

Theoretische Grundlagen der Informatik

Tutorium 8

Institut für Kryptographie und Sicherheit



Beh.: $L_1 = \{\langle M \rangle \mid \text{TM } M \text{ ist minimal}\}$ nicht entscheidbar

Bew.:

- Annahme: L_1 entscheidbar
 - $\Rightarrow \exists$ TM \tilde{M} , die eine (unendliche) Liste der Gödelnummern aller minimalen Turingmaschinen ausgibt
- Konstruiere M' mit folgender Funktionsweise
 1. Hole eigene Beschreibung $\langle M' \rangle$
 2. Simuliere \tilde{M} , bis eine Gödelnummer $\langle M_0 \rangle$ ausgegeben wird, mit $\langle M_0 \rangle > \langle M' \rangle$
 3. Simuliere M_0 , dessen Gödelnummer gerade auf dem Band steht
- M_0 und M' sind funktionsäquivalent, M_0 ist minimal, $\langle M_0 \rangle > \langle M' \rangle$
- Widerspruch!

SAT (SATisfiability = Erfüllbarkeitsproblem)

Problem

Gegeben: Formel in konjunktiver Normalform

- Menge U von Variablen
- Menge C von Klauseln (Disjunktionen) über U

$$\begin{array}{c} \text{Literals} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (b \vee c) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ \text{Klausel} \quad \text{Klausel} \quad \text{Klausel} \end{array}$$

Frage: Existiert eine (alle Klauseln) erfüllende Variablenbelegung?

\mathcal{P} ist die Klasse aller Sprachen, die von einer deterministischen Turingmaschine in Polynomialzeit erkannt werden.

\mathcal{NP} ist die Klasse aller Sprachen, die von einer **nicht**deterministischen Turingmaschine in Polynomialzeit erkannt werden.

Anmerkungen:

- $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$.
- Die Frage ob $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ gilt ist ein großes, ungeklärtes Problem.

Ein Problem liegt in \mathcal{NP} falls man eine mögliche Lösung in Polynomialzeit von einer **deterministischen** Turingmaschine verifizieren lassen kann.

Beispiel

Zeige: $SAT \in \mathcal{NP}$

1. Es werden nichtdeterministisch alle möglichen Variablenbelegungen aufs Band geschrieben.
2. Es gibt nun eine deterministische Turingmaschine welche die Variablenbelegung in Polynomialzeit überprüft.

Aufgabe zu P, co-P (B8 A2)

Die Komplexitätsklasse **co-P** sei definiert als die Menge der Sprachen \mathcal{L} , deren Komplementsprache \mathcal{L}^C in der Komplexitätsklasse **P** liegt.

Erinnerung: Zu einer Sprache \mathcal{L} über einem Alphabet Σ ist die Komplementsprache $\mathcal{L}^C = \Sigma^* \setminus \mathcal{L}$.

Beweisen Sie: **co-P = P**

Kurzdefinition

Gegeben ist ein ungerichteter Graph den man mit n Farben einfärben soll ohne das zwei benachbarte (mit einer Kante verbundenen) Knoten die gleiche Farbe haben.

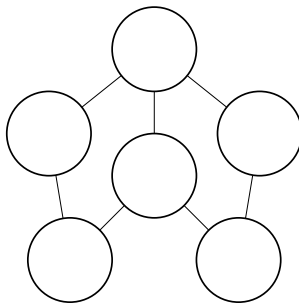
Formal

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Knoten $v \in V$ und Kanten $e = (v_1, v_2) \in E$ mit $v_1, v_2 \in V$ und n Farben $F_1, F_2, \dots, F_n \in F$.
Gesucht: Eine totale Funktion

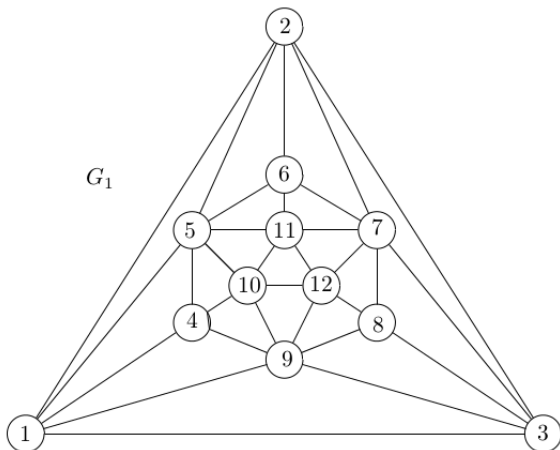
$$g : V \rightarrow F : \forall (v_1, v_2) \in E : g(v_1) \neq g(v_2)$$

Beispiel Graph-Färbbarkeit

Färbe diesen Graph mit 2 Farben



Ist dieser Graph 3-Färbbar?



Aufgabe zu Graphfärbbarkeit (B8 A3)

Gegeben seien ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Knoten $v \in V$ und Kanten $e = (v_1, v_2) \in E$ mit $v_1, v_2 \in V$ und zwei Farben A und B .

Beweisen Sie: Die Sprache 2-COLOR =

$\{G \mid G = (V, E) \text{ ungerichteter Graph mit } \exists \text{ totale Funktion } g : V \rightarrow \{A, B\} : \forall (v_1, v_2) \in E : g(v_1) \neq g(v_2)\}$

liegt in der Komplexitätsklasse **P**.

Kurzdefinition

Das selbe wie SAT allerdings enthalten ALLE Klauseln exakt n Literale.

Formal

Gegeben: Formel in konjunktiver Normalform

- Menge U von Variablen
- Menge C von Klauseln (Disjunktionen) über U mit je exakt n Literalen

Frage: Existiert eine (alle Klauseln) erfüllende Variablenbelegung?

3-Sat

$$U = \{a, b, c, d\}$$

$$C = \{\{\neg a, \neg b, d\}, \{\neg b, \neg a, c\}, \{\neg c, \neg d, a\}, \{b, c, d\}\}$$

2-Sat

$$U = \{a, b, c, d, e\}$$

$$C = \{\{a, \neg b\}, \{\neg b, \neg d\}, \{b, \neg d\}, \{\neg c, d\}, \{d, e\}, \{d, \neg e\}\}$$

Das Problem 2-SAT ist folgendermaßen definiert:

2-SAT

Gegeben eine in ihrer Größe polynomiell beschränkte aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform, wobei jede Klausel genau 2 Literale enthält. F hat also die Form

$$F = \bigwedge_{i=1}^n (L_i \vee N_i),$$

wobei L_i und N_i Literale sind, also von der Form X oder $\neg X$ für eine Variable X sind.

Gibt es eine erfüllende Belegung für F ?

Geben Sie eine polynomielle Reduktion von 2-COLOR auf 2-SAT an!

Aufgabe B8 A1

Ein Algorithmus, der eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Eingabe erhält und prüft, ob n prim ist, sei gegeben durch die nachfolgende Beschreibung einer Turingmaschine \mathcal{M} , die die Funktion

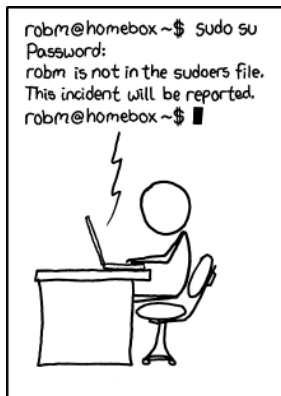
$$f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}, n \mapsto \begin{cases} 1 & , n \text{ prim} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

realisiert.

1. Initialisiere Zähler z mit 2 und Ausgabe a mit 1
2. Berechne $n \% z$
3. Prüfe, ob $n \% z = 0$ gilt:
 - Falls ja: Setze a auf 0 und gehe zu Schritt 4.
 - Falls nein: Gehe zu Schritt 4.
4. Prüfe, ob $z < n$ gilt:
 - Falls ja: Erhöhe z um 1 und gehe zu Schritt 2.
 - Falls nein: Lösche das Band, schreibe a auf das Band und stoppe

Geben Sie die Komplexität des oben angegebenen Algorithmus bezüglich der Eingabe n und auch bezüglich der Länge der Binärdarstellung von n an!

Bis zum nächsten Mal!





Dieses Werk ist unter einem "Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland"-Lizenzvertrag lizenziert. Um eine Kopie der Lizenz zu erhalten, gehen Sie bitte zu <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/> oder schreiben Sie an Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.

Davon ausgenommen sind das Titelbild, welches aus der März-April 2002 Ausgabe von American Scientist erschienen ist und ohne Erlaubnis verwendet wird, sowie das KIT Beamer Theme. Hierfür gelten die Bestimmungen der jeweiligen Urheber.