

UE MÉTHODES NUMÉRIQUES ET OPTIMISATION

22 DÉCEMBRE 2022

3ÈME ANNÉE EEEA OPTION PHYSIQUE NUMÉRIQUE

Modélisation numérique par éléments finis

Élèves :

Mohamed Reda YACOUBI

Enseignants

Ronan PERRUSSEL

Table des matières

Introduction générale	3
1 Formulation du problème :	4
1.1 Formulation forte :	4
1.2 Conditions aux limites :	5
1.3 Formulation faible :	5
2 Modèle éléments finis :	6
2.1 Influence de la condition à l'infinie :	6
2.2 Influence de μ_r dans le noyau magnétique :	7
2.3 Problème axi-symétrique :	8
2.4 La non linéarité du noyau magnétique :	9
3 Conclusion :	10

Table des figures

1	Modèle d'électro-aimant 2D	3
2	Maillage de la structure	4
3	Conditions aux limites	5
4	Simple couche d'air (Linear)	6
5	Condition à l'infinie (infinite air shell)	6
6	Pour $r_{int} = 0.15$ (linear)	7
7	Pour $r_{int} = 0.15$ (infinite air shell)	7
8	Le champ magnétique B pour $\mu_r = 1H.m^{-1}$)	7
9	Le champ magnétique B pour $\mu_r = 100H.m^{-1}$	7
10	Le champ d'excitation magnétique H pour $\mu_r = 1H.m^{-1}$)	8
11	Le champ d'excitation magnétique H pour $\mu_r = 100H.m^{-1}$	8
12	Potentiel vecteur du champ magnétique A (modèle axisymétrique)	8
13	Potentiel vecteur du champ magnétique A (modèle 2D plan)	8
14	L'induction magnétique B (modèle axisymétrique)	9
15	L'induction magnétique B (modèle 2D plan)	9
16	L'induction magnétique B (modèle non linéaire)	9
17	Le champ d'excitation magnétique H (modèle non linéaire)	9

Introduction générale

On va considérer un problème de magnétostatique sur un modèle 2d d'électro-aimant tel que représenté à la figure 1. En vert, on peut voir le noyau magnétique et en rouge l'inducteur. Seul un quart de la géométrie est représenté car il y a symétrie (source+dispositif) par rapport à l'axe des abscisses mais anti-symétrie des sources par rapport à l'axe des ordonnées. La bobine inductrice est constituée de 1000 tours et alimentée par un courant de 0.01A. Le noyau magnétique aura par défaut un μ_r relatif de 100 mais on pourra changer cette valeur ensuite. L'anneau extérieur sera utilisé pour tester la transformation infinie.

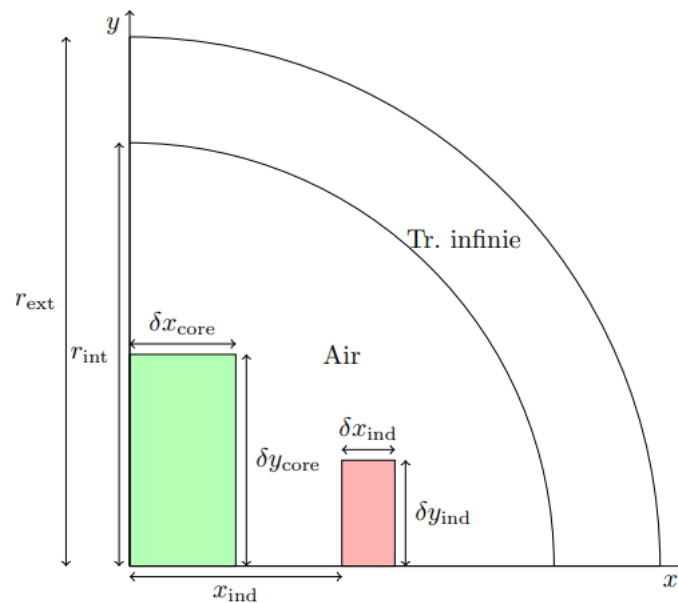


FIGURE 1 – Modèle d'électro-aimant 2D

On pourra prendre les valeurs numériques suivantes pour les dimensions (l'unité est supposée le mètre) :

$$\delta x_{core} = 50.10^{-3}, \delta y_{core} = 100.10^{-3}, x_{ind} = 75.10^{-3}, \delta x_{ind} = 25.10^{-3}, \delta y_{ind} = 50.10^{-3}, r_{int} = 0.2, r_{ext} = 0.25$$

1 Formulation du problème :

La première chose est de créer notre structure à l'aide de l'outil Gmsh qui permet de décrire la géométrie de la structure à étudier et ensuite de mailler cette structure pour effectuer le calcul. Pour cela, on crée des entités géométriques élémentaires en partant de la plus petite dimension vers la plus grande (soit points, puis lignes, puis surfaces, ...).

Ensuite, on crée 6 groupes physiques (Air, Noyau, inducteur, Tr.infinie, Symétrie, Antisymétrie) qui permettront de repérer les lignes, surfaces, volumes, avec des propriétés différentes (ou conditions aux limites différentes) lors du calcul par éléments finis.

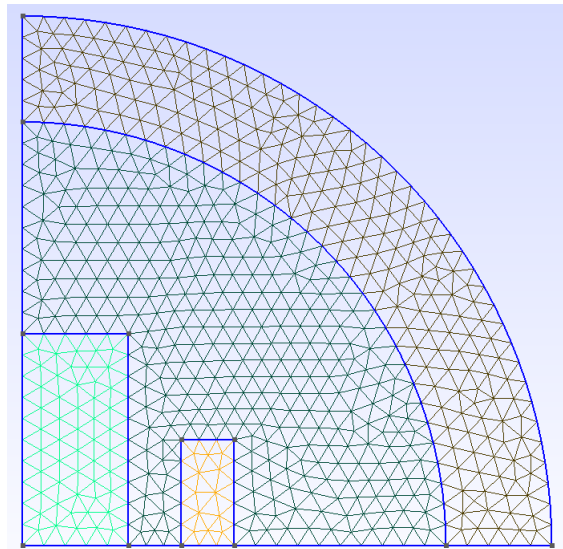


FIGURE 2 – Maillage de la structure

Ainsi pour raffiner le maillage, on peut jouer sur le paramètre de densité de maillage m qu'on a défini et qui est modifiable directement depuis le menu graphique de ONELAB.

1.1 Formulation forte :

Compte-tenu des éléments évoqués à propos de notre structure, on utilisera ici une formulation de type magnétostatique :

$$\begin{cases} \text{rot}(H) = J \\ \text{div}(B) = 0 \\ B = \mu H \end{cases}$$

On :

$$\begin{aligned} \text{rot}(H) &= J \\ \implies \text{rot}\left(\frac{B}{\mu}\right) &= J \end{aligned}$$

Or le potentiel vecteur magnétique A tel que : $B = \text{rot}(A)$, ce qui implique que :

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot}(A)\right) = J$$

En exploitant l'identité suivante :

$$\text{rot}(\text{rot}(A)) = \text{grad}(\text{div}A) - \Delta A$$

Et la condition de jauge $\text{div}(A) = 0$, on trouve la formulation forte de notre problème, nous obtenons l'équation de Poisson magnétostatique :

$$\Delta A = -\mu J$$

La densité surfacique de courant J au niveau de la bobine inductrice est constante de valeur $4000A.m^{-2}$

1.2 Conditions aux limites :

En fonction de la formulation du problème, il existe deux types de conditions aux limites possibles :

- **Conditions de Dirichlet ($A(x=0)=0$)** : il y a anti-symétrie des sources par rapport à l'axe des y.
- **Conditions de Neumann ($\frac{\partial A}{\partial y}(y=0) = 0$)** : il y a symétrie (source+dispositif) par rapport à l'axe des x.

En effet, on a bien trouvé les résultats prévus :

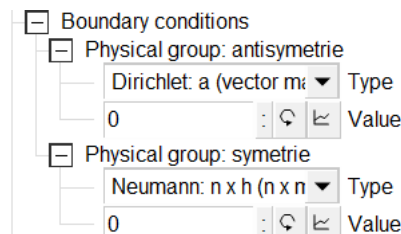


FIGURE 3 – Conditions aux limites

Ainsi la condition aux limites de l'arc extérieur c'est de Dirichlet, c'est la même que celle du groupe physique antisymétrie (on a fusionné la frontière en bas avec celle de l'arc extérieur dans le même groupe physique antisymétrie).

1.3 Formulation faible :

On a :

$$\Delta A = -\mu J$$

On tient en compte les symétries, le vecteur potentiel est suivant z, ce qui implique que :

$$\Delta A_z = -\mu J_z$$

Pour passer à la formulation faible, on introduit l'espace :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \quad t.q \quad \partial_i v \in L^2(\Omega) \quad et \quad v = 0 \quad sur \quad \partial\Omega\}$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, on multiplie la formulation forte par une fonction test v et on intègre sur Ω , on trouve :

$$\int_{\Omega} (\Delta A_z) \cdot v d\Omega = - \int_{\Omega} \mu J_z \cdot v d\Omega$$

Or d'après la formule de Green :

$$\int_{\Omega} (\Delta A_z) \cdot v dx = - \int_{\Omega} \nabla A \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial A}{\partial n} \cdot v d\sigma$$

Or $v \in H_0^1(\Omega)$, donc :

$$\int_{\Omega} (\Delta A_z) \cdot v dx = - \int_{\Omega} \nabla A \cdot \nabla v dx$$

D'où, la formulation faible de notre problème :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} \nabla A_z \cdot \nabla v dx dy = \int_{\Omega} \mu J_z \cdot v dx dy$$

2 Modèle éléments finis :

On pourra s'appuyer sur les modèles interactifs du répertoire "templates" de l'archive de ONELAB pour résoudre ce problème. On charge le fichier Interactive.pro, et on sélectionne ensuite le modèle "magnétostatique" pour mettre au point le modèle éléments finis.

2.1 Influence de la condition à l'infinie :

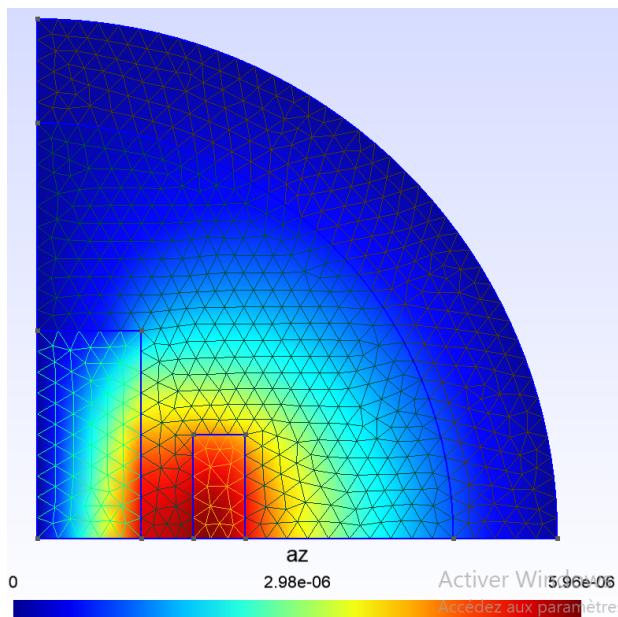


FIGURE 4 – Simple couche d'air (Linear)

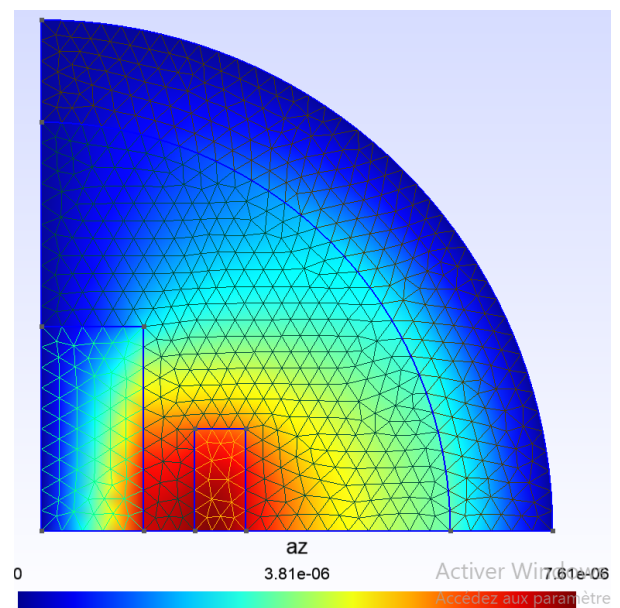


FIGURE 5 – Condition à l'infinie (infinite air shell)

On observe une déformation du potentiel vecteur du champ magnétique ainsi qu'une augmentation de sa valeur. Ainsi si on change la valeur du rayon de la couche d'air r_{int} on observe qu'il n'y a pas un grand impact du rayon de la couche d'air sur le potentiel vecteur.

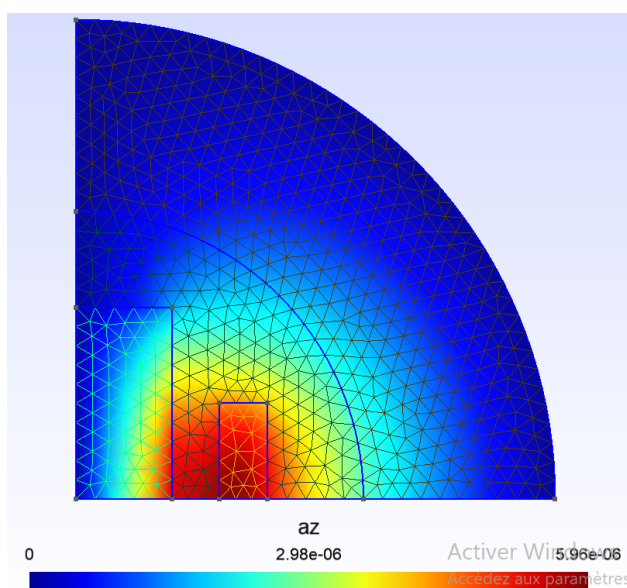


FIGURE 6 – Pour $r_{int} = 0.15$ (linear)

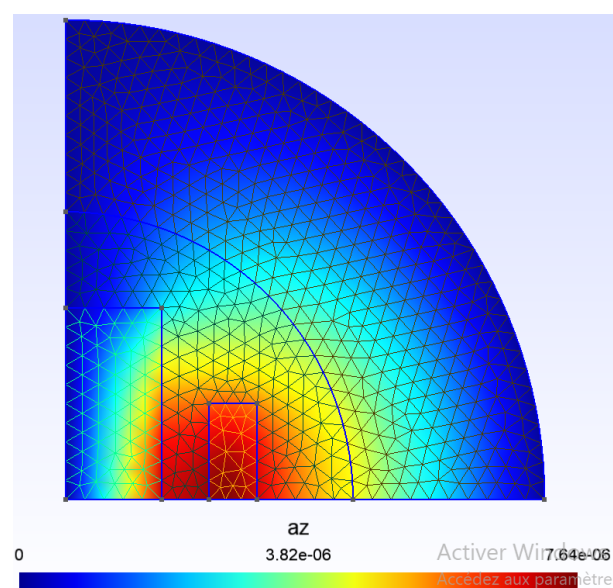


FIGURE 7 – Pour $r_{int} = 0.15$ (infinite air shell)

2.2 Influence de μ_r dans le noyau magnétique :

On fait varier la perméabilité magnétique dans le noyau magnétique afin d'observer leur impact sur les champs, on trouve les résultats suivants :

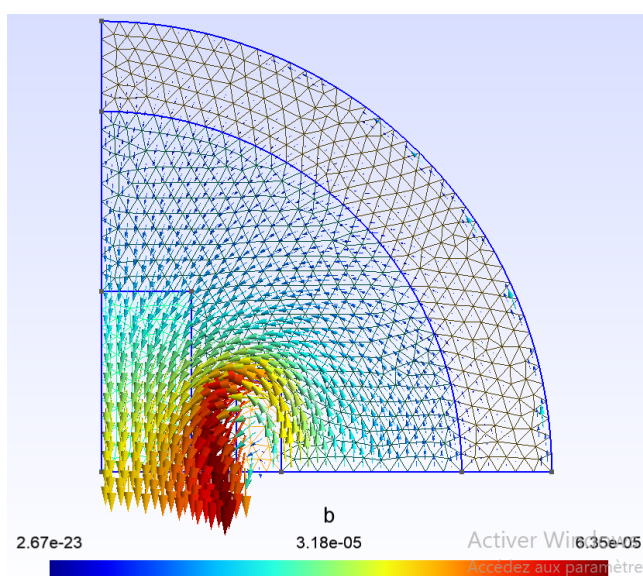


FIGURE 8 – Le champ magnétique B pour $\mu_r = 1H.m^{-1}$

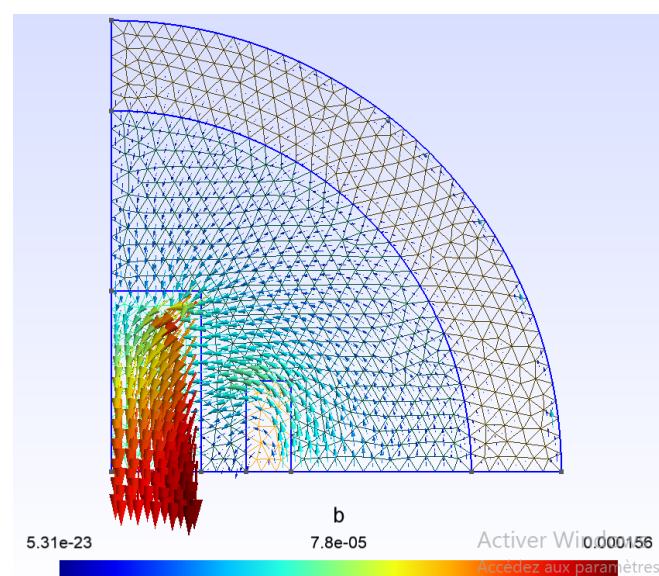


FIGURE 9 – Le champ magnétique B pour $\mu_r = 100H.m^{-1}$

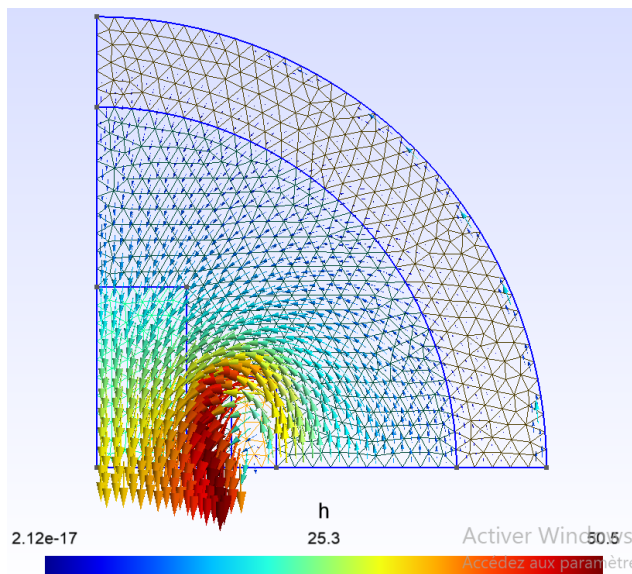


FIGURE 10 – Le champ d'excitation magnétique H pour $\mu_r = 1H.m^{-1}$

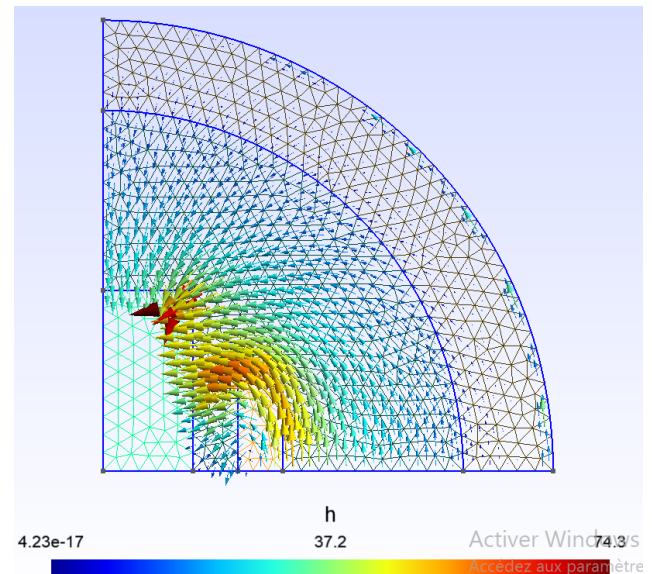


FIGURE 11 – Le champ d'excitation magnétique H pour $\mu_r = 100H.m^{-1}$

On travaille dans le régime linéaire, on observe que les champs sont particulièrement élevés lorsque la perméabilité magnétique est également très élevée. Pour une perméabilité magnétique faible cela provoque un éloignement des lignes de flux au contraire d'une perméabilité magnétique grande qui concentre le flux magnétique.

2.3 Problème axi-symétrique :

Le modèle interactif permet de passer facilement d'un problème 2d plan à un problème axi-symétrique.

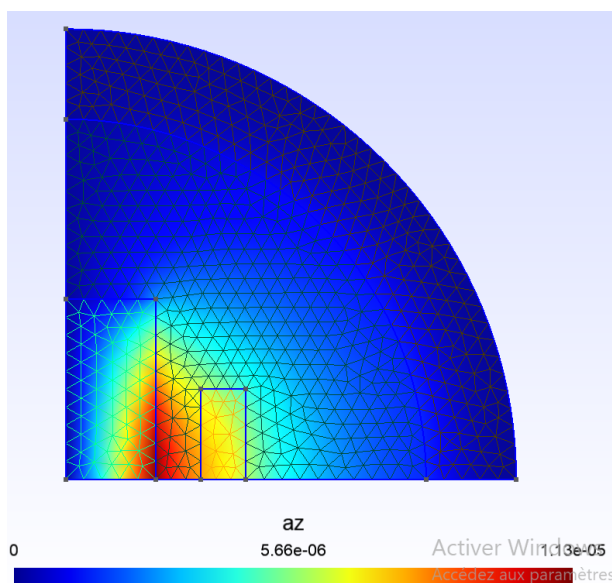


FIGURE 12 – Potentiel vecteur du champ magnétique A (modèle axisymétrique)

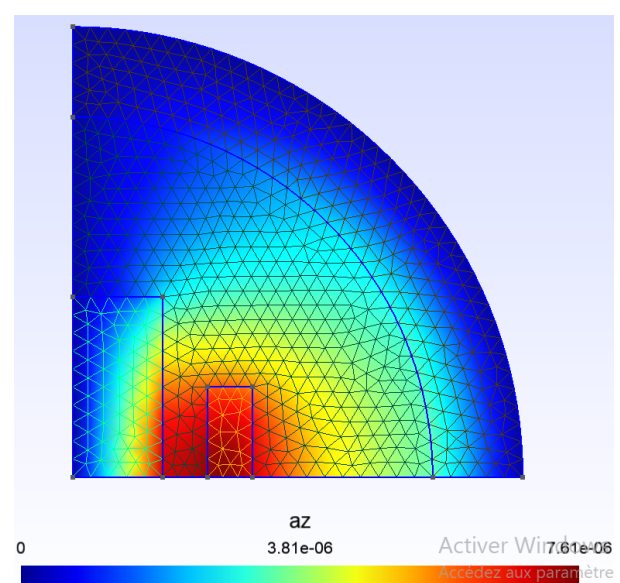


FIGURE 13 – Potentiel vecteur du champ magnétique A (modèle 2D plan)

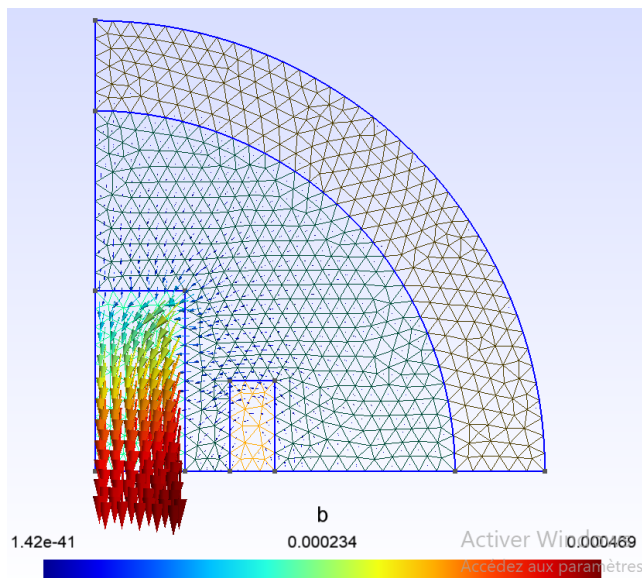


FIGURE 14 – L'induction magnétique B (modèle axisymétrique)

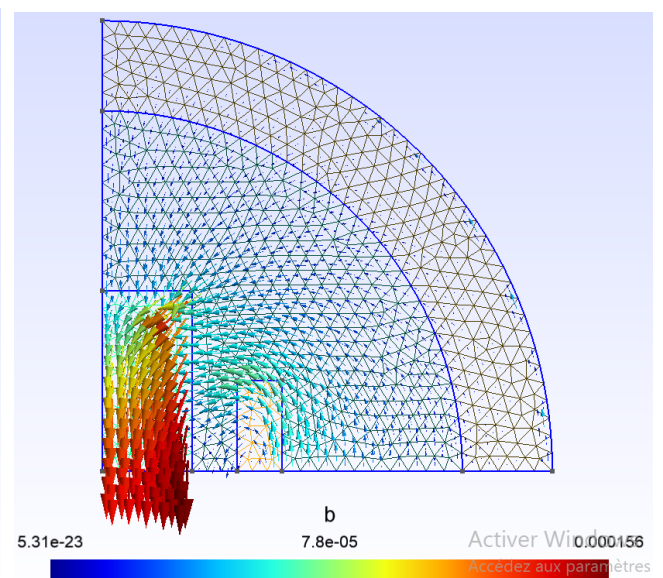


FIGURE 15 – L'induction magnétique B (modèle 2D plan)

On remarque que les lignes de champs sont canalisées au niveau du noyau magnétique pour le modèle axisymétrique et que la valeur du champ magnétique est plus importante au niveau de ce dernier, alors qu'elle est presque nulle en dehors. Le flux est très concentré dans le matériau magnétique. Le flux crée par la bobine circule donc en totalité dans le noyau.

Les modèles axisymétriques 2D représentent une tranche du modèle 3D réel qui, en pivotant autour de l'axe Y du repère cartésien de référence, devient la structure 3D d'origine.

2.4 La non linéarité du noyau magnétique :

On teste "SteelSimpleAnalytic" qui est un modèle non-linéaire proposée pour le noyau magnétique.

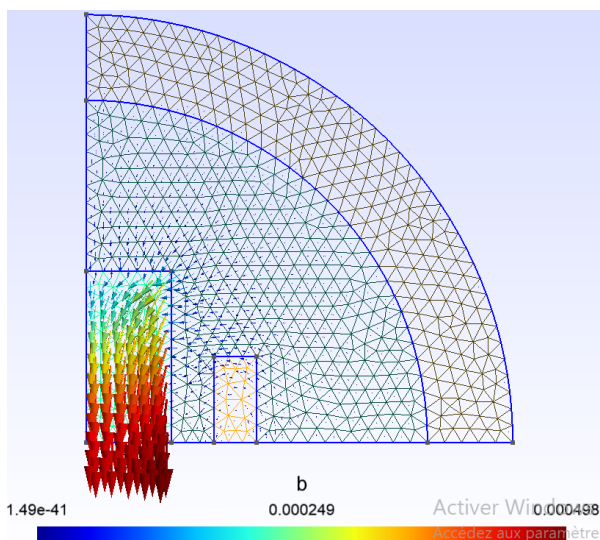


FIGURE 16 – L'induction magnétique B (modèle non linéaire)

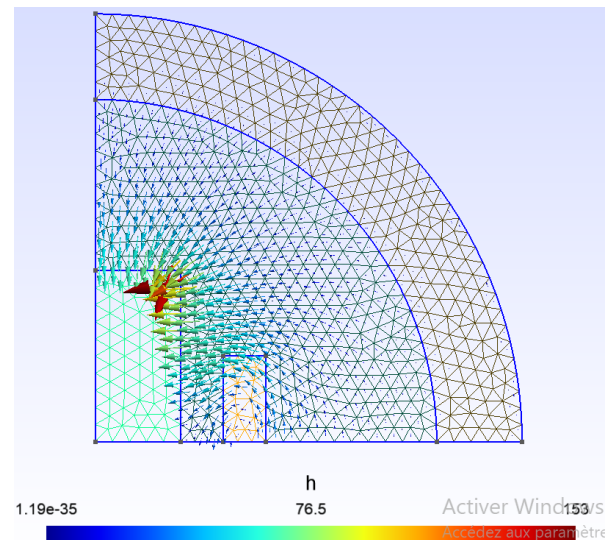


FIGURE 17 – Le champ d'excitation magnétique H (modèle non linéaire)

On ne peut plus tenir compte de la linéarité du matériau (μ_r n'est pas constant)

3 Conclusion :

Ce bureau d'études nous a permis de se familiariser avec le logiciel ONELAB qui permet de lier différents outils pour construire des modèles numériques par éléments finis afin qu'on puisse modéliser notre structure d'électro-aimant à l'aide du mailleur Gmsh et du solveur éléments finis GetDP. Ainsi, on a pu changer différents paramètres afin d'observer leurs impacts sur les champs que ce soit les conditions aux limites, la perméabilité magnétique ou la non linéarité du noyau magnétique.