LaTeX Notes

知乎 @ 可达可达

目录

1 特殊环境

1.1 定理

1.1.1 中心极限定理

De Moivre-Laplace 中心极限定理

设 μ_n 为 n 重 Bernoulli 实验中事件 A 发生的次数,p 为每次实验中 A 发生的概率, 则对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

1.1.2 向量组的线性相关

定理 1 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, (s \geqslant 2)$ 线性无关的充分必要条件是向量组中的每个向量都不能由其余向量线性表示.

定理 2 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, (s \geqslant 2)$ 线性表示, 并且表达式唯一.

定理 3 如果向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta)$

定理 4（积分判别法） 设 $f(x)$ 是 $[1, +\infty]$ 上连续、递减的正值函数, 又 $u_n = f(n)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

定理 5（Leibniz 定理） 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足 $u_n \geqslant u_{n+1}$ 且 $\lim_{n\to+\infty} = 0$. 则级数收敛, 且其和 $S \leqslant u_1$, 其余项 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$.

1.2 定义

定义 1.1 设 (X, Y) 为二维随机向量, 且 X, Y 的方差均为正, 则称 $\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

为 X 与 Y 的相关系数, 记为 ρ_{XY} 或简记为 ρ, 即

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

1.3 证明

证明 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\bar{y})$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i-\bar{y}x_i-\bar{x}y_i+\bar{x}\bar{y}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{y}\sum_{i=1}^{n}x_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}y_i+n\bar{x}\bar{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y} \\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\bar{y}).\end{aligned}$$

■

1.4 习题

错题回顾 1.1

1.1-1 1+1=

1.1-2 1+2=

1.1-3 1+3=

…

1.5 例题

例 1 设 $0<a<b<1$, 证明:$\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{2ab}$.

解: 构造 $f(x)=\arctan x$. 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\implies\frac{1}{1+\xi^2}=\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}$, $\frac{1}{1+\xi^2}<\frac{1}{1+a^2}<\frac{1}{b^2+a^2}<\frac{1}{2ab}\implies\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{2ab}$.

例 2 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $f''(x)>0$, 证明对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$, 且 $x_1\neq x_2$ 且及 $\lambda(0<\lambda<1)$, 恒有 $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

证明: 不妨设 $x_1<x_2$, 令 $\mu=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=\lambda(x_1-x_2)+x_2$, 故 $x_1<\mu<x_2$. 存在 $\xi_1\in(x_1,\mu)$, $f'(\xi_1)=\frac{f(\mu)-f(x_1)}{(\lambda-1)(x_1-x_2)}$, $\xi_2\in(\mu,x_2)$, $f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(\mu)}{\lambda(x_2-x_1)}$. 由 $f''(x)>0\implies f'(\xi_2)>f'(\xi_1)$. 整理得 $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

书名	作者	出版社	出版时间
微观经济学：现代观点	哈尔 · R. 范里安	上海三联书店 上海人民出版社 格致出版社	2015
宏观经济学	N · 格里高利 · 曼昆	中国人民大学出版社	2020
经济增长	罗伯特.J. 巴罗	格致出版社	2010
投资学	滋维 · 博迪	机械工业出版社	2017
线性代数应该这样学	Sheldon Axler	人民邮电出版社	2016

2 常用命令

2.1 公式标注

$$f'(x) + f(x)\varphi'(x) \xrightarrow{\text{构造}} f(x)e^{\varphi(x)} \tag{1}$$

★ 化简后出现一个共同的系数

2.2 自定义序号列表

常用的几个积分公式：

1. $\int k\,\mathrm{d}x = kx + C$
2. $\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$
3. $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
4. $\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$

2.3 文字标签

3 Tikz 绘图示例

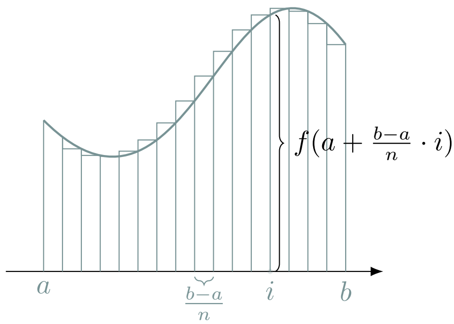
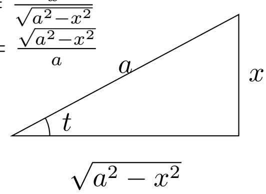


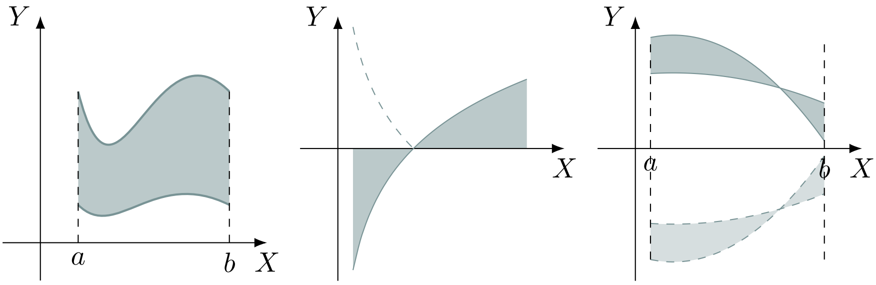
图 1: 黎曼积分的示意图

$\sin t = \frac{x}{a}$

$\tan t = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$\cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$




Y
a
b
X
Y
X
Y
a
b
X