

# UE PHÉNOMÈNES PHYSIQUES ET MODÉLISATIONS

2 ANNÉE EEEA OPTION EEES

---

## Rapport Projet modélisation de structures EM

---

*Étudiants :*

YACOUBI MOHAMED REDA

Arabej MOUHCIN

*Enseignants :*

Nathalie RAVEAU

Olivier PIGAGLIO

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Structure étudiée</b>	<b>2</b>
2.1	Calcul théorique . . . . .	3
2.1.1	Placement du repère . . . . .	3
2.1.2	Invariance et symétrie . . . . .	3
2.1.3	Schéma équivalent . . . . .	4
2.1.4	Impédances de mode et constantes de propagation . . . . .	5
2.1.5	Base modale . . . . .	6
2.1.6	Fonctions d'essai . . . . .	6
2.1.7	Application du Galerkin . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Solution avec MATLAB</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Construction de la structure sous HFSS</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>11</b>

# 1 Introduction

L'objectif de ce projet est de déterminer l'équation de dispersion du mode fondamental de la structure représentée sur la Figure 1, ainsi de Vérifier les résultats obtenus en comparant cette courbe de dispersion avec celle obtenue avec le logiciel HFSS. (En tracant la courbe de dispersion dans la gamme de fréquence comprise entre **0** et **10 GHz**).

## 2 Structure étudiée

La zone en bleu est un diélectrique de permittivité 2.2. Les zones noires sont du métal parfait (sans épaisseur). On donne :  $a = 7mm$ ,  $b = 3.5mm$ ,  $h = 1mm$ ,  $w = 3.5mm$ .

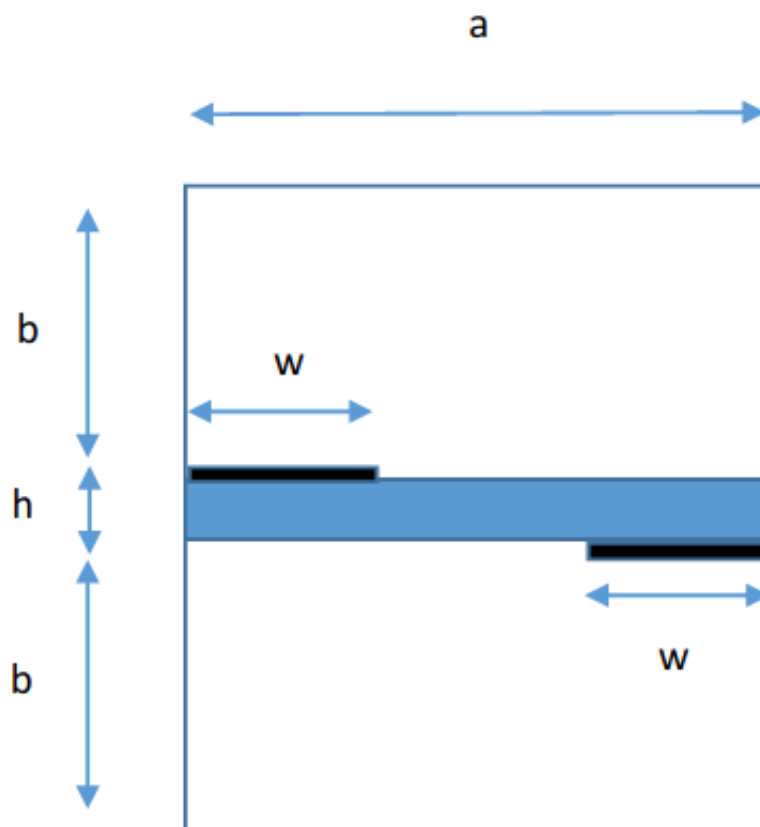


FIGURE 1 – Coupe de la structure

## 2.1 Calcul théorique

### 2.1.1 Placement du repère

On commence d'abord par placer le repère dans cette structure. On le place dans la coupe donnée, au niveau de l'intersection entre deux milieux. Puisque l'origine du repère doit être sur l'interface de discontinuité, nous avons le choix ici et nous avons sélectionné l'intersection haute (entre la partie haute et le diélectrique) parcequ'on a pas de symétrie et afin de faciliter le travail avec HFSS.

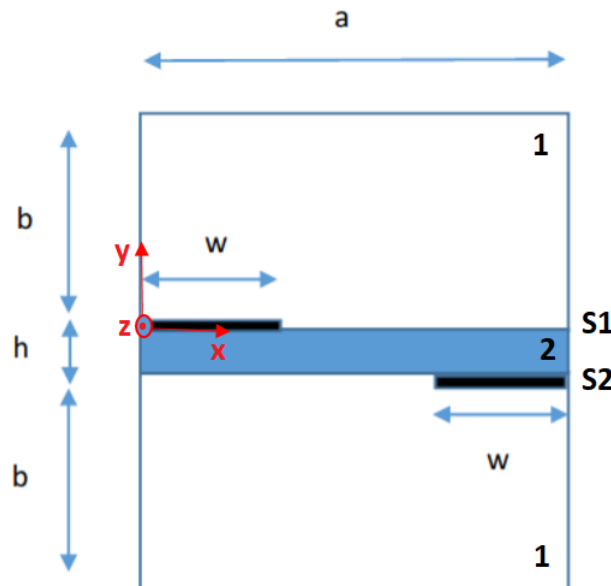


FIGURE 2 – Placement du repère

### 2.1.2 Invariance et symétrie

Le problème est invariant par translation selon  $\vec{z}$ , donc  $\vec{E}, \vec{H}$  varient en  $\exp(-\gamma z)$ , ( $\gamma$  étant la constante de propagation selon l'axe  $(oz)$ ).

Nous n'avons aucune symétrie pour notre structure, on choisit alors de placer le repère tout à gauche pour simplifier les calculs après.

### 2.1.3 Schéma équivalent

Nous construisons le schéma équivalent suivant à partir des TDS et des aides fournies pour le projet :

Avec :

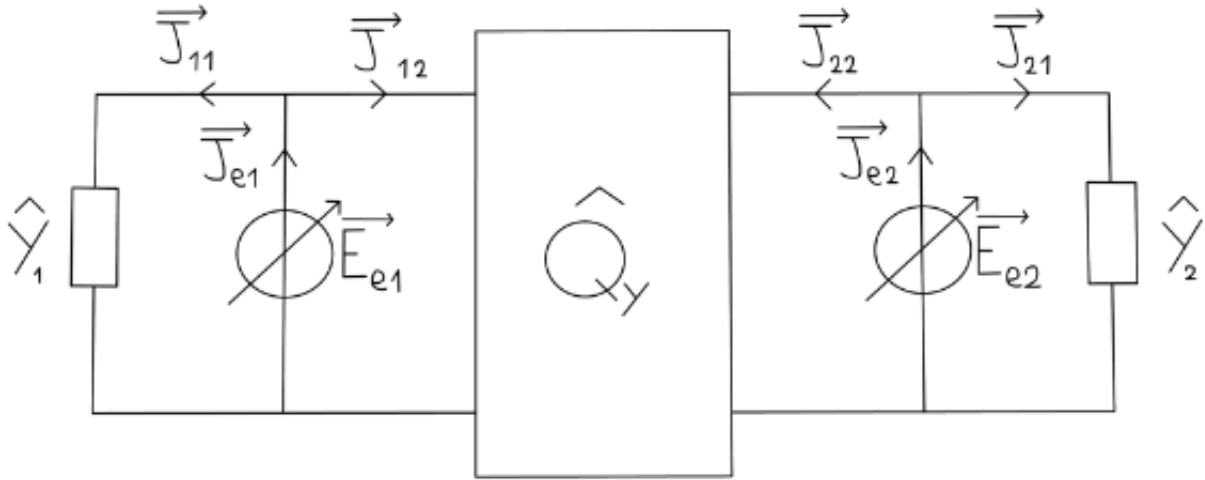


FIGURE 3 – Schéma équivalent de la structure

\* $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2$ , respectivement l'impédance de mode du côté 1, 2,  $\hat{Y}_1 = \hat{Y}_2 = \hat{Y}$  par symétrie.

\*  $[\hat{Q}_Y] = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} \\ \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} \end{bmatrix}$ , le quadripôle liant les champs électromagnétiques entre les deux sections transverses  $S_1$  et  $S_2$ .

\*  $[\hat{Q}_Y]$  symétrique et passif donc  $\hat{Q}_{11} = \hat{Q}_{12}, \hat{Q}_{21}$   
 \*  $\begin{pmatrix} \vec{J}_{12} \\ \vec{J}_{21} \end{pmatrix} = [\hat{Q}_Y] \times \begin{pmatrix} \vec{E}_{e1} \\ \vec{E}_{e2} \end{pmatrix}$   
 \*  $\vec{J}_{e1} = \vec{J}_{11} + \vec{J}_{12}, \vec{J}_{e2} = \vec{J}_{22} + \vec{J}_{21}$

\* L'objectif de cette modélisation avec 2 sources de tension est de chercher la matrice M tel que :  $M \times \begin{pmatrix} \vec{J}_{e1} \\ \vec{J}_{e2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_{e1} \\ \vec{E}_{e2} \end{pmatrix}$

On a alors :

$$* \begin{cases} \vec{J}_{12} = \hat{Q}_{11} \vec{E}_{e1} + \hat{Q}_{12} \vec{E}_{e2} = \vec{J}_{e1} - \hat{Y} \vec{E}_{e1} \\ \vec{J}_{22} = \hat{Q}_{21} \vec{E}_{e1} + \hat{Q}_{22} \vec{E}_{e2} = \vec{J}_{e2} - \hat{Y} \vec{E}_{e2} \end{cases}$$

$$*(M) = \begin{pmatrix} \hat{Q}_{11} + \vec{Y} & \hat{Q}_{12} \\ \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{11} + \vec{Y} \end{pmatrix}$$

#### 2.1.4 Impédances de mode et constantes de propagation

Les expressions analytiques des admittances  $(Y_{1n}^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(Y_{2n}^\alpha)_{n \in \mathbb{N}, \alpha = TE, TM}$  sont données par :

$$\begin{cases} Y_{1n}^\alpha = Y_{M,1n}^\alpha \coth(p_{1n}b) \\ p_{1n}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \beta^2 - k_0^2 \\ Y_{M,1n}^{TE} = \frac{p_{1n}}{j\omega\mu_0}, Y_{M,1n}^{TM} = \frac{j\omega\varepsilon_0}{p_{1n}} \\ p_{2n}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \beta^2 - k_0^2 \times \varepsilon_r \\ Y_{M,1n}^{TE} = \frac{p_{2n}}{j\omega\mu_0} \text{ et } Y_{M,2n}^{TM} = \frac{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}{p_{2n}} \end{cases}$$

Le quadripole  $[\hat{Q}_Y]$  est définie par les formules suivantes :

$$\begin{cases} Q_{11n}^\alpha = Q_{M,11n}^\alpha \coth(q_n h) = Q_{22n}^\alpha \\ Q_{12n}^\alpha = Q_{M,12n}^\alpha \frac{1}{\sinh(q_n h)} = Q_{21n}^\alpha \\ q_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \beta^2 - k_0^2 \times \varepsilon_r \\ Q_{M,11n}^{TE} = \frac{q_n}{j\omega\mu_0} = Q_{M,12n}^{TE} \\ Q_{M,11n}^{TM} = \frac{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}{q_n} = Q_{M,12n}^{TM} \end{cases}$$

Ce qui donne dans la base modale  $(\vec{f}_n^\alpha)$  :

$$\begin{cases} \hat{Q}_{12} = - \sum_{n,\alpha} \left| \vec{f}_n^\alpha \right| > Y_{2n}^\alpha \times \frac{1}{\sinh(q_n h)} < \left| \vec{f}_n^\alpha \right| \\ \hat{Q}_{11} = \sum_{n,\alpha} \left| \vec{f}_n^\alpha \right| > Y_{2n}^\alpha \times \cosh(q_n h) < \left| \vec{f}_n^\alpha \right| \\ \hat{Y}_1 = \sum_{n,\alpha} \left| \vec{f}_n^\alpha \right| > \hat{Y}_{Mn}^\alpha \times \cosh(q_n b) < \left| \vec{f}_n^\alpha \right| \end{cases}$$

### 2.1.5 Base modale

Dans la base modale  $\vec{f}_n^\alpha$ , la permittivité  $\varepsilon$  n'intervient pas, donc les  $f_n$  sont les mêmes pour  $\hat{Y}, \hat{Q}_{11}$  et  $\hat{Q}_{12}$  :

$$\left\{ \vec{f}_n^{TM} = \begin{cases} \alpha_{0n} \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e\vec{x} \\ \alpha_{0n}(-\gamma) \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e\vec{z} \end{cases} \vec{f}_n^{TE} = \begin{cases} \beta_{0n} \gamma \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e\vec{x} \\ \beta_{0n} \frac{-n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e\vec{z} \end{cases}$$

Avec :

$$\alpha_{0n} = \beta_{0n} = \frac{\sqrt{\frac{\tau_n}{a}}}{\sqrt{|\gamma|^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}$$

$$\tau_n = \begin{cases} 1 & \sin = 0 \\ 2 & \text{Sinon} \end{cases}$$

### 2.1.6 Fonctions d'essai

Nos fonctions d'essai sont les suivantes :

$$g_{e1} = \begin{cases} g_{e1x} = \begin{cases} 0 & [0; \omega[ \\ 1 & [\omega; a] \end{cases} \\ g_{e1z} = 0 \end{cases} \quad \forall x \in [0; a]$$

$$g_{e2} = \begin{cases} g_{e2x} = \begin{cases} 0 & [a - \omega; a] \\ 1 & [0; a - \omega[ \end{cases} \\ g_{e2z} = 0 \end{cases} \quad \forall x \in [0; a]$$

### 2.1.7 Application du Galerkin

Soient  $\vec{E}_{e1}$  et  $\vec{E}_{e2}$  deux sources virtuelles définies sur  $S_1$ , respectivement  $S_2$  définies par  $\vec{E}_{e1} = v_{e1} \vec{g}_{e1}(x)$  et  $\vec{E}_{e2} = v_{e2} \vec{g}_{e2}(x)$  avec  $v_{e1}$  et  $v_{e2}$  les inconnues et  $\vec{g}_{e1}, \vec{g}_{e2}$  les fonctions d'essai.

On a

$$(M) = \begin{pmatrix} \hat{Q}_{11} + \vec{Y} & \hat{Q}_{12} \\ \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{11} + \vec{Y} \end{pmatrix}$$

Afin d'obtenir l'équation de dispersion, On applique la méthode de Galerkin.

On a

$$\det \begin{pmatrix} \langle \vec{g}_{e1} | (\hat{Q}_{11}^\alpha + \hat{Y}) \vec{g}_{e1} \rangle & \langle \vec{g}_{e1} | \hat{Q}_{12}^\alpha \vec{g}_{e2} \rangle \\ \langle \vec{g}_{e2} | \hat{Q}_{12}^\alpha \vec{g}_{e1} \rangle & \langle \vec{g}_{e2} | (\hat{Q}_{11}^\alpha + \hat{Y}^\alpha) \vec{g}_{e2} \rangle \end{pmatrix} = 0$$

On doit donc calculer les différents produits scalaires.

On a :

$$\begin{aligned} \langle \vec{g}_{e1} | (\hat{Q}_{11}^\alpha + \hat{Y}) \vec{g}_{e1} \rangle &= \sum_{n,\alpha} \langle \vec{g}_{e1} | \vec{f}_n^\alpha \rangle [Y_{2n}^\alpha \cosh(q_n h) + Y_{Mn}^{\hat{\alpha}} \cosh(q_n b)] \langle \vec{f}_n^\alpha | \vec{g}_{e1} \rangle \\ &= \sum_{n,\alpha} \langle \vec{g}_{e1} | \vec{f}_n^\alpha \rangle \overline{\langle \vec{g}_{e1} | \vec{f}_n^\alpha \rangle} [Y_{2n}^\alpha \cosh(q_n h) + Y_{Mn}^{\hat{\alpha}} \cosh(q_n b)] \\ &= \sum_{n,\alpha} |\langle \vec{g}_{e1} | \vec{f}_n^\alpha \rangle|^2 [Y_{2n}^\alpha \cosh(q_n h) + Y_{Mn}^{\hat{\alpha}} \cosh(q_n b)] \end{aligned}$$

Et de même :

$$\begin{aligned} \langle \vec{g}_{e1} | \hat{Q}_{12}^\alpha \vec{g}_{e2} \rangle &= - \sum_{n,\alpha} \langle \vec{g}_{e1} | \vec{f}_n^\alpha \rangle Y_{2n}^\alpha \times \frac{1}{\sinh(q_n h)} \langle \vec{f}_n^\alpha | \vec{g}_{e2} \rangle \\ \langle \vec{g}_{e2} | \hat{Q}_{12}^\alpha \vec{g}_{e1} \rangle &= - \sum_{n,\alpha} \langle \vec{g}_{e2} | \vec{f}_n^\alpha \rangle Y_{2n}^\alpha \times \frac{1}{\sinh(q_n h)} \langle \vec{f}_n^\alpha | \vec{g}_{e1} \rangle \\ \langle \vec{g}_{e2} | (\hat{Q}_{11}^\alpha + \hat{Y}) \vec{g}_{e2} \rangle &= \sum_{n,\alpha} |\langle \vec{g}_{e2} | \vec{f}_n^\alpha \rangle|^2 [Y_{2n}^\alpha \cosh(q_n h) + Y_{Mn}^{\hat{\alpha}} \cosh(q_n b)] \end{aligned}$$

Nous devons ainsi calculer les produits scalaires  $\langle \vec{g}_{e1} | \vec{f}_n^\alpha \rangle$  et  $\langle \vec{g}_{e2} | \vec{f}_n^\alpha \rangle$  pour  $\alpha = TE, TM$ .

→ Calcul de  $\langle \vec{g}_{e1} | \vec{f}_n^{TM} \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle \vec{g}_{e1} | \vec{f}_n^{TM} \rangle &= \int_0^a (g_{e1x} \vec{f}_{nx}^{*TM} + g_{e1z} \vec{f}_{nz}^{*TM}) dx \\ &= \int_\omega^a (g_{e1x} \vec{f}_{nx}^{*TM}) dx \\ &= \int_\omega^a \alpha_n^* \left( \frac{n\pi}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi}{a} x \right) dx = \alpha_n^* \frac{n\pi}{a} \int_\omega^a \cos \left( \frac{n\pi}{a} x \right) dx \end{aligned}$$

$$\text{Et donc pour tout } n \in N : \boxed{\langle \vec{g}_{e1} | \vec{f}_n^{TM} \rangle = \alpha_n^* \left[ \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \right]_\omega^a = -\alpha_n^* \sin \left( \frac{n\pi}{a} \omega \right)}$$



→ Calcul de  $\langle \vec{g}_{e1} | f_n^{\vec{T}E} \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle \vec{g}_{e1} | f_n^{\vec{T}E} \rangle &= \int_{\omega}^a (g_{e1x} f_{nx}^{\vec{T}E}) dx \\ &= \int_{\omega}^a \alpha_n^* \gamma^* \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \end{aligned}$$

Pour  $n = 0$  on a :  $\langle \vec{g}_{e1} | f_0^{\vec{T}E} \rangle = \int_{\omega}^a \alpha_0^* \gamma^* dx = \alpha_0^* \gamma^* (a - \omega)$

Pour  $n \neq 0$  on a :  $\langle \vec{g}_{e1} | f_n^{\vec{T}E} \rangle = \int_{\omega}^a \alpha_n^* \gamma^* \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$

$$= \alpha_n^* \gamma^* \frac{a}{n\pi} [\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)]_{\omega}^a$$

$$\boxed{\langle \vec{g}_{e1} | f_n^{\vec{T}E} \rangle = -\alpha_n^* \gamma^* \frac{a}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{a}\omega\right)}$$

→ Calcul de  $\langle \vec{g}_{e2} | f_n^{\vec{T}M} \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle \vec{g}_{e2} | f_n^{\vec{T}M} \rangle &= \int_0^{a-\omega} g_{e2x} f_{nx}^{\vec{T}M} \\ &= \int_0^{a-\omega} \alpha_n^* \left(\frac{n\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \\ &= \alpha_n^* \frac{a}{n\pi} [\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)]_0^{a-\omega} \\ &= \alpha_n^* \frac{a}{n\pi} [\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)]_0^{a-\omega} = \alpha_n^* \sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{a}\omega\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \vec{g}_{e2} | f_n^{\vec{T}M} \rangle = (-1)^{n-1} \alpha_n^* \sin\left(\frac{n\pi}{a}\omega\right)}$$

→ Calcul de  $\langle \vec{g}_{e2} | f_n^{\vec{T}E} \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle \vec{g}_{e2} | f_n^{\vec{T}E} \rangle &= \int_0^{a-\omega} g_{e2x} f_{nx}^{\vec{T}E} \\ &= \int_0^{a-\omega} \alpha_n^* \gamma^* \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \end{aligned}$$

Pour  $n = 0$  on a :  $\boxed{\langle \vec{g}_{e2} | f_0^{\vec{T}E} \rangle = \alpha_0^* \gamma^* (a - \omega)}$

Pour  $n \neq 0$  on a :  $\langle \vec{g}_{e2} | f_0^{\vec{T}E} \rangle = \int_0^{a-\omega} \alpha_n^* \gamma^* \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$

$$= \alpha_n^* \gamma^* \frac{a}{n\pi} [\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)]_0^{a-\omega}$$

$$= \alpha_n^* \gamma^* \frac{a}{n\pi} \sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{a}\omega\right)$$

$\boxed{\langle \vec{g}_{e2} | f_0^{\vec{T}E} \rangle = (-1)^{n-1} \alpha_n^* \gamma^* \frac{a}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{a}\omega\right)}$

Ainsi on a :  $\langle \vec{f}_n^\alpha | \vec{g}_{ei} \rangle = \langle \vec{g}_{ei} | \vec{f}_n^\alpha \rangle$  pour  $i = 1, 2$

### 3 Solution avec MATLAB

L'objectif est de tracer la courbe de dispersion pour notre structure dans la gamme de fréquences comprises entre **0** et **10 Ghz**, pour ce faire il faut calculer le déterminant de la matrice  $M$  qui est effectivement une fonction de  $\beta$ , puis de chercher les zéros du module de cette fonction vu que le résultat inclue des nombres complexes tout en définissant les paramètres nécessaires pour effectuer ce calcul. Notre fonction est positive ce qui nous empêche de se servir de la fonction Matlab **fzero** qui ne s'applique que pour des fonctions qui alternent, pour palier à ce problème on cherche plutôt les minimas de notre fonction pour les fréquences comprises entre **0** et **10Ghz**, on réalise cela à l'aide de la fonction Matlab **fminbnd**. Après construction du vecteur

$\beta$  et grâce à la formule  $\boxed{\varepsilon_{ref} = \left(\frac{\beta c}{2\pi f}\right)^2}$ .

on obtient alors la courbe suivante :

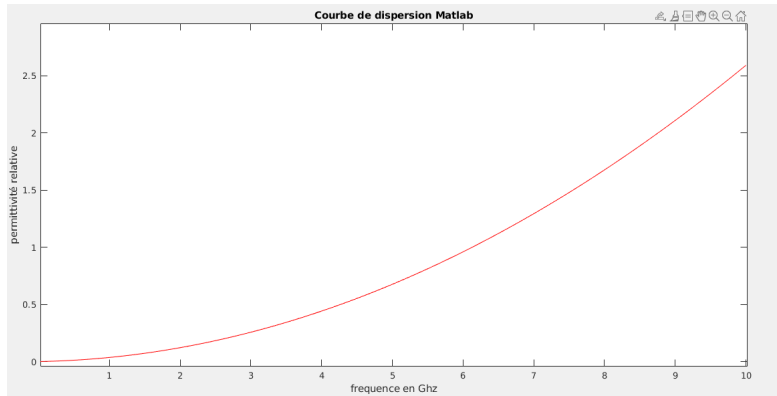


FIGURE 4 – Courbe de dispersion Matlab

## 4 Construction de la structure sous HFSS

Il s'agit ici de construire la structure sous HFSS afin de la simuler et de visualiser la courbe de dispersion dans la gamme de fréquences comprises entre **0** et **10 Ghz**.

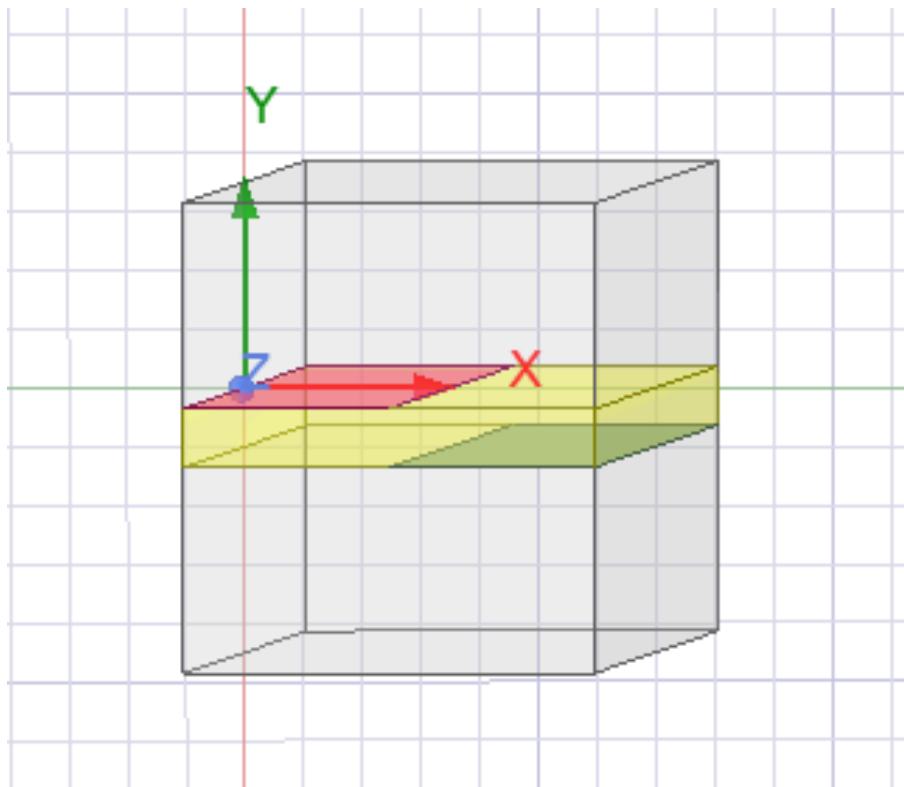


FIGURE 5 – Construction géométrique sous HFSS

Après attribution des différentes caractéristiques aux faces concernées, on trace la courbe de dispersion :

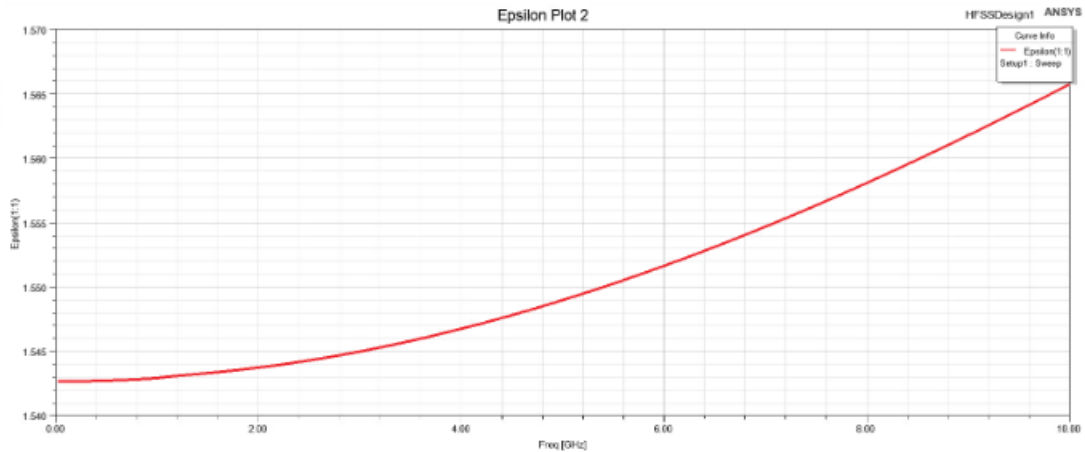


FIGURE 6 – Courbe de dispersion HFSS

On constate que la courbe de dispersion avec HFSS ressemble à celle faite avec Matlab, néanmoins il y a une différence dans les valeurs atteintes par la permittivité, cela peut être dû aux erreurs de calcul avec Matlab ou bien aux erreurs de calcul analytique.

## 5 Conclusion

Ce projet nous a permis d'étudier analytiquement la physique d'une structure guidante en passant par son schéma équivalent et la détermination analytique des paramètres de ce schéma, dans l'objectif de tracer la courbe de dispersion du mode fondamental à l'aide du logiciel MATLAB, et finalement on a créé la structure sous le logiciel HFSS pour pouvoir comparer les résultats obtenus.