



ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ÉLECTROTECHNIQUE, D'ÉLECTRONIQUE,
D'INFORMATIQUE,
D'HYDRAULIQUE ET DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

Étude du Bruit dans les moteurs électriques

BUREAU D'ÉTUDES

Table des matières

1	Introduction	3
2	Origine du bruit dans les moteurs électriques	3
2.1	Source de bruit d'origine mécanique :	4
2.2	Source de bruit d'origine aéraulique :	4
2.3	Source de bruit d'origine électromagnétique :	5
2.3.1	Forces de Maxwell	5
2.3.2	Forces de Laplace	5
2.3.3	Forces Magnétostrictives	6
2.4	Comparaison des différentes sources de bruit :	6
3	Recherche de la solution Analytique	8
4	Simulation de la solution Analytique	11
4.1	Solution sur une direction	11
4.2	Solutions en 2D	12
4.3	Solutions en 3D	13
4.4	Calcul du bruit équivalent	15
5	Résolution par la méthode intégrale	17
5.1	Résolution Analytique	17
5.2	Solution Numérique	19
5.3	Étude du temps de Compilation	20
6	Résolution par la méthode des différences finies	21
6.1	Résolution analytique	21
6.2	Résolution numérique	25
6.3	Étude du temps de compilation	26
7	Conclusion	27

1 Introduction

Durant tout le long du semestre nous avons étudié le fonctionnement du bruit et son origine dans les moteurs électriques. Définissons dans un premier temps ce qu'est le bruit :

Le bruit est une vibration mécanique qui se propage dans l'air. En fonction de la nature du milieu (présence de paroi par exemple), le bruit peut être réfléchi, transmis ou absorbé comme dans les ondes électromagnétiques. L'étude du bruit s'avère être analogue à une étude d'onde en utilisant le d'Alembertien, mais au lieu du champ électrique ou magnétique, on s'intéressera dans l'acoustique à la pression de l'air qui est la grandeur principale à étudier pour ce type d'étude. C'est en effet de la pression acoustique que nous allons principalement étudier tout le long de ce projet.



2 Origine du bruit dans les moteurs électriques

Le niveau de bruit global d'une machine électrique provient de trois sources principales :

- le bruit d'origine mécanique
- le bruit d'origine aéro-dynamique ou hydro-dynamique
- le bruit d'origine électromagnétique

Les différentes sources de bruit sont résumées dans ce schéma :

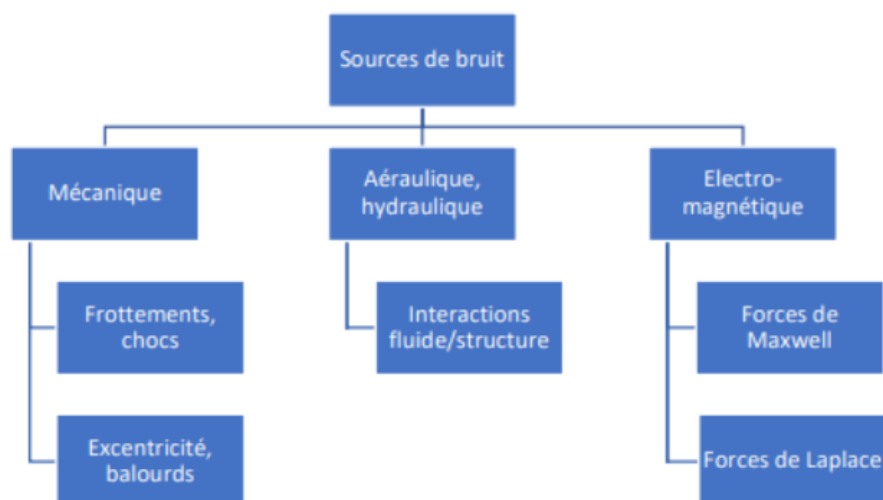


FIGURE 1 – Sources de bruit dans les machines électriques

2.1 Source de bruit d'origine mécanique :

Le bruit mécanique est principalement dû à des éléments auxiliaires, c'est à dire des frottements, des chocs liés aux paliers et des vibrations de torsion de l'arbre. Il est aussi généré par des balourds mécaniques, des déséquilibres ou des mauvais alignements du stator et du rotor dû à un mauvais montage.

Pour des vitesses de rotation basses, le niveau de bruit d'origine mécanique est généralement important .

Définition du palier : C'est un élément de la machine électrique utilisé pour guider les arbres en rotation. Il existe deux grandes familles de paliers : palier lisse et palier à roulement. Dans le premier, l'arbre prend un appui sur un coussinet et est séparé de celui-ci par un film lubrifiant ; dans le second, des corps roulant (billes ou rouleaux) séparant la bague en rotation de l'alésage extérieur.

Définition du balourd mécanique : Le phénomène de balourd mécanique est lié à une répartition non homogène de la masse autour de l'axe de rotation : L'axe d'inertie de l'arbre n'est pas confondu avec l'axe de rotation. Différents types de balourds peuvent être identifiés :

→ **Balourd statique :** L'axe d'inertie de l'arbre est parallèle à l'axe de rotation.

→ **Balourd de couple :** L'axe d'inertie n'est plus colinéaire à l'axe de rotation, les deux axes formant un angle.

→ **Balourd dynamique :** Il s'agit d'une combinaison des deux premiers et correspond au cas le plus courant.

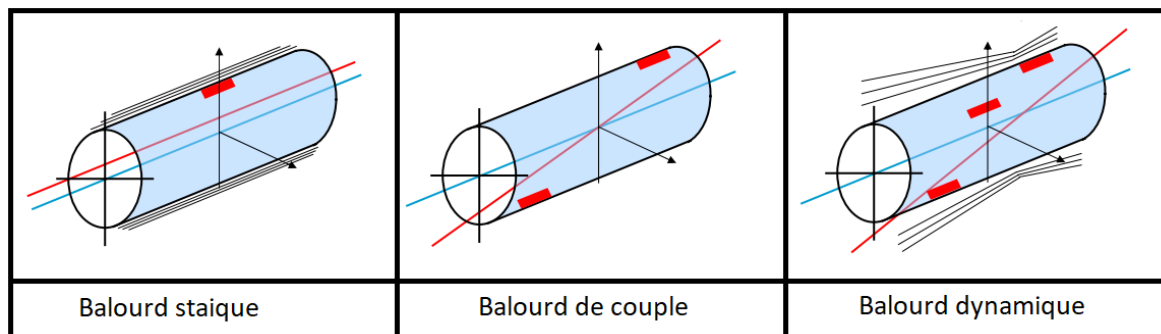


FIGURE 2 – Différents types de balourd

2.2 Source de bruit d'origine aéraulique :

Ce bruit est créé par l'écoulement de l'air au travers de la structure de la machine (le rotor et l'arbre) : **Interactions fluide/structure**.

En général, le bruit généré par le système de refroidissement est très important comparé au bruit généré par les paliers lubrifiés (roulements, coussinets) et les encoches.

2.3 Source de bruit d'origine électromagnétique :

Ce bruit est généré à cause des efforts électromagnétiques. Il est riche en harmonique ce qui rend le phénomène de résonance plus susceptible à se manifester. Ces efforts sont dues aux : forces de Maxwell, forces de Laplace et les forces dues à la magnétostriction.

2.3.1 Forces de Maxwell

Ces efforts s'appliquent aux interfaces entre l'air et les parties ferromagnétiques de la machine. Les composantes radiale et tangentielle des pressions magnétiques sont obtenues à partir du tenseur électromagnétique de Maxwell. Pour notre étude, c'est principalement la composante radiale qui influencera le bruit.

$$\begin{cases} \sigma_{rad}(t, \theta) = \frac{B_{rad}(t, \theta)^2 - B_{tan}(t, \theta)^2}{2\mu_0} \\ \sigma_{tan}(t, \theta) = \frac{B_{rad}(t, \theta) \times B_{tan}(t, \theta)}{\mu_0} \end{cases}$$

où B_{rad} et B_{tan} , fonctions du temps t et de l'espace θ , sont respectivement l'induction radiale et tangentielle dans l'entrefer, et μ_0 la perméabilité du vide.

À l'aide d'une transformée de Fourier en 2D, nous pouvons obtenir la pression radiale :

$$\sigma_{rad}(t, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_{m,n} \cos(n\omega_s t - mp\theta + \phi_{m,n})$$

où ω_s est la pulsation synchrone, p le nombre de paires de pôles, n l'ordre temporel, m l'ordre spatial, $\sigma_{m,n}$ l'amplitude de l'harmonique spatio-temporel et $\phi_{m,n}$ sa phase.

Pour obtenir la force magnétique correspondante à la pression radiale, il faut l'intégrer sur les surface d'applications, c'est à dire le stator. La composante radiale de cette force entraîne donc la déformation radiale du stator et les harmoniques du stator provoquent sa flexion car elles vont entrer en résonance. C'est ces contraintes qui font vibrer le stator et donc émet du bruit aux mêmes fréquences.

La composante tangentielle de la même manière peut provoquer une déformation des dents statoriques et donc générer aussi du bruit.

On remarque que la pression radiale dépend à la vitesse synchrone ω_s , ainsi la vitesse de rotation du stator va l'influencer la flexion du stator et donc le bruit généré.

2.3.2 Forces de Laplace

Ces efforts s'appliquent à un conducteur parcouru par un courant dès lors qu'il est soumis à un champ magnétique :

$$\vec{dF} = I \vec{dl} \times \vec{B}$$

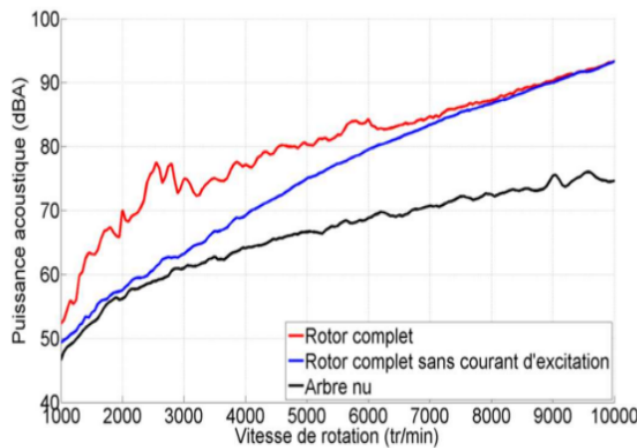
En général dans le cas des machines électriques, ces forces s'exercent sur le bobinage statorique. Ces forces étant proportionnelles au courant, alors selon le type de machine utilisé elles auront plus ou moins un impact sur le bruit généré. Si l'intensité est trop faible alors la force sera trop faible pour provoquer des vibrations des tôles du stator.

2.3.3 Forces Magnétostrictives

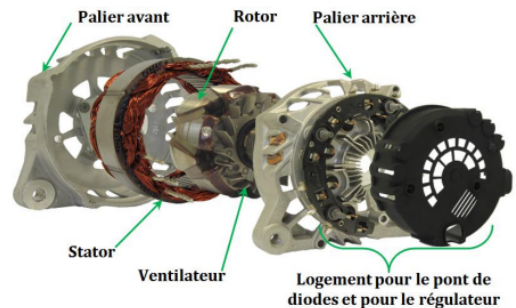
Les forces magnétostrictives résultent de l'apparition de contraintes mécaniques locales au sein d'un matériau ferromagnétique, c'est à dire la culasse rotorique et statorique, sous un champ magnétique. Cette contrainte provoque des déformations locales du type contractions et dilatations, qui à une amplitude et une fréquence suffisantes, peuvent faire vibrer le matériau et donc générer du bruit. Ce bruit est moins important que celui généré par la force de Maxwell pour les moteurs électriques. Car le champs magnétique est plus concentré dans l'entrefer que dans les culasses. De plus le fer n'a pas tendance à se déformer sous l'effet d'un champ magnétique et les culasses sont principalement composées de fer dans la majorité des moteurs électriques.

2.4 Comparaison des différentes sources de bruit :

Afin de comparer la contribution de chaque source de bruit, on se base sur des mesures acoustiques prises pour un alternateur à griffes avec une large plage de vitesse.



(a) Mesure du niveau de puissance acoustique sur un alternateur à griffes



(b) Alternateur à griffes

Grâce à ce graphique nous apprenons effectivement que ces différentes forces n'influent pas toutes de la même manière le bruit du moteur. En effet, il y a une dépendance de la pression selon la vitesse de rotation, ce qui était déjà visible dans l'expression de la pression radiale créée par les forces de Maxwell.

Dans notre étude, nous avons décidé de nous focaliser uniquement sur une source de bruit : les forces électromagnétiques. Nous avons fait ce choix là en nous basant sur les vitesses de rotation les plus fréquentes, qui sont autour de 3000 tr/min pour une voiture électrique. À cette vitesse de rotation nous pouvons effectivement voir que la pression engendrée par les forces électromagnétiques est bien supérieure à celle causée par les forces aérauliques.

Il est également flagrant que le bruit mécanique est le bruit le plus important pour toutes vitesses de rotation. Nous n'avons cependant pas décider de l'étudier car il est propre à chaque machine et bien moins facilement modélisable.

Avant de commencer notre recherche de solution nous allons émettre un certain nombre d'hypothèses sur le stator étudié :

- Nous considérons un stator aux surfaces lisses et parfaitement cylindrique ;
- Nous considérons qu'il est également infini dans sa longueur, pour ainsi obtenir une invariance selon l'axe z ;
- Nous prenons en compte uniquement les ondes radiales, c'est à dire que nous supposons qu'il n'y a pas d'ondes stationnaire ou d'ondes convergentes, cette hypothèse étant principalement engendrée par celle sur la géométrie du stator (pour un stator à encoche nous n'aurions pas pu négliger la composante tangentielle) ;
- Nous supposons aussi que le stator a une vitesse de rotation nulle, il entre uniquement en vibration ;
- Nous nous plaçons en régime harmonique.

3 Recherche de la solution Analytique

Nous allons à présent chercher une solution analytique nous permettant de représenter la pression de l'air selon la force électromagnétique du moteur.

Pour cela, nous émettons quelques hypothèses sur le fluide étudié, l'air dans notre cas. En effet, nous effectuons l'approximation que l'air est un fluide parfait, possède une viscosité nulle et n'entraîne pas de conduction thermique.

L'acoustique linéaire nous fournit deux équations vérifiées par la pression :

- l'équation de conservation de la quantité de mouvement par unité de volume (ρv) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot v_i) + \text{div}(\rho v_i) \cdot v = f_i + \text{div}(\sigma_i) \quad (1)$$

où f correspond aux forces de volume et σ au tenseur des contraintes.

- l'équation de conservation de la masse par unité de volume :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot v) = q \quad (2)$$

q étant le débit massique par unité de volume

En considérant que le fluide est initialement au repos et qu'il n'y a pas de sources, ces équations deviennent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \cdot \text{div}(v) = 0 \quad (3)$$

et

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad}(p) = 0 \quad (4)$$

De plus, avec l'équation d'état thermodynamique et nos hypothèses de fluide parfait, nous avons :

$$p = c^2 \rho$$

En combinant ces équations, nous obtenons l'équation sur la pression acoustique qui correspond à une équation d'onde :

$$\Delta p(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

Afin de résoudre ce problème nous considérons un modèle 2D de vibration du stator, ainsi le stator en 2D correspond à un cylindre infini, nous considérons alors le problème invariant selon z . Cette hypothèse est seulement acceptable lorsque que nous nous plaçons en face du stator.

Les coordonnées cylindriques semblent les plus adaptées à notre problème, en exprimant alors le Laplacien en cylindrique, l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

En analogie avec les problèmes d'électromagnétisme, nous allons utiliser l'hypothèse de séparation des variables afin d'obtenir 4 équations différentes. Nous avons alors ces 4 équations à résoudre :

$$\frac{\partial p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = 0, \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

La solution est alors sous la forme :

$$p(r, \theta, z, t) = e(t).f(\theta).h(z).g(r)$$

Étant donné que nous recherchons une solution harmonique pour l'équation dépendant de t et qu'on ne souhaite pas que la solution selon z diverge, on obtient alors les solutions suivantes :

$$e(t) = e^{j\omega t}, f(\theta) = D_{1m}\cos(m\theta) + D_{2m}\sin(m\theta), h(z) = C_1e^{-jkz} + C_2e^{jkz}$$

m représentant les différents modes de vibration présents dans la structure.

Selon la composante r, on peut reconnaître une équation de Bessel. Or, une solution linéaire de cette équation est la fonction de Hankel. De plus, nous ne considérons qu'un seul type d'onde, les ondes progressives divergentes, car comme précisé dans nos hypothèses, nous négligeons les ondes stationnaires et progressives convergentes.

Cela nous donne donc finalement :

$$g(r) = B_m.H_m^{(2)}(k.r) \quad (6)$$

Puisque notre problème est invariant selon z, nous pouvons également négliger le terme dépendant de z.

Nous avons alors une expression de la pression donnée par la somme sur ses modes :

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} f(\theta).g(r).e(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i.\cos(i\theta).H_i^{(2)}(k.r).e^{j\omega_i t} \quad (7)$$

Maintenant que nous avons une expression générale de la pression, nous pouvons chercher des conditions limites afin de déterminer le terme d'amplitude pm .

Cherchons une première condition en $r=a$, a étant le rayon du stator. En ce point, nous pouvons conjecturer que la vitesse de l'air à la surface du stator est égale à la vitesse de vibration du stator.

Nous définissons donc la vitesse stationnaire de déplacement radial de la surface du stator :

$$\hat{v}(\theta, t) = \sum_i v_i.e^{j\omega_i t}.\cos(i\theta) = \sum_i v_i\phi_i(t)V_i(\theta)$$

avec $\phi_i(t) = e^{j\omega_i t}$ et $V_i = \cos(i\theta)$.

Ainsi, en repartant de l'équation (4), nous pouvons obtenir la relation suivante entre le champ de pression et cette vitesse :

$$-j\omega\rho_0\hat{v} = \frac{\partial\hat{p}}{\partial r} \quad (8)$$

Cette équation constitue donc notre condition limite en $r=a$.

Nous pouvons également établir une condition limite en r tendant vers l'infini. En effet la condition de rayonnement de Sommerfeld est cohérente dans le cadre de notre étude. Nous avons donc :

$$\hat{p}(r, \theta) \approx \frac{1}{\sqrt{kr}} e^{-jkr} \quad (9)$$

Nous pouvons donc maintenant chercher la solution à implémenter. Considérons premièrement un unique mode m . En appliquant la condition limite en $r=a$ à un mode de l'équation (9), nous obtenons pour $r=a$:

$$p_m = -\frac{j\rho_0 \cdot c \cdot v_m}{H_m^{(2)}(k \cdot a)} \quad (10)$$

Ainsi, en remplaçant p_m dans l'équation (9) par son expression, le champ de pression pour un mode revient à :

$$\hat{p}(r, \theta, t) = -\frac{j\rho_0 \cdot c \cdot v_m}{H_m^{(2)}(k \cdot a)} \cdot \cos(m\theta) \cdot H_m^{(2)}(k \cdot r) \cdot e^{j\omega_m t} \quad (11)$$

C'est cette solution là que nous allons implémenter sur matlab. Nous allons étudier mode par mode la solution afin de comprendre son fonctionnement.

4 Simulation de la solution Analytique

4.1 Solution sur une direction

Afin de simplifier la visualisation du phénomène, nous prendrons une fréquence de vibration du stator à 12 Hz pour un rayon de stator $a = 0.1m$. Ceci n'est représentatif de la réalité car un stator n'a pas de fréquence de résonance de 12 Hz.

Dans un premier temps, afin de comprendre la solution il est intéressant de l'afficher dans une seule direction ($\theta = 0$) avec le mode $m=0$. Car en effet ce mode influence principalement la solution, nous détaillerons ce résultat dans la suite.

Nous affichons alors la pression acoustique sur une direction en fonction de la distance r qui n'est pas représentative de la réalité pour cette simulation, car un moteur réel ne vibre pas à une fréquence de 12 HZ.

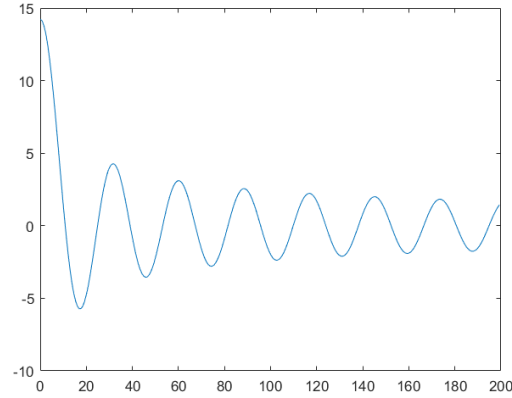


FIGURE 4 – Evolution de la pression au mode $m=0$ sur la direction $\theta = 0$

Nous pouvons observer un pic de pression acoustique proche du stator, ce résultat est cohérent car c'est proche du stator qu'il y a le plus de pression acoustique donc plus de bruit. Nous remarquons aussi une diminution de la pression acoustique en s'éloignant du stator ce qui est aussi logique car en s'éloignant du stator le bruit diminue. Cette diminution va ensuite peu à peu converger vers une sinusoïde, ceci est dû à nos hypothèses mais normalement la pression acoustique à l'infini est sensé être équivalente à :

$$\check{p}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{k.r}} e^{-jk.r}$$

Maintenant que nous avons une idée sur le fonctionnement de la solution, il est intéressant d'afficher la solution globale dans un espace définie pour différents modes.

4.2 Solutions en 2D

En analogie avec les problèmes d'électromagnétisme, la solution est définie principalement par les 6 premiers modes. Afin de se rendre compte de ce phénomène visualisons dans un premier temps la pression acoustique en 2D pour les 6 premiers modes en fonction de la distance.

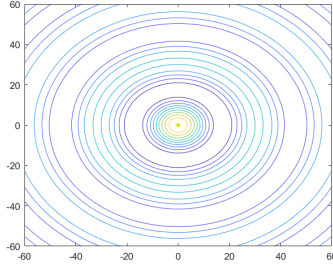
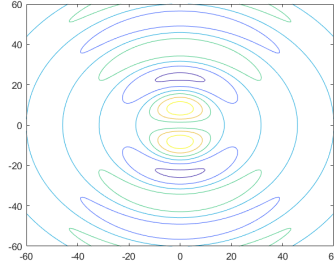
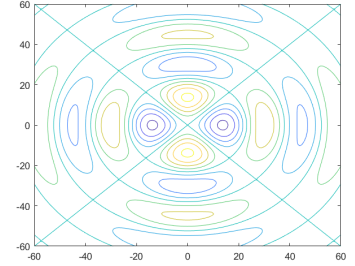
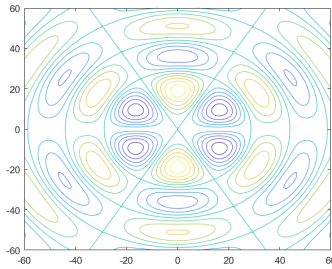
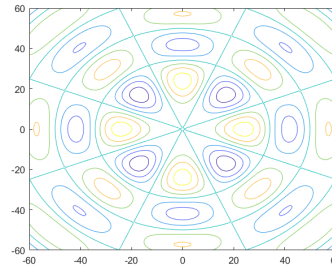
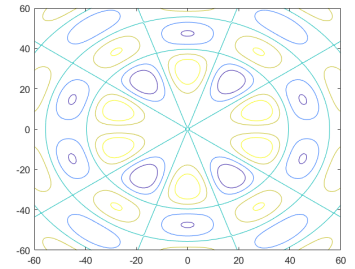
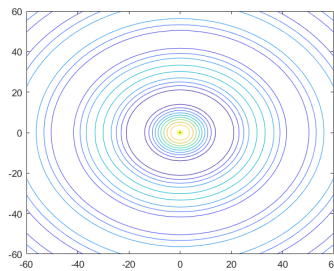
(a) Solution 2D pour $m=0$ (b) Solution 2D pour $m=1$ (c) Solution 2D pour $m=2$ (a) Solution 2D pour $m=3$ (b) Solution 2D pour $m=4$ (c) Solution 2D pour $m=5$ 

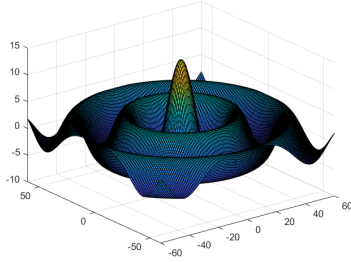
FIGURE 7 – Somme des 6 premiers modes en 2D

Lorsque la vibration est de rang 0, on constate que le cylindre rayonne omni-directionnellement, lorsque le mode est de rang 1 le cylindre rayonne comme un dipôle avec une direction de rayonnement privilégiée. Nous remarquons ainsi que le nombre de directions de rayonnement privilégiées augmente avec le mode.

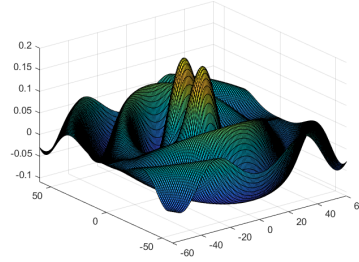
De plus, nous remarquons que pour la somme des 6 premiers modes, le mode $m=0$, influence en majorité la direction de propagation.

4.3 Solutions en 3D

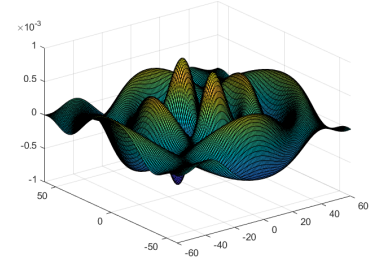
Affichons la pression acoustique en 3D en fonction de la distance :



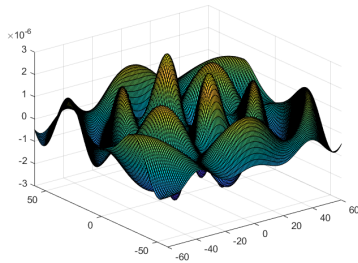
(a) Solution 3D pour $m=0$



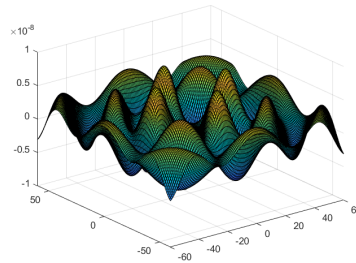
(b) Solution 3D pour $m=1$



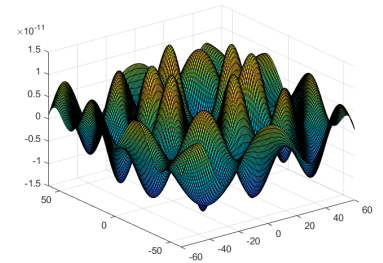
(c) Solution 3D pour $m=2$



(a) Solution 3D pour $m=3$



(b) Solution 3D pour $m=4$



(c) Solution 3D pour $m=5$

Nous pouvons facilement conclure que le mode $m=0$ influence principalement la forme de la solution, mais il ne faut pas négliger l'impact des 5 modes suivants. L'ordre de l'amplitude du mode $m=0$ est de 10^1 , l'ordre du mode $m=1$ est 10^{-1} et les autres modes passent rapidement à 10^{-3} et 10^{-6} .

Ainsi même si le mode 0 et 1 ont la plus grande influence, il faut quand même ne pas négliger les 4 modes suivants. Il est intéressant d'afficher la somme des 6 premiers pour confirmer notre affirmation :

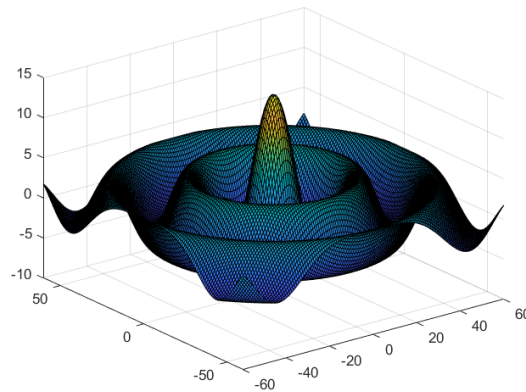


FIGURE 10 – Somme des 6 premiers modes en 3D

Nous pouvons conclure que le mode $m=0$ influence principalement la solution et que les modes suivants ont une influence plus faible.

Regardons l'influence sur une distance plus lointaine de la solution :

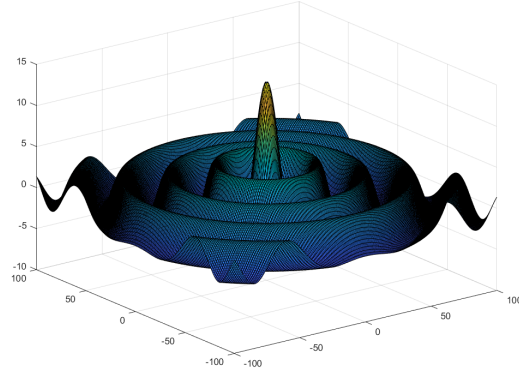


FIGURE 11 – Mode $m=0$

Comme dit précédemment nous pouvons remarquer qu'à l'infini, la solution se propage dans toutes les directions comme une sinusoïde.

4.4 Calcul du bruit équivalent

Il est maintenant intéressant de calculer l'équivalent en décibel pour se donner un ordre d'idée du bruit émis par ce moteur. Pour cela nous prendrons une fréquence de 11 kHz de vibration du stator, car à cette fréquence le stator entre en résonance dans la majorité des moteurs électrique et donc il vibre. En réalité c'est l'étude des fréquences de résonance du stator qui nous intéresse car ce sont les fréquences que les fabricants de moteur souhaitent éviter pour minimiser le bruit. A cette fréquence le moteur est censé faire beaucoup plus de bruit qu'en fonctionnement normal.

Afin de se rapprocher un maximum de la réalité, puisque nous avons augmenté significativement la fréquence nous devons augmenter la discrétisation du milieu où nous prenons en compte la solution. Nous prenons un maillage de 1001×1001 , le rendu en 3D est alors illisible à cause du trop grand nombre de points. Mais nous pouvons afficher le contour de la pression en fonction de la distance :

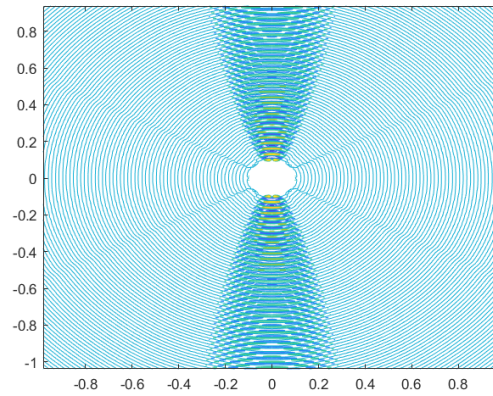


FIGURE 12 – Contour de la pression à moins d'un mètre du stator

L'abscisse et l'ordonnée représente la distance réelle autour du stator.

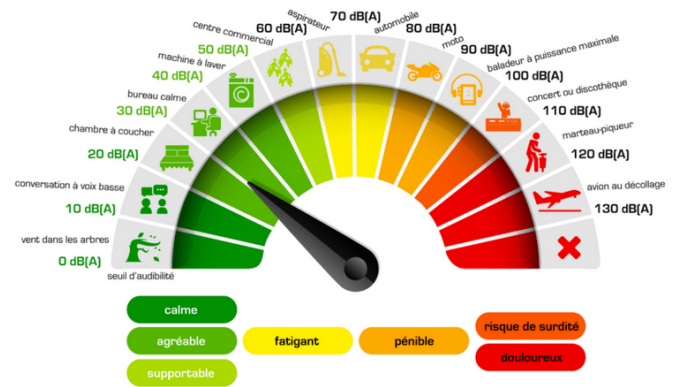
En augmentant la fréquence nous avons augmenté l'influence des modes suivants le mode 0, en particulier le mode 1. En effet, nous remarquons que 2 directions sont privilégiées par le rayonnement de la pression acoustique même si en majorité le rayonnement est omni-directionnel.

Calculons maintenant l'équivalent en Décibel de la pression acoustique lorsque nous nous situons sur un carré de côté 5 m centré en 0 autour du stator qui est lui aussi centré en 0. Calculons l'équivalent en Db grâce à la relation :

$$L_p = 20 * \log\left(\frac{p_{rms}}{p_0}\right)$$

Avec p_{rms} (root mean square) la racine carrée de la moyenne au carré de la pression sur l'espace considéré. Et $p_0 = 2 * 10^{-5}$ P

Nous trouvons alors un bruit de 97.9 Db, ce bruit est très grand à cause de nos hypothèses. En effet, en réalité le stator n'est pas un cylindre infini. D'après le schéma ci-joint, en réalité le bruit d'une voiture dans sa globalité est de 70-80 Db mais notre grande valeur trouvée n'en est pas non plus moins cohérente car à 11KHz le stator entre en résonance. Ainsi il va vibrer plus fortement qu'en régime normal et donc le bruit est plus grand qu'en réalité. La résonance du stator est dû à une accélération de sa vitesse de rotation causée par un problème dans le moteur, car sa fréquence de vibration est liée à sa vitesse de rotation d'après les forces de Maxwell.



5 Résolution par la méthode intégrale

5.1 Résolution Analytique

Nous allons maintenant résoudre le problème numériquement, à l'aide de la méthode intégrale. Afin de retrouver les mêmes résultats que précédemment, les différentes hypothèses de simplifications seront les mêmes.

L'intérêt de la méthode intégrale pour notre problème est qu'il s'agit d'une résolution qui ne nécessite pas de condition à l'infini mais seulement des conditions sur une frontière. Le problème de rayonnement acoustique étant "non borné", il est alors intéressant d'utiliser cette méthode.

Nous avons considéré un modèle 2D de vibration de notre stator de longueur infinie pour simplifier nos calculs. Grâce à la méthode intégrale seule la condition sur le stator en $r=a$ nous est utile :

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial r} = -j\omega\rho_0\check{v} = -j\omega\rho_0\hat{v}\cos(m\theta)$$

Avec v , la vitesse stationnaire de déplacement radial de la surface du stator. Nous traitons le cas d'une seule fréquence ($i = m$) puis nous pourrions généraliser en utilisant les transformées de Fourier, mais nous ne le ferons pas car seul les premiers modes nous intéressent. La condition de frontière est ici une condition sur la dérivée de la pression.

Le théorème de représentation de la méthode intégrale est le suivant :

Pour un point $r' \notin \Gamma$ en dehors de la frontière du domaine (en dehors du stator dans notre cas $r > a$), le champ diffracté (p^d pour la pression diffracté) admet la représentation suivante :

$$\begin{aligned} p^d(r') &= \int_{\Gamma} \partial_{n_r} G(r', r) p^{tot}(r) d\gamma(r) - \int_{\Gamma} G(r', r) \partial_{n_r} p^{tot}(r) d\gamma(r) \\ &= D(p^{tot}(r')) - S(\partial_{n_r} p^{tot}(r')), r' \notin \Gamma \end{aligned}$$

où S est appelé opérateur de simple couche et D opérateur de double couche.

$$\begin{aligned} S(\phi(r)) &= \int_{\Gamma} G(r', r) \partial_{n_r} \phi(r) d\gamma(r) \\ D(u(r)) &= \int_{\Gamma} \partial_{n_r} G(r', r) u(r) d\gamma(r) \end{aligned}$$

$p^{tot}(r)$ correspond à la valeur au champs total de la pression, c'est à dire la pression sur la frontière et la pression diffusée.

G est appelé fonction de Green, dans notre cas l'équation décrivant le problème est une équation d'Helmholtz 2D. Ainsi G s'écrit sous la forme :

$$G(r', r) = G(r' - r) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k||r' - r||)$$

où $H_0^{(1)}$ est la fonction d'Hankel du premier type d'ordre 0.

Comme dit précédemment, la condition de frontière est une condition sur la dérivée de la pression, ainsi l'opérateur simple couche nous permet de résoudre le problème :

$$p^d(r') = - \int_{\Gamma} G(r', r) \partial_{n_r} p^{tot}(r) d\gamma(r)$$

Il nous faut maintenant déterminer le pseudo courant par simple couche qui nous permettra de calculer la pression diffusée, pour cela nous utilisons la condition à la frontière de la pression sur le stator et la discontinuité du potentiel simple couche à la traversée de la frontière :

$$\begin{cases} \lim_{r' \rightarrow \Gamma} \partial_{n_r}(S\phi) = -\frac{\phi}{2} + D_0^* \phi = (\frac{-I}{2} + D_0^*)\phi \\ \text{avec } D_0^* : \phi(r) \rightarrow \int_{\Gamma} \partial_{n_r} G(r', r) \phi(r) d\gamma(r) \end{cases}$$

La matrice $(\frac{-I}{2} + D_0^*)$ est déterminée grâce à une fonction D_{0p} sur matlab.

Comme dit précédemment la condition à la frontière en $(r=a)$ est :

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial r} = -j\omega\rho_0\check{v} = -j\omega\rho_0\hat{v}\cos(m\theta)$$

Nous appliquons la condition à la frontière pour le pseudo courant par simple couche :

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial r}|_{r=a} = \lim_{r' \rightarrow a} \partial_{n_r}(S\phi)$$

Nous obtenons

$$\Rightarrow -j\omega\rho_0\hat{v}\cos(m\theta) = (\frac{-I}{2} + D_0^*)\phi$$

Et donc :

$$\phi = -(\frac{-I}{2} + D_0^*)^{-1} j\omega\rho_0\hat{v}\cos(m\theta)$$

Maintenant que nous avons le pseudo courant nous pouvons déterminer la pression diffusée avec l'opérateur simple couche :

$$p^d(r') = - \int_{\Gamma} G(r', r) \phi(r) d\gamma(r)$$

Pour l'implémentation de cette résolution, il nous a fallu déterminer la matrice D_0^* qui correspond à l'intégrale sur Γ de la fonction de Green. La fonction D_{0p} sur matlab nous permet de calculer la matrice $(\frac{-I}{2} + D_0^*)$. De plus, nous avons une fonction S nous permettant, avec les coordonnées de la frontière et de l'espace où le problème est résolu, de calculer l'opérateur simple couche pour une fonction ϕ donnée.

Nous avons dû créer 2 discrétisations pour implémenter cette méthode :

- une discrétisation sur le cercle définissant la frontière (x, y) utilisé pour calculer la dérivée de l'opérateur simple couche et l'opérateur simple couche lui même. Le stator que nous définissons est un cercle de rayon 0.1 cm.
- Et une discrétisation décrivant l'espace où nous voulons résoudre le (x_0, y_0) qui est aussi utilisé dans l'opérateur simple couche pour obtenir la pression diffusée.

L'avantage de la résolution numérique par la méthode intégrale est le coût de stockage car en effet nous avons une matrice de dérivée simple couche complète de taille $N \times N$ avec N la discrétisation de la condition de frontière, c'est à dire dans notre exemple la surface du stator. Alors que pour une méthode de différences finies la matrice serait de taille $N^2 \times N^2$, même si cette matrice en différences finies comporte beaucoup de zéro, le coût de stockage est plus grand.

5.2 Solution Numérique

Maintenant que nous pouvons résoudre le problème autour du stator avec la méthode intégrale, il est intéressant de regarder la somme des 6 premiers modes et de vérifier que la solution est la même que celle donnée par la solution analytique. Pour cela nous reprenons la fréquence de 12 Hz afin d'avoir une solution lisible :

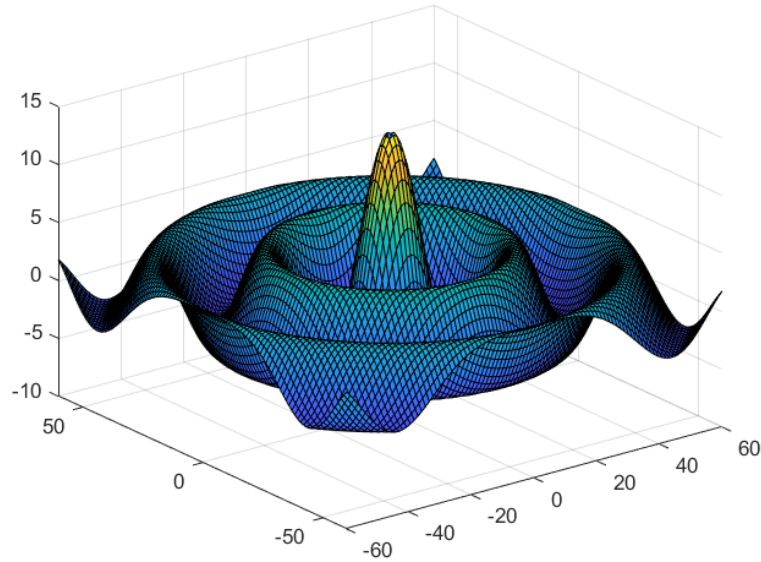


FIGURE 13 – Pression acoustique en fonction de la distance

Nous retrouvons la solution attendu, nous pouvons alors conclure que cette méthode numérique est plutôt fiable. Comme dit précédemment, cette méthode est moins coûteuse en stockage et en temps que les différences finies. De plus selon le schéma utilisé pour les différences finies, la convergence n'est pas forcément acquise, alors que pour la méthode intégrale la solution converge.

5.3 Étude du temps de Compilation

Il est maintenant intéressant d'étudier le temps de compilation en fonction des 2 discrétisations, pour cela nous calculerons le temps de compilation pour un seul mode ($m=0$). Ainsi nous obtenons le graphe suivant :

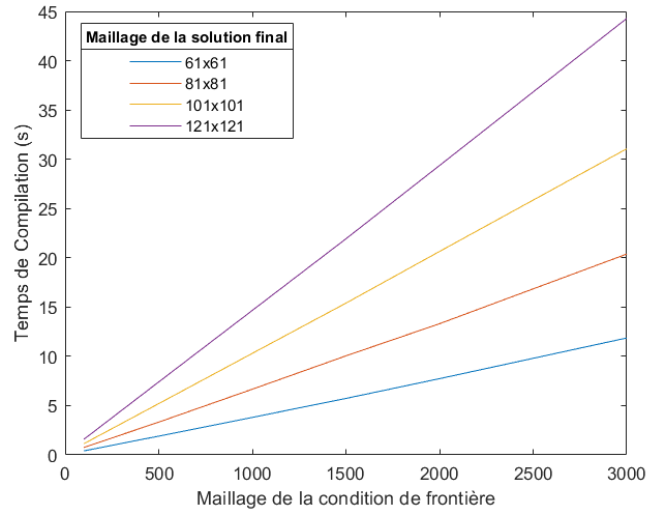


FIGURE 14 – Temps de compilation en fonction des discrétisations des maillages

En prenant en compte le fait qu'une matrice de taille $N \times N$ est créée, où N est le maillage de la condition de frontière. Il est alors plus intéressant de prendre un N plus faible et un maillage de la solution finale plus grand. Ainsi les maillages que nous avons adopté sont de 1500 pour la condition de frontière et 101x101 pour le maillage de l'espace de la solution finale.

6 Résolution par la méthode des différences finies

6.1 Résolution analytique

On résout le problème numériquement avec la méthode des différences finies. Ce problème est caractérisé par une condition au limite et une condition initiale définies comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p(M,t)}{\partial t^2} - c^2 \cdot \Delta p(M,t) &= 0 \\ p(., 0) &= p_{analytique}(., 0) \\ p(r = a, \theta, t) &= p_{analytique}(r = a, \theta, t) \end{cases}$$

Avant de commencer la résolution, il faut tout d'abord choisir le type de coordonnées à utiliser : cylindriques ou cartésiennes.

- Si on choisit les coordonnées cylindriques, on aura une difficulté à traduire le vecteur résultat et le tracer dans une figure 2D/3D.
- Si on choisit les coordonnées cartésiennes, on aura une difficulté à traduire les conditions aux limites.

Le choix des coordonnées dépend de notre capacité à résoudre les difficultés liées à ce choix. Finalement, on choisit les coordonnées cartésiennes pour résoudre ce problème.

D'après les hypothèses $p(.,t)$ ne dépend que de x et de y . L'équation différentielle devient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$$

On a 3 variables à prendre en compte : une variable temporelle t et 2 variables spatiales x et y . Il faut donc définir les pas ainsi que le maillage.

- On note le pas de temps $dt = \frac{t_f}{N_t}$ avec t_f le temps final et N_t le nombre de point.
- On note le pas spatial h tel que $h = dx = dy = \frac{2Re}{N}$ avec Re la plus grande distance suivant un axe par rapport au moteur4 et N le nombre de point.

On définit le maillage comme suit :

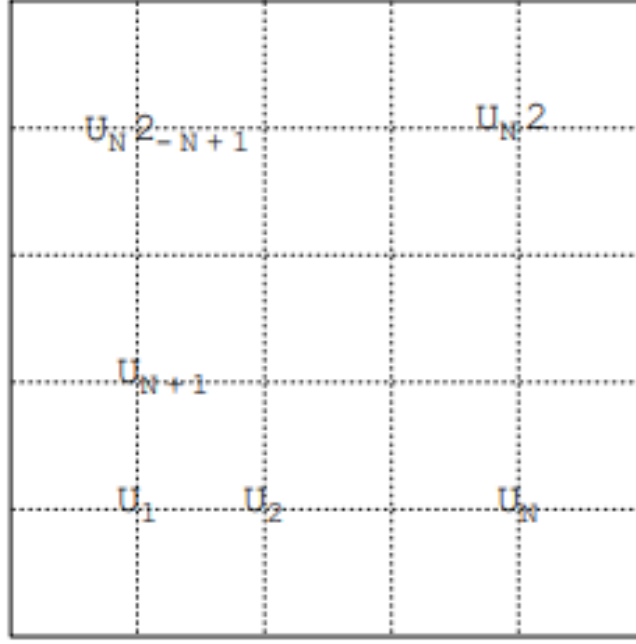


FIGURE 15 – Maillage

Puisqu'on a 2 dimensions (x, y) et au lieu de travailler avec des $p_{i,j}$ on travail avec p_I tel que

$$I = f(i, j) = i + (j - 1).N$$

. Ainsi : se déplacer d'un pas h suivant x correspond à aller de p_I à p_{I+1} . Alors que se déplacer d'un pas h suivant y correspond à aller de p_I à p_{I+N} .

D'autre part, on remarque que l'équation à résoudre est composée uniquement de dérivées secondes. Le schéma différence finie à utiliser est donc :

$$u''(x_i) \simeq \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{h^2}$$

En remplaçant ce schéma dans l'équation différentielle on aura :

$$\frac{p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j}^{n-1} - 2p_{i,j}^n}{dt^2} - c^2 \cdot \left(\frac{p_{i+1,j}^n + p_{i-1,j}^n - 2p_{i,j}^n}{h^2} + \frac{p_{i,j+1}^n + p_{i,j-1}^n - 2p_{i,j}^n}{h^2} \right) = 0$$

en simplifiant l'équation précédente en remplaçant (i,j) par I on aura :

$$\frac{p_I^{n+1} + p_I^{n-1} - 2p_I^n}{dt^2} - c^2 \cdot \left(\frac{p_{I+1}^n + p_{I-1}^n - 4p_I^n + p_{I+N}^n + p_{I-N}^n}{h^2} \right) = 0$$

On en déduit :

$$p_I^{n+1} = 2 \left(1 - 2 \left(\frac{c \cdot dt}{h} \right)^2 \right) p_I^n + \left(\frac{c \cdot dt}{h} \right)^2 (p_{I+1}^n + p_{I+N}^n + p_{I-1}^n + p_{I-N}^n) - p_I^{n-1}$$

et par suite on trouve le schéma explicite :

$$P^{n+1} = A \cdot P^n - P^{n-1}$$

avec $A = A_1 + A_2$ est matrice de taille $N^2 \times N^2$ définie par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

et

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ b & & \ddots & & b \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = 2 \left(1 - 2 \left(\frac{c \cdot dt}{h} \right)^2 \right)$$

et

$$b = \left(\frac{c \cdot dt}{h} \right)^2$$

P^n est un vecteur de taille N^2 qui définit la valeur de la pression dans le domaine étudié à $t = n \cdot dt$:

$$P^n = \begin{pmatrix} P_1^n \\ \vdots \\ P_{N^2}^n \end{pmatrix}$$

Vu la forme du schéma explicite, on remarque que la condition initiale n'est pas suffisante pour faire démarrer le schéma itératif. En effet, la condition initiale nous donne P^0 , mais on a besoin de P^1 . Pour cela on ajoute une autre condition au problème :

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\cdot, 0) = p'_{analytique}(\cdot, 0)$$

On utilise le schéma suivant :

$$u'(x_i, t) \simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{dt}$$

dans notre cas on aura :

$$p_I^1 = p_I^0 + dt \cdot p'_{analytique}(x_i, y_j, 0)$$

c'est une approximation d'ordre 1 en temps alors qu'on a utilisé dans l'équation différentielle une approximation d'ordre 2 en temps et en espace. On pousse alors le développement à un ordre supérieur :

$$p(x_i, y_j, dt) = p(x_i, y_j, 0) + dt \cdot p'_{analytique}(x_i, y_j, 0) + \frac{dt^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x_i, y_j, 0) + O(dt^3)$$

Or, on a l'équation : $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + c^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$ On aura :

$$p(x_i, y_j, dt) = p(x_i, y_j, 0) + dt \cdot p'_{analytique}(x_i, y_j, 0) + \frac{dt^2 \cdot c^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_i, y_j, 0) + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(x_i, y_j, 0) \right) + O(dt^3)$$

et par suite :

$$P_I^1 = P_I^0 + dt.P_{analytique,I}^{0'} + \frac{dt^2.c^2}{2} \cdot \frac{P_{I+1}^0 + P_{I-1}^0 + P_{I+N}^0 + P_{I-N}^0 - 4P_I^0}{h^2}$$

On en déduit :

$$P^1 = (I + A_h) P^0 + dt.P'_{analytique}$$

avec $A_h = A_{h1} + A_{h2}$ est matrice de taille $N^2 \times N^2$ définie par :

$$A_{h1} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

et

$$A_{h2} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ b & & \ddots & & b \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = -2 \left(\frac{c \cdot dt}{h} \right)^2$$

et

$$b = \frac{1}{2} \left(\frac{c \cdot dt}{h} \right)^2$$

On a maintenant tout ce dont on a besoin et on peut passer à Matlab pour la résolution numérique.

6.2 Résolution numérique

Comme avec la méthode intégrale et pour une fréquence égale à 12 Hz, on trace sur Matlab la pression acoustique :

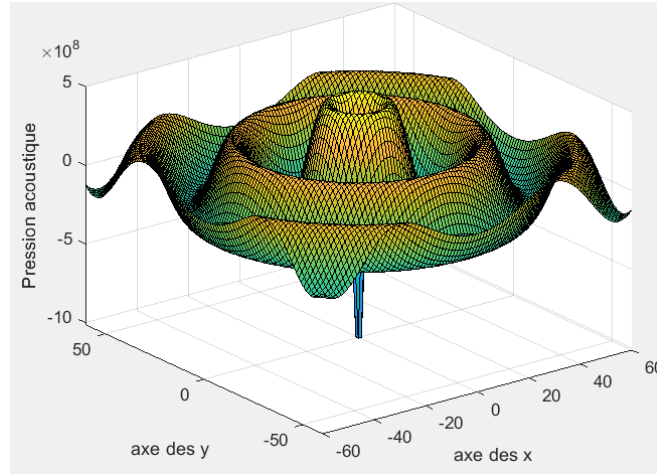


FIGURE 16 – Pression acoustique en fonction de la distance

On retrouve une solution différente de celle attendue. Malheureusement, on n'a pas pu améliorer le code pour voir si on peut obtenir un meilleur résultat.

Comparée à la méthode intégrale, la méthode des différences finies est plus coûteuse en terme de stockage et on remarque aussi que l'amplitude du résultat est trop importante ce qui la rend peu fiable malgré le fait qu'on a trouvé une allure plus ou moins similaire à celle de la solution.

6.3 Étude du temps de compilation

On s'intéresse maintenant au temps de compilation de cette méthode numérique en fonction du nombre de point du maillage par dimension spatial.

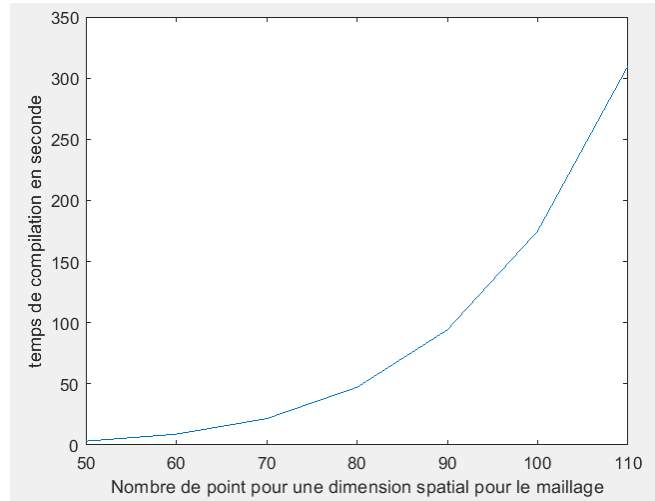


FIGURE 17 – temps de compilation en fonction du nombre de point N

On remarque que pour le temps de compilation devient rapidement trop long pour des valeur de N qui sont pas très grandes en comparaison à la méthode intégrale. Nous avons alors dû restreindre le nombre de point de maillage lors de nos calculs afin d'éviter la création de matrices trop lourdes et donc d'une augmentation du temps de compilation. C'est l'un des avantages de cette dernière.

7 Conclusion

La difficulté majeure lors du commencement de ce projet fut la compréhension de l'origine du bruit dans les moteurs électriques. Car il n'est pas évident aux premiers abords d'imaginer que les forces magnétiques à l'origine du bon fonctionnement du moteur sont aussi celles qui sont à l'origine de son bruit. Grâce aux thèses mises à notre disposition, nous avons pu comprendre ce phénomène.

Passé cette première étape, il nous fallut étudier ensemble la propagation de la pression acoustique. Nous avons pris un certain temps afin de nous familiariser avec le problème analytique, mais cette étude était à la portée de nos compétences grâce à nos connaissances développées en propagation d'onde électromagnétique. Car en effet la propagation d'ondes électromagnétiques et acoustiques ont des similarités.

La compréhension des solutions analytiques fut une découverte car nous n'avions pas étudié de problème avec ce type de forme de solutions. La compréhension et la mise en relation avec le bruit ne furent pas aisées.

Enfin après s'être totalement familiarisé avec le problème analytique et ses solutions, nous avons choisis de nous séparer en 2 groupes pour développer 2 résolutions numériques différentes. Et ainsi de prouver la validité de la solution analytique prouvée antérieurement.

Nous avons choisis les différences finies et la méthode intégrale, la méthode intégrale était pertinente à choisir car adapté aux problèmes "non-bornés" comme le notre, et cette méthode est étudiée en 3ème année du parcours PN. Après détermination des solutions avec ces méthodes, nous avons pu alors en conclure les avantages et inconvénients.

La méthode des différences finies rencontre des difficultés au niveau du choix du maillage qui par la suite peut compliquer l'implémentation des conditions aux limites sans oublier le stockage et le temps de calcul. De plus avec 2 variables d'espaces, elle fait appel à des matrices de taille $N^2 \times N^2$ qui correspond à N^4 points.

La méthode intégrale quant à elle, comporte un grand intérêt au niveau du coût de stockage et coût de temps comparé à la méthode des différences finies.

Finalement, afin de rendre la résolution du problème plus réaliste, il aurait été intéressant de prendre en compte la taille du cylindre et la présence de dents statoriques. Car en effet, la prise en compte de ces dernières aurait fait intervenir les contraintes tangentielles, que nous avons négligé.

Le bilan global de ce projet est que nous sommes satisfaits des solutions trouvées et des méthodes de résolution mais que l'étude n'est pas encore totalement réaliste.

Références

- [1] Arnaud Hubert, *Contribution à l'étude des bruits acoustiques générés lors de l'association machines électriques-convertisseurs statiques de puissance. Application à la machine asynchrone*, Thèse de doctorat de l'UTC, 12 janvier 2001
- [2] Eliane Becache, *Schemas numériques pour la résolution de l'équation des ondes*, MASTER Modelisation et simulation, ENSTA - Janvier 2009
- [3] Emre Uygun, *Étude acoustique d'entraînements électriques de faible puissance produits en grande série*, Centrale Lille THÈSE