

Rafael Sepulveda Zalla

**A relação da energia do campo gravitacional com
a hipersuperfície de simultaneidade**

Piedade S.P

Rafael Sepulveda Zalla

A relação da energia do campo gravitacional com a hipersuperfície de simultaneidade

Trabalho de conclusão de curso apresentado
ao Curso de Bacharelado em Física, como
requisito para obtenção do título de Bacharel
em Física.

Orientador:

Piedade S.P

Agradecimientos

Resumo

O conceito de energia é um dos mais importantes da Física, pois possibilita interpretar e descrever vários fenômenos físicos. No entanto, uma boa definição do tensor energiamomento do campo gravitacional é um grande problema, senão mesmo uma impossibilidade, que a Relatividade Geral apresenta. Para tentar compreender este problema, este trabalho utilizou a formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral, o chamado formalismo ADM, que fornece resultados bem definidos para a energia e o momento para espaços-tempos assintoticamente planos. Nesta pesquisa, foram analisados os espaços-tempos de ondas planas, Schwarzschild e o modelo FLRW; para ambos os casos, foram obtidos tanto a energia quanto o momento. Ao fazer uma análise, verificou-se que o formalismo ADM para caso de Schwarzschild e do modelo cosmológico fornece resultados compatíveis com aqueles encontrados na literatura; além disso, é mostrado que para espaços-tempos de ondas planas, inconsistências surgem a partir do formalismo ADM, quando comparado com os resultados fornecidos pelo Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral.

Palavras-chave: Energia gravitacional; Formalismo ADM; Teleparalelismo.

Abstract

The concept of energy is one of the most important in Physics, as it allows us to interpret and describe various physical phenomena. However, a good definition of the energymomentum tensor of the gravitational field is a big problem, if not an impossibility, that General Relativity presents. To try to understand this problem, this work used the Hamiltonian formulation of General Relativity, the so-called ADM formalism, which provides well-defined results for energy and momentum for asymptotically flat spacetimes. In this research, the plane wave spacetimes, Schwarzschild spacetimes and the FLRW model were analyzed; for both cases, both energy and momentum were obtained. On analysis, it was found that the ADM formalism for the Schwarzschild case and the cosmological model provides compatible results with those found in the literature; furthermore, it is shown that for plane wave spacetimes, inconsistencies arise from the ADM formalism, when compared with results provided by Teleparallelism Equivalent to General Relativity.

Keywords: Gravitational energy; ADM formalism; Teleparallelism.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES MATEMÁTICAS	13
2.1	Variedades diferenciáveis	13
2.2	Espaço vetorial e vetores	14
2.3	Espaço dual e covetores	15
2.4	Tensores	16
2.5	Imersões e mergulhos	17
3	RELATIVIDADE GERAL	18
3.1	Os postulados da TRG	18
3.2	A métrica	19
3.3	Conexão afim e derivada covariante	21
3.3.1	Transporte paralelo e geodésicas	23
3.4	Curvatura	24
3.4.1	Tensor de Ricci e o escalar de curvatura	25
3.5	Equações de campo	26
3.6	Sobre o problema da energia do campo gravitacional	28
4	A FORMULAÇÃO ADM	30
4.1	A decomposição (3 + 1) do espaço-tempo	30
4.2	Energia e momento ADM	31
5	TELEPARALELISMO EQUIVALENTE À RELATIVIDADE GERAL .	32
5.1	A abordagem do TERG	33
5.2	O 4-momento na abordagem da TERG	33
6	A ENERGIA E O MOMENTO DO CAMPO GRAVITACIONAL ..	35
6.1	Espaços-tempos de ondas planas	35
6.1.1	Curvatura extrínseca	36
6.1.2	Energia e momento ADM para pp-waves	36
6.2	Espaço-tempo do modelo FLRW	37

6.2.1	Curvatura extrínseca	38
6.2.2	Energia e momento ADM do modelo cosmológico	38
6.3	Espaço-tempo de Schwarzschild	39
6.4	A métrica de Minkowski nas coordenadas próprias de um observador	40
7	CONCLUSÃO	42
8	REFERÊNCIAS	43

1 Introdução

Uma das formas mais básicas e fundamentais de se analisar um sistema ou fenômeno físico e entender seu comportamento é por meio da segunda lei de Newton. Além disso, existem outras formas de se fazer isso que é através das formulações lagrangiana e hamiltoniana; sendo que esta última possibilita uma análise através da energia do sistema. No entanto, independente de qual lei ou formulação que esteja sendo adotada na análise de problemas físicos, os conceitos de energia e momento são de extrema importância na Física, desde o estudo das partículas elementares até eventos do cotidiano. Assim, dados a energia e o momento de um processo físico, é possível compreender sua natureza e descrever sua evolução.

Nesse contexto dos conceitos de energia e momento, para todas as quatro interações fundamentais, é esperado que seus respectivos campos carreguem energia e momento, e que seja possível quantificar essa quantidade de energia-momento. Todavia, dessas quatro interações, o campo gravitacional possui uma descrição problemática para a quantidade de energia-momento, dado que tanto a energia quanto o momento não são bem definidos. Como sabemos, a Teoria da Relatividade Geral (TRG) é a teoria pela qual a gravitação é estudada e trata-se de uma das mais bem sucedidas na Física. Todavia, definir e localizar a energia do campo gravitacional é um grande problema em aberto que a TRG apresenta, devido à dificuldade, ou até mesmo à impossibilidade, de se definir um objeto pelo qual as informações sobre energia e momento desse campo são obtidas [1], o chamado tensor de energia-momento do campo gravitacional. Acredita-se que esse problema acerca da energia do campo gravitacional esteja relacionado ao *Princípio da Equivalência*.

Entretanto, existe uma teoria alternativa da gravitação, o Teleparallelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG), que permite a construção com uma boa definição do tensor de energia-momento do campo gravitacional [2]. Porém, o problema de localizar a energia do campo gravitacional ainda persiste, dado que, como mostrado no trabalho de [3], na TERG existem problemas relacionados à ambiguidade da tetrada paralela.

Outro caminho na tentativa de resolver o problema da energia do campo gravitacional é por meio de uma formulação hamiltoniana da TRG, proposta por Arnowitt et al, o formalismo ADM [4]. Nessa formulação, a energia e o momento são bem definidos, mas para casos em que o espaço-tempo é assintoticamente plano.

O estudo de ambas as abordagens é fundamental para entendermos se são ou não compatíveis, haja vista que tanto a formulação ADM quanto a TERG têm suas devidas importâncias na construção de um 4-momento para o campo gravitacional. Neste trabalho, nossa proposta foi estudar as propriedades das hipersuperfícies de simultaneidade

Capítulo 1. Introdução

t constante. Em síntese, o objetivo principal foi caracterizar as hipersuperfícies que fornecem resultados consistentes e tentar identificar suas propriedades, na expectativa de encontrar

relações com a energia do campo gravitacional. Para isso, levantamentos bibliográficos foram realizados, com objetivo de compreender como caracterizar tais hipersuperfícies e então buscar os possíveis casos em que forneceram esses resultados. Além disso, um 4-momento para o campo gravitacional foi obtido para determinados tipos de espaçotempos por meio da abordagem ADM, cujos resultados foram comparados com aqueles fornecidos pela TERG, a fim de analisar os casos consistentes.

O presente trabalho organiza-se da seguinte forma: no capítulo 2 é apresentada um interlúdio matemático, necessário para o estudo da TRG, da formulação ADM e da TERG; nos capítulos 3, 4 e 5 é feita uma breve discussão acerca dos conceitos fundamentais da TRG, do formalismo ADM e da abordagem da TERG; no capítulo 6, são fornecidos os resultados obtidos nesta pesquisa; por fim, no capítulo 7 é mostrado um panorama das análises realizadas a partir dos resultados.

A notação usada adiante dar-se-á da seguinte forma: letras gregas (μ, ν, ρ, \dots) denotam as componentes do espaço-tempo e variam de 0 a 3; letras latinas do meio do alfabeto (i, j, k, \dots) serão usadas para denotar as componentes espaciais e variam de 1 a 3; letras latinas iniciais (a, b, c, \dots), que variam de (0) a (3), referem-se aos índices lorentzianos, isto é, índices do grupo $SO(1,3)$ ¹. O objeto e_a representa o frame, e ϑ^a , o coframe. Suas componentes são, respectivamente, e_a^μ e e^a_μ . O leitor deverá estar atento ao fato de que $g_{\mu\nu}$ representa a 4-geometria e q_{ij} representa a 3-geometria. Por fim, vale salientar que todas grandezas tratadas a seguir estão expressas no Sistema Internacional de Unidades, o SI.

2 Preliminares Matemáticas

No tratamento de problemas físicos por meio da mecânica newtoniana, necessitamos da linguagem dos vetores, geralmente entendidos como objetos que possuem magnitude, direção e sentido, cuja representação geométrica pode ser obtida por uma seta (ou “flecha”) a partir de uma origem. Nessa abordagem clássica, problemas são analisados em uma estrutura espacial que se estende até o \mathbb{R}^3 e o tempo t é apenas um parâmetro.

Com o advento da Teoria da Relatividade Especial, proposta por Albert Einstein (1905), viu-se a necessidade de abandonar a ideia de espaço e de tempo como estruturas distintas, sendo então necessário tratar o tempo como uma dimensão, formando o que conhecemos por espaço-tempo, concebido por Hermann Minkowski. Posteriormente, em 1915, Einstein chega à versão final da Relatividade Geral, a qual tem como princípio fundamental a covariância das leis físicas, que afirma que as leis da física devem independender de sistemas de coordenadas.

¹ O uso de parênteses () é para diferenciar índices do espaço-tempo de índices $SO(1,3)$.

Nesse contexto, surge naturalmente a necessidade de se estender as noções de curvas e superfícies ao que se conhece por variedade diferenciável. Além disso, surge também a necessidade do uso do formalismo tensorial para garantir a covariância das leis físicas. Sendo assim, neste capítulo é feita uma breve discussão sobre variedades diferenciáveis, vetores, covetores e tensores, com base nas referências [5,6].

2.1 Variedades diferenciáveis

Em síntese, variedades consistem em generalizar nossa concepção sobre curvas e superfícies a estruturas de dimensões arbitrárias. Em razão disso, elas servem para estender as aplicações do Cálculo Diferencial, com o qual já estamos muito bem familiarizados no \mathbb{R}^3 , a espaços mais gerais.

De forma intuitiva, uma variedade é uma estrutura tal que localmente se parece com um “pedaço” do \mathbb{R}^n . Como exemplo, considere uma superfície esférica S^2 . Ao ser comparada com o plano euclidiano \mathbb{R}^2 , vê-se que ambos diferem globalmente; porém, ao analisarmos localmente um pequeno pedaço de S^2 , nota-se que a superfície esférica se parece com o plano euclidiano \mathbb{R}^2 , e diz-se que S^2 é homeomórfica a \mathbb{R}^2 . Outro exemplo é o espaço-tempo da TRG, que é homeomorfo ao espaço-tempo de Minkowski. Nesse sentido, de forma mais geral, uma variedade é dita ser um espaço topológico que localmente é homeomorfo a \mathbb{R}^n [6]².

² Veja a seção 2.4 desta referência sobre homeomorfismo.

Por definição, um conjunto de pontos M de dimensão n é uma variedade diferenciável³ se:

- (1) M é um espaço topológico;
- (2) M é fornecida com uma família dos pares $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$;
- (3) U_i é uma família de abertos que cobrem M , ou seja, $\bigcup_i U_\alpha = M$. φ_α é um homeomorfismo de U_α em um aberto U^-_α do \mathbb{R}^n ;
- (4) dados U_α e U_β tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a aplicação $\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ de $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ a $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é infinitamente diferenciável.

Acerca do que foi discutido acima, o par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ é chamado de carta (ou sistema de coordenadas), onde U_α é a vizinhança coordenada e φ_α é a função coordenada, que se comporta como um homeomorfismo representado por m funções $\{x^1, \dots, x^m\}$. Por sua vez, a família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é chamado de atlas, sendo responsável por cobrir toda a variedade. Além disso, sejam $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$, se $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \cap \{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ forma um atlas, então ambos são ditos ser compatíveis e tal compatibilidade é uma relação de equivalência, que é chamada de estrutura diferenciável.

As condições (2) e (3) garantem o fato de M ser localmente como \mathbb{R}^n . Se U_α e U_β se sobrepõem, temos que dois sistemas de coordenadas são associados a um ponto p de $U_\alpha \cap U_\beta$. Sobre a condição (4), desta é garantido que a passagem de um sistema de coordenadas para outro é suave.

Dadas as definições aqui apresentadas, podemos agora estabelecer aplicações definidas sobre a variedade, bem como objetos geométricos, tais como vetores, covetores e tensores.

2.2 Espaço vetorial e vetores

No contexto das variedades, a ideia de vetor como sendo uma flecha, atribuído a partir de uma origem até um ponto p , não é válida. Em razão disso, é necessária a noção de vetor tangente. Nesse sentido, sobre uma variedade, vetores são definidos como sendo um vetor tangente a uma curva de M .

³ O motivo de estarmos chamando agora de variedade diferenciável é devido ao fato de que podemos usar o Cálculo Diferencial do \mathbb{R}^n .

Primeiramente, vamos fornecer as definições de curvas e funções. Uma curva é uma aplicação $c : (a, b) \rightarrow M$, com (a, b) sendo o intervalo aberto $a < 0 < b$. Já uma função, é uma aplicação suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Com isso, ao restringir f à curva c e tomar a derivada direcional de $f \circ c$, podemos definir um vetor tangente, como segue

$$\left. \frac{d(f \circ c)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} \right|_{t=0} = v_\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \quad (2.1)$$

Da equação anterior, vemos que a taxa de variação acima pode ser obtida por meio da aplicação de $v = v^\mu \partial_\mu$ sobre f , tal que

$$\left. \frac{d(f \circ c)}{dt} \right|_{t=0} = v_\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \equiv v[f], \quad v_\mu = \left. \frac{dx^\mu}{dt} \right|_{t=0}, \quad (2.2)$$

onde v é o que definimos agora como vetor tangente de M em $p = c(0)$ ao longo da direção dada pela curva. Note que v se comporta como uma derivada direcional.

Por definição, o conjunto formado por todos os vetores definidos em um ponto p de M forma o que chamamos de espaço tangente de M , que denotamos por $T_p M$ e podemos usar toda a teoria de espaços vetoriais. Se considerarmos a base coordenada e_μ , então se um vetor v de $T_p M$ é escrito como $v = v^\mu e_\mu$, onde v^μ são as componentes de v com respeito e_μ .

Uma necessidade que surge naturalmente é saber como as componentes desse vetor se transformam. Assim, sejam x^μ e \bar{x}^μ dois sistemas de coordenadas. A ambos os sistemas, denotemos suas bases coordenadas por ∂_μ e $\bar{\partial}_\mu$, respectivamente. Logo, temos as seguintes expressões para $v \in T_p M$,

$$v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \bar{v}^\mu \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu}, \quad (2.3)$$

que nos fornece a seguinte relação entre as componentes de v^μ e \bar{v}^μ

$$\bar{v}^\mu = v_\nu \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (2.4)$$

Entretanto, devemos ter em mente que a base de $T_p M$ não precisa ser necessariamente e_μ . Podemos ter o caso de uma base como sendo escrita em termos de uma combinação linear $e_{a^\mu} = e_a^\mu e_\mu$, onde e_a^μ pertence ao grupo linear geral $GL(m, \mathbb{R})$. Bases desse tipo são chamadas de bases não coordenadas, como exemplo a base de tetradas do TERG (capítulo 5).

2.3 Espaço dual e covetores

Dado um espaço vetorial $T_p M$, existe um espaço dual a $T_p M$. A esse espaço dar-se o nome de espaço cotangente ou espaço dual em p , o qual denota-se por $T_p^* M$. Aos elementos de $T_p^* M$, os chamamos de vetor dual, vetor cotangente ou 1-forma, e os definimos como uma aplicação linear, de valor real, de vetores. Em outras palavras, um elemento $\omega: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Disso, fica claro que uma 1-forma é um funcional linear que leva vetores a valores reais⁴.

Um exemplo de 1-forma é a diferencial de uma função f , que pertence ao espaço das funções de M . Como vimos, aplicação de um vetor v sobre f é $v[f] = v^\mu \partial f / \partial x^\mu \in \mathbb{R}$. Por sua vez, a atuação de $df \in T_p^* M$ sobre $v \in T_p M$ é definida por

$$\langle df, v \rangle \equiv v[f] = v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

Uma vez que temos uma base $\{e_\mu\}$, chamamos de base dual de $\{e_\mu\}$ a base $\{\omega^\mu\}$, tal que

$$\omega^\mu(e_\nu) = \delta_\nu^\mu. \quad (2.6)$$

Em contrapartida, se v é qualquer vetor de $T_p M$, então a ação de ω^μ sobre v ,

$$\omega^\mu(v) = v^\mu \quad (2.7)$$

produz a μ -ésima componente de v .

Suponha que estamos em um sistema de coordenadas x^μ , cuja base de $T_p M$ são as bases coordenadas ∂_μ . A base coordenada de $T_p^* M$ é dada por $\{dx^\mu\}$, que por sua vez é a base dual de $\{\partial_\mu\}$. Assim, temos

$$*dx_\mu, \overline{\partial x^\nu} = \overline{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu \partial + \partial x_\mu \quad (2.8)$$

Seja uma 1-forma ω dada por $\omega = \omega_\mu dx^\mu$, onde ω_μ são as componentes de ω com respeito a dx^μ . Podemos definir a seguinte aplicação $\langle, \rangle: T_p^* M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ por

⁴ Para distinguir vetores de covetores, seguiremos a notação adotada por [1,6] e usaremos letras gregas para esse último.

$$\left\langle \omega_\mu dx^\mu, v_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \omega_\mu v^\nu \delta_\nu^\mu = \omega_\mu v^\mu \quad (2.9)$$

Perceba que essa aplicação consiste na contração das componentes de ω e v .

Assim como no caso de vetores, aqui surge também a necessidade de se conhecer como as componentes de uma 1-forma se transformam. Desse modo, sejam x^μ e $x^{-\mu}$ dois sistemas de coordenadas, e denotemos as suas bases duais de ambos por $\{dx^\mu\}$ e $\{d^-x^\nu\}$, respectivamente. Assim, temos

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \bar{\omega}_\mu d^-x^\mu. \quad (2.10)$$

Dado que $d^-x^\nu = (\partial x^{-\nu} / \partial x^\mu) dx^\mu$, teremos

$$\bar{\omega}_\mu = \omega_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{-\mu}}. \quad (2.11)$$

2.4 Tensores

Com as definições apresentadas nas duas últimas seções, surge uma extensão natural de vetores e 1-formas, os tensores. Consideremos um ponto p de M . Um tensor do tipo (m, n) é definido como sendo uma aplicação multilinear que tem como argumentos m 1-formas e n vetores nos reais, tal que

$$T : T_p^*M \times T_p^*M \times \cdots \times T_p^*M \times T_pM \times T_pM \times \cdots \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}, \text{ ou ainda,} \quad (2.12)$$

$$T(\sigma, \lambda, \dots, \omega, u, v, \dots, w). \text{ Como} \quad (2.13)$$

exemplo, considere

$$R(\sigma, \lambda, v) = R(\sigma_\mu \omega^\mu, \lambda_\nu \omega^\nu, v^\rho e_\rho) = \sigma_\mu \lambda_\nu v^\rho R(\omega^\mu, \omega^\nu, e_\rho) = R^{\mu\nu}{}_\rho \sigma_\mu \lambda_\nu v^\rho, \quad (2.14)$$

onde $R(\omega^\mu, \omega^\nu, e_\rho) = R^{\mu\nu}{}_\rho$ são as componentes do tensor R , um tensor do tipo $(2, 1)$.

Sejam dois sistemas de coordenadas x^μ e $x^{-\mu}$. Seguindo a abordagem para vetores e 1-formas, as componentes do tensor R se relacionam segundo a seguinte lei de transformação

$$\bar{R}^{\alpha\beta}{}_\gamma = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\gamma} R^{\mu\nu}{}_\rho. \quad (2.15)$$

De modo mais geral, temos

$$\bar{T}_{\mu_1 \dots \mu_m \nu_1 \dots \nu_n} = \frac{\partial x_1^\alpha}{\partial \bar{x}_1^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x_m^\alpha}{\partial \bar{x}_m^{\mu_m}} \frac{\partial \bar{x}_1^\beta}{\partial x_1^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}_n^\beta}{\partial x_n^{\nu_n}} T^{\alpha \dots \alpha}_{\beta \dots \beta} \quad (2.16)$$

com $T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n}$ sendo as componentes do tensor T , equações (2.12) e (2.13).

Finalmente, se um vetor é atribuído suavemente a cada ponto $p \in M$, então este é chamado de campo vetorial sobre M . De maneira análoga, se um tensor T é atribuído de forma suave a cada ponto $p \in M$, então o chamamos de campo tensorial. Para mais detalhes, veja a seção 5.2.5 de [6].

2.5 Imersões e mergulhos

Por fim, vejamos as definições de imersão, mergulho e subvariedade, conceitos necessários para formulação ADM, apresentada no capítulo 4. De acordo com Nakahara (2018) [6], sejam M e N duas variedades diferenciáveis, com $\dim M \leq \dim N$. A aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma imersão se $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetiva⁵ para todo ponto p de M . Por outro lado, f é chamada de mergulho se essa for injetiva e uma imersão. A imagem de $f(M)$ é dita ser uma subvariedade de N .

⁵ Para uma definição de uma aplicação injetiva, veja a Definição (2.1) de Nakahara (2018).

3 Relatividade Geral

Neste capítulo, é feita uma breve discussão sobre os fundamentos da Teoria da Relatividade Geral. Primeiramente, são apresentados os postulados da TRG e é feita uma breve discussão sobre o problema da energia do campo gravitacional. Depois, os conceitos de derivada covariante, transporte paralelo e geodésicas são introduzidos. Além disso, as equações de campo são derivadas por meio da ação de Einstein-Hilbert. Por fim, os espaços-tempos de ondas planas, de Schwarzschild e do modelo FLRW, que foram estudados nessa pesquisa, são apresentados.

3.1 Os postulados da TRG

Após o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Restrita, que explica toda a dinâmica para objetos que se movem a grandes velocidades próximas à da luz, Albert Einstein obteve uma generalização da teoria precedente, a Teoria da Relatividade Geral, ao chegar às equações de campo. A TRG se manifesta como uma teoria geométrica da gravitação e explica como o tecido do espaço-tempo se comporta na presença de objetos massivos. Com a construção de tal teoria, uma das mais bem sucedidas da Física, foi possível explicar fenômenos como o avanço do periélio de Mercúrio, além de prever a existência de buracos negros e de ondas gravitacionais. A tarefa fundamental dessa teoria é resolver a seguinte equação de segunda ordem e não linear:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \kappa = 8 \frac{\pi G}{c^4} \quad (3.1)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento da matéria e κ é uma constante de acoplamento obtida a partir do Princípio da Correspondência⁶, c é a velocidade da luz no vácuo e G é a constante da gravitação universal. É importante destacar que a Eq. (3.1) é obtida a partir da variação da ação de Einstein-Hilbert, cuja derivação é mostrada na seção 3.5.

Para a construção da TRG, Einstein se baseou nos seguintes princípios [6,8]:

- **Princípio Geral da Relatividade:** A leis da Física são as mesmas em todos os referenciais.
- **Princípio da Equivalência:** Existe um sistema de coordenadas no qual o efeito de um campo gravitacional desaparece localmente.

⁶ Para mais detalhes de como obtê-la, veja a seção 12.10 de [7], ou a seção 17.4 de [1].

Veja que tanto o Princípio Geral da Relatividade quanto o Princípio da Equivalência⁷ são princípios, e só podem ser testados por experimentos, uma vez que não há como prová-los por argumentos teóricos. Desse modo, se as experiências confirmam a validade de ambos, então esses podem ser usados como base para formulação de teorias, como a TRG em nosso caso, que sejam consistentes com tais requerimentos.

O Princípio Geral da Relatividade está diretamente ligado com o conceito de transformação covariante geral, que consiste em uma transformação de coordenadas entre dois referenciais arbitrários, como por exemplo, \mathcal{S} e \mathcal{S}' . E como sabemos, tal covariância é garantida se as equações em questão forem escritas em termos de tensores (seção 2.4, que, por sua vez, independem do sistema de coordenadas).

Em relação ao Princípio da Equivalência, com o termo “localmente” queremos dizer “em uma região do espaço pequena o suficiente e em um tempo suficientemente pequeno”. Em outras palavras, diz-se que a métrica g é um campo tensorial que é localmente plano, dado que em qualquer ponto p há uma vizinhança na qual existe um sistema de coordenadas em uma base tal que as componentes $g_{\mu\nu}$ têm as seguintes propriedades:

$$(a) \ g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu};$$

$$(b) \ \left. \frac{\partial g}{\partial x^\rho} \right|_p = 0 \quad .$$

Veja que a condição (a) nos diz que o espaço-tempo se reduz ao espaço-tempo de Minkowski. Já a condição (b) mostra que o campo gravitacional é estacionário e independente das coordenadas espaciais.

O leitor pode notar que ao nos referirmos a referenciais, foi usado \mathcal{S} no lugar de x^μ , que se refere a sistemas de coordenadas (as cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, no contexto das variedades). A fim de evitar confusões, é necessário enfatizar a distinção entre sistemas de referência e sistemas de coordenadas. Em [12], seção 6.3, é possível ter uma clara discussão sobre tal distinção. A noção de sistemas de coordenadas é entendida como sendo uma atribuição suave³ e invertível de quatro números a eventos nas vizinhanças do espaço-tempo, enquanto que um sistema de referência trata-se de um sistema físico idealizado, utilizado para atribuir esses quatro números.

⁷ Para mais detalhes sobre o Princípio da Equivalência, o leitor pode consultar as referências [9–11]. ³ Suave no sentido de ser bem comportado.

3.2 A métrica

Normalmente, estamos familiarizados com a noção de produto interno entre vetores dada por $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v_i$, onde u_i e v_i são as componentes dos vetores no \mathbb{R}^n . No contexto das variedades, o produto interno é definido em cada ponto p do espaço tangente $T_p M$, com M neste caso agora representando o espaço-tempo. Sendo assim, sejam dois vetores $u, v \in T_p M$. Seja também uma aplicação $g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. É dito que a métrica riemanniana g sobre M é um campo tensorial do tipo $(0,2)$ sobre M que satisfaz em cada ponto $p \in M$ as seguintes condições:

- (1) $g_p(u, v) = g_p(v, u)$, (simétrica)
- (2) $g_p(u, u) \geq 0$, onde a igualdade é válida apenas quando $u = 0$. (positiva-definida)

Por outro lado, um campo tensorial g do tipo $(0,2)$ é uma métrica pseudoriemanniana se satisfaz a condição (1) e, além disso, se $g_p(u, v) = 0$ para qualquer $u \in T_p M$, então $v = 0$. Tenha em mente que $g_p \equiv g|_p$.

Visto que a matriz $||g_{\mu\nu}||$ de g é simétrica, então seus autovalores são reais⁸. Em geral, existem j autovalores positivos e k autovalores negativos. Se $j = 1$, então a métrica é dita lorentziana, conhecida como métrica de Minkowski $\eta = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$.

Assim, se M é uma variedade que admite uma métrica g , então o par (M, g) é dito ser uma variedade lorentziana se g é uma métrica lorentziana, que é o nosso caso de interesse. Com isso, no cenário do espaço-tempo da TRG, surgem tipos específicos de vetores. Sendo o espaço-tempo (M, g) uma variedade lorentziana e $u \in T_p M$, temos que

- (1) $g(u, u) > 0$, (vetor do tipo espaço)
- (2) $g(u, u) = 0$, (vetor do tipo luz)
- (3) $g(u, u) < 0$. (vetor do tipo tempo)

Com isso, a norma de um vetor fica dada por $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$, podendo assumir valores positivos, negativos ou nulos.

Façamos agora a ligação entre g como sendo uma aplicação e a noção de métrica como quadrado de uma distância infinitesimal, denotada por ds^2 . Tal ligação é obtida ao

⁸ Para mais detalhes, veja a seção 2.29 de [13].

aplicarmos g sobre um vetor de deslocamento infinitesimal. Seja então o vetor tangente de deslocamento infinitesimal dado por

$$\xi \equiv \Delta x^\mu e_\mu = \Delta x^\mu \partial_\mu, \quad (3.2)$$

que representa o intervalo entre dois eventos infinitesimalmente próximos. Desse modo, segue que

$$\begin{aligned} ds^2 &= g(\xi, \xi) \\ &= g(\Delta x^\mu \partial_\mu, \Delta x^\nu \partial_\nu) \\ &= \Delta x^\mu \Delta x^\nu g(\partial_\mu, \partial_\nu) \\ &= g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \end{aligned} \quad (3.3)$$

ou ainda,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.4)$$

onde $g_{\mu\nu} \equiv g(\partial_\mu, \partial_\nu)$ são as componentes da métrica e ds^2 , o elemento de linha, apesar de ser chamado comumente de “métrica”.

Com a métrica, podemos estabelecer o isomorfismo entre $T_p M$ e $T_p^* M$, tal que

$$v_\mu = g_{\mu\nu} \omega^\nu, \quad \omega_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu, \quad (3.5)$$

onde $||g^{\mu\nu}||$ é a matriz inversa de $||g_{\mu\nu}||$, pela condição $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$. Além disso, existem as operações de levantamento, abaixamento e contração de índices das componentes de tensores, que são, respectivamente, dadas por

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}, \quad T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}, \quad T_{\mu\mu} = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \quad (3.6)$$

Por fim, vale destacar que a métrica tem um papel fundamental na TRG por ser o objeto geométrico que nos permite ter a noção de medir distâncias e ângulos. Além disso, ela está relacionada com outros objetos geométricos que possibilitam uma descrição completa da TRG, objetos esses que veremos a seguir.

3.3 Conexão afim e derivada covariante

Como sabemos, em espaço-tempos planos, o operador ∂_μ em coordenadas cartesianas leva um campo tensorial do tipo (m, n) a um campo tensorial $(m, n + 1)$, que atua linearmente e obedece à regra de Leibniz [14]. A ideia então é generalizar o operador ∂_μ a situações mais gerais, que a corresponde ao caso do espaço-tempo curvo. Todavia, a aplicação deste operador depende diretamente do sistema de coordenadas, o que o torna um candidato não adequado

para um operador derivativo. De fato, seja $v^\mu \in T_p M$ as componentes de um vetor e $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu$ uma transformação de coordenadas. Temos então que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} &\rightarrow \frac{\partial \bar{v}^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\beta} v^\beta \right) \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} v^\beta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Com isso, veja que o segundo termo é não linear e, portanto, a relação entre os dois sistemas de coordenadas não é linear. Logo, vemos que $\partial_\nu v^\mu$ não pode ser um vetor, pois não se transforma como tal. O mesmo valeria se este operador fosse aplicado sobre um tensor.

Sendo assim, devemos então definir um operador ∇ , chamado de conexão afim. Por definição, ∇ é uma aplicação que leva um campo tensorial do tipo (m, n) a um campo tensorial do tipo $(m, n + 1)$, e satisfaz as seguintes condições:

- (1) $\nabla_v(u + w) = \nabla_v u + \nabla_v w$;
- (2) $\nabla_{v+w}(u) = \nabla_v u + \nabla_w u$;
- (3) $\nabla_{f(v)} u = f \nabla_v u$;
- (4) $\nabla_v(fu) = v[f]u + f \nabla_v u$.

Nesse caso, f pertence ao espaço das funções de M e o conjunto u, v, w pertence aos campos vetoriais sobre M . Tenha em mente que a operação $\nabla_v u$ indica a derivada de um vetor u na direção do vetor v . Para tal operador, podemos obter o que se chama por coeficientes da conexão, que são definidos por

$$\nabla_v e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma_{\lambda\nu\mu}, \quad e_\nu \equiv \partial_\nu \quad (3.8)$$

onde e_μ é a base coordenada.

Uma vez que ∇_v , onde $v = v^\mu \partial_\mu$ se comporta como um operador derivativo, podemos definir a derivada covariante de f pela derivada direcional ordinária:

$$\nabla_v f = v[f] = v^\mu \partial_\mu(f). \quad (3.9)$$

Além disso, pela condição (4), temos

$$\nabla_v(fu) = (\nabla_v f)u + f \nabla_v u \quad (3.10)$$

$$= v[f]u + f\nabla_v u,$$

e, por essa razão, requer-se que seja verdadeiro para qualquer produtor de tensores, isto é,

$$\nabla_v(T \otimes F) = (\nabla_v T) \otimes F + T \otimes (\nabla_v F). \quad (3.11)$$

Vejamos agora a ação da derivada covariante sobre um vetor $w = w^\mu e_\mu$. Tenha em mente que $\nabla_\mu \equiv \nabla_{e_\mu}$ e que $v = v^\mu e_\mu$. Assim,

$$\begin{aligned} \nabla_v w &= v^\mu \nabla_\mu (w^\nu e_\nu) \\ &= v^\mu (e_\mu[w^\nu]e_\nu + w^\nu \nabla_\mu e_\nu) \\ &\quad \left(\begin{array}{c} \lambda \end{array} \right) \\ &= v_\mu \frac{\partial w_\lambda}{\partial x^\mu} + w_\nu \Gamma_{\lambda\mu\nu} e^\lambda. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Desse modo, temos

$$\nabla_\mu w_\nu = \partial_\mu w_\nu + \Gamma_{\lambda\mu\nu} w^\lambda. \quad (3.13)$$

Por fim, vejamos agora a ação da derivada covariante sobre uma 1-forma $\omega = \omega_\mu dx^\mu$, onde dx^μ é a base dual de ∂_μ . Então, teremos

$$\begin{aligned} \nabla_v \omega &= v^\mu \nabla_\mu (\omega_\nu dx^\nu) \\ &= v^\mu (e_\mu[\omega_\nu]dx^\nu + \omega_\nu \nabla_\mu dx^\nu) \\ &\quad ! \\ &= v^\mu dx^\lambda, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde na última passagem foi usado o fato de que $\nabla_\mu dx^\nu = -\Gamma_{\mu\lambda}^\nu dx^\lambda$. Com isso, temos

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\lambda\mu\nu} \omega^\lambda. \quad (3.15)$$

3.3.1 Transporte paralelo e geodésicas

Vamos agora introduzir o conceito de transporte paralelo de um vetor. Dada uma curva $c(t)$ em uma variedade M , com o vetor tangente $u \equiv \frac{d}{dt}$. Considere um vetor v em um ponto $c(0)$

sobre a curva, tal que $v[c(0)]$. Considere agora um ponto infinitesimalmente próximo a $c(0)$, digamos $c(\epsilon)$ tal que o vetor v é agora $v[c(\epsilon)]$. O que devemos fazer agora é transportar $v[c(\epsilon)]$ ao longo da curva até o ponto $c(0)$, que nos fornece o vetor transportado paralelamente $v_{//}[c(\epsilon)]$. Assim, façamos a diferença entre o vetor transportado paralelamente de $c(\epsilon)$ a $c(0)$ e o vetor em $c(0)$, para obtermos $\delta v = v_{//}[c(\epsilon)] - v[c(0)]$. Com isso, surge a definição de derivada covariante⁹:

$$\nabla_{\mu} v \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta v}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v_{//}[c(\epsilon)] - v[c(0)]}{\epsilon}. \quad (3.16)$$

Se $\nabla_{\mu} v = 0$, então é dito que o vetor v é transportado paralelamente ao longo da curva $c(t)$ na direção de μ . Em termos das componentes, tal condição nos permite escrever

$$\frac{dv_{\mu}}{dt} + \Gamma_{\mu\nu\lambda} \frac{dx^{\nu}}{dt} v^{\lambda} = 0, \quad (3.17) \quad dt$$

onde

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\nu\beta} + \partial_{\nu} g_{\mu\beta} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}), \quad (3.18)$$

são os símbolos de Christoffel de segunda espécie, resultado válido se, e somente se, a métrica e a conexão forem compatíveis e a conexão for simétrica.

Se o vetor $v(t)$ é transportado paralelamente ao longo da curva, tal que

$$\nabla_{\nu} v = 0, \quad (3.19)$$

essa curva é chamada de geodésica. Posto isso, a equação (3.17) toma a forma

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{dt^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\nu}}{dt} \frac{dx^{\lambda}}{dt} = 0, \quad (3.20) \quad dt$$

A equação (3.20) é a equação da geodésica e pode ser resolvida, ao menos em princípio, quando as condições iniciais são especificadas.

3.4 Curvatura

Tendo em mente que já apresentamos o conceito de métrica, nosso objetivo agora é tornar a descrição do espaço-tempo (M, g) completa, por meio do que se conhece por curvatura e torção. Entretanto, antes de apresentarmos tais conceitos, é conveniente

⁹ Veja a seção 8.5 da referência [1].

introduzimos o que conhece por colchete de Lie⁶. Sejam v e w dois campos vetoriais que não comutam. É possível mostrar que

$$[v, w] = (v^\mu \partial_\mu w^\nu - w^\mu \partial_\mu v^\nu) \partial_\nu. \quad (3.22)$$

Em termos das bases, se o colchete de Lie for nulo, é dito que a base é holonômica, que é o caso das bases coordenadas. Por outro lado, se o colchete de Lie for diferente de zero, é dito que a base é não holonômica.

Assim, com a definição do colchete de Lie, podemos agora apresentar o que são os objetos geométricos conhecidos por curvatura e torção. O tensor de curvatura de Riemann e o tensor de torção são definidos, respectivamente, por

$$R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w \quad (3.23)$$

$$T(u, v) = \nabla_u \nabla_v - \nabla_v \nabla_u - [u, v], \quad (3.24)$$

que satisfazem $R(u, v)w = -R(v, u)w$ e $T(u, v) = -T(v, u)$.

Dado que R e T são campos tensoriais, suas operações sobre vetores são obtidas uma vez que eles atuam sobre as bases dos campos vetoriais conhecidos. Em termos da base coordenada ∂_μ e de sua base dual dx^μ , temos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \langle dx^\mu, R(\partial_\rho, \partial_\sigma) \partial_\nu \rangle \\ &= \langle dx^\mu, \nabla_\rho \nabla_\sigma \partial_\nu - \nabla_\sigma \nabla_\rho \partial_\nu \rangle \\ &= Dd_\mu (\Gamma_\alpha) (\Gamma_\alpha) \nabla_\rho \partial_\nu - \nabla_\sigma \partial_\nu \end{aligned} \quad (3.25)$$

⁶ Por definição,

$$[X_\mu, X_\nu] = C^\lambda_{\mu\nu} X^\lambda, \quad (3.21)$$

onde $C^\lambda_{\mu\nu}$ é chamada de constante de estrutura. Para mais detalhes, veja a seção 3.5 de Bassalo (2008) [15].

Pela regra de Leibniz, note que

$$\begin{aligned} \nabla_\rho (\Gamma_{\alpha\sigma\nu} \partial_\alpha) &= (\partial_\rho \Gamma_{\alpha\sigma\nu}) \partial_\alpha + \Gamma_{\alpha\sigma\nu} \nabla_\rho \partial_\alpha \\ &= (\partial_\rho \Gamma_{\alpha\sigma\nu}) \partial_\alpha + \Gamma_{\alpha\sigma\nu} \Gamma_{\beta\rho\alpha} \partial_\beta. \end{aligned} \quad (3.26)$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma (\Gamma_{\alpha\rho\nu} \partial_\alpha) &= (\partial_\sigma \Gamma_{\alpha\rho\nu}) \partial_\alpha + \Gamma_{\alpha\rho\nu} \nabla_\sigma \partial_\alpha \\ &= (\partial_\sigma \Gamma_{\alpha\rho\nu}) \partial_\alpha + \Gamma_{\alpha\rho\nu} \Gamma_{\beta\sigma\alpha} \partial_\beta. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ao inserirmos os resultados anteriores em (3.25), teremos

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = Dd_\mu (\Gamma_\alpha) \nabla_\rho \partial_\nu - \nabla_\sigma \partial_\nu + \Gamma_{\alpha\sigma\nu} \Gamma_{\beta\rho\alpha} \partial_\beta - \Gamma_{\alpha\rho\nu} \Gamma_{\beta\sigma\alpha} \partial_\beta. \quad (3.28)$$

Agora, atuando dx^μ sobre ∂_ν e tendo em mente que $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$, segue que

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = (\partial_{\rho}\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu})\delta^{\mu}{}_{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\rho\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta} - (\partial_{\sigma}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu})\delta^{\mu}{}_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\sigma\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta}. \quad (3.29)$$

Portanto, obteremos

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\sigma\nu} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\rho\nu} + \Gamma_{\alpha\sigma\nu}\Gamma_{\mu\rho\alpha} - \Gamma_{\alpha\rho\nu}\Gamma_{\mu\sigma\alpha}. \quad (3.30)$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} T^{\mu}{}_{\rho\sigma} &= \langle dx^{\mu}, T(\partial_{\rho}, \partial_{\sigma}) \rangle \\ &= \langle dx^{\mu}, \nabla_{\rho}\partial_{\sigma} - \nabla_{\sigma}\partial_{\rho} \rangle \\ &= Ddx^{\mu}, \Gamma_{\lambda\rho\sigma}\partial_{\lambda} - \Gamma_{\lambda\sigma\rho}\partial_{\lambda} E. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Tendo em mente que $dx^{\mu}(\partial_{\nu}) = \delta^{\mu}{}_{\nu}$, obteremos

$$T_{\mu\rho\sigma} = \Gamma_{\mu\rho\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma\rho}. \quad (3.32)$$

Um fato sobre o resultado anterior é que existe um caso de conexão afim que a torção é nula e, portanto, os coeficientes da conexão são simétricos, tal que $\Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho}$. Este é o caso da conexão de Levi-Civita. Para mais detalhes, veja a seção 7.4 de Nakahara (2018) [6].

3.4.1 Tensor de Ricci e o escalar de curvatura

Das componentes do tensor de curvatura de Riemann $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$, podemos definir o tensor de Ricci. Assim, temos

$$R_{\mu\nu} = R_{\rho\mu\rho\nu} = \partial_{\rho}\Gamma_{\rho\nu\mu} - \partial_{\nu}\Gamma_{\rho\rho\mu} + \Gamma_{\alpha\nu\mu}\Gamma_{\rho\rho\alpha} - \Gamma_{\alpha\rho\mu}\Gamma_{\rho\nu\alpha}. \quad (3.33)$$

Por fim, o escalar de curvatura é dado por

$$R = R_{\mu\mu} = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \quad (3.34)$$

3.5 Equações de campo

De acordo com princípio variacional de Hilbert¹⁰, a ação é dada por

$$S = \int_V -g L dx, \quad (3.35)$$

com g sendo o determinante da métrica e L a lagrangiana do campo. Com isso, o objetivo é obter a lagrangiana do seu respectivo campo. Uma das candidatas naturais para as variáveis da lagrangiana da ação do campo gravitacional são $g_{\mu\nu}$ e $\partial_{\rho}g_{\mu\nu}$. De maneira análoga, a parte da matéria terá suas próprias variáveis da lagrangiana. Como pode ser visto na seção 21.2 de Misner et al. [1], Hilbert propôs que

¹⁰ Veja a seção 21.1 da referência [1].

$$-c^3 L_g = 16\pi G^R \quad (3.36)$$

onde R é o escalar de curvatura (3.34). Com isso, a ação de Hilbert se escreve como

$$S_H = \frac{c^3}{16\pi G} \int_V \sqrt{-g} R d^4x, \quad (3.37)$$

que se trata da ação do campo gravitacional S_g . Já a ação correspondente à matéria é dada por

$$S_m = \int_V \mathcal{L}_m d^4x \quad (3.38)$$

Assim, podemos definir a ação do espaço-tempo como sendo dada em termos da soma da ação devida ao campo gravitacional S_g e da ação devida à matéria. Isto é,

$$S = S_g + S_m. \quad (3.39)$$

Desse modo, temos

$$S = \frac{c^3}{16\pi G} \int_V \sqrt{-g} R d^4x + \int_V \mathcal{L}_m d^4x. \quad (3.40)$$

Podemos obter as equações de campo tomando variações na métrica, tal que

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad \delta g_{\mu\nu} = 0 \quad (3.41)$$

de modo que nas fronteiras de integração teremos

$$0 = \delta S = \delta S_g + \delta S_m = 0 \rightarrow G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.42)$$

onde κ é uma constante de acoplamento que será determinada mais adiante. Perceba que o resultado anterior consiste em tomar variações na ação (3.40).

Primeiramente, temos que $g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$. Ao tomarmos variações, segue que

$$\delta(g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}) = \delta(\delta_\mu^\nu) = 0, \quad (3.43)$$

que implica

$$g_{\mu\alpha}(\delta g^{\alpha\nu}) = -g^{\alpha\nu}(\delta g_{\mu\alpha}). \quad \text{Com} \quad (3.44)$$

isso,

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}(\delta g^{\rho\sigma}), \quad \text{ou} \quad (3.45)$$

ainda,

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}(\delta g^{\rho\sigma}). \text{ Além} \quad (3.46)$$

disso, temos uma outra identidade útil:

$$\delta g = g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (3.47)$$

Devemos agora calcular o efeito das variações da métrica sobre o tensor de Ricci (3.33). De acordo com a identidade de Palatini, temos

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho(\delta \Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta \Gamma^\rho_{\mu\rho}). \quad (3.48)$$

Desse modo, usando os resultados acima, o integrando da ação de Hilbert ao ser variada, será

$$\begin{aligned} \delta \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right) &= (\delta g_{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \sqrt{-g} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) + g_{\mu\nu} R_{\mu\nu} \frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta(-g) \\ &= (\delta g_{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \sqrt{-g} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) + g_{\mu\nu} R_{\mu\nu} \frac{1}{2\sqrt{-g}} (-g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \\ &= R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

No segundo termo, convém usarmos a identidade de Palatini. Assim, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) &= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\rho \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\rho_{\mu\rho}) \\ &= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\rho \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\nu \delta \Gamma^\rho_{\mu\rho} \\ &= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\rho \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\nu \delta \Gamma^\rho_{\mu\rho} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Logo, teremos $\delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\rho \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\nu \delta \Gamma^\rho_{\mu\rho}$

(3.51) Portanto, a $\frac{1}{2}$ variação da ação de Hilbert toma a forma

$$\delta S_H = \frac{c^3}{16\pi G} \int \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R^2) d^4x \quad (3.52)$$

$$+ \frac{16\pi G}{c^3} \int \sqrt{-g} \nabla_\rho (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma^\nu_{\mu\nu}) d^4x$$

Note que o integrando do segundo termo do membro direito é uma divergência:

$$\sqrt{-g} \nabla_\rho (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma^\nu_{\mu\nu}) = \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left\{ \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma^\nu_{\mu\nu}) \right\} \quad (3.53)$$

Ao substituirmos esse resultado na integral, podemos usar o Teorema de Gauss. Assim, a integral reduzir-se-á a uma integral de superfície. Como é requerido pelo princípio da mínima ação, as variações são nulas nas fronteiras da região de integração e, portanto, essa integral superfície será nula. Consequentemente,

$$\delta S_H = 16\pi G \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (3.54)$$

Por fim, consideremos variações sobre a ação da matéria. Temos então que

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \frac{1}{c} \int d^4x \left[\sqrt{-g} \delta L_m + L_m \delta \sqrt{-g} \right] \\ &= \frac{1}{c} \int d^4x \left[\sqrt{-g} \delta L_m + L_m \delta \sqrt{-g} \right] \\ &= \frac{1}{c} \int d^4x \left[\sqrt{-g} \delta L_m + L_m \delta \sqrt{-g} \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

De acordo com a equação (21.33a) de [1],

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (3.56)$$

Logo,

$$\delta S_m = -\frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (3.57)$$

Portanto, ao combinarmos a variação da ação de Hilbert com a variação da matéria,

$$\delta S = \delta S_H + \delta S_m = 16\pi G \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (3.58)$$

Impondo que $\delta S = 0$, obteremos as equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.59)$$

teremos

3.6 Sobre o problema da energia do campo gravitacional

Como sabemos, o espaço-tempo é uma variedade. Quando uma variedade representa o caso de espaços-tempos curvo, então localmente ela é homeomorfa ao espaço-tempo de Minkowski (M^4). Decorre do Princípio da Equivalência que existe um sistema de coordenadas que cancela localmente os efeitos do campo gravitacional. Posto isso e a ideia de que o espaço-

tempo curvo é localmente homeomorfo ao M^4 , essa pequena região na qual o campo gravitacional desaparece coincide, obviamente, com o espaço-tempo de Minkowski.

Visando simplificar esta discussão, imagine que um observador está em um espaçotempo no qual há ação do campo gravitacional sobre todo o tecido deste espaço. Naturalmente, os efeitos gravitacionais estão distribuídos por todo este espaço-tempo. Todavia, ao analisar tal espaço-tempo em região muito pequena, os efeitos gravitacionais em questão desaparecem e o espaço-tempo se torna plano, o que significa dizer, em outras palavras, que não há campo gravitacional. Portanto, se não há campo gravitacional local, significa que não há energia gravitacional local.

A forma pela qual se descreve a energia e o momento de um determinado campo é por meio do que se chama de tensor de energia-momento. Como argumentado por Misner et al. [1], no contexto do Eletromagnetismo temos um tensor de energia-momento do campo eletromagnético bem definido e que só apresenta uma expressão para a quantidade de energia e momento do campo eletromagnético. Além disso, ao olharmos para as equações de campo (3.1), o tensor $T_{\mu\nu}$ serve como fonte e, portanto, curva o espaço-tempo. Todavia, o tensor de energia-momento do campo gravitacional local não possui tais características. Isto é, ele não contribui como fonte nas equações de campo e não possui uma única expressão para esta quantidade de energia e momento. O máximo que se conseguiu foi a construção de pseudo-tensores, como por exemplo o pseudo-tensor de Landau-Lifshitz (veja a seção 7.5 de [8]), que dependem diretamente do sistema de coordenadas adotado.

Disso, nota-se que o Princípio da Equivalência é aparentemente incompatível com a construção de tal tensor, uma vez que vai existir um referencial no qual este anular-se-á. Assim, como localmente o espaço-tempo se reduz ao caso de Minkowski, essa densidade tensorial seria, em princípio, nula.

4 A Formulação ADM

4.1 A decomposição (3+1) do espaço-tempo

Para se desenvolver uma formulação hamiltoniana da TRG, um pré-requisito necessário é a decomposição (3+1), que consiste em folhear o espaço-tempo em hipersuperfícies na direção do tempo. Nesse caso, é dito que a hipersuperfície tem dimensão $(m - 1)$ e está imersa em um espaço-tempo de dimensão m . Tal decomposição é possível ao se assumir que o espaço-tempo (M, g) é globalmente hiperbólico, o que significa dizer que este admite hipersuperfícies tipo-espaço, chamadas de hipersuperfícies de simultaneidade¹¹.

Com o intuito de possibilitar uma visão geométrica desta folheação, suponha a existência de duas hipersuperfícies que se encontram infinitesimalmente próximas. Isto é, a primeira, denotada por Σ_t , está em um tempo t constante; enquanto a segunda, Σ_{t+dt} , está a um tempo posterior $t + dt$ também constante. Neste intervalo, ou ainda no sanduíche formado por as duas hipersuperfícies, é possível encontrar toda informação necessária, por exemplo, para o problema de valor inicial da TRG, como pode ser visto na seção 21.1 de [1]. Se a 4-geometria do espaço-tempo é dotada de uma métrica $g_{\mu\nu}$, a folheação dada em termos das Σ 's possui uma 3-geometria q_{ij} induzida por $g_{\mu\nu}$.

No entanto, isso ainda não é suficiente para uma formulação hamiltoniana. Como foi observado por Arnowitt et al. [4], é necessária que a métrica seja separada em partes que carregam a informação sobre a dinâmica e partes que caracterizam o sistema de coordenadas. Na tentativa de alcançar esse objetivo, Arnowitt et al. introduziram: a função lapso N e as funções (ou vetor) de deslocamento N^i . Em termos dessas funções, a métrica da 4-geometria é dada na forma [1]

$$ds^2 = q_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) - N^2 dt^2, \quad (4.1)$$

onde as funções de lapso e de deslocamento são definidas por

$$N \equiv \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}; \quad N^i \equiv g_{0i} N^2. \quad (4.2)$$

Um importante conceito a se considerar nesse contexto de hipersuperfícies é o de curvatura extrínseca. Tal quantidade é obtida ao se fazer um transporte paralelo do vetor normal n^μ à hipersuperfície Σ , de um ponto A até um ponto B . Essa curvatura extrínseca, também chamada de segunda forma fundamental, permite calcular o quanto que este vetor tem sua direção modificada e pode ser escrita na forma [1]

$$= \frac{1}{2N} \left(\partial_i N_j + \partial_j N_i - \frac{1}{c} \frac{\partial q_{ij}}{\partial t} - 2\Gamma \right) !$$

¹¹ Para uma excelente discussão acerca deste tema, o leitor pode consultar a seção 10.2 de [16].

$$K_{ij}N^i, \quad (4.3)$$

Capítulo 4. A Formulação ADM onde

$$\Gamma_{lij} = \frac{1}{2} (\partial_j q_{li} + \partial_i q_{lj} - \partial_l q_{ij}) \quad (4.4)$$

são os símbolos de Christoffel.

Note que, da Eq. (4.2), para métricas diagonais, a curvatura extrínseca (4.3) se reduz a

$$K_{ij} = -\frac{1}{2cN} \frac{\partial q}{\partial t}{}_{ij}. \quad (4.5)$$

Uma outra quantidade fundamental para este trabalho é o momento canonicamente conjugado a q_{ij} , que pode ser expresso em termos de (4.3) como segue

$$\pi^{ij} = -q(K^{ij} - q^{-1}K\delta^{ij}) \quad (4.6)$$

em que $K = q^{ij}K_{ij}$ é o traço da curvatura extrínseca e q é o determinante da métrica da 3-geometria.

4.2 Energia e momento ADM

Para esta dada formulação hamiltoniana da TRG, pode-se agora introduzir os conceitos de energia e momento associados a Σ . A energia ADM é dada por [1,4]

$$P_0 \equiv E = 16\pi G \lim_{r \rightarrow \infty} \int_S dS_i \partial q \partial x^{ij} - \partial q \partial x_{ji}, \quad (4.7)$$

enquanto que o 3-momento é dado por

$$P_i = -8\pi G \lim_{r \rightarrow \infty} \int_S dS_j \pi^j_i, \quad (4.8)$$

onde S é uma superfície bidimensional da hipersuperfície de simultaneidade Σ_t , r é uma coordenada radial que está relacionada com a distância até a fonte. As Eqs. (4.7) e (4.8)

definem o 4-momento $P^\mu = (E, cP^i)$ via este formalismo, o qual só é bem definido para espaços-tempos os quais no limite assintótico a métrica se reduz à métrica de Minkowski e para coordenadas retangulares.

5 Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

Após Einstein apresentar sua versão final da Relatividade Geral, surgiram tentativas de unificação das leis da física. A primeira delas foi proposta por Hermann Weyl em 1918 [17], na tentativa de unificar gravitação e eletromagnetismo. Anos mais tarde, outra tentativa na mesma direção foi feita por Einstein [18]. Nessa tentativa, ele se baseou no conceito de teleparalelismo, também chamado de paralelismo distante ou absoluto. Sua ideia era a introdução do campo das tetradas, um campo de bases ortonormais nos espaços tangentes em cada ponto do espaço-tempo. No entanto, esses dois casos de tentativa de unificação não foram bem sucedidos. Contudo, tanto a tentativa de Weyl quanto a de Einstein trouxeram consigo conceitos importantes que continuam relevantes até os dias atuais. Após isso, outras tentativas de unificação foram feitas.

Como já enfatizado anteriormente, a Relatividade Geral não possibilita a construção de tensor de energia-momento para o campo gravitacional. Moller foi o primeiro a estabelecer este objeto tensorial, baseado nas ideias de Einstein, ideias essas baseadas em teorias teleparalelas. Ele conseguiu em encontrar um tensor de energia-momento que era invariante sob transformações de coordenadas gerais, muito embora não o fosse sob transformações locais de Lorentz¹². Maluf e outros autores também trabalharam nessa mesma vertente [2,20]

Em resumo, podemos dizer que existem diversas teorias que podem ser chamadas de teorias teleparalelas, como enfatizado por [21]. Isso está ligado ao fato de que o conceito de teleparalelismo depende do conceito de conexão afim, que por sua vez depende da escolha da geometria. Com isso, para que se tenha paralelismo, é necessário que a conexão afim em questão tenha curvatura nula. Como resultado, qualquer teoria baseada numa variedade n -dimensional dotada de uma conexão ∇ que tenha curvatura nula pode ser chamada teleparalela. Desprezando o caso trivial (o espaço-tempo de Minkowski), podemos separar estas teorias em três grandes classes: teorias com torção e sem não-metricidade (são as mais comuns); teorias com não-metricidade e sem torção; teorias com torção e não-metricidade.

Acreditamos que a melhor teoria teleparalela para lidar com o problema da descrição da energia gravitacional seja a TERG. Esta teoria é dotada de duas conexões afins, a de Levi-Civita e a de Weitzenböck. Essa última é responsável pelo teleparalelismo, é também uma conexão métrica¹³ e tem torção. A seguir, veremos uma breve discussão sobre

Capítulo 5. Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

a abordagem da TERG e a construção de um 4-momento.

¹² Para mais detalhes, veja o capítulo 4 da referência [19].

¹³ Para o conceito de conexão métrica, o leitor pode consultar a seção 7.2.6 da referência [6].

5.1 A abordagem do TERG

O TERG é uma teoria alternativa da Gravitação que possibilita reformular a TRG padrão. Essa teoria teleparalela usa o formalismo das tetradas. Essas tetradas formam uma base ortonormal sobre a variedade diferenciável do espaço-tempo, e são definidas por [19]

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu \quad \text{e} \quad \vartheta^a = e^a_\mu dx^\mu, \quad (5.1)$$

as quais chamamos, respectivamente, de frame e coframe.

A partir da condição de dualidade $\vartheta^a(e_b) = \delta_b^a$, vemos que as componentes do frame e do coframe satisfazem a seguintes relações

$$e_{a\mu}e_{b\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad e_{a\mu}e_{b\mu} = \delta_{ba}. \quad (5.2)$$

Na TERG, a densidade lagrangiana é dada por [2]

$$L = -\chi e \Sigma_{abc} T_{abc} - \frac{1}{c} L_m \quad (5.3)$$

onde $e = \det e_a^\mu$ é o determinante do campo das tetradas e_a^μ , $\chi = c^3/(16\pi G)$ e L_m é a densidade lagrangiana da matéria. Tomando variações da densidade lagrangiana com relação à tetrada, é possível verificar que essa teoria fornece as mesmas equações de campo de Einstein (3.1). Tais equações de campo são escritas na forma [2]

$$\partial_\alpha (e \Sigma_{\alpha\mu\alpha}) = 4\chi \frac{e}{\Sigma_{\alpha\mu\alpha}} T_{\mu\alpha} + t_{\mu\alpha}, \quad (5.4)$$

onde

$$t_{\mu\alpha} = \chi \frac{4 \Sigma_{bc\mu} T_{bc}}{\Sigma^{\lambda\mu\nu}} - e \frac{\Sigma^{\lambda\mu\nu}}{\Sigma^{\lambda\mu\nu}} T_{\mu\alpha}, \quad (5.5)$$

$$\Sigma^{\lambda\mu\nu} \equiv \frac{1}{4} T^{\lambda\mu\nu} + 2 T^{[\mu|\lambda|v]} + g^{\lambda[v} T^{\mu]}, \quad (5.6)$$

$$T_{\alpha\mu\nu} = \partial_\mu e_{\alpha\nu} - \partial_\nu e_{\alpha\mu}, \quad (5.7)$$

são o tensor de energia e momento do campo gravitacional, o superpotencial e a torção de Weitzenböck, respectivamente.

5.2 O 4-momento na abordagem da TERG

Seguindo a abordagem da TERG, podemos interpretar $t^{\mu\alpha}$ como sendo o tensor de energia-momento do campo gravitacional. Desse modo, podemos introduzir o tensor de

energia-momento do espaço-tempo, que é dado em termos das contribuições da matéria e do campo gravitacional, isto é,

$$\tau_{\mu a} \equiv t_{\mu a} + T_{\mu a}. \quad (5.8)$$

Por sua vez, o 4-momento do espaço-tempo é dado por

$$P^a = P_g^a + P_m^a \quad (5.9)$$

onde p_g^a e p_m^a são os 4-momentos do campo gravitacional e da matéria, respectivamente. Estes são definidos por

$$P_a = \int_V d_3 x e \tau_{0a}, \quad P_{ga} = \int_V d_3 x e t_{0a}, \quad P_{ma} = \int_V d_3 x e T_{0a}, \quad (5.10)$$

cujas integrais estão sobre uma região V , que corresponde a uma hipersuperfície $t = \text{constante}$.

Considerando o caso em que $e\tau^{0a}$ é não singular na região V , podemos usar o Teorema de Stokes e a identidade $\Sigma^{a00} = 0$, para tornar integral do 4-momento do espaço-tempo na integral de superfície seguinte [21]:

$$P_a = 4k \int_S dS_i e \Sigma^{a0i} \quad (5.11)$$

onde S é a fronteira da região V .

Caso o espaço-tempo seja assintoticamente plano, então o 4-momento total nesse caso é dado por $P_{\text{total}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_e} dS_i e \Sigma^{a0i}$ (5.12)

$$P_a = 4k \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_e} dS$$

onde a integral é calculada sobre a fronteira externa S_e . Se não houver nenhuma singularidade, então $S_e = S$ e P_{total}^a é simplesmente $\lim_{r \rightarrow \infty} P^a$. Vale destacar que a equação anterior é uma generalização do formalismo ADM¹⁴, isto é, as equações (4.7) e (4.8).

¹⁴ Para mais informações sobre tal generalização, o leitor pode consultar a referência [22].

6 A Energia e o Momento do Campo Gravitacional

A seguir, serão considerados casos específicos para métricas do espaço-tempo com objetivo de calcular a Curvatura Extrínseca e então caracterizá-las. Além disso, a energia e 3-momento do campo gravitacional são calculados. Com objetivo de comparar com os resultados consistentes fornecidos pela TERG, as métricas de espaços-tempos de ondas planas e do modelo FLWR, além da métrica de Minkowski nas coordenadas próprias de um observador, são estudadas. Para o caso assintoticamente plano, a geometria de Schwarzschild é considerada.

6.1 Espaços-tempos de ondas planas

Como se sabe, as ondas gravitacionais são previsões obtidas a partir da solução das Equações de Einstein (3.1). No entanto, só foram observadas pela primeira vez em 2015 pelo LIGO [23], uma engenhosa tecnologia que possibilitou suas detecções. Tais ondas possuem uma interessante característica acerca dos seus modos de polarização, que podem se manifestar como polarizações do tipo “plus” + e do tipo “cross” ×. Considere o seguinte espaço-tempo [7]

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + f^2(u) dx + g^2(u) dy + dz^2, \quad (6.1)$$

onde $u \equiv t - z/c$. No vácuo, as soluções dessa métrica são chamadas de ondas gravitacionais planas linearmente polarizadas. Para ser mais preciso, elas correspondem a ondas gravitacionais com polarização + que se propagam na direção do eixo z , as quais representam ondas de frente plana, no sentido de que estão longe da fonte.

A métrica (6.1) pode ser escrita em termos das componentes do tensor, como segue:

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0} + f_2(u)\delta_{\mu 1}\delta_{\nu 1} + g_2(u)\delta_{\mu 2}\delta_{\nu 2} + \delta_{\mu 3}\delta_{\nu 3}, \quad (6.2)$$

onde δ_{ij} é a delta de Kronecker. Como se trata de uma métrica diagonal, a inversão das componentes é trivial, de modo que se tem

$$g^{\mu\nu} = -\delta_{0\mu}\delta_{0\nu} + f^{-2}(u)\delta_{1\mu}\delta_{1\nu} + g^{-2}(u)\delta_{2\mu}\delta_{2\nu} + \delta_{3\mu}\delta_{3\nu}. \quad (6.3)$$

6.1.1 Curvatura extrínseca

Inserindo a parte da 3-geometria da Eq. (6.2) em (4.5) e usando a regra da cadeia¹, é possível chegar ao resultado seguinte:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} f(u) f'(u) \delta_i^1 \delta_j^1 + g(u) g'(u) \delta_i^2 \delta_j^2, \quad (6.4)$$

onde ' indica a derivada total de f com respeito a u . Assim, do resultado anterior e usando o fato de que $K = q^{ij} K_{ij}$, segue que

$$K = -\frac{1}{2} f(u) \delta_{1i} \delta_{1j} + g(u) \delta_{2i} \delta_{2j} + \delta_{3i} \delta_{3j} f(u) f'(u) \delta_{i1} \delta_{j1} + g(u) g'(u) \delta_{i2} \delta_{j2}. \quad (6.5)$$

Aplicando a propriedade distributiva e considerando a propriedade da δ_{ij} , obtém-se o traço da curvatura extrínseca:

$$K = -\frac{1}{2} f' + g'. \quad (6.6)$$

6.1.2 Energia e momento ADM para pp-waves

Para o cálculo da energia ADM (4.7), o procedimento é calcular cada termo entre os parênteses separadamente. Desse modo, é fácil ver que o primeiro termo é nulo enquanto que o segundo é ∂q

$$\frac{\partial q}{\partial x^i} = -\frac{2}{c} (f(u) f'(u) + g(u) g'(u)) \delta_i^3 \quad (6.7)$$

de modo que

$$E = 8\pi G \int_{\Sigma} dS_i [f(u) f'(u) + g(u) g'(u)] \delta_i^3. \quad (6.8)$$

Vale destacar que o r tendendo ao infinito foi omitido por não se tratar de uma métrica assintoticamente plana. Para calcular a integral anterior, considere uma caixa de volume V na qual a onda se propaga. Sendo assim, a integral será avaliada sobre as faces da caixa. Logo,

$$E = 8\pi G \int_{\Sigma} dS_i [f(u) f'(u) + g(u) g'(u)] \delta_i^3 = \int_{z_+}^{z_-} dx dy [f(u) f'(u) + g(u) g'(u)]_{z_+} - \int_{z_-}^{z_+} dx dy [f(u) f'(u) + g(u) g'(u)]_{z_-} \quad (6.9)$$

onde z_+ e z_- indicam as faces da caixa. Portanto,

$$E = 8\pi G \Delta x \Delta y [f(u) f'(u) + g(u) g'(u)]_{z_+} - [f(u) f'(u) + g(u) g'(u)]_{z_-}. \quad (6.10)$$

Por fim, para o cálculo do momento ADM, o primeiro cálculo a ser realizado é do momento

conjugado. Introduzindo as Eqs. (6.4) e (6.6) na Eq. (4.6), tem-se

$$\pi_{ij} = -\frac{1}{c} \left[\frac{g'(u)}{f(u)} \delta_1^i \delta_1^j + \frac{f'(u)}{g(u)} \delta_2^i \delta_2^j + (f(u) g(u)) \delta_3^i \delta_3^j \right] \quad (6.11)$$

¹ Seja $f(u)$, então

$$\frac{\partial f(u)}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Assim, inserindo o resultado anterior em (4.8) e seguindo a mesma abordagem adotada no cálculo da energia, obtém-se portanto que

$$P_i = 8\pi G c^2 \Delta x \Delta y n [f(u)g(u)]'_{z>} - [f(u)g(u)]'_{z<} \delta_{3i}. \quad (6.12)$$

Note que as Eqs. (6.10) e (6.12) fornecem resultados bem definidos. No entanto, em um trabalho desenvolvido por [21], é mostrado que para esse espaço-tempo, o 4-momento do campo gravitacional fornecido pela TERG é dado por

$$p^a = -\frac{c^4}{8\pi G} \Delta x \Delta y \left[\left(\frac{\partial f g}{\partial z} \right) (z_{>}) - \left(\frac{\partial f g}{\partial z} \right) (z_{<}) \right] (\delta_0^a + \delta_3^a), \quad (6.13)$$

evidenciando uma inconsistência no que diz respeito ao resultado aqui obtido para a energia. Apesar do momento coincidir com o do teleparalelismo, a energia não coincide. Além disso, é fácil verificar que outra inconsistência surge quando se calcula a norma do

4-momento ADM; verifica-se que no formalismo ADM, $g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = 0$, em contradição com o fato de ondas gravitacionais se propagam na velocidade da luz.

De qualquer forma, não era de se esperar um resultado consistente, pois o espaçotempo em questão não é assintoticamente plano, isto é, a energia do formalismo ADM não pode ser aplicada aqui. O cálculo foi feito apenas para mostrar a limitação desse formalismo e a possibilidade de se obter resultados consistentes com outro formalismo.

6.2 Espaço-tempo do modelo FLRW

A métrica do modelo FLRW, que descreve a expansão do Universo, é uma solução das equações de Einstein. Tal métrica, como pode ser encontrada na seção 11.1 de [8], é escrita por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{a^2(t)}{1 + \frac{kr^2}{4}} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (6.14)$$

onde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $a(t)$ é o fator de escala do universo e $k = 0, \pm 1$ é a constante de curvatura. Se $k = 0$, tem-se o caso de um universo com seção espacial plana, o que em geral não significa que o espaço-tempo é plano como o de Minkowski; o espaço-tempo só é plano se, além da constante de curvatura ser nula, o fator de escala for independente do tempo. Se $k = 1$, o universo é esférico. Se $k = -1$, o universo é hiperbólico. Definindo $F(r) \equiv (1 + kr^2/4)^{-1}$, a métrica (6.14) pode ser escrita em termos das componentes da seguinte forma

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} + a^2(t) F_2(r) \delta_{\mu l} \delta_{\nu l}, \quad (6.15)$$

e

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{0\mu}\delta_{0\nu} + \frac{1}{a^2(t)}F_2(r)\delta_{\mu\nu}. \quad (6.16)$$

ponto do espaço-tempo a curvatura extrínseca apresenta alguma singularidade, a energia do campo gravitacional irá divergir, isto é, não será bem definida nesse mesmo ponto.

Finalmente, para a obtenção do 3-momento, é possível verificar que

$$\pi^{ij} = -2a' F \delta^{ij}, \quad (6.22)$$

onde foram usadas as Eqs. (6.17), (6.18) e (4.6). Assim,

$$P_i = 4c\pi G_3 a' \lim_{r \rightarrow \infty} \int_S dS_j F. \quad (6.23)$$

Novamente, a integração acima será feita em coordenadas esféricas. Dado que o elemento de área da superfície bidimensional é $\hat{r} dS$, onde

$$\hat{r} = \sin\vartheta \cos\phi \hat{i} + \sin\vartheta \sin\phi \hat{j} + \cos\vartheta \hat{k}, \quad (6.24)$$

é possível verificar que o resultado da integral será nulo. Portanto, $P^i = 0$.

Dos resultados obtidos para a energia e o 3-momento, podemos observar que o formalismo ADM fornece resultados consistentes, apesar do espaço-tempo não ser assintoticamente plano. Isso pode ser constatado com os resultados obtidos por Sousa et al. [24], no qual é usado o formalismo da TERG.

De acordo com [25], a energia obtida por Sousa et al., equação (58), é dada por

$$E = \frac{kc^2 G_4}{1+4} \frac{a r k r^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{3}{2}}}. \quad (6.25)$$

Para analisarmos a equação anterior, devemos tomar o limite assintótico. Assim, para $k = 0$, a energia $E = 0$. Por sua vez, quando $k = \pm 1$, a energia $E \rightarrow 0$. Porém, note que na situação de curvatura negativa, em $r = 2$, a energia diverge. Portanto, perceba que apesar da equação anterior ser diferente do resultado que obtivemos para a energia (6.21), o nosso resultado é compatível com o fornecido por [24,25].

Já no caso do 3-momento, vimos que $P^i = 0$. Esse resultado é independente do fator de curvatura, o que está em compatibilidade com o resultado obtido por Sousa et al., na equação (63).

6.3 Espaço-tempo de Schwarzschild

A métrica da geometria de Schwarzschild nas coordenadas isotrópicas¹⁶ é dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{rc}\right)^2 c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2MG}{rc}\right)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (6.26)$$

onde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ é a nova coordenada radial e isotrópica. Nesse caso, o tensor métrico é

$$g_{\mu\nu} = -\left(1 - \frac{2MG}{rc}\right)^2 \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} + \left(1 + \frac{2MG}{rc}\right)^2 \delta_{\mu i} \delta_{\nu i}. \quad (6.27)$$

Como se trata de uma métrica diagonal, pode-se usar a Eq. (4.5). Além disso, uma vez que o tensor métrico não apresenta uma dependência temporal, sua derivada parcial com respeito a t será nula. Logo,

$$K_{ij} = K^i_i = 0. \quad (6.28)$$

Que implica em um 3-momento p^i nulo. O fato de $p^i = 0$ está de acordo com teorema de Birkhoff, o qual afirma que soluções esfericamente simétricas das equações de Einstein no vácuo devem ser estáticas e assintoticamente planas¹⁷. Em outras palavras, se o espaçotempo é estático, então não há fluxo de energia. Resta apenas calcular a energia. Assim, tem-se

$$\partial q \partial x^{ij} = \frac{2MG}{c^2 r^3} x_i \partial q \partial x^{ji} = -\frac{6MG}{c^2} x_i. \quad (6.29)$$

Desse modo, inserindo os resultados anteriores em (4.7), obtém-se

$$E = -Mc^4 \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi r^3} \int dS x_i x^i. \quad (6.30)$$

Veja que $x^i ds_i = \vec{r} \cdot d\vec{S} = r \hat{r} \cdot (\hat{r} dS)$. Tendo em mente que integração será feita em coordenadas esféricas, a energia será portanto

$$E = Mc^2, \quad (6.31)$$

cujo resultado corresponde à célebre equação de Einstein [26] que estabelece a equivalência entre massa e energia. Nesse caso, se M a é massa de um buraco negro, estático, a energia

¹⁶ Veja a Eq. 40.1 de [1].

¹⁷ Para mais detalhes sobre este teorema, o leitor pode consultar seção 32.2 de [1].

deste é equivalente a Mc^2 . Dessa forma, o 4-momento ADM fica como $P_{ADM}^\mu = (Mc^2, 0, 0, 0)$, que um resultado bem conhecido na literatura.

6.4 A métrica de Minkowski nas coordenadas próprias de um observador

A métrica de Minkowski escrita nas coordenadas próprias de um observador pode ser escrita na forma

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{A^2(x^0)}{c^2} dx^i dx^j \delta_{ij} \quad (6.33)$$

onde $A(x^0)$ é

$$A(x^0) = \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx^0}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.34)$$

se ijk for uma permutação par de 123, se ijk for uma permutação ímpar de 123, se alguns dos índices forem iguais.

$$[ijk] = \begin{cases} +1 & \text{se } ijk \text{ for uma permutação par de } 123, \\ -1 & \text{se } ijk \text{ for uma permutação ímpar de } 123, \\ 0 & \text{se alguns dos índices forem iguais.} \end{cases}$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{1}{c^2} \left[\Omega_i \Omega_j x^i x^j (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) + 2 \Omega_i x^i [ijk] dx^j dx^k + dx^i dx^i \right] \quad (6.32)$$

é o

Nessas coordenadas próprias, o observador tem uma aceleração $A'(x^0)$, onde x^0 é o parâmetro comprimento de arco da linha de universo. A tríade usada pelo observador rotaciona com velocidade angular $\Omega_i = \Omega_i(x^0)$.

Em termos das componentes da métrica, tem-se

$$g_{\mu\nu} = -c^2 \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} \left[\Omega_i \Omega_j x^i x^j (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) + 2 \Omega_i x^i [ijk] \delta_{\mu 0} \delta_{\nu k} + \delta_{\mu i} \delta_{\nu j} \right] \quad (6.35)$$

Note que para a 3-geometria, $q_{ij} = \delta_{ij}$. Assim, a curvatura extrínseca (4.3) será¹⁸

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(\partial_i N_j + \partial_j N_i \right). \quad (6.36)$$

As funções de deslocamento (4.2), nesse caso, são

$$N_k = \frac{\underline{\Omega}^i \chi^k [ijk]}{c}. \quad (6.37)$$

Desse modo, em (6.36), segue que introduzindo (6.37)

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \frac{1}{2N} \left[\partial_i \left(\frac{\Omega_p}{c} x^q [pqj] \right) + \partial_j \left(\frac{\Omega_m}{c} x^n [mni] \right) \right] \\ &= \frac{1}{2Nc} \left(\Omega_p \delta_i^q [pqj] + \Omega_m \delta_j^n [mni] \right) \\ &= \frac{1}{2Nc} \left(\Omega_p [pij] + \Omega_m [mji] \right) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Fazendo a mudança de índice $p \rightarrow m$, obtém-se

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \frac{1}{2Nc} \left(\Omega_m [mij] + \Omega_m [mji] \right) \\ &= \frac{1}{2Nc} \left(\Omega_m [mij] - \Omega_m [mji] \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Logo, $K_{ij} = K^j_i = 0$, o que resulta em $p^j = 0$. Além disso, como a energia ADM depende das derivadas parciais da 3-geometria, é fácil ver que energia também será nula. Em razão disso, pode-se considerar este espaço-tempo como sendo aquele no qual não há efeitos gravitacionais. Este resultado é consistente com o do TEGR, e também com a visão de que não há campo gravitacional no espaço-tempo de Minkowski, mesmo em um referencial acelerado.

¹⁸ Como $q_{ij} = \delta_{ij}$, os símbolos de Christoffel e derivada temporal da 3-geometria são identicamente nulos.

7 Conclusão

O objetivo deste trabalho foi analisar o problema da energia do campo gravitacional. Para isso, foi usado o formalismo hamiltoniano da TRG, conhecido como formalismo ADM. Com isso, a fim de se estudar tal problema, foram calculados a curvatura extrínseca, a energia e 3-momento ADM, a fim de se analisar os resultados que são fisicamente consistentes.

Foi possível verificar que para métricas não assintoticamente planas, a energia ADM forneceu resultados consistentes para alguns casos e inconsistentes para outros. Como exemplo de um resultado inconsistente, podemos citar o caso das ondas gravitacionais.

Apesar de sua limitação a coordenadas retangulares e a métricas assintoticamente planas, foi possível observar que o formalismo ADM fornece resultados compatíveis com aqueles obtidos via TERG, para o caso do modelo cosmológico. No trabalho desenvolvido por Sousa et al., estes não estavam limitados ao espaço-tempo ser necessariamente plano no limite assintótico. Além disso, pôde-se notar uma relação entre a hipersuperfície de simultaneidade e a energia do campo gravitacional.

Viu-se que para o caso de Schwarzschild o resultado obtido para a energia foi compatível com um resultado já conhecido. Além disso, o fato do 3-momento ser nulo está de acordo com o fato de ser um espaço-tempo estático.

Com isso, é possível constatar que o formalismo ADM é de fato limitado aos casos de espaços-tempos assintoticamente planos, uma vez que somente para esses tal formulação garante resultados consistentes. Haja vista isso, fica claro a limitação desse formalismo para resolver ou ao menos contornar o problema da energia do campo gravitacional, sendo necessário buscar teorias alternativas, como a TERG, por exemplo.

Referências

- [1] THORNE, K. S.; MISNER, C. W.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973. Citado 11 vezes nas páginas 11, 15, 18, 23, 26, 28, 29, 30, 31, 39 e 40.
- [2] MALUF, J. W. The teleparallel equivalent of general relativity. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 525, n. 5, p. 339–357, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 11, 32 e 33.
- [3] FORMIGA, J. The gravitational energy–momentum density of radially accelerated observers in schwarzschild spacetime. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 532, n. 3, p. 1900507, 2020. Citado na página 11.
- [4] ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 40, p. 1997–2027, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 11, 30 e 31.
- [5] CARMO, M. P. do. *Geometria riemanniana*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008. Citado na página 13.
- [6] NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. [S.l.]: CRC press, 2018. Citado 6 vezes nas páginas 13, 15, 17, 18, 25 e 32.
- [7] D’INVERNO, R. A. *Introducing Einstein’s relativity*. New York: Oxford University Press Inc, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 35.

- [8] BAMBI, C. *Introduction to General Relativity: A Course for Undergraduate Students of Physics*. Singapore: Springer, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 18, 29 e 37.
- [9] NORTON, J. What was einstein's principle of equivalence? *Studies in history and philosophy of science Part A*, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 203–246, 1985. Citado na página 19.
- [10] OHANIAN, H. C. What is the principle of equivalence? *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 45, n. 10, p. 903–909, 1977. Citado na página 19.
- [11] CASOLA, E. D.; LIBERATI, S.; SONEGO, S. Nonequivalence of equivalence principles. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 83, n. 1, p. 39–46, 2015. Citado na página 19.

Referências

- [12] NORTON, J. D. General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute. *Reports on progress in physics*, IOP Publishing, v. 56, n. 7, p. 791, 1993. Citado na página 19.
- [13] SCHUTZ, B. F. *Geometrical methods of mathematical physics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1980. Citado na página 20.
- [14] CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. Citado na página 21.
- [15] BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D. *Teoria de grupos*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2008. Citado na página 24.
- [16] WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010. Citado na página 30.
- [17] WEYL, H. et al. Electron and gravitation. *z. Phys*, v. 56, p. 330–352, 1929. Citado na página 32.
- [18] EINSTEIN, A. Auf die riemann-metrik und den fern-parallelismus gegründete einheitliche feldtheorie. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 102, n. 1, p. 685–697, 1930. Citado na página 32.

- [19] RUBEN, A.; GERALDO, P. J. *Teleparallel gravity: an introduction*. [S.l.]: Springer) Go to reference in article, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.
- [20] MALUF, J.; VEIGA, M.; ROCHA-NETO, J. da. Regularized expression for the gravitational energy-momentum in teleparallel gravity and the principle of equivalence. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 39, p. 227–240, 2007. Citado na página 32.
- [21] FORMIGA, J. B.; DUARTE, J. A. C. Gravitational energy problem and the energy of photons. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 108, p. 044043, Aug 2024. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.108.044043>>. Citado 3 vezes nas páginas 32, 34 e 37.
- [22] FORMIGA, J.; GONÇALVES, V. Generalization of the ADM gravitational energy momentum. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 106, n. 4, aug 2022. Citado na página 34.
- [23] ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016. Citado na página 35.

Referências

- [24] SOUSA, A.; MOURA, J.; PEREIRA, R. Energy in an expanding universe in the teleparallel geometry. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 40, p. 1–8, 2010. Citado na página 39.
- [25] FORMIGA, J.; GONÇALVES, V. The gravitational energy density of the universe. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 36, n. 18, p. 2150125, 2021. Citado na página 39.
- [26] LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. Citado na página 40.