UE CALCUL SCIENTIFIQUE ET MATÉRIAUX
31 DÉCEMBRE 2022

2ÈME ANNÉE EEEA OPTION PHYSIQUE NUMÉRIQUE

Complément d'analyse numérique

Élèves :
Mohamed Reda YACOUBI

Enseignants
Ronan PERRUSSEL

31 décembre 2022

Table des matières

Table des figures

Introduction générale

L'objectif de ce BE est la résolution numérique du problème en équations différentielles ordinaires (EDO) suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) \\ \text{conditions initiales} \end{cases}$$

C'est une équation du premier ordre sous sa forme normale. Et ceci, en développant différentes méthodes numériques, plus précisément les méthodes de Runge-Kutta du point milieu et la règle 3/8 ainsi que les méthodes emboitées associées, en utilisant dans un premier temps un pas fixe puis en faisant varier le pas.

L'idée d'une méthode à pas variable pour résoudre l'EDO, est de choisir le pas afin que l'erreur locale soit partout environ égale à un seuil de tolérance τ fixé par l'utilisateur. Ainsi, on va s'intéresser aux ereurs locales et globales. Pour cela, si y_1 est le résultat d'un pas de la méthode de Runge-Kutta considérée, une deuxèeme méthode de Runge-Kutta fournit un résultat $\hat{y}_1$ et la différence $y_1 - \hat{y}_1$ permet d'estimer l'erreur locale.

On va utiliser dans un premier temps deux méthodes de Runge-Kutta, celle du point milieu et celle de la règle 3/8, puis on va vérifier leurs ordre en utilisant le théorème de calcul des ordre vu en cours et numériquement en travaillant sur différents exemples. Ensuite, on va vérifier les méthodes de Runge-Kutta avec pas constante et enfin on va modier l'algorithme pour avoir un pas variable.

1 L'ordre des méthodes de Runge Kutta :

On cherche ici à vérifier l'ordre de la méthode de Runge-Kutta du point milieu(**ordre=2**) donnée par le tableau :

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
1/2 & 1/2 & \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}
$$

et la méthode "Règle 3/8" (**ordre=4**) donnée par le tableau suivant :

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/3 & 1/3 & & & \\
2/3 & -1/3 & 1 & & \\
1 & -1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8
\end{array}
$$

1.1 Vérification par calcul :

En s'appuyant sur le théorème vu en cours (figutre 1), on doit vérifier que l'ordre de la méthode de Runge-Kutta du point milieu vaut 2 et que l'ordre de la méthode "règle 3/8" et ceci en utilisant un script Matlab pour éviter les calculs à la main.

Théorème

La méthode de RK définie par le tableau des coefficients c_i, a_{ij}, b_j est

- *d'ordre* $\geqslant 2$ *ssi* $\sum_j b_j c_j = \frac{1}{2}$.
- *d'ordre* $\geqslant 3$ *ssi* $\sum_j b_j c_j = \frac{1}{2}$; $\sum_j b_j c_j^2 = \frac{1}{3}$; $\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$.
- *d'ordre* $\geqslant 4$ *ssi*

$$\sum_j b_j c_j = \frac{1}{2};\ \sum_j b_j c_j^2 = \frac{1}{3};\ \sum_j b_j c_j^3 = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6};\ \sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12};\ \sum_{i,j} b_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8}$$

$$\sum_{i,j,k} b_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{24}.$$

FIGURE 1 – Vérification par calcul

En effet, on a bien trouvé les résultats prévus :

```
>> Question1
 La méthode de Runge du point milieu:
 L'ordre est >= 2
 La méthode règle 3/8 :
 L'ordre est >= 4
```

FIGURE 2 – Résultats de l'ordre sur Matlab

1.2 Vérification graphique :

Pour vérifier numériquement l'ordre des deux méthodes de Runge, on va tracer l'évolution de l'erreur globale en fonction du nombre d'évaluation du fonction considérée. Ainsi la pente du courbe donne l'ordre de la méthode. L'erreur locale correspond à la différence entre la solution exacte et la solution numérique trouvée par l'une des méthodes de Runge-Kutta à un instant donnée. Alors que l'erreur globale correspond à la diffénece ebtre la solution exacte et la dernière solution approchée après N itération et on trace le logarithme de cette erreur pour la fonction cos(t). On trouve les résulats suivants :

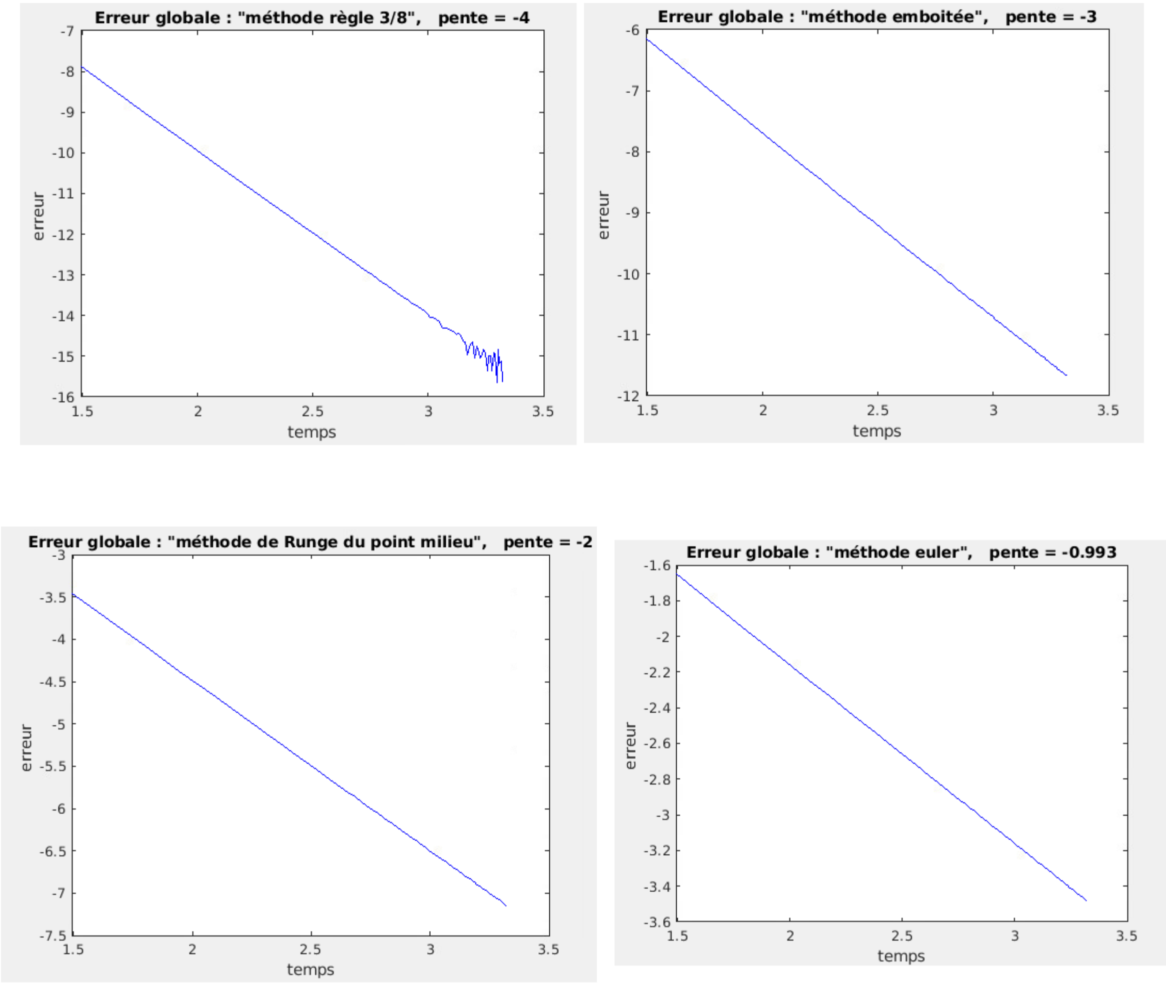

FIGURE 3 – L'erreur globale pour les différents méthodes

On voit bien que la pente de chaque courbe de l'erreur correspond bien à l'ordre de la méthode lui associée.

2 Les méthodes de Runge-Kutta emboîtées avec pas constant :

$\rightarrow$ **Principe :**

Soit une méthode donnée de Runge-Kutta d'ordre p à s étages (coefficients c_i,$a_{i,j}$ et b_j connus). On cherche $\hat{y}_1$ avec une méthode d'ordre $p < \hat{p}$ de la forme :

$$\boxed{\hat{y}_1 = y_0 + h(\hat{b}_1 k_1 + \ldots + \hat{b}_s k_s)}$$

où les k_i sont donnér par la méthode de départ, évitant ainsi de nouvelles évaluations de f. Pour avoir un peu de liberté on peut ajouter aussi le terme $f(t_1, y_1)$, qu'il faudra de toute façon calculer pour le pas suivant et ainsi :

$$\boxed{\hat{y}_1 = y_0 + h(\hat{b}_1 k_1 + \ldots + \hat{b}_s k_s + \hat{b}_{s+1} f(t_1, y_1))}$$

$\rightarrow$ **Résultats sous Matlab :**

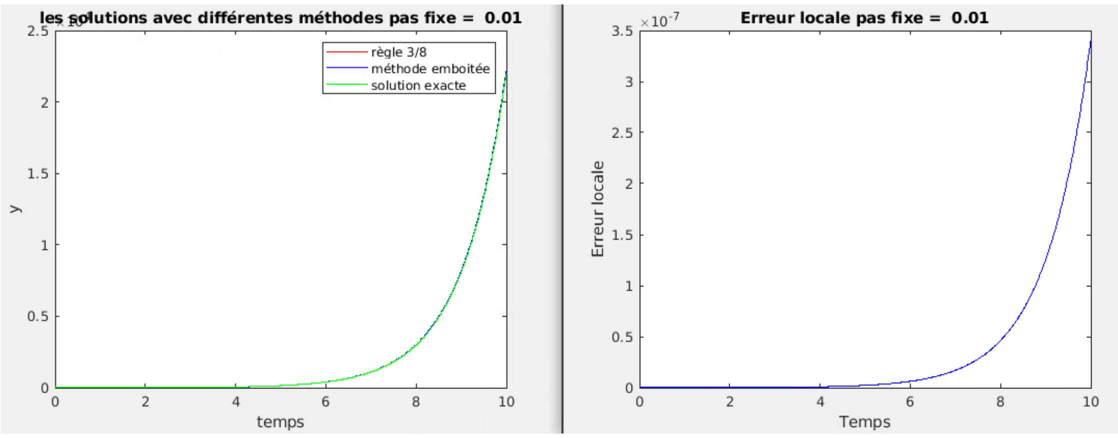

FIGURE 4 – résultats pour f(t,y)=exp(t) avc pas = 0.01

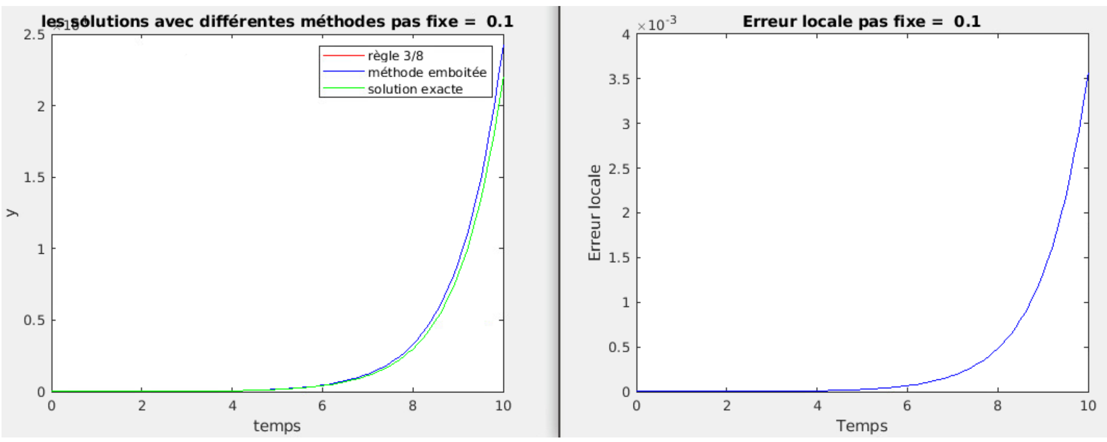

FIGURE 5 – résultats pour f(t,y)=exp(t) avec pas = 0.1

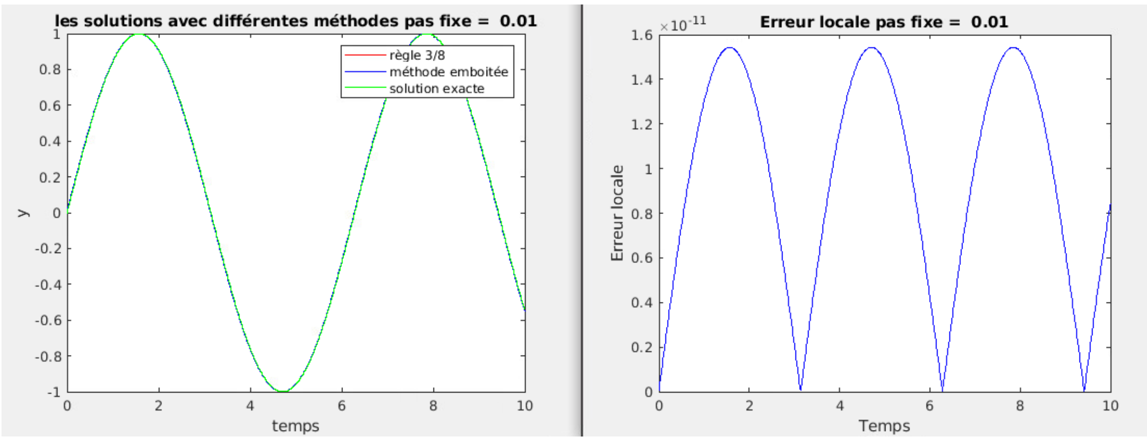

FIGURE 6 – résultats pour f(t,y)=cos(t) avec pas = 0.01

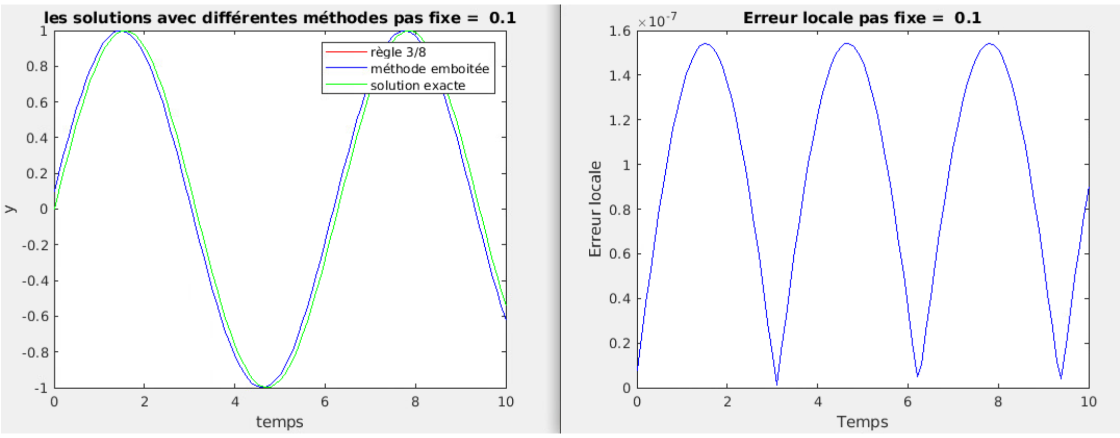

FIGURE 7 – résultats pour f(t,y)=cos(t) avec pas = 0.1

3 Les méthodes de Runge-Kutta emboîtées avec pas variable :

$\rightarrow$ Principe de sélection du pas :

1. Avec le pas h, calcul de y_1, de err $= \|y_1 - \widehat{y}_1\|$ et h_{opt}.
2. **if** err $\leqslant \tau$ (pas accepté) **then**
   $t_0 \leftarrow t_0 + h$, $y_0 \leftarrow y_1$, $h \leftarrow \min(h_{\text{opt}}, t_{\text{fin}} - t_0)$
   else (pas refusé)
   $h \leftarrow h_{\text{opt}}$
   end if
3. Si $t_0 = t_{\text{fin}}$ on a terminé, sinon on retourne au point 1.

FIGURE 8 – Algorithme de sélection automatique du pas

→ **Calcul du pas optimal :**
L'estimation de l'erreur locale donne : $y_1 - \hat{y}_1 \approx Ch^{\hat{p}+1}$
Le pas "optimal" est celui où l'estimation est la plus proche possible de la tolérance τ :

$$\boxed{\tau \approx C h_{opt}^{\hat{p}+1}}$$

En éliminant C des deux formules, on considère :

$$\boxed{h_{opt} = 0.9h \sqrt[\hat{p}+1]{\frac{\tau}{||y_1 - \hat{y}_1||}}}$$

Un facteur 0.9 est ajouté pour rendre le programme plus "robuste".
On s'impose aussi $0.5h \leq h_{opt} \leq 5h$ pour éviter des variations trop "violentes" du pas.
On modifie le programme précedent en faisant introduire l'algorithme de sélection automatique du pas ci-dessus.
→ **Résultats sous Matlab :**

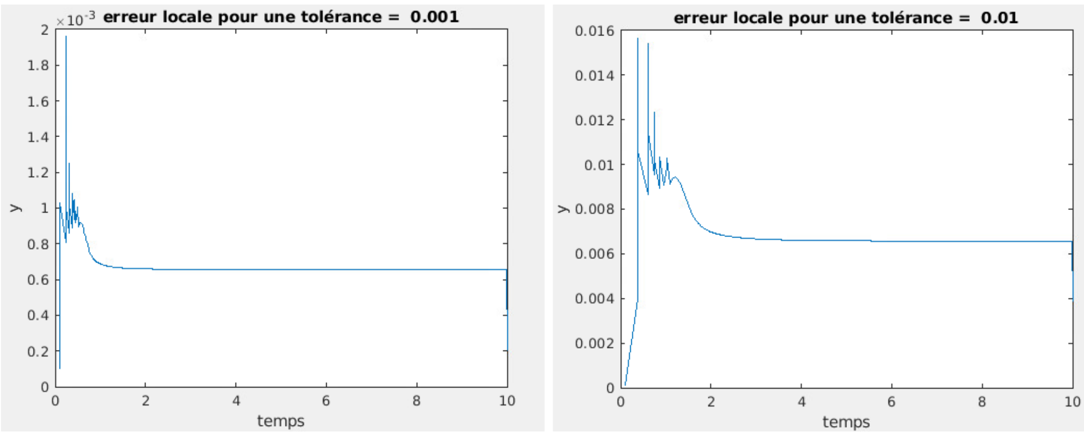

FIGURE 9 – résultats pour f(t,y)=exp(t)

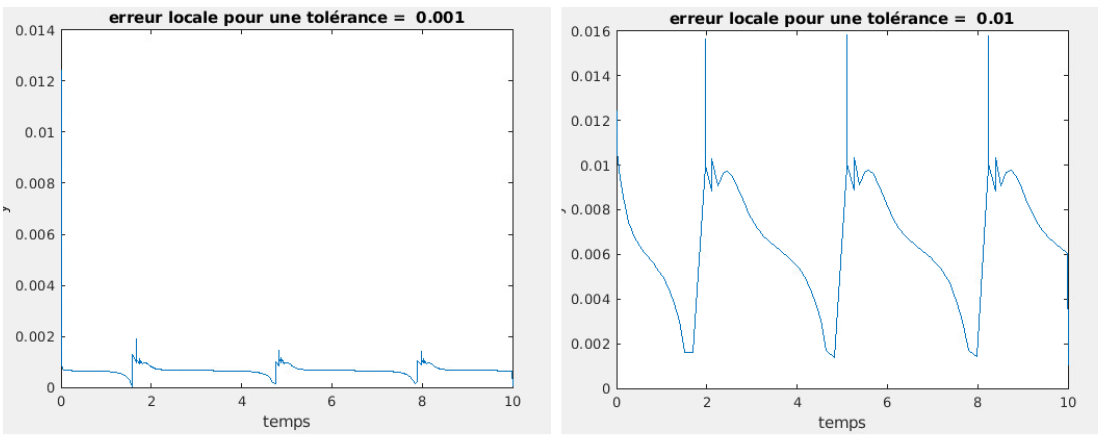

FIGURE 10 – résultats pour f(t,y)=cos(t)

4 Conclusion :

Les méthodes de Runge-Kutta, d'ordre 2 ou 4, ont l'avantage d'être simples à mettre en œuvre, précises et assez stables pour les fonctions courantes rencontrées en physique. C'est ce qui explique leur grande popularité. De nombreux logiciels de calcul utilisent par défaut la méthode RK4 dans sa version adaptative . Bien entendu ces méthodes ont aussi leurs défauts : elles sont assez gourmandes en temps de calcul et ne sont pas adaptés aux systèmes conservatifs aux temps longs