Méthodes numériques et optimisation
31 décembre 2022

Master 2 3EEEA option Physique Numérique

Optimisation Topologique

Élèves :
Mohamed Reda YACOUBI

Enseignants
Messine Frédéric

31 décembre 2022

Table des matières

1 Introduction

Dans ce BE, on va essayer de résoudre un problème difficile d'optimisation topologique pour le design d'un circuit magnétique similaire à celui d'un propulseur à effet Hall.

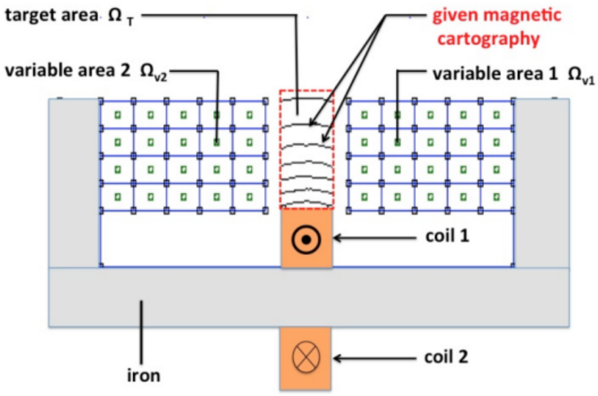

FIGURE 1 – Circuit Magnétique à optimiser.

On cherche à trouver une distribution satisfaisante de champs magnétique tout en trouvant la meilleure solution pour ce problème. Pour cela, on fait un maillage de taille $(N_x.N_y)$ avec chaque maille remplie par du fer ou vide ce qui correspond à :
Vide $\implies$ 0
Fer $\implies$ 1
On prends pour notre premier exemple Nx=2 et Ny=5

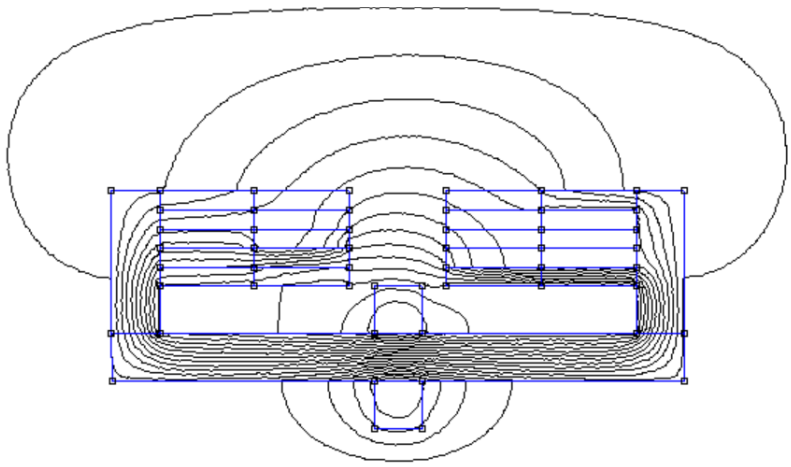

FIGURE 2 – Exemple de maillage Nx=2,Ny=5

Notre problème d'optimisation est définie sous la forme :

$$min \quad f(X) = \int_{\Omega_T} \|B(X) - B_0\|^2 d\Omega \quad avec \quad X \in \{0,1\}^{N_x \times N_y}$$

On convertira en Gauss (1T = 10000G) :

$$min \quad f(X) = \int_{\Omega_T} \|10^4(B(X) - B_0)\|^2 d\Omega \quad avec \quad X \in \{0,1\}^{N_x \times N_y}$$

2 Définition de la fonction objectif

On calcule d'abord le coût en temps CPU pour notre fonction objectif pour le comparer avec celui du calcul de B(A), On trouve les résultats suivants :

Temps de	Valeur
calcul de f (Ts)	5.8877s
calcul de B	4.6434s

On constate que les valeurs sont proches ce qui est attendu car le temps de calcul des opérations usuelles (somme, soustraction) est faible devant celui du champ donc le calcul de B est la partie qui prend plus de temps dans le calcul de notre fonction objectif.

3 Méthode exhaustive

La méthode exhaustive est une méthode d'optimisation qui consiste à explorer l'ensemble de l'espace des solutions à un problème, pour éliminer les solutions qui ne sont pas réalisables et sélectionner la meilleure en terme de coût.

Naturellement, cette méthode est généralement extrêmement coûteuse en temps et dépend du maillage.

On prends au début un maillage avec $N_x = 2$ et $N_y = 5$, le temps CPU peut être évalué de la manière suivante :

$$T_f = \frac{T_s \times 2^{N_x \times N_y}}{60} \approx 1h40min$$

Mais en réalité le temps de simulation sur Matlab est environ 2 heures, ce qui est dû aux performances de l'ordinateur, dans ce qui suit on prends $Nx = 2$ et $Ny = 3$.

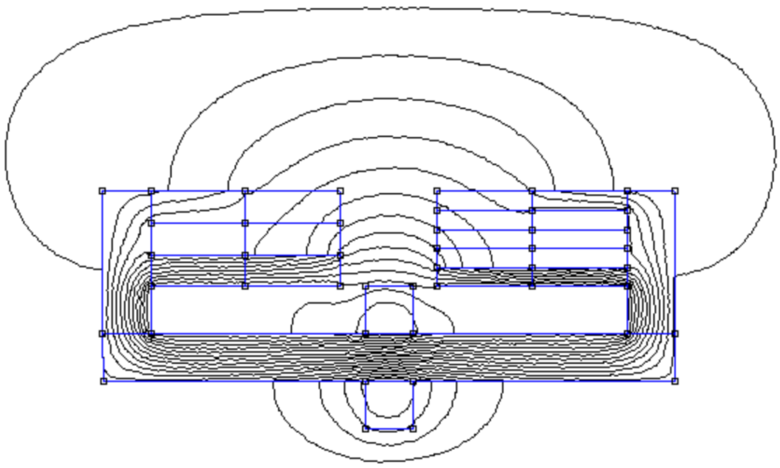

FIGURE 3 – Circuit magnétique avec la méthode exhaustive

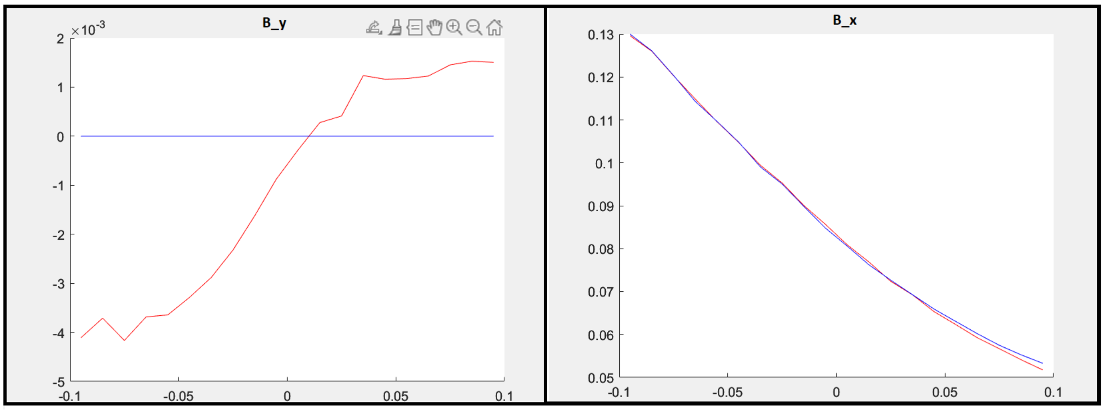

FIGURE 4 – Champs By,Bx avec la méthode exhaustive

Le vecteur de densité de matière est $x_{min} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$ et le temps de calcul est **275s**.

Par la suite, on crée une routine qui permet d'éliminer les solutions si un élement se trouve isolé afin de gagner en temps. Par contre, on trouve la même solution avec une réduction du temps de calcul à (**206s**).
Le fait de trouver la même solution est logique car pour notre maillage il n'ya pas de points isolés vu que toutes les mailles sont collées au circuit magnétique,néanmoins la méthode exhaustive avec élimination des éléments isolés peut être utile pour des maillages plus fins,car cette dérnière ne garde que les solutions réalisables.

4 Algorithmes génétiques

Dans cette partie on utilise les algorithmes génétiques. En fait, un algorithme génétique est un algorithme de recherche basé sur les mécanismes de la selection naturelle et et qui va nous permettre de remédier aux problèmes de séléction aléatoire que propose l'algorithme de recherche exhaustive.

On prend maintenant $N_x = 2$ et $N_y = 5$ et on fait le même test d'isolation effectué pour la méthode exhaustive.

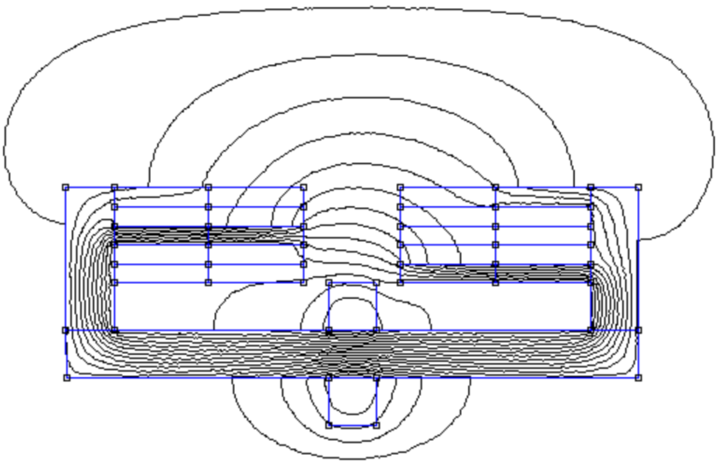

FIGURE 5 – Circuit magnétique avec la méthode génétique

La non dépendance du temps de calcul pour les algos génétiques et le nombre de variables est un avantage pour ce type d'algorithmes,grâce à ça on peut réaliser des maillages plus fins contrairement à la méthode exhaustive. C'est un algorithme séléctif pour les solutions cherchées.

Le temps de calul dépend de nombre de génération N_{ger} et de nombre d'individus N_{ind} et peut être se calculé à l'aide de la formule : $T_f = \frac{T_s \times N_{ind} \times N_{ger}}{60} == \frac{5.8877 \times 10 \times 10}{60} \approx 9min$. Alors que le temps de la simulation est environ 6min.

Pour la meilleure solution, on a trouvé $x_{min} = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$

5 Méthode d'optimisation locale

Dans cette partie, on cherche à résoudre notre problème en utilisant la fonction matlab **fmincon**. On passe alors d'optimisation combinatoire ou discrète à l'optimisation continue, et donc notre problème à optimiser sera le suivant :

$$min \quad f(X) = \int_{\Omega_T} \|B(X) - B_0\|^2 d\Omega \quad avec \quad X \in [0; 1]^{N_x \times N_y}$$

avec toujours B en gauss (1T = 10000G).

On prend $N_x = 2$ et $N_y = 3$ et pour le point de départ ça sera le milieu.

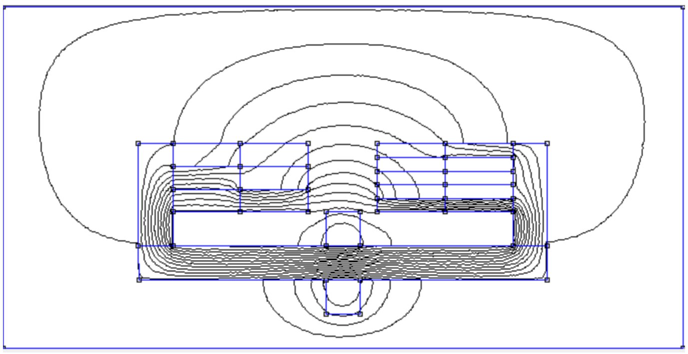

FIGURE 6 – Circuit magnétique avec fmincon

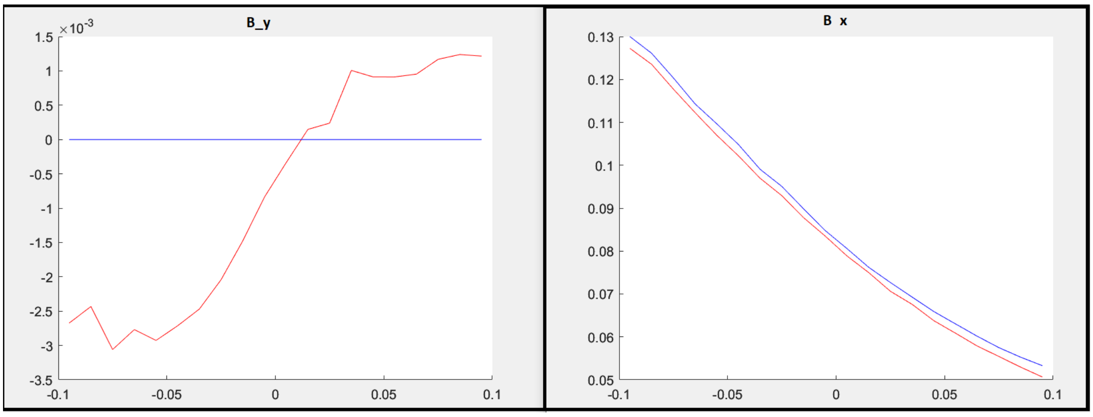

FIGURE 7 – Champs By,Bx avec fminco

Le temps de calcul est d'environ 7min et on a obtenue comme solution :

tfinal1 | xmin

1x6 double

	1	2	3	4	5	6
1	0.0809	0.1167	0.1132	1.0869e-05	0.0094	4.6969e-09

Le vecteur de solution trouvé contient des valeurs comprises entre 0 et 1, la solution alors n'est pas réalisable, Donc on envisage une pénalisation des valeurs du vecteur X à l'aide de la fonction arctan qui permet de bien distribuer les valeurs proches de 0 ou de 1 vue en cours définie par :

$$p(X_i) = \frac{1}{2\arctan(d)} \arctan(d(2X_i - 1)) + \frac{1}{2} \quad d \in N^*$$

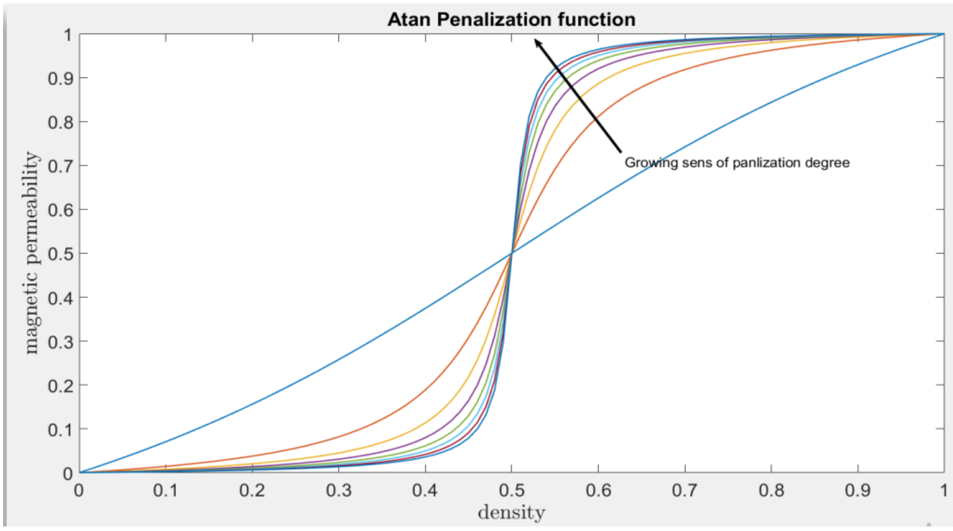

FIGURE 8 – Fonction pénalisation arctan

Et donc la fonction à optimiser est :

$$minf(p(X)) = \int_{\Omega_T} \|B(p(X)) - B_0\|^2 d\Omega \quad avec \quad X \in [0;1]^{N_x \times N_y}$$

Pour une grande valeur du coefficient de pénalistion d=1000, on trouve :

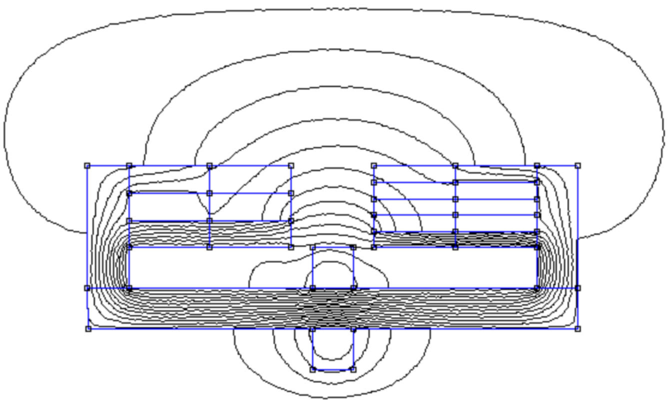

FIGURE 9 – circuit magnétique avec la pénalisation

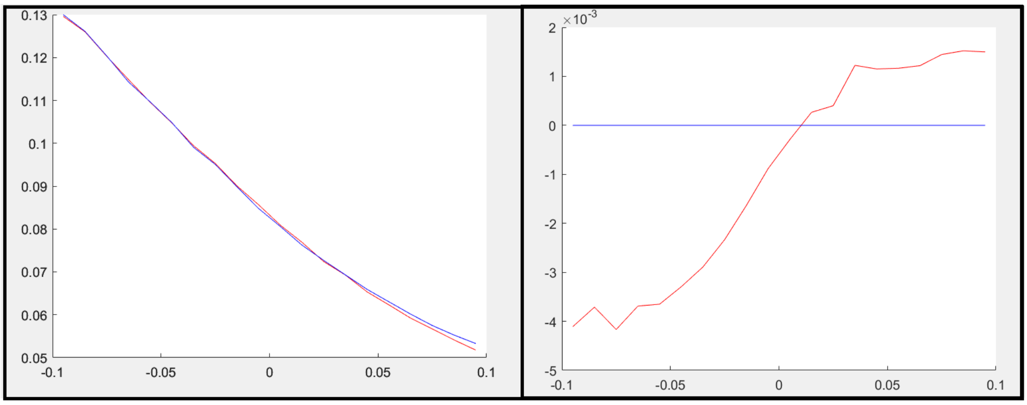

FIGURE 10 – Champs magnétique

Le temps de calcul d'environ 6min, et la solution trouvée est : La solution contient ds

xmin

1x6 double

	1	2	3	4	5	6
1	1.0000	0.8873	0.0428	4.6786e-07	1.0000	1.3563e-07

valeurs proches de 0 ou de 1 et donc il faut mettre les premièrs à 0 et le reste à 1 pour que la solution soit réalisable.

6 Conclusion

Dans ce BE nous avons découvert un nouveau type d'optimisation innovant, il s'agit de l'optimisation topologique et son application pour optimiser la densité de matière sur un desugn similaire à celui d'un propulseur à effet Hall, au début nous avons testé la méthode exhaustive qui permet de traiter toutes les combinaisons possibles et dont l'inconvénient est la durée lente de la simulation,ce qui nous a conduit à examiner les algorithmes génétiques qui éliminent les solutions non réalisables et dont l'avantage est que le temps de calcul est indépendant du nombre de variables de notre problème ce qui permet de tester sur des maillages plus fins,finalement on s'est servi de la fonction fmincon de Matlab à la condition de reformuler notre problème en continu et par ailleurs la pénalisation des valeurs de la solution pour mieux les distribuer en grande nombre proche de 0 ou de 1 pour que la solution soit réalisable.