

Theoretische Grundlagen der Informatik

Tutorium 4

Institut für Kryptographie und Sicherheit



$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a								
a								
b								
b								
c								
c								
d								
d								

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & \textcolor{red}{X} \rightarrow AM \mid AA \mid \textcolor{red}{a} \\
 \textcolor{red}{A} \rightarrow AA \mid \textcolor{red}{a} & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X							
a								
b								
b								
c								
c								
d								
d								

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & \textcolor{red}{X} \rightarrow AM \mid AA \mid \textcolor{red}{a} \\
 \textcolor{red}{A} \rightarrow AA \mid \textcolor{red}{a} & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X							
a		A,X						
b								
b								
c								
c								
d								
d								

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & \textcolor{red}{B} \rightarrow \textcolor{red}{b} & \textcolor{red}{Y} \rightarrow BM \mid \textcolor{red}{b}
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X							
a		A,X						
b			B,Y					
b								
c								
c								
d								
d								

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & \textcolor{red}{B} \rightarrow \textcolor{red}{b} & \textcolor{red}{Y} \rightarrow BM \mid \textcolor{red}{b}
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X							
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y				
c								
c								
d								
d								

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & \textcolor{red}{C} \rightarrow \textcolor{red}{c} \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X							
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y				
c					C			
c								
d								
d								

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & \textcolor{red}{C} \rightarrow \textcolor{red}{c} \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X							
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y				
c					C			
c						C		
d								
d								

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & \textcolor{red}{D} \rightarrow DD \mid \textcolor{red}{d} & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X							
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y				
c					C			
c						C		
d							D	
d								

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & \textcolor{red}{D} \rightarrow DD \mid \textcolor{red}{d} & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X							
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y				
c					C			
c						C		
d							D	
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & \textcolor{red}{X} \rightarrow AM \mid \textcolor{red}{AA} \mid a \\
 \textcolor{red}{A} \rightarrow \textcolor{red}{AA} \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y				
c					C			
c						C		
d							D	
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y				
c					C			
c						C		
d							D	
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y				
c					C			
c						C		
d							D	
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 \textcolor{red}{S} \rightarrow XD \mid \textcolor{red}{YC} & \textcolor{red}{M} \rightarrow \textcolor{red}{YC} & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & \textcolor{red}{D} \rightarrow \textcolor{red}{DD} \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y					
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y			
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 \textcolor{red}{S} \rightarrow XD \mid \textcolor{red}{YC} & \textcolor{red}{M} \rightarrow \textcolor{red}{YC} & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X						
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & \textcolor{red}{X} \rightarrow \textcolor{red}{AM} \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X						
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & \textcolor{red}{X} \rightarrow \textcolor{red}{AM} \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X		
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 \textcolor{red}{S} \rightarrow \textcolor{red}{X}\textcolor{red}{D} \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X		
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 \textcolor{red}{S} \rightarrow \textcolor{red}{X}\textcolor{red}{D} \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X	S	
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X	S	
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X	S	
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X	S	
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X	S	
a		A,X				X	S	
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 \textcolor{red}{S} \rightarrow \textcolor{red}{X}D \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X	S	
a		A,X				X	S	S
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X	S	
a		A,X				X	S	S
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X	S	
a		A,X				X	S	S
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X	S	
a		A,X				X	S	S
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X	S	
a		A,X				X	S	S
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X	S	
a		A,X				X	S	S
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X	S	
a		A,X				X	S	S
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 \textcolor{red}{S} \rightarrow \textcolor{red}{X}\textcolor{red}{D} \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X	S	S
a		A,X				X	S	S
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X	S	S
a		A,X				X	S	S
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

$$\begin{array}{lll}
 S' \rightarrow S \mid \epsilon & D \rightarrow DD \mid d & C \rightarrow c \\
 S \rightarrow XD \mid YC & M \rightarrow YC & X \rightarrow AM \mid AA \mid a \\
 A \rightarrow AA \mid a & B \rightarrow b & Y \rightarrow BM \mid b
 \end{array}$$

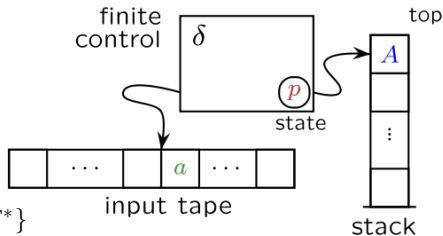
	a	a	b	b	c	c	d	d
a	A,X	A,X				X	S	S
a		A,X				X	S	S
b			B,Y		Y	S,M		
b				B,Y	S,M			
c					C			
c						C		
d							D	D
d								D

Sind die Wörter *abbcc* und *abcdd* in der Sprache der Grammatik?

Definition Kellerautomaten

Ein (nichtdeterministischer) **Kellerautomat** (NPDA bzw PDA, Pushdown Automaton) besteht aus $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$, wobei

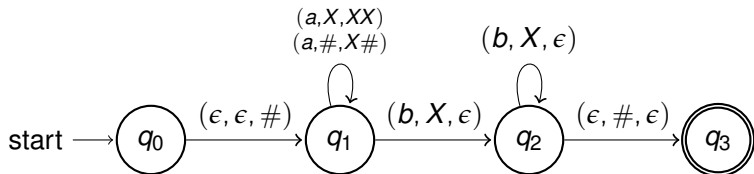
- Q endliche Zustandsmenge
- Σ endliches Eingabealphabet
- Γ endliches Stack-Alphabet
- $q_0 \in Q$ Anfangszustand
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$
 - $\delta(q, a, Z) \subseteq \{(q, \gamma) : q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
 - $\delta(q, \epsilon, Z) \subseteq \{(q, \gamma) : q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
- $F \subseteq Q$ Menge der akzeptierenden Endzustände, $F = \emptyset$ ist möglich.



- Akzeptieren nach Eingabeende, wenn
 - der Stack leer ist *oder*
 - der Automat in einen akzeptierenden Zustand kommt.
- Sind im Allgemeinen nichtdeterministisch
- Man kann Endzustände auch aus der Definition weglassen und alternativ verlangen, dass der Automat genau bei leerem Keller akzeptiert.
- Man kann sogar alle Zustände bis auf einen weglassen und alles in die Kellerbelegung kodieren

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$$

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{\#, X\}$
- $F = \{q_2\}$



- Welche Sprache akzeptiert dieser Automat?

Gegeben sei folgende Sprache für das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$:

$$\mathcal{L} = \{w_1 w_2 \in \Sigma^* \mid w_1 \in \{a, b\}^*, w_2 \in \{b, c\}^*, \\ \#_a w_1 + \#_b w_1 = \#_b w_2 + \#_c w_2\}$$

Hier gibt $\#_x w$ die Häufigkeit des Vorkommens eines Zeichens $x \in \Sigma$ in einem Wort $w \in \Sigma^*$ an.

1. Zeigen Sie, dass \mathcal{L} nicht regulär ist!
2. Geben Sie eine Chomsky-2-Grammatik an, die genau die Sprache \mathcal{L} erzeugt!
3. Geben Sie einen Kellerautomaten \mathcal{M} an, der genau die Sprache \mathcal{L} erkennt! Zeichnen Sie den Zustandsübergangsgraphen für \mathcal{M} !

Lemma

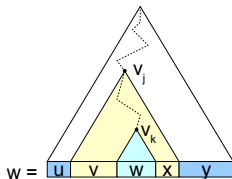
Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ so als

$$z = uvwxy$$

schreiben lässt, dass

- $|vx| \geq 1$,
- $|vwx| \leq n$ und
- für alle $i \geq 0$ das Wort $uv^iwx^iy \in L$ ist.

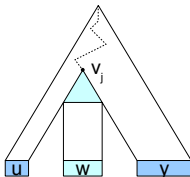
- Jeder Knoten im Ableitungsbaum (wie wir ihn in CYK sehen) steht für ein Nichtterminalsymbol
- Ab einer gewissen Höhe des Baumes (bzw. Länge des Wortes) muss ein Nichtterminal im Baum mehrmals in einer Reihe vorkommen
- Man kann also aus einem Nichtterminalsymbol dasselbe Symbol wieder ableiten
- Da das Wort durch jede Ableitung (außer zu Terminalsymbolen) länger wird, gibt es eine „Schleife“ beim Ableiten
- Diese Schleife kann man also „pumpen“, also beliebig oft (oder auch gar nicht) durchlaufen



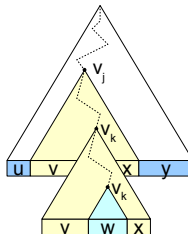
} h

Gegeben: Wort $z \in L$
mit $|x| \geq n$

Ableitungsbaum T für z
mit Höhe $h \geq N$



Erzeugen von uv^0wx^0y



Erzeugen von uv^2wx^2y

Pumping Lemma Formalia (kontextfrei)

Behauptung: L ist nicht kontextfrei.

Beweis:

Nehme an L sei kontextfrei.

Sei n beliebig aber fest.

Wähle $z = \text{_____} \in L$ mit $|z| \geq n$

Beh.: $\forall u, v, w, x, y : uvwxy = z$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$, $\exists i \in \mathbb{N}$,
so dass $uv^iwx^iy \notin L$.

Bew.: _____

Widerspruch zum Pumping Lemma $\Rightarrow L$ ist nicht kontextfrei.

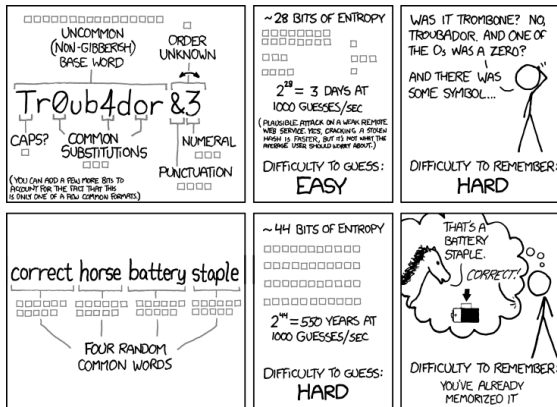
Zeige, dass die Sprache

$$L = \{\omega\omega \mid \omega \in \{0, 1\}^*\}$$

nicht kontextfrei ist.

1. Geben Sie für die Sprache $\mathcal{L} = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Grammatik des höchstmöglichen Chomsky-Typs an!
2. Zeigen Sie, dass die Sprache $\mathcal{L}' = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist!

Bis zum nächsten Mal!



THROUGH 20 YEARS OF EFFORT, WE'VE SUCCESSFULLY TRAINED EVERYONE TO USE PASSWORDS THAT ARE HARD FOR HUMANS TO REMEMBER, BUT EASY FOR COMPUTERS TO GUESS.



Dieses Werk ist unter einem "Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland"-Lizenzvertrag lizenziert. Um eine Kopie der Lizenz zu erhalten, gehen Sie bitte zu <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/> oder schreiben Sie an Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.

Davon ausgenommen sind das Titelbild, welches aus der März-April 2002 Ausgabe von American Scientist erschienen ist und ohne Erlaubnis verwendet wird, sowie das KIT Beamer Theme. Hierfür gelten die Bestimmungen der jeweiligen Urheber.