib
import pandas as pd
import numpy as np
import kafe2
import scipy as sc
import matplotlib.pyplot as plt
from uncertainties import ufloat, unumpy as unp
from uncertainties.unumpy import nominal_values as n, std_devs as s

[2]: # erstellen einer Funktion für kafe2 Fits
def fit_funktion(xy_data, model_function, xy_error, xy_label, title,
    ↪constraint=[], add_error=True):
    xy_data = kafe2.XYContainer(xy_data[0], xy_data[1])
    xy_data.label = title
    fit = kafe2.XYFit(xy_data = xy_data, model_function = model_function)
    if add_error:
        fit.add_error(axis = 'x', err_val = xy_error[0])
        fit.add_error(axis = 'y', err_val = xy_error[1])
    for i in range(len(constraint)):
        fit.add_parameter_constraint(name = constraint[i][0], value =
    ↪constraint[i][1], uncertainty = constraint[i][2])
    fit.do_fit()
    plot = kafe2.Plot(fit)
    plot.x_label, plot.y_label = xy_label[0], xy_label[1]

    return fit.parameter_values, fit.parameter_errors, plot

def weighted_mean_gauss(arr):
    res = np.sum( unp.nominal_values(arr) / unp.std_devs(arr) ) / np.sum( 1 /
    ↪unp.std_devs(arr) )
    return res

def std_weighted_mean_gauss(arr):
    N = unp.nominal_values(arr).size
    arr_bar = weighted_mean_gauss(arr)
    return np.sqrt( (N/(N-1)) * np.sum( (unp.nominal_values(arr)-arr_bar)**2 /
    ↪unp.std_devs(arr) ) / np.sum( 1/unp.std_devs(arr) ) )

# Wellenlänge des Lasers in m
lbda = 632.8 * 10**(-9)

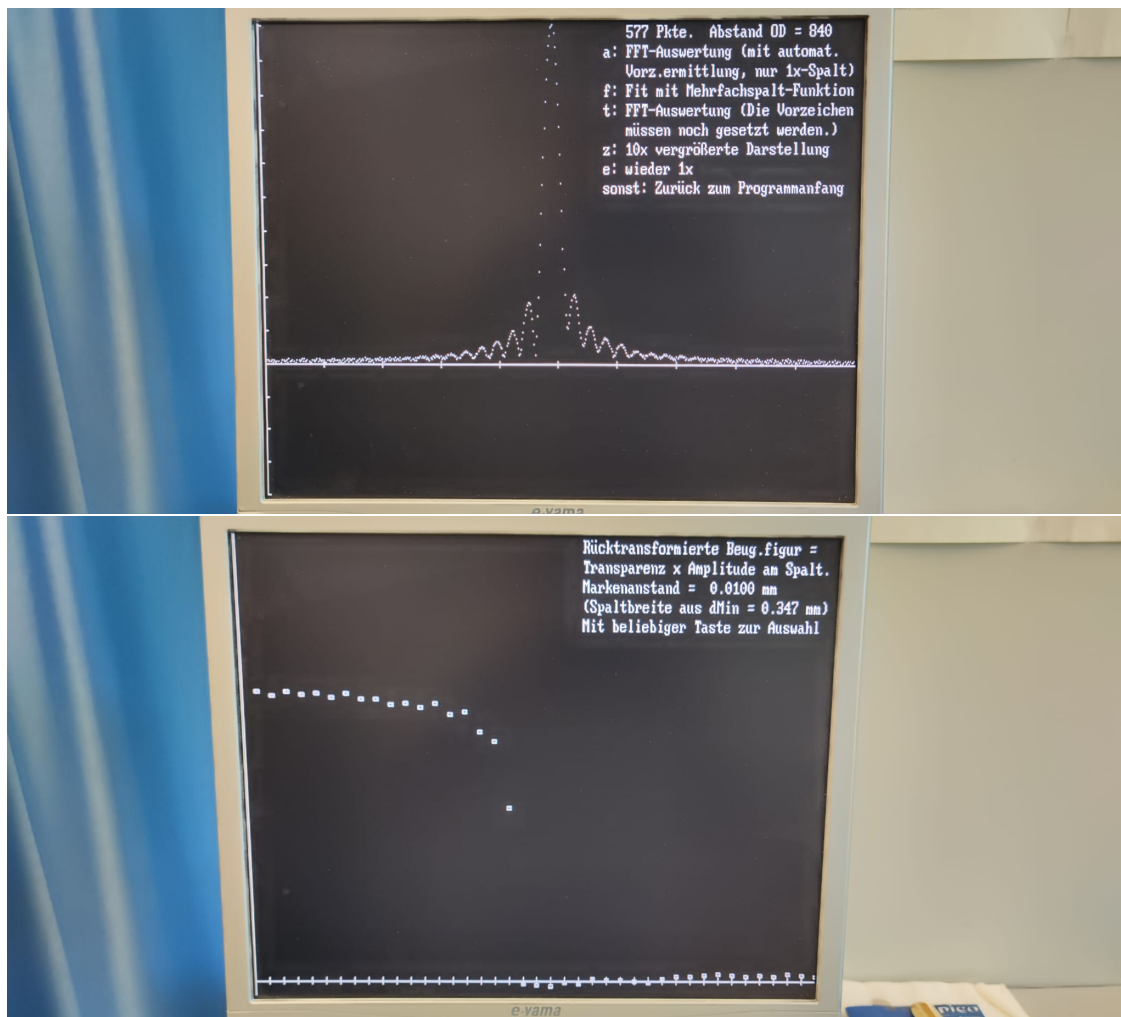
```

---

## 2.5 Durchführung

### 2.5.1 Aufgabe 1: Beugungsbild eines Spalts

Hierbei handelt es sich um einen **Demonstrationsversuch**. Er soll von allen Gruppen gemeinsam und mit Unterstützung des Betreuers durchgeführt werden. Mithilfe eines auf einen Schrittmotor montierten Phototransistors messen Sie das Beugungsbild eines Spalts aus, der mit einem He-Ne-Laser ausgeleuchtet wird. Die gewonnenen Daten werden auf einem bereitstehenden Computer verarbeitet; aus der [Fourier-Rücktransformation](#) des aufgezeichneten Beugungsbildes erhalten Sie das Bild des Spalts. Dokumentieren und diskutieren Sie Ihre Beobachtungen.



In diesem Aufgabenteil wird die Beugung eines Laserstrahles an einem Einzelspalt untersucht. Zur Messung wird ein Fotosensor verwendet, der mittels eines Computers auf einer Strecke senkrecht zur optischen Achse verschoben werden kann.

In der ersten Grafik sind die Messwertpaare aus der Verschiebung des Detektors in Relation zur optischen Achse und der erzeugten Fotospannung zu sehen. Es zeigt sich die typische Verteilung  $I(x) \propto \frac{\sin(x)}{x}$ , welche ein großes Hauptmaximum in der nullten Ordnung aufweist und auf den Seiten deutlich niedrigere Nebenmaxima.

Aus diesen Messwerten soll nun durch eine FastFourierTransform die Form des Beugungsobjektes bestimmt werden. Hierfür muss jedoch eine Fraunhofernäherung gemacht werden, bei der das Licht als parallel angenommen wird. Hierfür muss das Beugungsobjekt (Also der Einzelspalt) möglichst weit entfernt vom Detektor positioniert werden. Es ergibt sich somit die Transmissionsfunktion des Beugungsobjektes, die in der zweiten Grafik zu sehen ist.

Die, aus der Transformation bestimmte, Spaltbreite beträgt  $0.347\text{mm}$ , was von der Herstellerangabe  $4\text{mm}$  abweicht. Diese Abweichung könnte zustande kommen durch eventuelle Messungenauigkeiten, dem Einfluss des Lichtes im Raum oder einer falschen Stellung der optischen Bauteile.

---

## 2.5.2 Aufgabe 2: Anwendungen des [Michelson-Interferometers](#)

**2.1:** Beobachten Sie interferometrisch die sehr geringe Abhängigkeit der Länge von Nickel vom Magnetfeld  $\vec{H}$  und bestimmen Sie den [Magnetostriktionskoeffizienten](#).

**2.2:** Bestimmen Sie aus den beobachteten Änderungen des Interferenzbildes bei gemessener Verschiebung eines der Spiegel die Wellenlänge des Laserlichts.

**2.3:** Demonstrieren Sie den “[Dopplereffekt](#)” mit Lichtwellen im Fall  $v \ll c$  und messen Sie  $v$  interferometrisch.

**2.4:** Bewegen Sie eine schwingende Stimmgabel von Ihrem Ohr weg und auf Ihr Ohr zu und zwar einmal mit und einmal ohne eine reflektierende Wand in der Nähe (akustisches Analogon zu Aufgabe 2.3). Dokumentieren und diskutieren Sie Ihre Beobachtungen.

---

## 2.6 Auswertung Aufgabe 2

### 2.6.1 Magnetostriktion

```
[3]: # taking the measurement
# positive current
I_pos = unp.uarray([0.097, 0.207, 0.317, 0.400, 0.543], [0.25])
# negative Ströme (nach aus und einbauen des Interferometers)
I_neg = unp.uarray([-0.080, -0.271, -0.301, -0.362, -0.517], [0.25])

# defining a model
def magn_strict(m,n,lam,alpha=-3*10**-9,c=-0.06):
    return 1 / (alpha*n) * (m + 1/2) * lam + c

# making two fits
# defining the data for the fits
m_pos = np.array([1,2,3,4,5])
data_pos = kafe2.XYContainer(m_pos,n(I_pos))
data_pos.label = 'Ströme der Minima'
data_pos.axis_labels = ('Index des Minimums','Strom durch die Spule')

m_neg = np.array([-1,-2,-3,-4,-5])
```

```

data_neg = kafe2.XYContainer(m_neg,n(I_neg))
data_neg.label = 'Ströme der Minima'
data_neg.axis_labels = ('Index des Minimums','Strom durch die Spule')

# making the fits
fit_pos = kafe2.XYFit(data_pos, magn_strict)
fit_pos.add_error('x',s(I_pos))
fit_pos.fix_parameter('lam',632.8 * 10**-9)
fit_pos.fix_parameter('n',2000)
fit_pos.do_fit()

fit_neg = kafe2.XYFit(data_neg, magn_strict)
fit_neg.add_error('x',s(I_pos))
fit_neg.fix_parameter('lam',632.8 * 10**-9)
fit_neg.fix_parameter('n',2000)
fit_neg.do_fit()

# plotting the fits
plot = kafe2.Plot([fit_pos,fit_neg])
plot.plot()
plot.show()

# calculating the rest of the values
alpha_pos = ufloat(fit_pos.parameter_values[2],fit_pos.parameter_errors[2])
alpha_neg = ufloat(fit_neg.parameter_values[2],fit_neg.parameter_errors[2])
alpha = (alpha_pos + alpha_neg) / 2

print(f'der Magnetostruktionskoeffizient beträgt {alpha}')

```

```

c:\Users\probz\anaconda3\lib\site-packages\iminuit\util.py:172: IMinuitWarning:
Assigned errors must be positive. Non-positive values are replaced by a
heuristic.

```

```

    warnings.warn(
c:\Users\probz\anaconda3\lib\site-packages\iminuit\util.py:172: IMinuitWarning:
Assigned errors must be positive. Non-positive values are replaced by a
heuristic.

```

```

    warnings.warn(
c:\Users\probz\anaconda3\lib\site-
packages\scipy\lib\finite_differences.py:145: RuntimeWarning: invalid value
encountered in divide

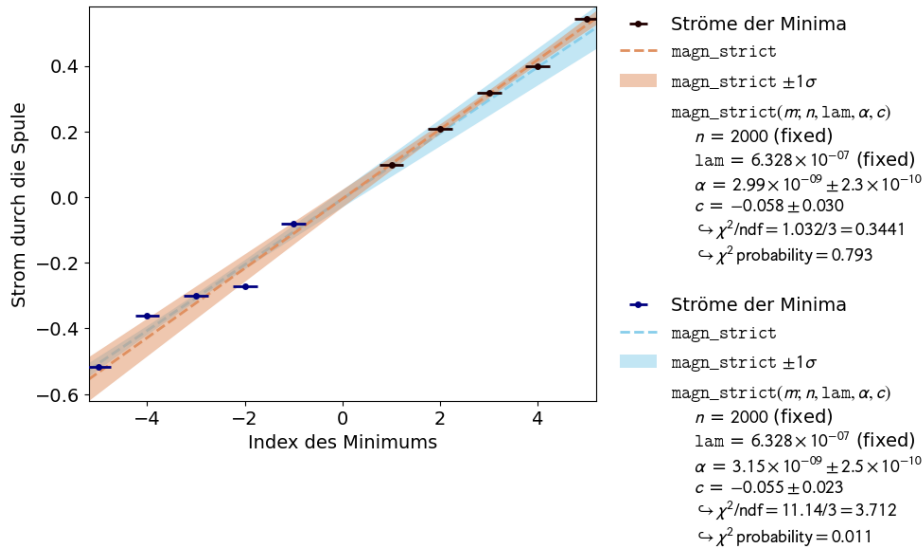
```

```

    return val / prod((dx,) * n, axis=0)

```

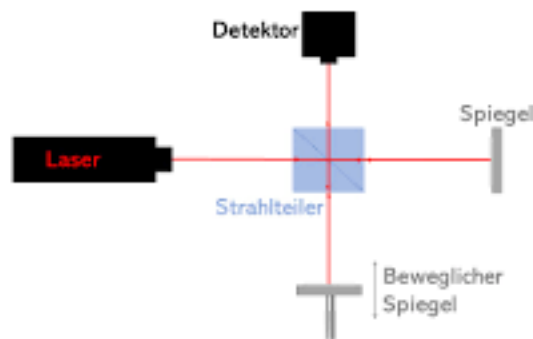




der Magnetostruktionskoeffizient beträgt  $(3.07 \pm 0.17) \times 10^{-9}$

Mithilfe eines Michelson-Interferometers soll in dieser Aufgabe der Magnetostruktionskoeffizient eines Nickelstabes bestimmt werden.

Ein Michelson-Interferometer besteht im wesentlichen aus einem Strahlteiler, und zwei Spiegeln. Trifft ein Laserstrahl im  $45^\circ$ -Winkel ein, wird er aufgespalten und durchläuft zwei verschiedene Strecken, auf denen er jeweils zurückgeleitet wird und den Strahlteiler erneut passiert. Die beiden Strahlen erzeugen nun aufgrund der verschiedenen Wege, die sie durchlaufen haben ein Interferenzmuster. In diesem Interferenzmuster ergeben sich im Zentrum jeweils Maxima oder Minima.



Die Messung des Magnetostruktionskoeffizienten erfolgt, indem die Ströme, für die Minima zu beobachten sind, gegenüber der Ordnung dieser Minima aufgetragen werden. Da sich keine Informationen zur exakten Definition des Koeffizienten finden, wird er im folgenden wie folgt betrachtet:

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot H} \Rightarrow \Delta l = \alpha l_0 H = \alpha I n$$

und wir erhalten mit

$$\Delta s = (2m + 1)\lambda$$

$$\Delta l = \frac{1}{2}\Delta s$$

dass:

$$I = \frac{\lambda}{n\alpha} \cdot \left(m + \frac{1}{2}\right)$$

Mit dieser Definition für den Magnetostruktionskoeffizienten  $\alpha$  können wir nun das Modell  $I(m) = \frac{\lambda}{n\alpha} \cdot (m + \frac{1}{2}) + c$  jeweils für die positiven und die negativen Werte einpassen. Hierbei müssen zwei verschiedenen Fits erstellt werden, da das Interferometer zwischen den Messungen aus der Halterung geholt wurde und deshalb kein konstanter Startwert garantiert werden kann.

Mit einer Unsicherheit von  $\sigma_I = 0.25$  ergibt sich für die positiven Werte ein akzeptabler Fit ( $\chi^2 = 0.34$ ). Für die negativen Werte ist die Anpassung ungenauer, aber dennoch akzeptabel ( $\chi^2 = 3.71$ ). Bildet man nun den Mittelwert aus den beiden Erhaltenen, ergibt sich insgesamt für den Magnetostruktionskoeffizienten:

$$\alpha = (3.07 \pm 0.17) \frac{nm}{A}$$

## 2.6.2 Kalibration der Längenskala

```
[4]: # taking the measurement
x = np.ushortarray([172, 175, 178, 181, 184, 187, 190, 192, 195, 198, 201, 204,
↪207, 209, 212], [3]) * 10**-6

# defining a model
def model_mini(m, lam, c):
    return (m + 1/2) * lam + c

# defining the data
m = np.arange(15) * 10
data_kalib = kafe2.XYContainer(m, n(x))
data_kalib.label = 'Positionen der Minima'
data_kalib.axis_labels = ('Ordnung der Minima', 'verschobene Strecke [m]')

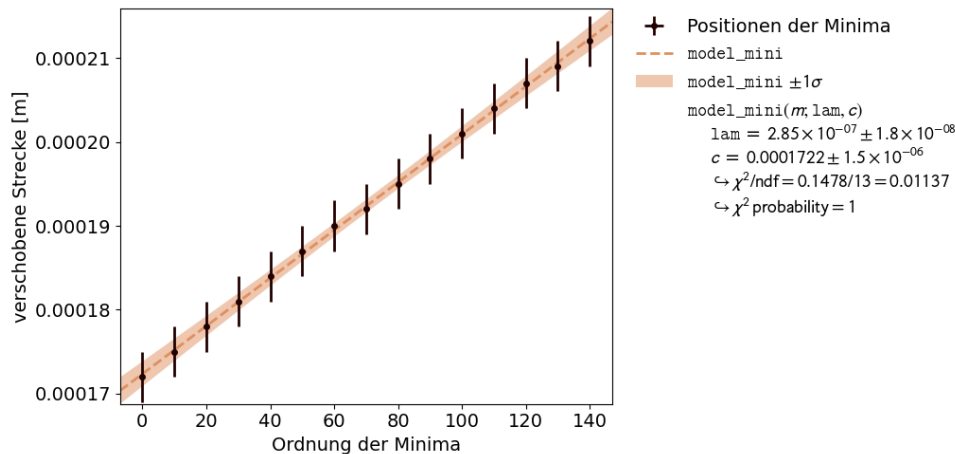
# making the fit
fit_kalib = kafe2.XYFit(data_kalib, model_mini)
fit_kalib.add_error('y', s(x))
fit_kalib.do_fit()
```

```

# plotting the fit
plot = kafe2.Plot(fit_kalib)
plot.plot()
plot.show()

# printing result
conv = (632.8 * 10**-9) / ufloat(fit_kalib.parameter_values[0], fit_kalib.
    ↪ parameter_errors[0])
print(f'der Korrekturfaktor beträgt {conv.n} +/- {conv.s}')

```



der Korrekturfaktor beträgt  $2.217571506370545 \pm 0.1393256359209753$

Zur weiteren Betrachtung des Michelsoninterferometers wird ein neuer Aufbau verwendet, für den der Spiegel und der Ni-Stab durch einen Beweglichen ersetzt. Dieser kann über eine Schraube verstellt werden, die mit einem Motor angetrieben werden kann. Da jedoch die Übersetzung, mit der die Schraube den Spiegel verschiebt unklar ist, wird diese zunächst ermittelt.

Hierfür wird von einem zufällig gewählten Ausgangspunkt die Schraube so verstellt, dass zehn Minima auf dem Schirm zu sehen waren und am zehnten Minimum die Längenskala der Schraube abgelesen. Aufgrund des Zusammenhangs zwischen Verschiebung des Spiegels und Gangunterschied können wir  $\Delta l(m) = \lambda \cdot (m + \frac{1}{2})$  einpassen und erhalten so die Wellenlänge, die wir erhalten würden, falls die Skala korrekt wäre.

Aus der erhaltenen Wellenlänge und der Wellenlänge für He-Ne-Laser kann nun ein Korrekturfaktor nach der Definition  $\kappa = \frac{\lambda}{\lambda_{\text{He-Ne}}}$  errechnet werden. Multipliziert man diesen mit den abgelesenen Werten, erhält man die korrigierten Längen.

Der durchgeführte Fit liegt im Akzeptanzbereich mit  $\chi^2 = 0.01137$  und wir erhalten somit

$$\kappa = 2.218 \pm 0.139$$

### 2.6.3 Dopplereffekt

Für diesen Versuch wird der Drehregler des Spiegel über die Antriebsrolle mit dem Motor verbunden. Nun kann eine Geschwindigkeit eingestellt werden, die für beide Messreihen gleich bleiben muss. Bei der ersten Messreihe wird das Interferenzbild am Schirm beobachtet, das sich mit der Zeit ändert, wenn der Motor eingeschalten wird. Dazu wird 10 mal die Zeit zwischen 10 Minima auf dem Schirm gemessen, woraus sich die Geschwindigkeit des Spiegels berechnen lässt. Bei der zweiten Messreihe wird 9 mal die Zeit gemessen, die der Spiegel für eine Strecke von 2 m (auf der Skala) benötigt, die mit dem Auge an der Mikrometerskala am Drehregler abgelesen wird. Dieser Wert ist laut Aufgabe 2.2 nicht korrekt, sondern 1 m auf der Skala beträgt tatsächlich  $(2.218 \pm 0.139)$  m.

Beide Male wird die Geschwindigkeit für jeden Messpunkt berechnet und dann der gewichtete Mittelwert mit Unsicherheit berechnet.

Für die erste Messreihe setzen wir folgende Formel an, da wir den Zeitabstand zwischen 10 Minima gemessen haben:  $\Delta s = (k + 1/2)\lambda$ . Es gilt natürlich  $\Delta s = v\Delta t$ . Einsetzen und umformen ergibt:  $v = \frac{(k+1/2)\lambda}{\Delta t} = \frac{(2k-1)\lambda}{2\Delta t}$ , wobei ja  $k = 10 = \text{const.}$

Die zweite Formel wird als  $v = \Delta s / \Delta t$  für die zweite Messreihe genutzt.

```
[5]: # Es wird die Zeit für 10. Minima gestoppt -> Geschwindigkeit
delta_t1 = unp.uarray([16.81, 15.35, 16.06, 15.57, 14.95, 14.90, 14.39, 15.47,
    ↪14.95, 15.35],[.25]) # Sekunden
v_min_arr = (10 + 1/2) * lbda / delta_t1
v_min = ufloat( weighted_mean_gauss(v_min_arr) ,
    ↪std_weighted_mean_gauss(v_min_arr) )
print(f"Geschwindigkeit des Spiegels über Interferenzminima: {v_min} um/s")
```

Geschwindigkeit des Spiegels über Interferenzminima:  $(4.31 \pm 0.19) \cdot 10^{-7}$  um/s

```
[6]: # Korrekturfaktor der Längenskala
kappa = ufloat(2.218, 0.139)
# Als separate Messreihe, mit gleicher Geschwindigkeit
# Zeit die der Motor für 2.0um benötigt -> Geschwindigkeit
delta_t2 = unp.uarray([10.45, 9.13, 9.89, 10.39, 8.77, 10.43, 8.90, 8.87, 9.
    ↪79],[.2]) # Sekunden
v_dist_arr = kappa * 2 * 10**(-6) / delta_t2
v_dist = ufloat( weighted_mean_gauss(v_dist_arr) ,
    ↪std_weighted_mean_gauss(v_dist_arr) )
print(f"Geschwindigkeit des Spiegels über zurückgelegte Strecke des Spiegels:
    ↪{v_dist} um/s")
```

Geschwindigkeit des Spiegels über zurückgelegte Strecke des Spiegels:  
 $(4.61 \pm 0.34) \cdot 10^{-7}$  um/s

Wir erhalten für die Geschwindigkeit des Spiegels, bestimmt über:

- die Interferenzminima:  $v = (0.431 \pm 0.019) \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- die zurückgelegte Strecke des Spiegels:  $v = (0.461 \pm 0.034) \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Die Ergebnisse sind ziemlich gut, der erste Wert liegt sogar im Unsicherheitsbereich des zweiten. Umgekehrt ist das leider nicht der Fall, aber solche winzigen Unterschiede bei sowieso schon so geringen Geschwindigkeiten nicht so schlimm. Es ist immer wieder faszinierend, wie gut sich die

Eigenschaften von Licht zum präzisen Messen von allen möglichen Dingen nutzen lassen. Allerdings ist die Messung per Augenmaß auch sehr gut ausgefallen, was aber wiederum nicht möglich gewesen wäre, ohne die Kalibrationsmessung, bei der wieder die Interferenzeigenschaften von Licht ausgenutzt wurden.

---

### 2.6.4 Aufgabe 3: Faraday- und Pockels-Effekt

**3.1:** Modulieren Sie die Intensität des Laserlichts durch Anwendung des [Faraday-Effekts](#), indem Sie das linear polarisierte Laserlicht erst einen Stab aus Bleisilikatglas im longitudinalen Magnetfeld einer Spule und dann einen Polarisationsfilter durchlaufen lassen.

**3.2:** Bestimmen Sie die [Verdet-Konstante](#)

$$V \equiv \frac{\alpha}{Bl}$$

von Bleisilikatglas, wobei  $B$  der Magnetfeldstärke und  $l$  der Länge des Stabs entsprechen und  $\alpha$  der Winkel ist, um den das linear polarisierte Licht beim Durchlaufen des Stabs gedreht wurde.

**3.3:** Modulieren Sie die Intensität des Laserlichts durch Anwendung des [Pockels-Effekts](#), indem Sie das linear polarisierte Laserlicht einen Lithiumniobat-Kristall mit transversalem elektrischen Feld (Feldrichtung  $45^\circ$  gegen die Polarisationsrichtung des Laserlichts gedreht) und ein Polarisationsfilter ( $90^\circ$  gegen die Polarisationsrichtung des Laserlichts gedreht) durchlaufen lassen.

**3.4:** Bestimmen Sie die Konstante

$$k \equiv \frac{\Delta n(E)}{E}$$

für den Pockels-Effekt bei Lithiumniobat für die Wellenlänge des Laserlichts, wobei  $\Delta n(E)$  der Änderung des Brechungsindex und  $E$  der elektrischen Feldstärke entsprechen.

---

## 2.7 Auswertung Aufgabe 3

### 2.7.1 Faraday-Effekt

Der Faraday-Effekt ist ein magnetooptischer Effekt. Lässt man Laserlicht durch ein Medium laufen und legt zusätzlich ein konstantes Magnetfeld in Richtung der Propagationsrichtung des Lichts an (in dem man z.B. einen Zylinder in eine Spule schiebt und Strom durch die Spule schickt), dreht sich das linear polarisierte Laserlicht während des Durchgangs durch das Material um einen Winkel  $\alpha$  in seiner Polarisationsebene. Dieser Effekt ist linear, d.h. der Winkel skaliert linear mit der Länge der Strecke, die das Licht im Material unter dem Einfluss der Magnetfeldes zurücklegt. Dieser Winkel lässt sich messen, wenn das Licht nach dem Faraday-Modulator noch durch einen Polarisationsfilter läuft. Zunächst sucht man ohne Magnetfeld ein Minimum der Intensität, dann schaltet man das Magnetfeld an und sucht, unter welchem Winkel das selbe Minimum jetzt zu finden ist. Die Polarisation wurde demnach um genau die Differenz gedreht, man muss nur auf die Drehrichtung (math. pos. und neg.) achten.

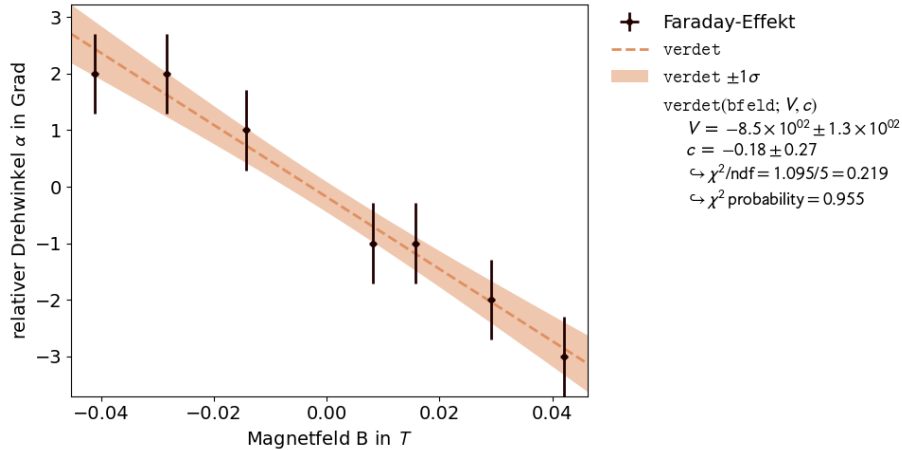
Das durch das Bleisilikatglas laufende Magnetfeld lässt sich bei bekanntem Strom durch die Spule und bekannter Geometrie des Faraday-Modulators näherungsweise berechnen über die Formel für eine unendlich lange Spule:  $B = \mu_0 \mu_r \frac{I \cdot N}{l}$ . Da die Permeabilitätszahl  $\mu_r$  von Bleisilikatglas unbekannt ist, wird sie einfach zu 1 angenommen.  $\mu_0$  ist eine Naturkonstante, die Windungszahl beträgt  $N = 800$ , die Länge der Spule entspricht im wesentlichen der Länge des Bleisilikatglases  $l = 75 \text{ mm}$  und der Strom  $I$  wurde natürlich gemessen. Formen wir die Formel etwas um, erhalten wir

$$\alpha(B) = B \cdot V \cdot l$$

```
[7]: ströme_32 = unp.uarray([-3.07, -2.12, -1.06, 0.61, 1.17, 2.18, 3.14], 0.05) #  $I$  in Ampere
delta_alpha = ufloat(15, .5) - unp.uarray([13, 13, 14, 16, 16, 17, 18], .5) #  $\alpha$  in °
N_Farad = 800
mu_0 = 1.25663706127 * 10**(-6) #  $N / A^2$ 
l_sp = 75 * 10**(-3) # Meter
bfeld_32 = mu_0 * ströme_32 * N_Farad / l_sp # Tesla

def verdet(bfeld, V=1, c=.0):
    return V * bfeld * l_sp + c
verdet_data = kafe2.XYContainer( n(bfeld_32) , n(delta_alpha) )
verdet_data.label = "Faraday-Effekt" # Title
verdet_fit = kafe2.XYFit( xy_data = verdet_data , model_function = verdet )
verdet_fit.add_error(axis="x" , err_val=s(bfeld_32))
verdet_fit.add_error(axis="y" , err_val=s(delta_alpha))
verdet_fit.do_fit()
verdet_plot = kafe2.Plot(verdet_fit)
verdet_plot.x_label, verdet_plot.y_label = "Magnetfeld B in T" , "relativer  $\alpha$  in Grad"
verdet_plot.plot()
verdet_plot.show()

verdet_konst = ufloat(verdet_fit.parameter_values[0], verdet_fit.
    parameter_errors[0])
verdet_konst_rad = verdet_konst * np.pi / 180
print(f"Verdet Konstante: V = {verdet_konst:.0f} °/Tm")
print(f"Verdet Konstante: V = {verdet_konst_rad:.1f} rad/Tm")
```



Verdet Konstante:  $V = -850 \pm 126 \text{ }^\circ/\text{Tm}$

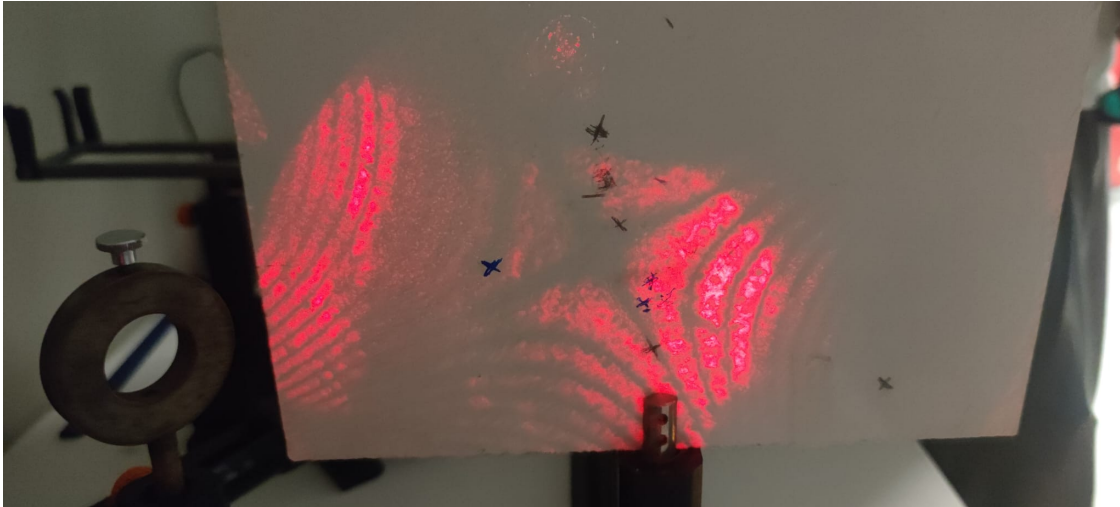
Verdet Konstante:  $V = -14.8 \pm 2.2 \text{ rad/Tm}$

Der Fit fällt mit einer  $\chi^2$  probability von 0.955 ziemlich gut aus. Wir erhalten für die Verdet-Konstante einen Wert von  $V = (-850 \pm 126) \frac{^\circ}{\text{Tm}} = (-14.8 \pm 2.2) \frac{\text{rad}}{\text{Tm}}$ . Da hier kein Literaturwert vorliegt, wird mit Altprotokollen verglichen, die sehr ähnliche Werte haben, die sich teilweise sogar innerhalb der Unsicherheit mit unseren decken.

## 2.7.2 Pockels-Effekt

Der Pockels-Effekt ist ein lineares elektrooptisches Phänomen. Legt man eine elektrische Spannung (und damit ein elektrisches Feld) an bestimmte Materialien, z.B. den Kristall Lithiumniobat, an, tritt Doppelbrechung auf bzw. ändert sich der Grad der Doppelbrechung. Im Falle dieses Versuchsaufbaus sind zwei Kondensatorplatten um den Kristall positioniert und das zusammen ist wiederum drehbar in die Halterung eingelassen. Richtet man den He-Ne-Laser darauf aus und dreht die Orientierung des Kristalls um  $45^\circ$  gegen die Polarisationsrichtung des Lasers, kann die Doppelbrechung nach einem Durchgang durch einen Polarisationsfilter, der  $90^\circ$  gegen die Polarisationsrichtung des Laserlichts gedreht ist, beobachtet werden. Man beobachtet auf dem Schirm dann ein Bild mit Hyperbelstruktur (s. unten), mit einem dunklen "Fadenkreuz" in der Mitte.

Bei diesem Fadenkreuz handelt es sich um ein Interferenzphänomen, das durch die beiden vorliegenden Linsen entsteht. Die hintere der beiden Linsen bündelt das Licht in die Pockelszelle, weshalb weiter außen liegende Strahlen längere Wege zurücklegen müssen, Strahlen, die sich näher an der optischen Achse befinden, wiederum kürzere.



Das elektrische Feld des Kondensators, dessen Platten um das Lithiumniobat positioniert sind, lässt sich über die Formel  $E = \frac{U}{d}$  berechnen. Einsetzen in die und umformen der oben gegebenen Formel ergibt  $\Delta n(E) = \kappa \frac{U}{d} = \Delta n(U)$ . Einsetzen dieser Formel in die in der Vorbereitung gegebene Formel für die Phasenverschiebung nach dem Durchgang durch das Lithiumniobat  $\Delta\phi(U) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n(U) l$  ergibt

$$\Delta\phi(U) = \frac{2\pi}{\lambda} \kappa \frac{U}{d} l$$

Ableiten nach der Spannung ergibt

$$\frac{d}{dU} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\kappa l}{d}$$

Die linke Seite mit  $\frac{d}{dU}$  entspricht genau dem reziproken Wert der Steigung der Ausgleichsgeraden  $1/U_H$ , wenn man die eingestellten Spannungen über die Ordnung der Minima, bei denen diese Spannungen gemessen wurden, aufträgt. Die rechte Seite ergibt sich im wesentlichen aus der Geometrie der Pockels-Zelle und dann muss man nur noch die Formel nach  $\kappa$  umstellen und die Konstante ausrechnen:

$$\kappa = \frac{d}{dU} \frac{d\lambda}{2\pi l} = \frac{1}{U_H} \frac{d\lambda}{2\pi l}$$

wobei  $d = 2 \text{ mm}$ ,  $l = 20 \text{ mm}$  und  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$

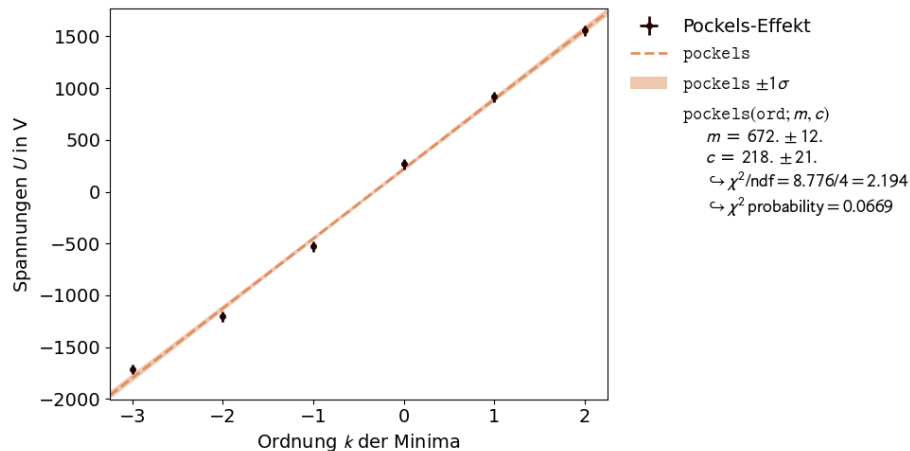
```
[8]: # Spanngen, bei denen -3. bis 3. Minimum auftritt
spannungen = unp.uarray([-1713, -1205, -527, 268, 915, 1557, ],[50])
k_min_3 = np.arange(-3 , 3)

def pockels(ord, m, c):
    return m * ord + c

pockels_data = kafe2.XYContainer( k_min_3 , n(spannungen) )
pockels_data.label = "Pockels-Effekt" # Title
pockels_fit = kafe2.XYFit( xy_data = pockels_data , model_function = pockels)
pockels_fit.add_error(axis="y" , err_val=s(spannungen))
pockels_fit.do_fit()
```



```
pockels_plot = kafe2.Plot(pockels_fit)
pockels_plot.x_label, pockels_plot.y_label = "Ordnung $k$ der Minima" , "Spannungen $U$ in V"
pockels_plot.plot()
pockels_plot.show()
```



```
[9]: # Halbwellenspannung in V
ganzw_span = ufloat(pockels_fit.parameter_values[0], pockels_fit.
    ↪ parameter_errors[0])
halbw_span = ganzw_span / 2
# Abstand der Kondensatorplatten und Dicke des Lithiumniobat in Strahlrichtung
↪ in m
d_linb = 2 * 10**(-3)
l_linb = 20 * 10**(-3)

# Konstante kappa in m/V
kappa_pockels = d_linb * lbda / ( 2 * np.pi * l_linb * halbw_span)

print(f"Ganzwellenspannung U_G = {ganzw_span:.1f} V")
print(f"Halbwellenspannung U_H = {halbw_span:.1f} V")
print(f"Konstante kappa = {kappa_pockels} m/V")
```

Ganzwellenspannung  $U_G = 671.6 \pm 12.0$  V  
 Halbwellenspannung  $U_H = 335.8 \pm 6.0$  V  
 Konstante  $\kappa = (3.00 \pm 0.05) \text{e-11 m/V}$

Wir haben ausversehen die Spannungen von Minimum zu Minimum gemessenen, daher entspricht die Steigung der Geraden, die wir aus dem Fit erhalten, der Ganzwellenspannung und nicht der Halbwellenspannung. Für die Ganzwellenspannung erhalten wir aus dem Fit einen Wert von  $U_G = (671.6 \pm 12.0)$  V und damit für die Halbwellenspannung  $U_H = (335.8 \pm 6.0)$  V. Dass der Fit mit einer  $\chi^2$  probability = 0.0669 nicht besonders gut ausfällt, kann gut daran liegen, dass aufgrund der Schutzbrille einige der Minima nicht perfekt getroffen wurden, er scheint aber trotzdem

hinreichend gut, da man die Linearität der Werte sehr gut erkennt. Es kann sein, dass oft noch ein wenig Intensität auf dem Schirm vorhanden war, das von der Brille noch herausgefiltert wurde. Einsetzen in die oben hergeleitete Formel ergibt den folgenden Wert für die Konstante:  $\kappa = (3.00 \pm 0.05) \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{V}}$ . Es ist zwar nirgends ein Literaturwert gegeben, nach einem Vergleich mit Altprotokollen erscheint dieser aber plausibel, da zumindest die Größenordnungen immer wieder in diesem Bereich liegen.

### 2.7.3 Tonübertragung

Mithilfe des Faraday- und des Pockels-Effekt wird nun versucht, Daten über das Laserlicht zu übermitteln. Hierfür wird ein Polarisationsfilter hinter den jeweiligen Geräten zur Erzeugung der Effekte ein weiterer Polarisationsfilter aufgestellt, der das Laserlicht möglichst vollständig absorbieren soll. Außerdem steht ein Photodetektor in der optischen Achse, dessen Spannung an einen Lautsprecher gekoppelt ist.

Steuert man nun die Faraday- bzw. die Pockelszelle mittels des Stromes eines Aux-Verstärkers an, lässt sich der eingegebene Ton am Photodetektor hören. Das liegt daran, dass der Strom des Audiogerätes die Phase in einer bestimmten Frequenz moduliert, in welcher der Filter das anders polarisierte Licht teilweise transmittiert. Dieses Signal, wird dann am Detektor ausgelesen und führt zu einem hörbaren Ton und somit auch zu hörbarer Musik.

Es ist auffällig, dass die Pockelszelle zu weniger Übersteuerungen in den Niederfrequenten Tönen führt, da die Spule als Tiefpass fungiert. Sie führt also zu übermäßig starken Signalen in diesem Bereich.

---

### 2.7.4 Aufgabe 4: Optische Aktivität (Saccharimetrie)

**4.1:** Bestimmen Sie den [spezifischen Drehwinkel](#)

$$[\alpha]_{\lambda}^T = \frac{\alpha}{\beta \ell}$$

einer Haushaltszuckerlösung bei verschiedenen Massenkonzentrationen  $\beta$  (gemessen in  $\text{g cm}^{-3}$ ) sowie die Drehrichtung. Dabei entsprechen  $\alpha$  dem unspezifischen (gemessenen) Drehwinkel gemessen in  $^{\circ}$  und  $\ell$  der Länge des Lichtweges durch die Lösung (gemessen in dm). Zeigen Sie, dass  $\alpha \propto \ell$  und  $\alpha \propto \beta$  gilt.

Zum Nachweis von  $\alpha \propto \ell$  genügt es zwei Messwerte aufzunehmen bei denen die Küvette mit der Probelösung einmal längs und einmal quer durchstrahlt wird. Zum Nachweis von  $\alpha \propto \beta$  beginnen Sie z.B. bei  $\beta \approx 0,3 \text{ g cm}^{-3}$  und reduzieren Sie die Konzentration, indem Sie Wasser zugießen. Diskutieren Sie von welchen weiteren Parametern  $\alpha$  noch abhängt.

Wenn Sie die Konzentration ändern, während Sie den durchtretenden Laserstrahl beobachten, scheint dieser "krummen Bahnen" zu folgen. Beachten Sie Ähnlichkeiten zwischen der optischen Aktivität und dem Faraday-Effekt.

**4.2:** Bestimmen Sie den spezifischen Drehwinkel einer entgegengesetzt drehenden [Sorbitose](#)-Lösung mit vorgegebener Konzentration.

---

```

[10]: # getting the values
l_alpha = unp.uarray([32, 30, 26, 23, 21, 20], [1])
w_alpha = unp.uarray([24, 19, 18, 18, 17, 17], [1])

V = unp.uarray([1, 2, 3, 4, 5, 6], [0.01]) * 100 # cm3
c = 30 / V

# Saccharose
# definition of a model
def model_sugar(beta, s, y_0, alpha_spez=66):
    return beta * s * alpha_spez - y_0

# lenghtwise fit
l_data = kafe2.XYContainer(n(c),n(l_alpha))
l_data.label = 'Drehwinkel Saccharose lange Seite'
l_data.axis_labels = ('Konzentration [g/cm3]', 'Drehwinkel [°]')

l_fit = kafe2.XYFit(l_data, model_sugar)
l_fit.add_error('x', s(c))
l_fit.add_error('y', s(l_alpha))
l_fit.add_parameter_constraint('s', 20.6, 0.05)
l_fit.do_fit()

# reduced fit
r_data = kafe2.XYContainer(n(c)[1:5],n(l_alpha)[1:5])
r_data.label = 'Drehwinkel Saccharose lange Seite'
r_data.axis_labels = ('Konzentration [g/cm3]', 'Drehwinkel [°]')

r_fit = kafe2.XYFit(r_data, model_sugar)
r_fit.add_error('x', s(c)[1:5])
r_fit.add_error('y', s(l_alpha)[1:5])
r_fit.add_parameter_constraint('s', 20.6, 0.05)
r_fit.do_fit()

# widthwise fit
w_data = kafe2.XYContainer(n(c),n(w_alpha))
w_data.label = 'Drehwinkel Saccharose kurze Seite'
w_data.axis_labels = ('Konzentration [g/cm3]', 'Drehwinkel [°]')

w_fit = kafe2.XYFit(w_data, model_sugar)
w_fit.add_error('x', s(c))
w_fit.add_error('y', s(w_alpha))
w_fit.add_parameter_constraint('s', 6.5, 0.05)
w_fit.do_fit()

# plotting the fits

```

```

plot = kafe2.Plot([l_fit, r_fit, w_fit])
plot.customize('model_line', 'color', [(0, 'royalblue'), (1, 'royalblue'), (2, 'orangered')])
plot.customize('model_error_band', 'color', [(0, 'lightblue'), (1, 'lightblue'), (2, 'lightsalmon')])
plot.customize('data', 'color', [(0, 'darkblue'), (1, 'darkblue'), (2, 'darkred')])
plot.plot()
plot.show()

# Bildung des Mittelwertes
alpha_1 = ufloat(r_fit.parameter_values[2], r_fit.parameter_errors[2])
alpha_2 = ufloat(w_fit.parameter_values[2], w_fit.parameter_errors[2])
alpha_spez = (alpha_1 + alpha_2) / 2

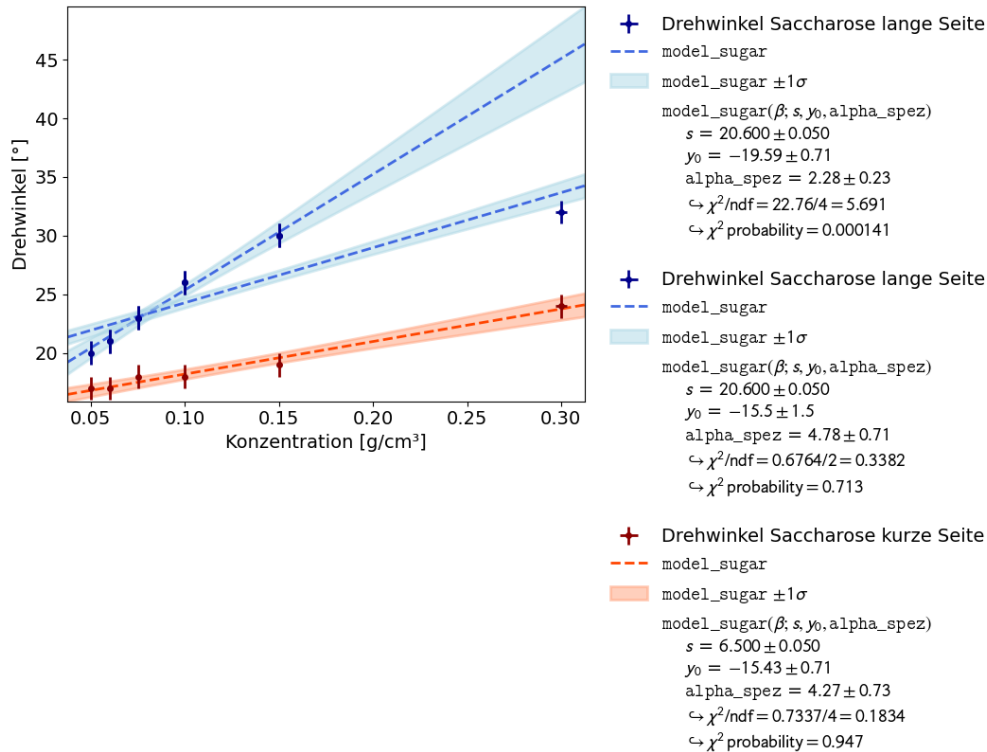
print(f'der spezifische Drehwinkel von Saccharose beträgt ({alpha_spez.n} +/- {alpha_spez.s}) ° ml/(cm g)')

# Sorbose
# definition of a formula
def get_alpha_spez(alpha, c, l):
    return alpha / (c * l)

# get the values
alpha_1 = get_alpha_spez(ufloat(-20, 1), 0.33, ufloat(20.6, 0.05))
alpha_2 = get_alpha_spez(ufloat(-6, 1), 0.33, ufloat(6.5, 0.05))

alpha_spez = (alpha_1 + alpha_2) / 2
print(alpha_1, alpha_2)
print(f'der spezifische Drehwinkel von Sorbose beträgt ({alpha_spez.n} +/- {alpha_spez.s}) ° ml/(cm g)')

```



der spezifische Drehwinkel von Saccharose beträgt ( $4.526345301950269 \pm 0.5112897396077536$ )  $\circ \text{ ml}/(\text{cm g})$   
 $-2.94 \pm 0.15$   $-2.8 \pm 0.5$   
 der spezifische Drehwinkel von Sorbose beträgt ( $-2.8696222870980153 \pm 0.24469157641516454$ )  $\circ \text{ ml}/(\text{cm g})$

## 2.8 Auswertung Aufgabe 4

Im letzten Teilversuch wird die Eigenschaft von Molekülen mit chiralen Zentren untersucht, die Polarisation von Licht zu beeinflussen. So wird zwischen den Laser und einen Polfilter eine Küvette, die mit verschiedenen Zuckerlösungen gefüllt werden kann, eingebracht. Der Polfilter wird so eingestellt, dass das Licht vollständig absorbiert wird.

### 2.8.1 Saccharose

Zur Bestimmung des spezifischen Drehwinkels von Saccharose werden 30g in 100ml destilliertem Wasser gelöst. Mithilfe des Analysefilters wird nun die Drehung der Polarisation einmal entlang der langen Seite der Küvette und einmal entlang der Kurzen bestimmt. Danach wird die Lösung um 100ml verdünnt. Anschließend wird der Drehwinkel gegenüber der Konzentration in verschiedenen Graphen für die verschiedenen Längen aufgetragen.

In diese Daten wird das Modell  $\alpha = [\alpha]_{\lambda}^T \cdot l\beta$  eingepasst. In den oben gezeigten Graphen sind Werte entlang der Längsachse in Blau dargestellt und Werte entlang der Querachse in Rot. es ist auffällig, dass einer der blauen Werte stark abweicht, weswegen zwei Fits durchgeführt werden,

von denen einer diesen Wert beinhaltet und einer nicht. Da der Fit, der diesen nicht beinhaltet wesentlich genauer ist, wird dieser in der weiteren Auswertung weggelassen, da auf eventuelle Messfehler geschlossen wird. So zum Beispiel das Auflösen der Brille.

Beide Fits liegen im Akzeptanzbereich mit  $\chi^2 < 1$ . Nach der Bildung des Mittelwertes aus den Werten für die beiden Längen ergibt sich ein spezifischer Drehwinkel von:

$$[\alpha]_{\lambda}^T = (4.526 \pm 0.511) \frac{^{\circ} \cdot ml}{cm \cdot g}$$

### 2.8.2 Sorbose

Die Bestimmung eines zweiten Drehwinkels wird mit einer Sorboselösung durchgeführt. Hierbei wird die Konzentration nicht variiert, sondern nur für die beiden verschiedenen Längen der Küvette gemessen und die spezifischen Drehwinkel direkt berechnet. Wir erhalten somit die beiden Werte:

$$[\alpha_1]_{\lambda}^T = (-2.94 \pm 0.15) \frac{^{\circ} \cdot ml}{cm \cdot g}$$

$$[\alpha_2]_{\lambda}^T = (-2.8 \pm 0.5) \frac{^{\circ} \cdot ml}{cm \cdot g}$$

Aus diesen kann nun der Mittelwert gebildet werden:

$$[\alpha]_{\lambda}^T = (-2.870 \pm 0.245) \frac{^{\circ} \cdot ml}{cm \cdot g}$$


---