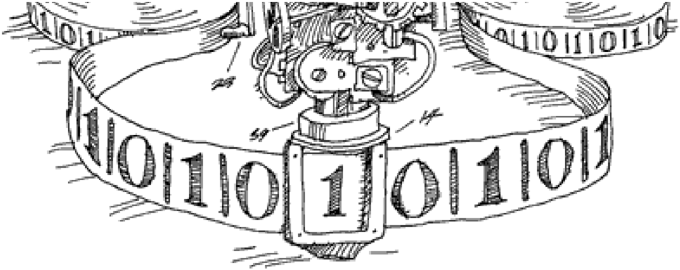
Theoretische Grundlagen der Informatik

Tutorium 5

Institut für Kryptographie und Sicherheit



Best of Übungsblatt 2

- Abgaben: 16 von 21 (76,2%)
- Mindestens 50% Punkte: 14 von 16 (87.5%)
- Durchschnittliche erreichte Punktzahl: 9.65
  - (nach Aufrunden auf halbe Punkte)

Aufgabenverteilung

Aufgabe 1: Gesamt: 51.75P (durchscnittlich 3.23)

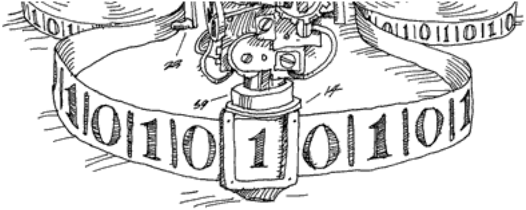
Aufgabe 2: Gesamt: 53P (durchschnittlich 3.31)

Aufgabe 3: Gesamt: 37.25P (durchschnittlich 2.32)

Aufgabe 4: Gesamt: 8.25P (durchschnittlich 0.52)

Turingmaschine

Die Turingmaschine besteht aus einem beidseitig *unendlichen* Eingabe- und Rechenband mit einem frei beweglichen Lese-/Schreibkopf, der von einer *endlichen* Kontrolle gesteuert wird.



Turingmaschine

Definiton

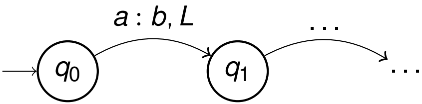
Eine Turingmaschine wird definiert als ein 7-Tupel bestehend aus:

- Q, einer endlichen Zustandsmenge
- Σ, einem endlichen Eingabealphabet
- Γ, einem endlichen Bandalphabet mit $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$, wobei $\sqcup \notin \Sigma$
- δ, einer Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$
- $s \in Q$, einem Startzustand
- q_{accept}, einem akzeptierenden Zustand
- q_{reject}, einem ablehnenden Zustand

Bemerkung

In den Zuständen q_{accept} und q_{reject} hält die Turingmaschine unabhängig davon, was vom Band eingelesen wird. Zudem führen alle impliziten Übergänge in den Zustand q_{reject}.

Graph einer Turingmaschine



Dabei steht die Kantenbeschriftung „$a : b, L$“ für den Übergang $\delta(q_0, a) = (q_1, b, L)$.

Falls es für einen gegebenen Zustand und ein gegebenes Symbol keinen Zustandsübergang gibt, bricht die Maschine die Berechnung ab, bzw. geht in Zustand q_{reject} über.

Konfigurationen

Karlsruher Institut für Technologie

Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{accept}, q_{reject})$ eine Turingmaschine.
Angabe des aktuellen Berechnungszustandes: *Konfiguration*

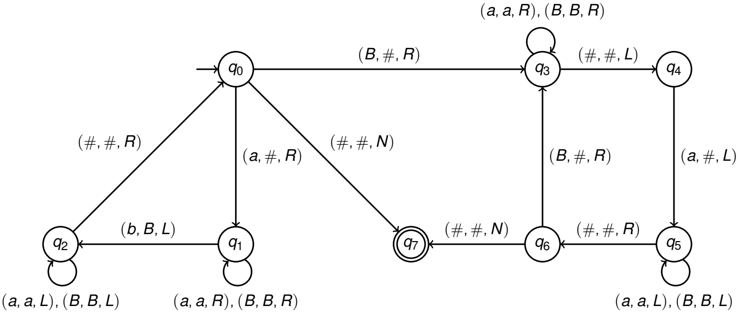
$$w(q)av$$

wobei $w, v \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$.
Dies bedeutet:

- $\mathcal{M}$ befindet sich im Zustand q.
- Der Lesekopf steht auf dem Zeichen a.
- Links vom Lesekopf steht das Wort w und rechts davon das Wort v auf dem Rechenband.

Aufgabe B4 2.2

Gegeben sei folgende deterministische Turingmaschine $\mathcal{TM} = (\mathcal{Q}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, \mathcal{F})$, wobei $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \#\}$, den Zuständen $\mathcal{Q} = \{q_0, \dots, q_7\}$, dem Startzustand q_0, den Finalzuständen $\mathcal{F} = \{q_7\}$ und dem Bandzeichen $\#$. Der Zustandsübergangsgraph ist gegeben durch:



Finden Sie die Sprache, die von der Turingmaschine $\mathcal{TM}$ akzeptiert wird!

Aufgabe B5 3

Karlsruher Institut für Technologie

Geben Sie für die nachfolgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ jeweils eine Turingmaschine an, die die entsprechende Sprache akzeptiert!

1. $\mathcal{L} = \{\omega \in \{0,1\}^* \mid \omega \text{ enthält das Zeichen 0 gleich oft wie das Zeichen 1}\}$
2. $\mathcal{L}' = \{\omega \in \{0,1\}^* \mid \omega \text{ enthält das Zeichen 0 doppelt so oft wie das Zeichen 1}\}$
3. $\mathcal{L}'' = \{\omega \in \{0,1\}^* \mid \omega \text{ enthält das Zeichen 0 nicht doppelt so oft wie das Zeichen 1}\}$

Nichtdeterministische Turingmaschine

Was ist das?

- Wie eine normale Turingmaschine...
- ... nur nicht-deterministisch.

Soll heißen:

- Mehrere Übergänge für das selbe gelesene Zeichen in einem Zustand
- akzeptiert wird, wenn es eine Berechnungsfolge gibt die in q_{accept} endet

Kurz gesagt:
Analog zu Automaten, nur ohne ϵ-Übergänge.

Aufgabe B4 2.1

Geben Sie eine nichtdeterministische Turingmaschine $\mathcal{TM} = (\mathcal{Q}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, \mathcal{F})$ an, welche die Sprache $\mathcal{L} = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ erkennt! Es genügt dabei, den Zustandsübergangsgraphen zu zeichnen und das verwendete Bandalphabet anzugeben.

Linear beschränkte Turingmaschine

Eine linear beschränkte Turingmaschine (auch *LBA* = Linear Bounded Automaton) darf den Bereich des Bandes auf dem die Eingabe steht nicht verlassen bzw. maximal das erste Blank-Symbol rechts der Eingabe verwenden.

Variation:

- Die linear beschränkte Turingmaschine darf noch genau ein weiteres Zeichen rechts von dem Eingabewort zu verwenden.

Die von der nichtdeterministischen linear beschränkten Turingmaschine akzeptierten Sprachen sind genau die kontextsensitiven Sprachen. (CH-1)

Aufgabe B4 1

1. Geben Sie für die Sprache $\mathcal{L}' = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ eine linear beschränkte Turing-Maschine an und zeichnen Sie diese Turing-Maschine auch als Graphen!
2. Prüfen Sie, ob Ihre Turing-Maschine *aaaa* als Eingabe akzeptiert! Prüfen Sie auch nach, ob *aaa* nicht akzeptiert wird!

Grammatiken

Eine kontextsensitive Grammatik $G = (T, V, S, P)$ (Chomsky Typ 1)

- T = Menge der Terminale (a.k.a. Alphabet der Sprache)
- V = Menge der Nichtterminale (zu T disjunkt)
- $S \in V$ = Startsymbol
- P = Menge der Produktionen mit Form $v \rightarrow w$
  - $v \in V^+$
  - $w \in ((V \setminus \{S\}) \bigcup T)^+$
  - $|v| \leq |w|$ oder $S \rightarrow \epsilon$

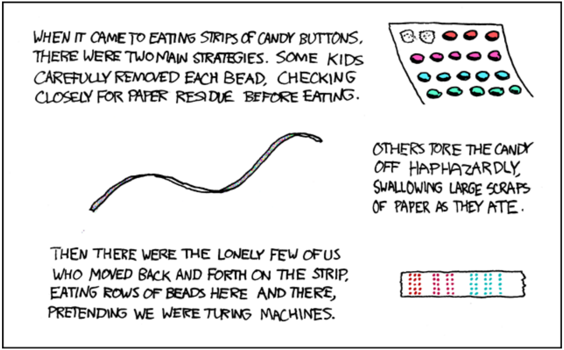
Eine Grammatik $G = (T, V, S, P)$ (Chomsky Typ 0)

- T = Menge der Terminale (a.k.a. Alphabet der Sprache)
- V = Menge der Nichtterminale (zu T disjunkt)
- $S \in V$ = Startsymbol
- P = Menge der Produktionen mit Form $v \rightarrow w$
  - $v, w \in (V \bigcup T)^*$

Chomsky-Hierarchie

- **Chomsky Typ 3**
  - Reguläre Sprachen (z.B. rechtslineare Sprachen)
  - Reguläre Ausdrücke
  - Endliche Automaten
- **Chomsky Typ 2**
  - $Ch3 \subseteq Ch2$
  - Kontextfreie Sprachen
  - Nichtdeterministische Kellerautomaten
  - Programmiersprachen sind in der Regel $Ch2$
- **Chomsky Typ 1**
  - $Ch2 \subseteq Ch1$
  - Kontextsensitiven Sprachen
  - Nichtdeterministische, linear platzbeschränkte Turingmaschine
- **Chomsky Typ 0**
  - $Ch1 \subseteq Ch0$
  - Grammatiken mit beliebiger Produktionsmenge
  - Semi-entscheidbare Sprachen (durch Turingmaschine)
  - rekursiv aufzählbare Sprachen

Bis zum nächsten Mal!



Lizenzen