

Indice

1	Introduzione	5
1.1	Motivazione	5
1.2	Definizioni base	5
1.3	Contenuti del corso	6
1.4	Informazioni utili	6
2	Linguaggi regolari	8
2.1	Alfabeti	8
2.1.1	Stringhe	8
2.1.2	Concatenazione di stringhe	8
2.2	Definizione di linguaggio	9
3	Automa a stati finiti deterministico	10
3.1	Elaborazione di stringhe	10
3.1.1	Notazioni semplici per DFA	11
3.1.2	Estensione della funzione di transizione di stringhe . .	12
4	Automa a stati finiti non deterministici	14
4.1	Descrizione informale	15
4.2	Definizione formale	16
4.3	Funzione di transizione estesa	17
4.4	Linguaggio NFA	17
4.5	Equivalenza tra DFA e NFA	18
5	Automa con epsilon-transizioni	21
5.1	Uso delle epsilon-transizioni	21
5.2	Notazione formale di epsilon-NFA	22
5.3	Epsilon chiusure	22
5.4	Transizioni estese di epsilon-NFA	22
5.5	Da epsilon-NFA a DFA	23
6	Espressioni regolari	24
6.1	Operatori lessicali	24
6.2	Proprietà regex	25
6.3	Costruzione di regex	26
6.4	Precedenza degli operatori	27

7	Automa a stati finite e regex	28
7.1	Da DFA a regex	28
7.2	Da regex a automi	33
8	Proprietà dei linguaggi regolari	35
8.1	Pumping Lemma	35
8.2	Chiusura dei linguaggi regolari	37
8.2.1	Chiusura rispetto alla differenza	38
8.2.2	Inversione	39
8.3	Proprietà di decisione	39
8.3.1	Verificare se un linguaggio è vuoto	39
8.3.2	Appartenenza a un linguaggio	40
8.3.3	Equivalenza e minimizzazione di automi	40
9	Grammatiche libere da contesto	42
9.1	Definizione formale di CFG	43
9.2	Derivazione in CFG	43
9.3	Derivazione a sinistra e a destra	44
9.4	Linguaggio di una grammatica	44
9.5	Alberi sintattici	44
9.5.1	Prodotto di un albero sintattico	45
9.5.2	Inferenza, derivazione e alberi sintattici	46
9.6	Ambiguità in grammatiche e linguaggi	47
9.6.1	Rimuovere ambiguità	48
9.6.2	Ambiguità inerente	49
10	Automi a pila	50
10.1	Definizione formale PDA	51
10.2	Descrizioni istantanee	53
10.3	Accettazione per stato finale	54
10.4	Accettazione per pila vuota	54
10.5	Da stack vuota a stato finale	55
10.6	Da stato finale a pila vuota	57
10.7	Equivalenza tra PDA e CFG	58
10.8	Da CFG a PDA	58
10.9	Da PDA a CFG	59

11 PDA deterministici	63
11.1 DPA che accettano per stato finale	64
11.2 DPDA che accettano per la pila vuota	64
11.3 DPDA e non ambiguità	64
12 Proprietà di CFG	66
12.1 Forma normale di Chomsky	66
12.2 Eliminazione di simboli inutili	66
12.3 Eliminazione delle produzioni epsilon	67
12.4 Eliminazione produzioni unità	68
12.5 Sommario	70
12.6 Forma normale di Chomsky, CNF	70
12.7 Pumping lemma per CFL	71
12.8 Applicazione Pumping lemma	73
12.9 Proprietà di chiusura dei CFL	73
12.10 I CFL NON sono chiusi rispetto all'intersezione	74
12.11 Operazioni su linguaggi liberi e regolari	74
12.12 Proprietà di decisione per CFL	76
12.12.1 Verificare se un CFL è vuoto	76
12.12.2 Appartenenza a un CFL	76
12.12.3 Problemi indecidibili per CFL	76
13 Analisi Lessicale e sintattica	78
13.1 The compiler	78
13.1.1 Lexical analysis	79
13.1.2 Parsing	79
13.2 Building a lexer	79
13.3 Building a parser	84
14 Top-down parsing	87
14.1 Recursive descent parser	87
14.2 Predictive parsing	89
14.2.1 LL(1) parser	90
15 Esercitazioni	92
15.1 Esercitazione 21/09/23	92
15.1.1 Costruzione DFA	92
15.1.2 NFA	97

15.2	Esercitazione 28/09/23	99
15.2.1	Pumping lemma	99
15.2.2	Espressioni regolari	100
15.3	Esercitazione 05/10/23	102
15.3.1	CFG	102

1 Introduzione

1.1 Motivazione

Un linguaggio è uno strumento per descrivere come risolvere i problemi in maniera rigorosa, in modo tale che sia eseguibile da un calcolatore. Perché è utile studiare come creare un linguaggio di programmazione?

- non rimanere degli utilizzatori passivi
- capire il funzionamento dietro le quinte di un linguaggio
- domain-specific language (DSL): è un linguaggio pensato per uno specifico problema
- model driven software development: modo complesso per dire UML e simili
- model checking

1.2 Definizioni base

Un linguaggio è composto da:

- lessico e sintassi
- compilatore: parser + generatore di codice oggetto

La generazione automatica di codice può essere dichiarativa lessico (espressioni regolari o automa a stati finiti) o sintassi (grammatiche o automa a pile). Un automa a stati finiti consuma informazioni una alla volta, ne salva una quantità finita. Alcuni esempi di applicazione di automa a stati finiti: software di progettazione di circuiti, analizzatore lessicale, ricerca di parole sul web e protocolli di comunicazione.

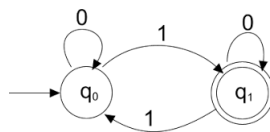


Figura 1: Semplice automa

1.3 Contenuti del corso

- Linguaggi formali e Automi:
 - Automi a stati finiti, espressioni regolari, grammatiche libere, automi a pila, Macchine di Turing, calcolabilità
- Compilatori:
 - Analisi lessicale, analisi sintattica, analisi semantica, generazione di codice
- Logica di base:
 - Logica delle proposizioni e dei predicati
- Modelli computazionali:
 - Specifica di sistemi tramite sistemi di transizione, logiche temporali per la specifica e verifica di proprietà dei sistemi (model checking), sistemi concorrenti (algebre di processi e reti di Petri)

1.4 Informazioni utili

Parte integrante del corso:

- Supporto alla parte teorica usando tool specifici.
 - JFLAP 7.1: <http://www.jflap.org> (automi/grammatiche)
 - Tina 3.7.5: <http://projects.laas.fr/tina> (model checking di sistemi di transizione e reti di Petri)
 - LTSA 3.0: <http://www.doc.ic.ac.uk/ltsa> (sistemi di transizione definiti tramite algebre di processi)
- Nel resto del corso utilizzeremo un ambiente di sviluppo per generare parser/compileri
 - IntelliJ esteso con plug-in ANTLRv4, ultima versione 1.20 (generatore ANTLR: <http://www.antlr.org/>)

Libri di testo suggeriti:

- J. E. Hopcroft, R. Motwani e J. D. Ullman: Automi, linguaggi e calcolabilit , Addison-Wesley, Terza Edizione, 2009. Cap. 1–9
- A. V. Aho, M. S. Lam, R. Sethi e J. D. Ullman: Compilatori: principi tecniche e strumenti, Addison Wesley, Seconda Edizione, 2009. Cap. 1–5
- M. Huth e M. Ryan: Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge University Press, Second Edition, 2004. Cap. 1–3

2 Linguaggi regolari

2.1 Alfabeti

Un *alfabeto* è un insieme finito e non vuoto di simboli, comunemente indicato con Σ . Seguono alcuni esempi di alfabeti:

- $\Sigma = \{0,1\}$ alfabeto binario
- $\Sigma = \{a,b,\dots,z\}$ alfabeto di tutte lettere minuscole
- L'insieme ASCII

2.1.1 Stringhe

Una stringa/parola è un insieme di simboli di un alfabeto, 0010 è una stringa che appartiene $\Sigma = \{0,1\}$.

La *stringa vuota* è una stringa composta da 0 simboli.

La lunghezza della stringa sono il numeri di caratteri che la compongono (non devono essere unici). La sintassi per la lunghezza di una stringa w è $|w|$, quindi $|001| = 3$ oppure $|\epsilon| = 0$ (nota bene, $\epsilon \neq 0$ ma è di lunghezza 0).

Potenze di un alfabeto

Se Σ è un alfabeto si può esprimere l'insieme di tutte le stringhe di una certa lunghezza con una notazione esponenziale: Σ^k denota tutte le stringhe di lunghezza k con simboli che appartengono a Σ .

Per esempio:

$$\Sigma^1 = \{0,1\}$$

$$\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$$

$$\Sigma^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

L'insieme delle stringhe meno quella vuota è segnato come Σ^+ , mentre l'insieme che include la stringa vuota è Σ^* ,

2.1.2 Concatenazione di stringhe

Siano x e y stringhe, dove i è la lunghezza di x e j è la lunghezza di y , la stringa xy è la stringa risultata dalla concatenazione delle stringhe xy di lunghezza $i+j$.

2.2 Definizione di linguaggio

Un insieme di stringhe a scelta $L \subseteq \Sigma^*$ si definisce linguaggio su Σ .

Un modo formale per definire un alfabeto è il seguente $\{w \mid \text{enunciato su } w\}$, che si traduce in "w tale che enunciato su w".

$\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ si traduce in "l'insieme di 0 elevato alla n, 1 alla n tale che n è maggiore o uguale a 1"

3 Automa a stati finiti deterministico

Un automa a stati finiti deterministico consiste in:

1. Un insieme di stati finiti Q
2. Un insieme di simboli di input, Σ
3. Una funzione di transizione, che prende in input uno stato e un simbolo e restituisce uno stato. Tale funzione è spesso indicato con δ ed è usata per rappresentare i archi nella rappresentazione grafica. Ovvero sia q uno stato, a un input allora $\delta(q,a)$ è lo stato p tale che esista un arco da q a p .
4. Uno stato iniziale (naturalmente che appartiene a Q)
5. Un insieme di stati accettati finali F . Questo è un sottoinsieme di Q .

Un automa a stati finiti deterministico è spesso chiamato con l'acronimo DFA e viene può essere rappresentato nella seguente maniera concisa:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

Dove A rappresenta il DFA.

3.1 Elaborazione di stringhe

Per elaborare una stringa è si definisce lo stato iniziale, quello finale e una serie di regole di transizione per poterci arrivare. Se dovessi decodificare la stringa 01 il DFA risulterebbe:

$$A = (Q = \{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$$

I stati sono i seguenti:

$\delta(q_0, 1) = q_0$: leggo come primo stato 1, nessun progresso fatto

$\delta(q_0, 0) = q_2$: leggo come primo stato 0, posso andare avanti e cercare un 1

$\delta(q_2, 1) = q_1$: leggo 1 dopo lo 0, ho trovato la stringa

$\delta(q_2, 0) = q_2$: leggo 0 dopo lo 0, non ho fatto progresso

Nota bene: questa è una notazione arbitraria del libro, q_1 e q_2 si possono invertire.

3.1.1 Notazioni semplici per DFA

Diagramma di transizione

Dato un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un suo diagramma di transizione è composto da:

- Ogni stato Q è un nodo
- Ogni funzione δ è una freccia
- La freccia Start che denota il primo input
- Gli stati accettati F hanno un doppio cerchio

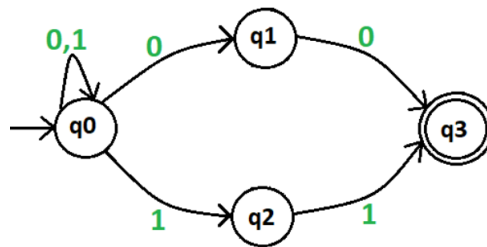


Figura 2: Diagramma di transizione

Tabelle di transizione

Una tabella di transizione è costituita nelle righe dalle funzioni δ e nelle colonne dagli input. Ogni incrocio equivale a uno stato della funzione δ con un input generico a .

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_2	q_0
$*q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

Tabella 1: Esempio di tabella

La freccia è lo start e l'asterisco è lo stato finale.

3.1.2 Estensione della funzione di transizione di stringhe

Allo scopo di poter seguire una sequenza di input ci serve definire una funzione di transizione estesa. Se δ è una funzione di transizione, chiameremo $\hat{\delta}$ la sua funzione estesa. La funzione estesa prende in input q e una stringa w e ritorna uno stato p .

Ogni stato viene calcolato grazie allo stato esteso precedente:

$$\hat{\delta}(q, w) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$$

Esempio

$L = \{ w \mid w \text{ ha un numero pari di } 0 \text{ e di } 1 \}$

Nota bene: 0 (numero di simboli) è pari quindi conta come stato accettato, ed è l'unico stato accettato.

q_0 : 0 e 1 sono pari

q_1 : 0 pari 1 dispari

q_2 : 1 pari 0 dispari

q_3 : 0 dispari 1 dispari

$$A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_0\})$$

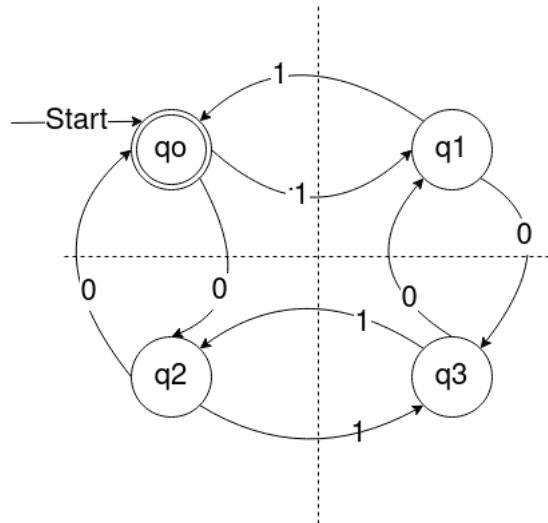


Figura 3: Diagramma

	0	1
$\rightarrow * q_0$	q ₂	q ₁
q ₁	q ₃	q ₀
q ₂	q ₀	q ₃
q ₃	q ₁	q ₂

Tabella 2: Esempio funzioni

Ora applichiamo le funzione di transizione estesa per verificare che 110101 abbia 0 e 1 pari:

- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0$
- $\hat{\delta}(q_0, 1) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \epsilon), 1) = \delta(q_0, 1) = q_1$
- $\hat{\delta}(q_0, 11) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 1), 1) = \delta(q_1, 1) = q_0$
- $\hat{\delta}(q_0, 110) = \delta(\hat{\delta}(q_1, 11), 0) = \delta(q_0, 1) = q_2$
- $\hat{\delta}(q_0, 1101) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 110), 1) = \delta(q_2, 1) = q_3$
- $\hat{\delta}(q_0, 11010) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 1101), 0) = \delta(q_3, 0) = q_1$
- $\hat{\delta}(q_0, 110101) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 11010), 1) = \delta(q_1, 1) = q_0$

A ogni simbolo aggiunto posso usare la funzione estesa precedente per calcolare il prossimo stato, in questo caso la sequenza ha un numero pari di 0 e 1.

4 Automa a stati finiti non deterministici

Un NFA (nondeterministic finite automaton) può trovarsi contemporaneamente in diversi stati. L'automa "scommette" sul input su certe proprietà dell'input.

I NFA sono spesso più succinti e facili da definire rispetto ai DFA, un DFA può avere un numero di stati addirittura esponenziale rispetto a un NFA. Ogni NFA può essere convertito in un DFA.

4.1 Descrizione informale

A differenza di un DFA, una funzione di stato in un NFA può restituire 0 o più stati. Immaginiamo di dover identificare se una stringa finisce con 01. Di seguito il diagramma di transizione sarà il seguente. Come è possibile

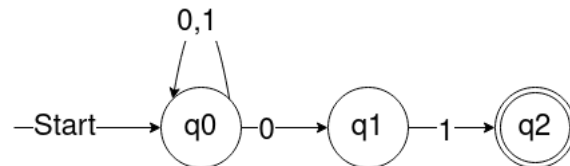


Figura 4: NFA che accetta stringa che finisce con 01

notare q_0 può restituire due stati se riceve uno 0. Il NFA esegue molteplici stadi alla ricerca del pattern (simile a un processo che si moltiplica).

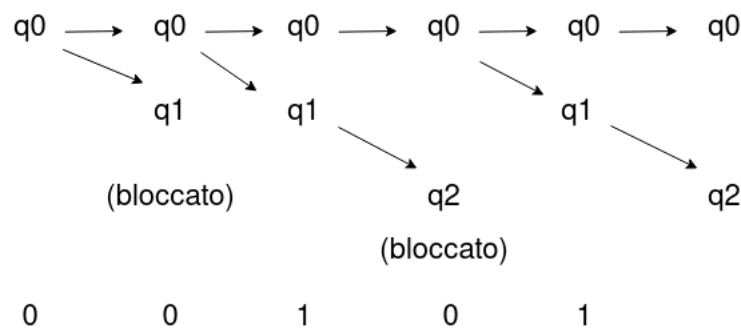


Figura 5: Gli stati del NFA

Ogni volta che il NFA accetta uno stato 0 crea due processi, un q_1 e q_0 . A ogni successivo input tutti i processi vanno avanti, nel nostro caso il q_1 "muore". Al secondo giro viene creato q_1 che muore alla quarta iterazione perché non è l'ultimo simbolo. Durante la quarta iterazione nasce q_1 che alla quinta ci porta uno stato accettato.

4.2 Definizione formale

Formalmente un NFA si definisce come un DFA.

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

1. Un insieme di stati finiti Q
2. Un insieme di simboli di input, Σ
3. Una funzione di transizione, che prende in input uno stato e un simbolo e restituisce ***un insieme di stati***. Questa è l'unica differenza rispetto al DFA, dove ci viene restituito un singolo stato.
4. Uno stato iniziale (naturalmente che appartiene a Q)
5. Un insieme di stati accettati finali F . Questo è un sottoinsieme di Q .

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	\emptyset	$\{q_2\}$
$*q_2$	\emptyset	\emptyset

Tabella 3: Tabella di transizione di una NFA che accetta una stringa che finisce con 01

L'unica differenza con una tabella DFA è che negli incroci ci sono dei insiemi di stati di output (singoletto quanto è uno solo), mentre se la transizione non esiste viene segnata con \emptyset .

4.3 Funzione di transizione estesa

Come per i DFA bisogna prendere la funzione di transizione e renderla estesa. In questo caso lo stato precedente può ritorna un insieme di stati, quindi bisogna fare l'unione di questi. La funzione estesa di δ si chiamerà $\hat{\delta}$.

$$\bigcup_{x=2}^k \delta(p_i, a) = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$$

Usiamo $\hat{\delta}$ per calcolare se la stringa 00101 finisce con 01.

1. $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$
2. $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
3. $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
4. $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$
5. $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
6. $\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

Abbiamo un risultato positivo, q_2 mentre q_0 viene scartato

4.4 Linguaggio NFA

Come abbiamo visto sopra, il fatto di avere uno stato non accettabile al termine dell'operazione non significa che non abbia avuto successo.

Formalmente se $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ è un NFA allora:

$$L(A) = \{w | \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

In parole povere $L(A)$ è l'insieme delle stringhe w in Σ^* tale che $\hat{\delta}(q_0, w)$ contenga almeno uno stato accettabile.

4.5 Equivalenza tra DFA e NFA

Di solito è più facile ottenere un NFA piuttosto che un DFA per un linguaggio. Nel migliori dei casi un DFA ha circa tanti stati quanti un NFA, ma più transizioni. Nel caso peggiore un DFA ha 2^n stati, mentre un NFA n .

Come detto in precedenza ogni NFA può essere ricondotto a un DFA, questo andrà dimostrato costruendo un DFA per insiemi a partire da un NFA.

Dato un NFA $A = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ possiamo costruire un DFA

$A = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ tale che $L(D)=L(N)$ (che i linguaggi sono uguali).

Si noti che i due linguaggi condividono lo stesso alfabeto.

Gli altri D componenti sono fatti nel seguente modo:

- Q_D è formato da un insieme di insiemi di Q_N , in termini formali Q_D è l'insieme potenza di Q_N . Quindi se Q_N ha n stati allora Q_D ha 2^n stati, questo è vero nella teoria, nella pratica gli stati non raggiungibili non contano quindi tendono a essere meno di 2^n .
- F_D è l'insieme dei sottoinsiemi di S di Q_N tale che $S \cap F_N \neq \emptyset$. F_D è quindi formato dagli sottoinsiemi di stati N che includono almeno uno stato accettante.
- Per ogni insieme $S \subseteq Q_N$ e per ogni simbolo a in Σ ,

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \text{ in } S} \delta_N(p, a)$$

Ovvero l'insieme $\delta_D(S, a)$ è calcolato tramite l'unione di tutti gli insiemi p in S .

La tabella precedente era deterministica nonostante fosse formata da insiemi, *ogni insieme è uno stato*, e non sono insiemi di stati. Per rendere più chiara l'idea possiamo cambiare notazione.

Tra gli 8 stati presenti in tabella possiamo raggiungere: B, E e F. Gli altri stati sono irraggiungibili o non esistenti. È possibile evitare di costruire questi stati compiendo una "valuta differita".

Trattando i l'insieme di stati come un unico stato composto da un insieme è possibile riscrivere la DFA in questo modo:

	0	1
\emptyset	\emptyset	\emptyset
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	\emptyset	$\{q_2\}$
$*\{q_2\}$	\emptyset	\emptyset
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*\{q_1, q_2\}$	\emptyset	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Tabella 4: Stringa che termina con 01, NFA \rightarrow DFA

	0	1
A	A	A
$\rightarrow B$	E	B
C	A	D
*D	A	A
E	E	F
*F	E	B
*G	A	D
*H	E	F

Tabella 5: Stringa che termina con 01, notazione nuova

Teorema

Se $D = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ è il DFA trovato per costruzione a partire dal NFA $N = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ allora $L(D)=L(N)$.

Teorema

Un linguaggio L è accettato da un DFA se e solo se L è accettato da un NFA.

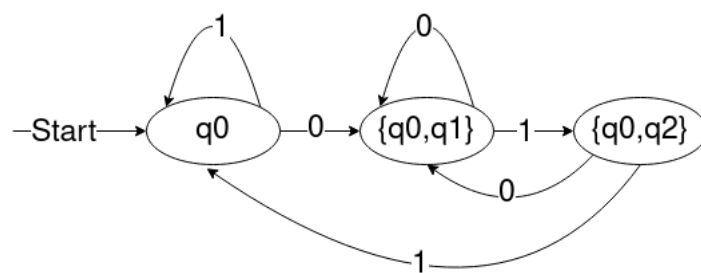


Figura 6: Grafico DFA convertito da NFA

5 Automa con epsilon-transazioni

Un'estensione degli automa è la capacità di poter ammettere come input la stringa vuota ϵ . È come se l'NFA compisse una transizioni spontaneamente. Tale NFA si chiamerà ϵ -NFA

5.1 Uso delle epsilon-transizioni

L'esempio di seguito tratta le ϵ come invisibili, possono mutare lo stato ma non sono contante nella catena.

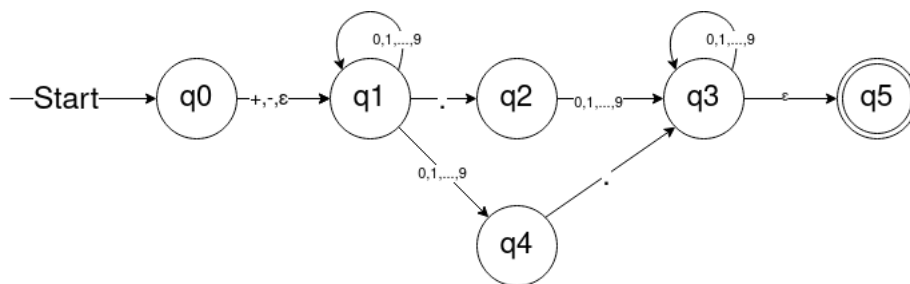


Figura 7: epsilon-NFA che accetta numeri decimali

L' ϵ -NFA in figura accetta numeri decimali formati da:

1. un segno $+$, $-$ facoltativo
2. una sequenza di cifre
3. un punto decimale
4. una seconda sequenza di cifre

È possibile avere input vuoti prima della virgola $\delta(q_1, \epsilon) = q_2$ e dopo la virgola $\delta(q_4, \epsilon) = q_3$ ma non entrambi. Il segno è facoltativo $\delta(q_0, \epsilon) = q_1$.

In q_3 l'automa può "scommettere" che la sequenza sia finita oppure può andare avanti a leggere.

5.2 Notazione formale di epsilon-NFA

La definizione formale di un ϵ -NFA è uguale a quella di un NFA, va solo specificate le informazioni relative alla transizione ϵ .

Una ϵ -NFA è definita con $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, dove δ è una funzione di transizione che richiede come input:

1. uno stato Q
2. un elemento $\Sigma \cup \{\epsilon\}$, ovvero un simbolo di input oppure il simbolo ϵ .
Questa distinzione viene fatta per evitare confusione.

ϵ -NFA per riconoscere un numero decimale

$$E = (\{q_0, q_1, \dots, q_5\}, \{., +, -, 1, \dots, 9\}, \delta, q_0, \{q_5\})$$

	ϵ	$+, -$	$.$	$0, 1, \dots, 9$
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	\emptyset	\emptyset
q_1	\emptyset	\emptyset	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_2	\emptyset	\emptyset	\emptyset	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	\emptyset	\emptyset	$\{q_3\}$
q_4	\emptyset	\emptyset	$\{q_3\}$	\emptyset
q_5	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset

Tabella 6: Tabella di transizione per un numero decimale

5.3 Epsilon chiusure

Un ϵ -chiusura è un cammino fatto solo di transizioni ϵ . Formalmente tale stato si scrive $\text{ENCLOSE}(q) = \text{insieme di stati}$.

5.4 Transizioni estese di epsilon-NFA

Grazie alle ϵ -chiusure possiamo definire cosa significa accettare un input.

Supponiamo $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un σ -NFA, $\hat{\delta}(q, w)$ è la funzione di transizione estesa le cui etichette concatenate descrivono la stringa w .

BASE $\hat{\delta}(q, w) = \text{ENCLOSE}(q)$, se l'etichetta è ϵ posso seguire solo cammini ϵ , definizione di ENCLOSE .

INDUZIONE Supponiamo w abbia forma xa , dove a è l'ultimo simbolo, che non può essere ϵ perché non appartiene a Σ :

1. Poniamo $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ in questo modo tutti i cammini p_i sono tutti gli stati raggiungibili da q a x . Questi stati possono terminare con ϵ oppure contenere altre ϵ transizioni
2. Sia $\bigcup_{i=1}^k \delta(p_i, a)$ l'insieme $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, ovvero tutte le transizioni da a a x .
3. Infine $\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{j=1}^m ENCLOSE(r_j)$, questo chiude gli archi rimasti dopo a

Forma contratta

$$\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q, x)} \left(\bigcup_{t \in \delta(p, a)} ENCLOSE(t) \right)$$

Il linguaggio accettato è $L(E) = \{w | \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$

5.5 Da epsilon-NFA a DFA

Dato un ϵ -NFA possiamo costruire un equivalente DFA per sottoinsiemi. Sia $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ un ϵ -NFA il suo equivalente DFA è

$$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_0, F_D)$$

ovvero:

1. Q_D è l'insieme di sottoinsiemi Q_E . Ogni stato accessibile in D è un sottoinsieme ϵ -chiuso di Q_E , in termini formali $S \subseteq Q_E$ tale che $S = ENCLOSE(S)$.
2. $q_D = ENCLOSE(q_0)$
3. F_D contiene almeno uno stato accettante in E .
 $F_D = \{S | S \text{ è in } Q_D \text{ e } S \cap F_E \neq \emptyset\}$
4. $\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q, x)} \left(\bigcup_{t \in \delta(p, a)} ENCLOSE(t) \right)$

Teorema Un linguaggio è linguaggio L è accetto da un ϵ -NFA se e solo se è accettato da un DFA.

6 Espressioni regolari

Le espressioni regolari definiscono gli stessi linguaggi definiti dai vari automi: *linguaggi regolari*. A differenza degli automi, le espressioni regolari descrivono linguaggi in maniera dichiarativa. Per questo motivo le espressioni regolari sono molto diffuse, per esempio nel comando unix *grep* oppure negli analizzatori lessicali.

6.1 Operatori lessicali

L'espressione lessicale 01^*+10^* denota il linguaggio 0 seguito da qualsiasi numero di 1 oppure 1 seguito da qualsiasi numero di 0.

Per poter definire le operazioni sulle regex (sinonimo di espressione regolare) dobbiamo definire tali operazioni sui linguaggi che esse rappresentano:

1. *Unione* di due linguaggi L ed M, $L \cup M$, indica tutte le stringhe che appartengono ad L e ad M oppure a entrambi.
2. *Concatenazione* di due linguaggi L ed M è l'insieme di stringhe formate dalla concatenazione di una qualsiasi stringa L con una qualsiasi stringa M. Tale operazione è indicata così: $L \cdot M$ oppure semplicemente LM. Per $L = \{001, 10, 111\}$ e $M = \{\epsilon, 001\}$ $LM = \{001, 10, 111, 001001, 10001, 111001\}$
3. *Chiusura* (o *star* o chiusura di Kleene) di un linguaggio L, indicata come L^* , rappresenta l'insieme delle stringhe che si possono formare tramite concatenazione e ripetizione di qualsiasi stringa in L. Nel caso $L = \{0, 1\}$ L^* rappresenta l'alfabeto binario, qualsiasi combo di 0 e 1. Nel caso $L = \{0, 11\}$ L^* rappresenta qualsiasi stringa che abbia una o più coppie di 1, NB 011 è valido ma come 01111, mentre 101 non è valido, non abbiamo né la stringa 10 né la stringa 01. Formalmente L^* è l'unione infinita $\bigcup_{i \geq 0} L^i$ dove $L^0 = \{\epsilon\}$, $L^1 = L$, $L^i = LL \dots L$.

6.2 Proprietà regex

- $L \cup M = M \cup L$ L'unione è commutativa
- $(L \cup M) \cup N = L \cup (M \cup N)$ L'unione è associativa
- $(LM)N = L(MN)$ La concatenazione è associativa ($LM \neq ML$)
- $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
- $\{\epsilon\} \cup L = L \cup \{\epsilon\} = L$
- $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$
- $L(M \cup N) = LM \cup LN$
- $(M \cup N)L = ML \cup NL$
- $L \cup L = L$
- $\emptyset^* = \{\epsilon\}, \{\epsilon\}^* = \{\epsilon\}$
- $L^+ = LL^* = L^*L, L^* = L^* \cup \{\epsilon\}$

6.3 Costruzione di regex

Servono modi per raggruppare le espressioni regolari, in questo caso vengono usati operatori algebrici comuni. Di seguito verranno definite regex lecite E con il loro corrispondente linguaggio $L(E)$.

BASE

1. le costanti ϵ e \emptyset sono regex, rispettivamente del linguaggio $\{\epsilon\}$ e $\{\emptyset\}$, in altri termini $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$ e $L(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
2. Se a è un simbolo allora \mathbf{a} è una regex che denota il linguaggio $\{a\}$, ovvero $L(\mathbf{a}) = \{a\}$. (si usa il grassetto per distinguere simboli da regex)
3. Una lettera maiuscola qualsiasi, di solito L , viene usata per indicare un linguaggio arbitrario

INDUZIONE

1. Data E ed L regex, allora $E + L$ è una regex che indica l'unione dei due linguaggi $L(E)$ e $L(L)$, in altre parole $L(E+F) = L(E) \cup L(F)$
2. Date E e F due regex, EF indica la concatenazione tra i due linguaggi $L(E)$ e $L(F)$, in altri termini $L(EF) = L(E)L(F)$.
3. Data E una regex, E^* indica la chiusura del linguaggio $L(E)$, in altri termini $L(E^*) = (L(E))^*$
4. Data E una regex, allora anche (E) è una regex valida che appartiene sempre al linguaggio E , in termini formali $L((E)) = L(E)$

Esempio di regex

Si crei una regex che descriva un linguaggio che è fatto di 0 e 1 alternati. Intuitivamente si potrebbe provare $\mathbf{01}^*$, che è errato, questo indica tutte le stringhe che hanno uno 0 e un numero arbitrario di 1. $(\mathbf{01})^*$ è corretto, però indica per forza un linguaggio di 01 alternati, quindi 101010 non sarebbe valido

Uniamo regex per descrivere il caso: $(\mathbf{10})^*$ 10 alternato, $\mathbf{0(10)}^*$ 10 con 0 all'inizio, $\mathbf{1(01)}^*$ 01 con 1 all'inizio, in conclusione

$$(\mathbf{01})^* + (\mathbf{10})^* + \mathbf{0(10)}^* + \mathbf{1(01)}^*$$

Un modo più contratto sarebbe quello di aggiungere un 1 facoltativo all'inizio e uno 0 facoltativo alla fine

$$(\epsilon + \mathbf{1})(\mathbf{01})^*(\epsilon + \mathbf{0})$$

6.4 Precedenza degli operatori

1. Star ha la precedenza massima
2. concatenazione
3. unione

Naturalmente si possono usare parentesi per decidere il proprio ordine e inoltre è consigliato farlo anche se non fosse necessario per rendere più chiara l'espressione.

7 Automa a stati finite e regex

Abbiamo visto che le regex e gli automi a stati finiti possono descrivere gli stessi linguaggi, va solo dimostrato che formalmente.

Dobbiamo dimostrare che:

1. Ogni linguaggio definito da un automa è definito anche da una regex, useremo un DFA per comodità
2. Ogni linguaggio definito da una regex è definita da un automa, useremo un ϵ -NFA per comodità

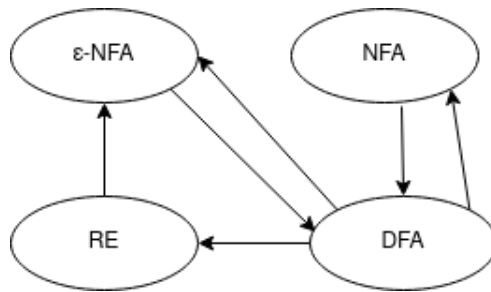


Figura 8: Conversioni

7.1 Da DFA a regex

Teorema

Se $L = L(A)$ per un DFA A , allora esiste una regex R tale che $L = L(R)$.

Il procedimento formale e matematico è formato dall'espansione di ogni singolo stato tramite la formula:

$$R_{ij}^k = R_{ij}^{k-1} + R_{ik}^{k-1}(R_{kk}^{k-1}R_{kj}^{k-1})$$

In parole povere sto calcolando l'espressione regolare da uno stato j a uno stato i k volte, una per ogni stato.

Questo procedimento è molto lungo, perché l'espressione va effettuata per ogni transizione, unita e poi ridotta.

Tenendo però a mente questa formalità è possibile usare un metodo più gestibile, ovvero *l'eliminazione per stati*.

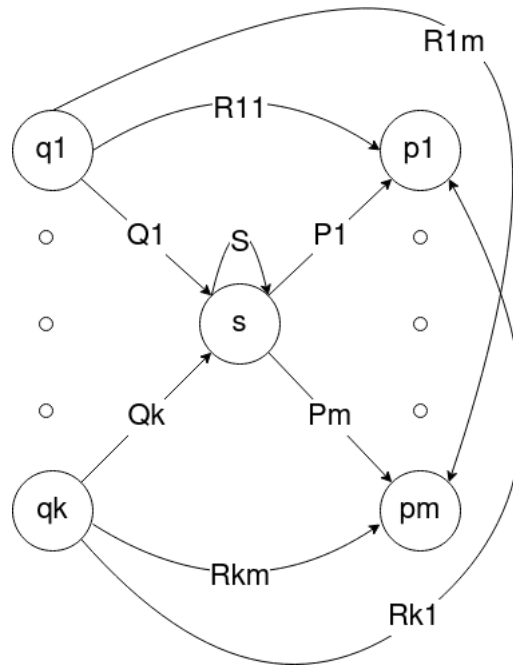


Figura 9: Eliminazione per stati

- s è lo stato generico che sta per essere eliminato
- q_1, q_2, \dots, q_k sono i k stati precedenti a s
- Q_i sono tutte le transizioni precedenti
- p_1, p_2, \dots, p_k sono i k stati successivi a s
- P_i sono tutte le transizioni successive
- R_{ij} sono tutte le transizioni tramite regex, bisogna definirne una per ogni direzione ij ma se non dovesse esistere basterà scrivere \emptyset

A questo punto possiamo iniziare a costruire l'espressione regolare a partire dall'automa.

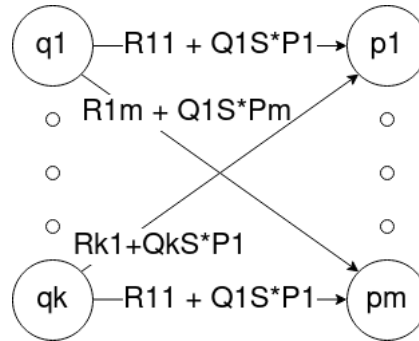


Figura 10: Eliminazione di s

1. Bisogna eliminare tutti gli stati intermedi ad eccezione di q_0 .
2. Se $q_0 \neq q_1$ allora questo stato può essere espresso come $E_q = (R + SU^*T)^*SU^*$, un cammino generico illustrato in figura.

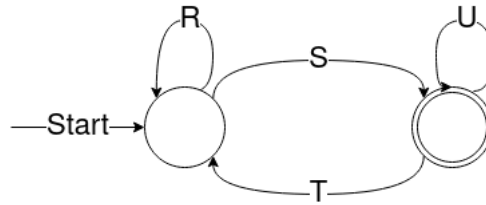


Figura 11: Automa generico 2 stati

3. Se q_0 è accettante allora la regex è data da R^*

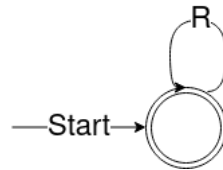


Figura 12: Automa generico 1 stato

Dato un NFA come segue.

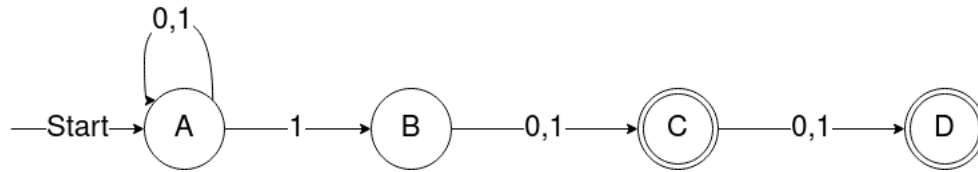


Figura 13: NFA esempio

Esprimiamo le sue funzioni di transizioni come regex

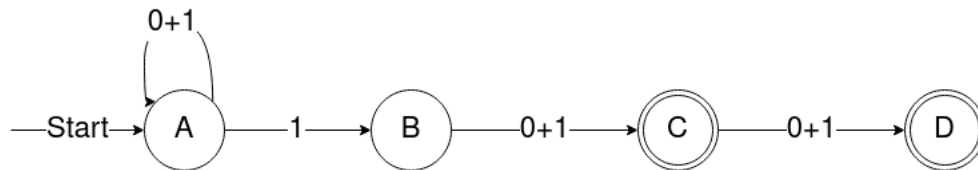


Figura 14: NFA con archi regex

Il primo stato che rimuoviamo è B, applicando la formula. $R_{11} + Q_1 S^* P_1$, in questo caso risulta $\emptyset + 1\emptyset^*(0+1)$, che si può ridurre in $1(0+1)$. NB \emptyset^* equivale a ϵ , non annulla le regex, mentre \emptyset sì

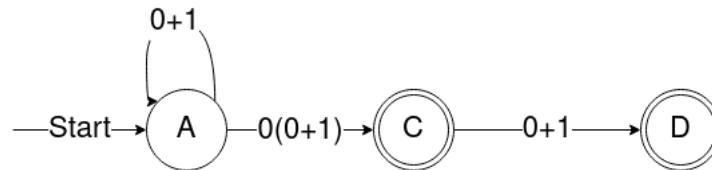


Figura 15: B rimosso

Eliminiamo C

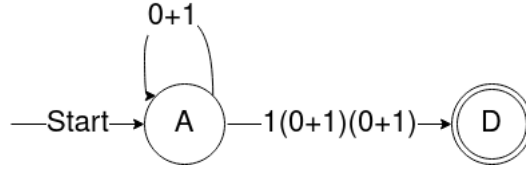


Figura 16: C rimosso

Ora possiamo applicare $(R + SU^*T)^*SU^*$, quindi

- $R=(0+1)$
- $S=1(0+1)(0+1)$
- $T=\emptyset$
- $U=\emptyset$.

$$((0+1) + 1(0+1)(0+1)\emptyset^*\emptyset)^*1(0+1)(0+1)\emptyset$$

Possiamo semplificare U^* perché è equivalente a ϵ e possiamo eliminare SU^*T perché T è \emptyset .

$$(0+1)^*1(0+1)(0+1)$$

Questo è lo stato accettante D, è necessario calcolare lo stato accettante C. Ripartendo dalla fig.15 applichiamo di nuovo E_Q ottenendo $(0+1)^*1(0+1)$. L'espressione finale è data dalla **somma** delle 2 espressioni.

$$(0+1)^*1(0+1) + (0+1)^*1(0+1)(0+1)$$

7.2 Da regex a automi

Teorema Per ogni rex R possiamo costruire un ϵ -NFA A tale che $L(R)=L(A)$. Questo si dimostra per induzione strutturale, prendendo come base gli automi ϵ , \emptyset e a .



Figura 17: Stati base

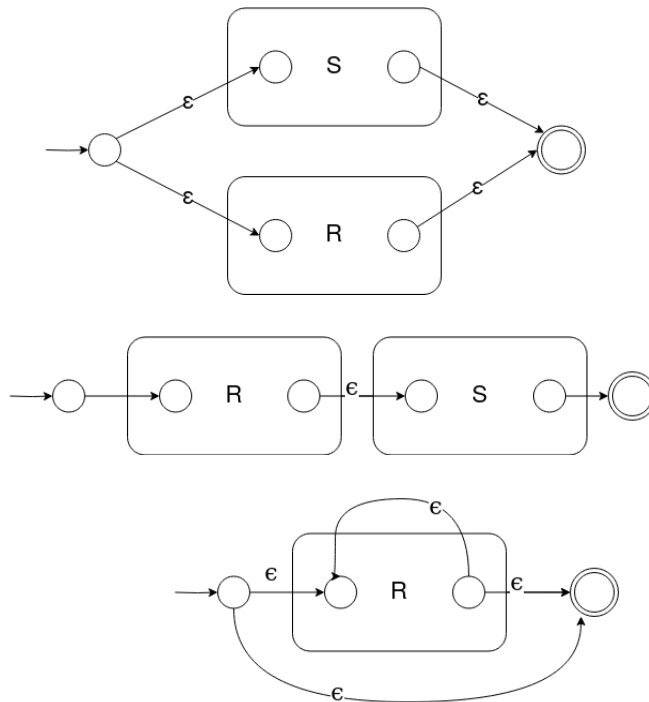


Figura 18: $R+S$, RS e R^*

$R+S$ significa che viene percorso 1 dei 2 espressioni. RS significa che una volta percorso R , quello diventa lo stato iniziale di S . R^* va in loop su se stesso.

Usando i blocchi precedenti convertiamo $(0+1)^*1(0+1)$

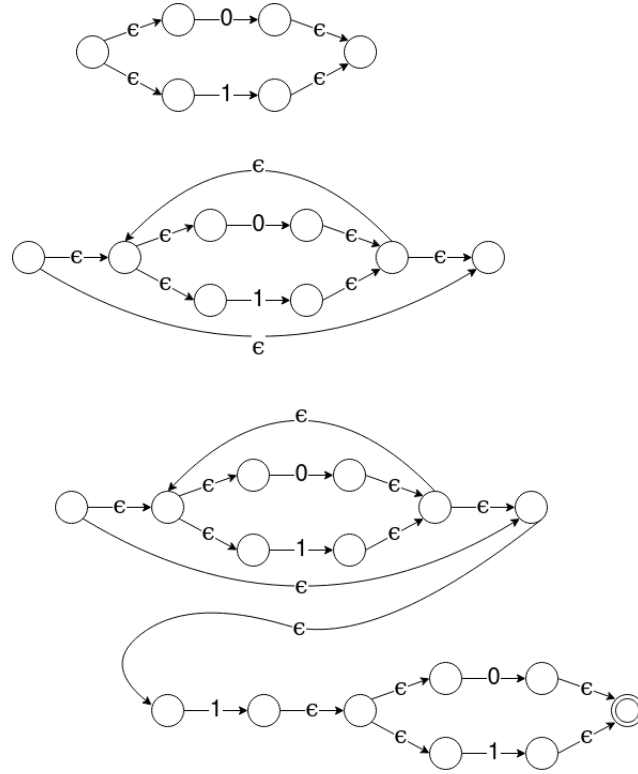


Figura 19: $R+S$, RS e R^*

8 Proprietà dei linguaggi regolari

- *Pumping Lemma*: Ogni linguaggio regolare soddisfa il pumping di lemma
- *Proprietà di chiusura*: Possibilità di costruire un nuovo automa a partire da altri automi, seguendo specifiche operazioni
- *Proprietà di decisione*: Analisi di automi, come l'equivalenza
- *Tecniche di minimizzazione*: Possiamo ridurre un automa

8.1 Pumping Lemma

Un linguaggio non è detto che sia regolare.

Immaginiamo di avere un linguaggio $L_{01} = \{0^n 1^n | n \geq 1\}$. Questo è un linguaggio che accetta una stringa con tanti 1 quanti 0. Perché questo linguaggio possa essere un DFA deve avere un numero finito di stati, diciamo k . Quindi dopo $k + 1$ simboli, $\epsilon, 0, 00, \dots, 0^k$ ci troviamo in un qualche stato. Poiché gli stati sono limitati esistono 2 strade diverse per cui ci troviamo nello stesso stato, chiamiamoli 0^j e 0^i .

Ora immaginiamo dallo stato j di iniziare a leggere 1, l'automa deve fermarsi quando ha letto j quantità di 1, ma non può farlo perché non ricorda lo stato, potrebbe finire dopo i quantità di 1, L_{01} non è regolare.

Teorema Sia L un linguaggio regolare, allora esiste una costante n tale che, per ogni stringa w in L dove $|w| \geq n$ possiamo scomporre w in 3 stringhe $w = xyz$ tale che:

1. $y \neq \epsilon$
2. $|x, y| \leq n$
3. per ogni $k \geq 0$ anche xy^kz è in L

Ovvero c'è una stringa non vuota replicabile da qualche parte, senza uscire dal linguaggio.

Dimostrazione Supponiamo che L sia regolare. Allora $L = L(A)$ e supponiamo che A abbia n stati. Ora consideriamo una stringa w dove $w = a_1 a_2 \dots a_m$ $m \geq n$ e ogni a_i è un simbolo di input. Definiamo la sua funzione $\delta(a_1, a_2, \dots, a_n)$ che descrivere tutte le p_i transizioni, e $q_0 = p_0$.

Per il principio della piccioniata tutti gli stati non possono essere distinti, quindi esistono due stati p_i e p_j dove $0 \leq i \leq j \leq n$ tale che $p_i = p_j$. Possiamo scomporre w in $w=xyz$:

1. $x = a_1, a_2, \dots, a_i$
2. $y = a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_j$
3. $x = a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_m$

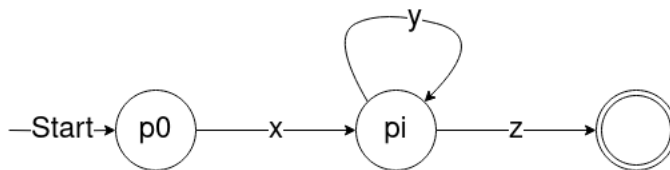


Figura 20: A un certo punto i stati si ripetono

Se $k=0$ siamo allo stato accettante, se $k \geq 0$ allora dobbiamo necessariamente fare dei loop, perché l'input è xy^kz .

8.2 Chiusura dei linguaggi regolari

Sia L e M due linguaggi regolari allora i seguenti sono a loro volta linguaggi regolari.

- *Unione:* $L \cup M$
- *Intersezione:* $L \cap M$
- *Complemento:* N
- *Differenza:* $L \setminus M$
- *Inversione:* $LR = \{wR : w \in L\}$
- *Chiusura:* L^*
- *Concatenazione:* $L \cdot M$

Teorema Sia L e M linguaggi regolari allora anche $L \cup M$ è un linguaggio regolare.

Dimostrazione L ed M sono linguaggi descritti dalle espressioni regolari S ed R , quindi $L=L(S)$ e $M=L(R)$ quindi $L \cup M=L(R+S)$.

Teorema Se L è un linguaggio regolare sull'alfabeto Σ allora anche $\bar{L} = \Sigma^* - L$.

Dimostrazione Sia $L=L(A)$ per un DFA $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, allora $\bar{L}=L(B)$ dove B è il DFA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$, quindi B ha gli stati accetanti opposti a quelli di A . In questo caso l'unico modo per cui w è in $L(B)$ se e solo se $\delta(q_0, w)$ è in $Q - F$, ovvero **non** è in $L(A)$.

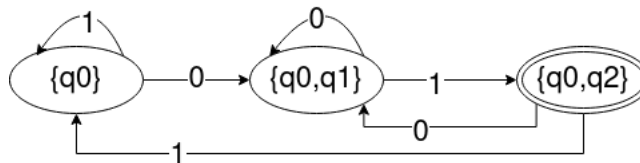


Figura 21: Diagramma di A

Il diagramma di B risulta opposto

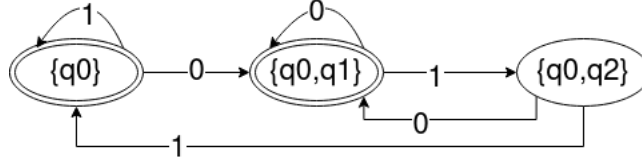


Figura 22: Diagramma di B

Teorema 4.8. Se L e M sono regolari, allora anche $L \cap M$ è regolare.

Dimostrazione Le 3 operazioni booleane sono interdipendenti, quindi possiamo usare le due precedenti per dimostrare l'Intersezione

$$L \cap M = \overline{\overline{L} \cup \overline{M}}$$

Dimostrazione alternativa Sia L il linguaggio $L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_0, F_L)$ e M il linguaggio $M = (Q_M, \Sigma, \delta_M, q_0, F_M)$ assumiamo per semplicità che siano dei DFA. Se A_L passa da p a s e A_M passa da q a t (sono tutti stati) allora $A_{L \cap M}$ passerà da (p, s) a (q, t) quando legge una stringa a . Formalmente il linguaggio risultante dall'intersezione diventa

$$A = (Q_M \times Q_L, \Sigma, \delta_{M \cap L}, (q_M, q_L), F_L \times F_M)$$

Si può dimostrare che $\hat{\delta}((q_M, q_L), w) = (\hat{\delta}(q_M, w), \hat{\delta}(q_L, w))$, questo perché A accetta solo quando entrambi gli stati sono accettanti, quindi accetta per forza anche l'intersezione.

8.2.1 Chiusura rispetto alla differenza

Teorema Sia L e M dei linguaggi regolari allora anche $L - M$ è un linguaggio regolare

Dimostrazione $L - M = L \cap \overline{M}$, ma sappiamo che \overline{M} è regolare e l'intersezione di 2 linguaggi è regolare, quindi $L - M$ è anche esso regolare.

8.2.2 Inversione

L'inversione di una stringa a_1, a_2, \dots, a_n è la stringa a_n, \dots, a_2, a_1 questa stringa la denotiamo come w^R e notiamo che $\epsilon^R = \epsilon$.

Un linguaggio L^R inverso di L presenta tutte le stringhe al suo interno inverse. Se L è un linguaggio regolare allora lo è anche L^R .

8.3 Proprietà di decisione

Questi non scontanti che vanno affrontate:

- Un linguaggio descritto è vuoto?
- Una stringa appartiene al linguaggio?
- Due linguaggi equivalenti?

8.3.1 Verificare se un linguaggio è vuoto

Se il linguaggio A è rappresentato da un automa finito posso attraversare tutti i nodi, se trovo uno stato accettante allora il linguaggio **non** è vuoto. Quest'operazione richiede $O(n^2)$ perché è un semplice attraversamento di grafo.

Se iniziamo da un espressione regolare, possiamo trasformarla in un ϵ -NFA e poi effettuare i cammini a costo $O(n)$.

È possibile anche determinare se il linguaggio è vuoto in base alla regex direttamente. Se il linguaggio non ha \emptyset sicuramente non può essere vuoto, altrimenti posso determinarlo ricorsivamente seguendo le regole algebriche delle regex.

Di seguito elenco i casi:

- $R = \emptyset$. $L(\emptyset)$ è vuoto
- $R = \epsilon$. $L(\epsilon)$ **non** è vuoto
- $R = a$ (qualsiasi stringa a) $L(a)$ non è vuoto
- $R = R_1 + R_2$. $L(R)$ è vuoto se sia $L(R_1)$ che $L(R_2)$ siano vuoti
- $R = R_1 R_2$. $L(R)$ è vuoto se $L(R_1)$ o $L(R_2)$ è vuoto
- $R = R_1^*$. $L(R)$ non è mai vuoto, al massimo è ϵ
- $R = R_1$. $L(R)$ è vuoto solo se $L(R_1)$ è vuoto, sono lo stesso linguaggio

8.3.2 Appartenenza a un linguaggio

Per controllare se una qualsiasi stringa $w \in L(A)$ per un DFA è sufficiente simulare w su A , se $|w| = n$ il tempo risulta $O(n)$.

Se A è un NFA e ha s stati, allora $O(ns^2)$, vale lo stesso epr ϵ -NFA.

Se $L=L(R)$ è una regex, la converto in ϵ -NFA ovvero $O(ns^2)$

8.3.3 Equivalenza e minimizzazione di automi

Dobbiamo esplorare la possibilità di dire che 2 DFA sono equivalenti, un modo per farlo è minimizzarli, se sono equivalenti basterà cambiare etichette finché non coincidono.

Iniziamo definendo cosa rende equivalenti 2 stati p e q . Data una stringa w , p e q sono equivalenti se $\hat{\delta}(q, w)$ e $\hat{\delta}(p, w)$ sono entrambi accentanti oppure non accentanti.

Nel caso in cui uno sia accentante e l'altro no, allora si dicono distinti. NB. 2 stati equivalenti non ci dicono niente sulla stringa w e non ci dice se i due stati sono lo stesso.

Possiamo raggruppare le nostre distinzioni degli stati in una tabella, tramite l'algoritmo *riempit - tabella*.

B	x			
C		x		
D		x		
E	x		x	x
	A	B	C	D

Figura 23: Algoritmo riempi tabella

Ogni x è uno stato distinguibile, un quadrato vuoto significa stati equivalenti.

Per testare se 2 linguaggi L e M sono equivalenti dobbiamo:

- Convertire L e M in DFA

- Costruire il DFA unione dei 2 linguaggi
- Se l'algoritmo dice che i 2 stati iniziali sono equivalenti allora $L=M$, altrimenti $L \neq M$

Partendo da 2 DFA costruisco un DFA B che ha lo stato iniziale che contiene quello di A e lo stato accettabile che contiene quello di A . Ogni altra funzione di un blocco deve essere equivalente.

L'algoritmo non può essere applicato a un NFA.

9 Grammatiche libere da contesto

Esempio informale

Definiamo un linguaggio delle palindrome. Una stringa è palindroma se si legge allo stesso modo in entrambi i versi, come *otto* oppure *madamimadam* (madame I'm Adam). Perciò w è palindroma se $w = w^R$.

Si può facilmente dimostrare che questo linguaggio non è regolare usando il pumping lemma. Scegliamo $w = 0^n 1 0^n$, scomponiamo in $w = xyz$ tale che y sia fatto di vari 0 e scegliamo $k=0$, xz dovrebbe adesso appartenere a L_{pal} ma non è così, perché ho meno 0 a sinistra rispetto che a destra.

Posso definire le stringhe che appartengono a L_{pal} in maniera ricorsiva.

Base ϵ , 0 e 1 sono palindrome

Induzione Se w è palindroma allora $0w0$ e $1w1$ sono palindrome

Una **grammatica libera** è una notazione formale per esprimere linguaggi ricorsivamente. Una grammatica consiste in una o più serie di variabili che rappresentano classi di stringhe, ovvero linguaggi.

Ogni classe definisce come costruire le stringhe in ogni classe. Definiamo le classi del linguaggio palindroma:

1. $P \rightarrow \epsilon$
2. $P \rightarrow 0$
3. $P \rightarrow 1$
4. $P \rightarrow 0P0$
5. $P \rightarrow 1P1$

0 e 1 sono terminali, P è una variabile, P è anche la categoria iniziale, 1-5 sono produzioni.

9.1 Definizione formale di CFG

Un CFG è formato da 4 elementi:

1. Un insieme di simboli detti *terminali*
2. Un insieme di variabili, detti *non terminali* oppure *categorie sintattiche*
3. Una variabile detto *simbolo iniziale*
4. Un insieme finito di *produzioni* o *regole* che definiscono il linguaggio ricorsivamente. Ogni produzione consiste in 3 parti
 - (a) Una variabile che è definita parzialmente dalla produzione, *testa*
 - (b) Il simbolo di produzione \rightarrow
 - (c) Il *corpo* della produzione, ovvero la stringa o il terminale che la forma. Le stringhe vengono formate sostituendo le variabili.

In maniera contratta, $CFG=(V,T,P,S)$ rispettivamente variabile, terminale, produzioni e simbolo iniziale.

Il linguaggio palindromo descritto come CFG è $G_{pal} = (\{P\}, \{0, 1\}, A, P)$ A è l'insieme delle produzioni del linguaggio.

9.2 Derivazione in CFG

Possiamo definire le stringhe tramite concatenazione delle produzioni, *inferenza ricorsiva*

Il secondo modo per *derivazione*, ovvero uso le produzioni fino a quanto ho solo simboli terminali. Noi studieremo la derivazione.

Sia $G = (V, T, P, S)$ una grammatica libera e sia αAB una stringa mista di terminali e variabili, dove A è variabile e $\alpha B \in (V \cup T)$ allora se G risulta chiara nel contesto, posso scrivere:

$$\alpha AB \xRightarrow{G} \alpha \gamma B$$

A è una derivazione di G , $A \Rightarrow \gamma$. Posso usare il simbolo $*$ per denotare "zero o più passi" (chiusura transitiva).

Base $\alpha \xRightarrow{*}_G \alpha$, vale per ogni stringa terminale o variabile, ovvero ogni stringa deriva se stessa

Induzione Se $\alpha \xRightarrow{*}_G \beta$ e $\beta \xRightarrow{G} \gamma$ significa che $\alpha \xRightarrow{*}_G \gamma$

Se la grammatica è chiara posso scrivere $\xRightarrow{*}$

9.3 Derivazione a sinistra e a destra

È possibile arrivare a diverse conclusioni a seconda della scelta di quali produzioni fare, quindi per evitare di avere incertezze si può scegliere un verso di come derivare ogni volta.

Derivazione a destra: \xRightarrow{rm}

Derivazione a sinistra: \xRightarrow{lm}

9.4 Linguaggio di una grammatica

Se $G(V, T, P, S)$ è una CFG allora il suo linguaggio è:

$$L(G) = \{w \in T^* : S \xRightarrow{*}_G w\}$$

Ovvero l'insieme delle stringhe T^* derivabili da w

9.5 Alberi sintattici

Data una grammatica $G = (V, T, S, P)$, gli alberi sintattici di G soddisfano i seguenti requisiti:

1. Ogni nodo interno è una variabile V
2. Ogni foglia è un variabili, terminale o ϵ . Quando è ϵ deve essere l'unico figlio
3. Se un nodo A con i figli X_1, X_2, \dots, X_k allora $A \rightarrow X_1, X_2, \dots, X_k$ è una produzione in P . X può essere ϵ solo nel caso in qui $A \rightarrow \epsilon$

Nella grammatica seguente:

1. $E \rightarrow I$
2. $E \rightarrow E + E$
3. $E \rightarrow E * E$
4. $E \rightarrow (E)$

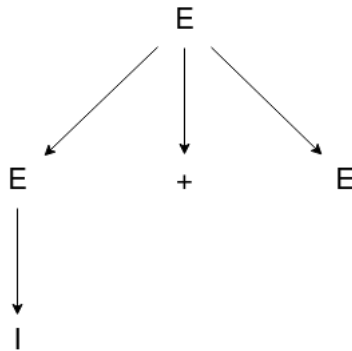


Figura 24: Parsing tree

Questo albero sintattico rappresenta la produzione $E \Rightarrow^* I + E$

9.5.1 Prodotto di un albero sintattico

Se concateniamo le foglie di un albero otteniamo una stringa, ovvero il *prodotto*. Inoltre la radice deve essere il simbolo iniziale e ogni foglia è \emptyset oppure un terminale.

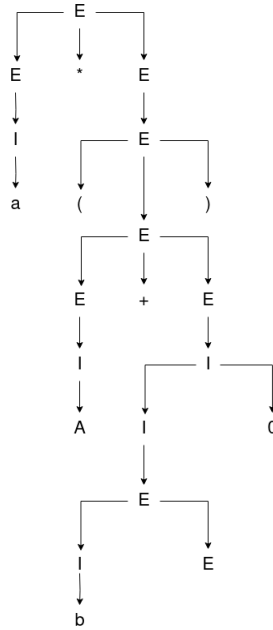


Figura 25: Produzione

Il risultato della produzione è $a * (a + b00)$

9.5.2 Inferenza, derivazione e alberi sintattici

Sia $G = (V, T, P, S)$ una CFG e $A \in V$ allora i seguenti sono equivalenti:

1. $A \xRightarrow{*} w$
2. $A \xRightarrow[lm]{*} w$
3. $A \xRightarrow[rm]{*} w$
4. C'è un albero sintattico G con radice A e prodotto w

Costruiamo il prodotto della fig. 25 per derivazione sinistra:

- $E \xRightarrow[lm]{*} E * E \xRightarrow[lm]{*}$
- $I * E \xRightarrow[lm]{*}$

- $a * E \xRightarrow{lm}$
- $a * (E) \xRightarrow{lm}$
- $a * (E + E) \xRightarrow{lm}$
- $a * (I + E) \xRightarrow{lm}$
- $a * (a + E) \xRightarrow{lm}$
- $a * (a + I) \xRightarrow{lm}$
- $a * (a + I0) \xRightarrow{lm}$
- $a * (a + I00) \xRightarrow{lm}$
- $a * (a + b00) \xRightarrow{lm}$

9.6 Ambiguità in grammatiche e linguaggi

Nella grammatica:

- $E \rightarrow I$
- $E \rightarrow E + E$
- $E \rightarrow E * E$
- $E \rightarrow (E)$

L'espressione $E + E * E$ ha due possibili derivazioni: $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E$ oppure $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E$, da qui i due alberi sintattici

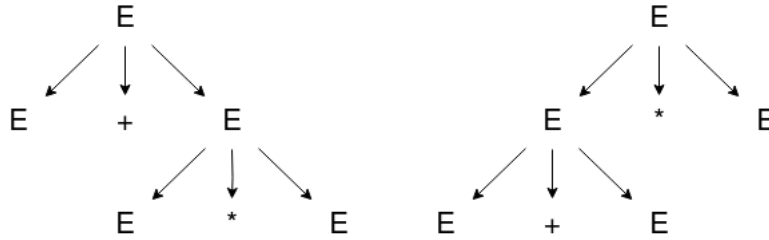


Figura 26: Semplice automa

Queste sono 2 operazioni diverse, usiamo i valori $1 + 2 * 3$, dal primo albero troviamo $1 + (2 * 3) = 7$ mentre dal secondo albero troviamo $(1 + 2) * 3 = 9$. **Definizione** Sia $G = (V, T, P, S)$ una CFG. Diciamo che G è ambigua se esiste almeno una stringa T^* che ha più di un albero sintattico.

9.6.1 Rimuovere ambiguità

È possibile, in alcuni casi, rimuovere l'ambiguità. Non esiste però un modo sistematico e alcuni CFL hanno solo CFG ambigue. Studiamo la grammatica

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

Dobbiamo decidere:

1. Chi ha precedenza tra $+$ e $*$
2. Come raggruppare un operatore

Una soluzione è l'introduzione di una gerarchia di variabili:

1. espressioni E : composizione di uno o più termini T tramite $+$
2. termini T : composizione di uno o più fattori F tramite $*$
3. fattori F :
 - (a) identificatori I
 - (b) espressioni E racchiuse tra parentesi

Ogni più è costretto a essere una T, ogni T può generare E solo chiuse nelle parentesi, questo significa che * ha precedenza rispetto al +.

La seguente grammatica risulta quindi non ambigua:

1. $E \rightarrow T|E + T$
2. $E \rightarrow F|T * F$
3. $F \rightarrow I|(E)$
4. $E \rightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1$

9.6.2 Ambiguità inerente

Un CFL è inerentemente ambiguo se tutte le grammatiche per L sono ambigue.

$$L = \{a^n b^n c^m d^m : n \geq 1, m \geq 1\} \cup \{a^n b^m c^m d^n : n \geq 1, m \geq 1\}$$

Il linguaggio è inerentemente ambiguo.

10 Automi a pila

Un automa a pila (PDA - pushdown automaton) è un ϵ -NFA con una pila che è la sua memoria.

Durante le transizione:

1. Consuma un simbolo di input o esegue una transizione ϵ
2. Va in un nuovo stato o rimane dov'è
3. Rimpiazza la cima della pila con una stringa (lo stack è cambiato), con ϵ (c'è stato un pop) oppure con lo stesso simbolo (nessun cambiamento)

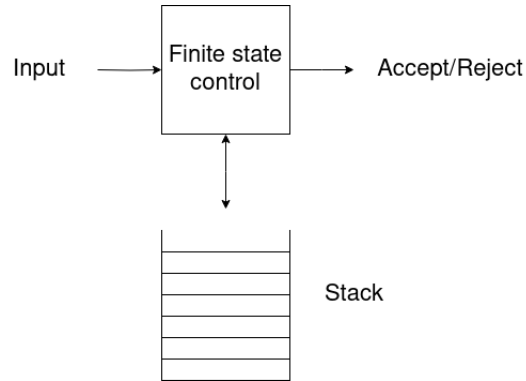


Figura 27: PDA, automa con pila

Esempio: Consideriamo il linguaggio palindromo:

$$L_{ww^R} = \{ww^R : w \in \{0, 1\}^*\}$$

Una PDA per L_{ww^R} ha 3 stati:

1. In q_0 si presume l'input non sia esaurito, quindi leggo 1 alla volta tutti i simboli di input e li accumulo nello stack.
2. Scommettiamo di aver trovato la sequenza corretta, quindi passiamo in q_1 ma continuando a leggere input
3. Confronta la cima della pila con il simbolo in q_1 , se sono uguali consumiamo l'elemento, altrimenti il ramo muore
4. Se lo stack è vuoto passiamo in q_2

10.1 Definizione formale PDA

Un PDA è una tupla di 7:

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

dove

- Q è un insieme di stati finiti
- Σ è un alfabeto finito di input
- Γ è un alfabeto finito di pila
- δ è una funzione di transizione da $Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma$ a sottoinsieme di $Q \times \Gamma^*$ - definizione del prof, poco chiara)
 δ è un funzione di transizione che prende 3 input (q, a, X) dove:

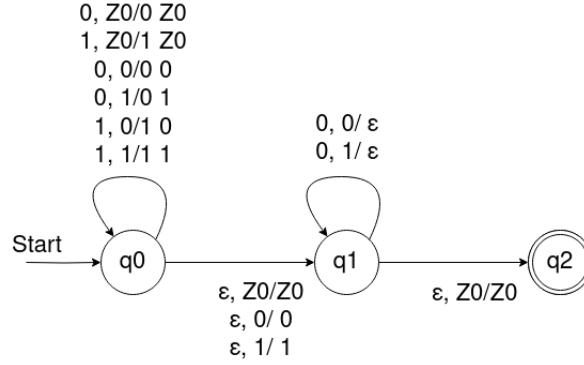
- q è uno stato in Q
- a è un simbolo in Σ oppure ϵ , NB ϵ non fa parte dell'input
- X è un simbolo in Γ , ovvero è un simbolo **sullo stack**

L'output di σ è una coppia (p, γ) , dove p è uno stato e γ è una nuova stringa che rimpiazza X sullo stack. Se $\gamma = \epsilon$ X viene eliminato, se $\gamma = X$ non cambia nulla e se $\gamma = YZ$ allora Y sostituisce X e Z viene aggiunto allo stack

- q_0 stato iniziale
- $Z_0 \in \Gamma$ simbolo iniziale per la pila
- $F \subseteq Q$ è l'insieme degli stati di accettazione

Prendiamo come esempio il PDA di L_{wwr} :

$$P = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{Z_0, 0, 1\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$$



dove δ è definita dalle seguenti regole:

1. $\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}$ $\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1Z_0)\}$ una di queste regole è applicata all'inizio, l'input viene inserito lasciando Z_0 come indice del fondo.
2. $\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}$, $\delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\}$,
 $\delta(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\}$, $\delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\}$
 leggo un input, lo salvo nello stack e continuo a leggere
3. $\delta(q_0, \epsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$,
 $\delta(q_0, \epsilon, 0) = \{(q_1, 0)\}$
 $\delta(q_0, \epsilon, 1) = \{(q_1, 1)\}$
 passiamo da q_0 a q_1 lasciando intatto lo stack
4. $\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \epsilon)\}$,
 $\delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \epsilon)\}$
 rimaniamo su q_1 ma eliminiamo un membro dallo stack, se sono uguali
5. $\delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$ se non ho niente nello stack, passo alla soluzione accettante

10.2 Descrizioni istantanee

Un PDA passa da una configurazione all'altra consumando un simbolo in input oppure la cima della stack.

Possiamo rappresentare una configurazione tramite *descrizioni istantanee* (ID) che sono un tupla (q, w, γ) dove: q è lo stato, w è l'input rimanente e γ è il contenuto della pila.

Sia $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ un PDA, allora $\forall w \in \Sigma^*, \beta \in \Gamma^* : (p, \alpha) \in \delta(q, a, X) \Rightarrow (q, aw, X\beta) \vdash (p, w, \alpha, \beta)$

Il simbolo \vdash significa "deduzione logica", mentre definiamo \vdash^* come la chiusura transitiva di \vdash

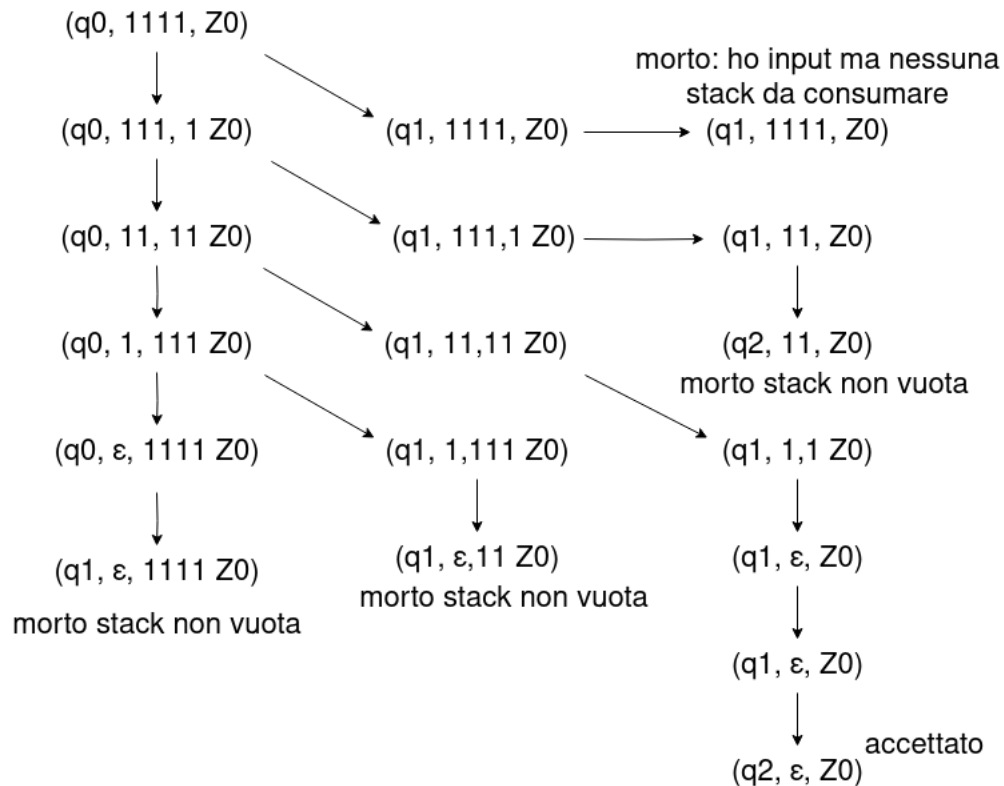


Figura 28: Diagramma PDA

10.3 Accettazione per stato finale

Sia $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ un PDA, il *linguaggio accettato* da P per stato finale è:

$$L(P) = \{w : (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \alpha, q \in F)\}$$

In altre parole una volta che w è in uno stato accettante il contenuto della pila è irrilevante

10.4 Accettazione per pila vuota

Sia $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ un PDA, il *linguaggio accettato* da P per pila vuota è:

$$N(P) = \{w : (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)\}$$

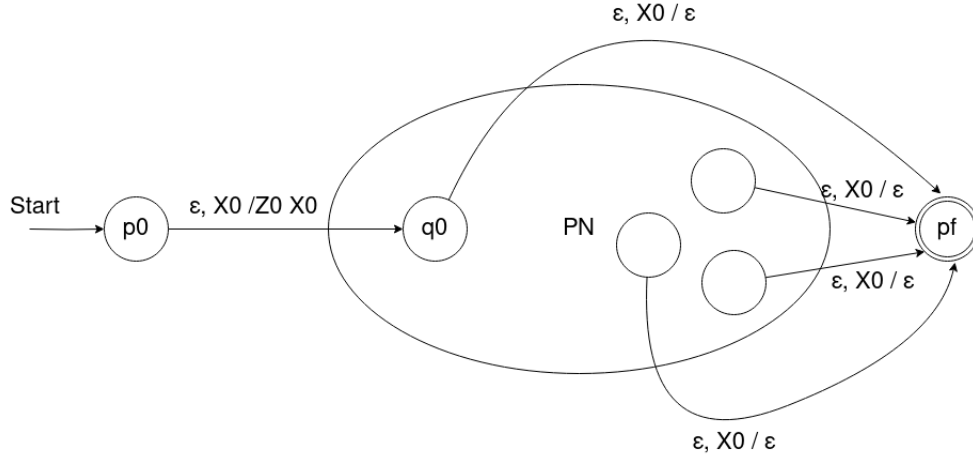
NB q è un generico stato, dunque $N(P)$ è degli input w che svuotano la stack

10.5 Da stack vuota a stato finale

Dimostriamo ora che per pila vuota o per stato finale sono linguaggi equivalenti.

Teorema: Se $L = N(P_N)$ per un PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ allora \exists PDA P_F tale che $L = N(P_F)$.

A parole: L'idea è avere un simbolo nuovo X_0 che specifica quando arrivano allo stato finale sia P_F che P_N . p_0 ci server per inserire il primo simbolo nello stack ed andare in q_0 . Andiamo in p_f quando P_N svuota la stack.



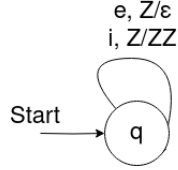
Dimostrazione Sia:

$$P_F = \{Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\}\}$$

dove δ è definita come:

1. $\delta(p_0, \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0, X_0)\}$ transazione spontanea da P_F a P_N
2. $\forall q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, Y \in \Gamma : \delta_F(q, a, Y) = \delta_N(q, a, Y)$
3. $\delta_F(q, a, Y)$ contiene (p_j, ϵ) per ogni q in Q

Consideriamo un automa *if else* in C, dobbiamo leggere tanti if quanti else quindi usiamo Z per contare la differenza tra i 2 simboli.



Leggendo i inseriamo una Z, leggendo e rimuoviamo una Z. Formalmente:

$$P_N = (\{q\}, \{i, e\}, \{Z\}, \delta_N, q, Z)$$

dove δ :

1. $\delta(q, i, Z) = \{(q, ZZ)\}$ leggo i aggiungo Z
2. $\delta(q, e, Z) = \{(q, \epsilon)\}$ leggo e rimuovo Z

A partire da P_N costruiamo P_F :

$$P_F = (\{p, q, r\}, \{i, e\}, \{Z, X_0\}, \delta_F, p, X_0, \{r\})$$

dove δ :

1. $\delta_F(p, \epsilon, X_0) = \{(q, ZX_0)\}$ simulo lettura primo simbolo, X_0 va in fondo allo stack
2. $\delta_F(q, i, Z) = \{(q, ZZ)\}$ leggo i aggiungo Z
3. $\delta_F(q, e, Z) = \{(q, \epsilon)\}$ leggo e rimuovo z
4. $\delta_F(q, \epsilon, X_0) = \{(r, \epsilon)\}$ P_F accetta quando P_N si svuota

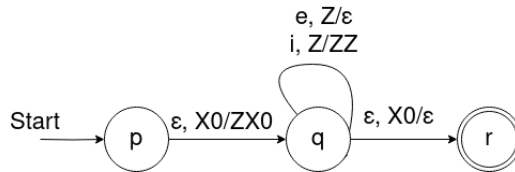


Figura 29: Diagramma P_F

10.6 Da stato finale a pila vuota

Facciamo il percorso inverso $P_F \rightarrow P_N$. Si aggiunge un ϵ -transizione da ogni stato accettante di P_F a un nuovo stato p . Quando siamo in p , consumo lo stack senza leggere input.

Per evitare di svuotare lo stack per stringhe non valide uso X_0 come indicatore di fondo. Il nuovo stato p_0 serve solo ad arrivare allo stato iniziale q_0 e mettere X_0 in fondo allo stack.

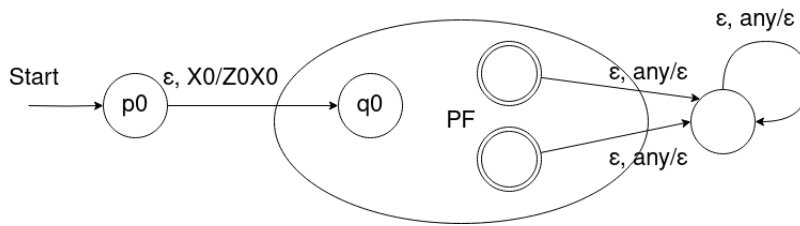
Teorema: Se $L = N(P_F)$ per un PDA $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$ allora \exists PDA P_N tale che $L = N(P_N)$.

Dimostrazione:

$$P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$$

dove δ_N è:

1. $\delta_N(p, \epsilon, X_0) = \{(q, ZX_0)\}$ simulo lettura primo simbolo, X_0 va in fondo allo stack
2. $\forall q$ in Q , a in Σ e ogni Y in Γ : $\delta_N(q, a, Y)$ contiene tutte le coppie in $\delta_F(q, a, Y)$. Ovvero P_N simula P_F .
3. $\forall q$ in F e ogni Y in Γ : $\delta(q, a, Y)$ contiene (p, ϵ) . Ogni volta che P_F accetta P_N può svuotare lo stack
4. $\forall Y$ in Γ : $\delta(q, a, Y) = \{p, \epsilon\}$ quando arrivo a p , quindi P_F ha accettato, P_N svuota lo stack senza leggere input



10.7 Equivalenza tra PDA e CFG

Un linguaggio è generato da una CFG se e solo se è accettato da un PDA per pila vuota se e solo se è accettato da un PDA per stato finale

10.8 Da CFG a PDA

Data una CFG costruiamo una PDA che simula la derivazione a sinistra. Ogni espressione non terminale si può scrivere come $xA\alpha$, dove A è la variabile più a sinistra, x sono gli simboli terminali a sinistra di A e α sono le variabili alla destra di A .

Chiamiamo $A\alpha$ la coda della forma/espressione. Una coda di terminali è da considerarsi ϵ . Dobbiamo simulare un PDA, dove accettiamo una stringa terminale w . La coda di $xA\alpha$ compare sullo stack con A in cima, x è quello che consumiamo per aggiungere una stack, $w = xy$.

Quindi data la transazione $(q, y, A\alpha)$, che rappresenta $xA\alpha$, l'automa sceglie di espandere $A \rightarrow \beta$. β va in cima allo stack entrando nella ID $(q, y, \beta\alpha)$, il PDA ha un unico stato q .

Non è detto però che β sia terminale, e potrebbe avere dei terminali che lo precedono, quindi dobbiamo eliminare ogni terminale all'inizio di $\beta\alpha$. Confronto i terminali con i successi input per verificare correttezza, altrimenti il processo muore.

Nel caso in cui tutto vada bene, lo stack è vuoto e abbiamo la w corretta.

Formalmente: Sia $G = (V, T, Q, S)$ una CFG, costruiamo il PDA P che accetta $L(G)$ per stack vuoto:

$$P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S)$$

dove δ è definita come segue

$$\delta(q, \epsilon, A) = \{(q, \beta) : A \rightarrow \beta \in Q\}$$

per ogni terminale a , $\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$

Esempio:

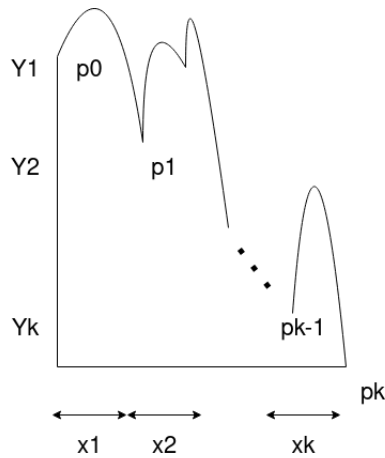
Considero la grammatica $S \rightarrow \epsilon | SS | iS | iSe$. Il PDA corrispondente è:

$$P = (\{q\}, \{i, e\}, \{S, i, e\}, \delta, q, S)$$

dove $\delta(q, \epsilon, S) = \{(q, \epsilon), (q, SS), (q, iS), (q, iSe)\}$, $\delta(q, i, i) = \{(q, \epsilon)\}$
 $\delta(q, e, e) = \{(q, \epsilon)\}$.

10.9 Da PDA a CFG

Per ogni PDA P possiamo costruire un CFG G il cui linguaggio coincide con quello accettato dallo stack vuoto di P . Dobbiamo prendere atto del momento più importante di una PDA, ovvero quando viene fatto il pop di un elemento dello stack, perché è cambiato lo stato. Nel nostro caso server tenere traccia dello stato passato. Ogni stato che cambia "scendo" nello stack.



Nel grafico si può notare che ogni eliminazione Y_1, Y_2, \dots, Y_k coincide con la lettura di un input x . Non importa quanti passaggi siano stati fatti, quando viene visto lo step finale, quando Y esce.

Inoltre viene visto anche il passaggio di stato, che anche esso coincide con l'eliminazione.

Per costruire una CFG a partire dal PDA usiamo variabile che rappresentano un "evento" con due parti:

1. l'eliminazione definitiva dallo stack di X
2. il passaggio da p a q , dopo che scambio X con ϵ sullo stack

Questa variabile la rappresentiamo come $[pXq]$.

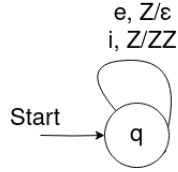
Formalmente: Sia $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ un PDA.

Definiamo $G = (V, \Sigma, R, S)$ con:

- $V = \{[pXq] : \{p, q\} \subseteq Q, X \in \Gamma\} \cup \{S\}$ ovvero V contiene il simbolo iniziale S e tutti i simboli in Q e in Γ

- $R = \{S \rightarrow [q_0 Z_0 p] : p \in Q\} \cup$
 $\{q X r_k \rightarrow a[r Y_1 r_1] \dots [r_{k-1} Y_k r_k] :$
 $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\},$
 $\{r_1, \dots, r_k\} \subseteq Q,$
 $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k) \in \delta(q, a, X)\}$
 - $[q_0 Z_0 p]$ genera tutte le stringhe w e passa dallo stato q_0 a p . Al termine dell'operazione lo stack P sarà svuotato
 - $\{q X r_k \rightarrow a[r Y_1 r_1] \dots [r_{k-1} Y_k r_k] :$ è una produzione che indica il passaggio q a r_k e il susseguirsi di passaggi per arrivarci. Al primo passaggio leggo l'input a e itero k volte finché non ho eliminato Y . a può essere ϵ
 - se $k=0$ allora $Y_1 Y_2 \dots Y_k = \epsilon$ e $r_k = r$

Esempio: Convertiamo



$$P_N = (\{q\}, \{i, e\}, \{Z\}, \delta_N, q, Z)$$

dove

- $\delta(q, i, Z) = \{(q, ZZ)\}$
- $\delta(q, e, Z) = \{(q, \epsilon)\}$

in una grammatica

$$G = (V, \{i, e\}, R, S)$$

dove

- $V = \{[qZq], S\}$
- $R = \{S \rightarrow [qZq], [qZq] \rightarrow i[qZq[qZq], [qZq] \rightarrow e\}$

Per semplicità $[qZq] = A$ quindi $S \rightarrow A$ e $A = iAA|e$

Esempio: Convertiamo

$$P = \{p, q\}, \{0, 1\}, \{X, Z_0\}, \delta, q, Z_0)$$

dove δ è data da:

1. $\delta(q, 1, Z_0) = \{(q, XZ_0)\}$
2. $\delta(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta(q, \epsilon, X) = \{(q, \epsilon)\}$
5. $\delta(p, 1, X) = \{(p, \epsilon)\}$
6. $\delta(p, 0, Z_0) = \{(q, Z_0)\}$

in una CFG.

Otteniamo $G = (V, \{0, 1\}, R, S,$ dove

$$V = \{[qZ_0q], [pZ_0q], [qZ_0p], [pZ_0p], [qXq], [pXq], [qXp], [pXp], \}$$

e le produzioni in R

$$S \rightarrow [qZ_0q][qZ_0p]$$

Dalla transizione (1) $\delta(q, 1, Z_0) = \{(q, XZ_0)\}$ si ha:

$$\begin{aligned} [qZ_0q] &\rightarrow 1[qXq][qZ_0q] \\ [qZ_0q] &\rightarrow 1[qXp][pZ_0q] \\ [qZ_0p] &\rightarrow 1[qXq][qZ_0p] \\ [qZ_0p] &\rightarrow 1[qXp][pZ_0p] \end{aligned}$$

Dalla transizione (2) $\delta(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$

$$\begin{aligned} [qXq] &\rightarrow 1[qXq][qXq] \\ [qXq] &\rightarrow 1[qXp][pXq] \\ [qXp] &\rightarrow 1[qXq][qXp] \\ [qXp] &\rightarrow 1[qXp][pXp] \end{aligned}$$

Dalla transizione (3) $\delta(q, 0, X) = \{(p, X)\}$

$$\begin{aligned} [qXq] &\rightarrow 0[pXq] \\ [qXp] &\rightarrow 0[pXp] \end{aligned}$$

Dalla transizione (4) $\delta(q, \epsilon, X) = \{(q, \epsilon)\}$
 $[qXq] \rightarrow \epsilon$

Dalla transizione (5) $\delta(p, 1, X) = \{(p, \epsilon)\}$
 $[pXp] \rightarrow 1$

Dalla transizione (6) $\delta(p, 0, Z_0) = \{(q, Z_0)\}$
 $[pZ_0q] \rightarrow 0[qZ_0q]$
 $[pZ_0p] \rightarrow 0[qZ_0p]$

11 PDA deterministici

I PDA deterministici sono quelli usati per i parser, sono un sotto caso utile per noi.

Un PDA deterministico non deve avere mosse alternative, se $\delta(q, a, X)$ ha più di una coppia sicuramente non è deterministico. Questo però non è sufficiente però, perché potresti avere due prodotti diversi e bisogna scegliere.

Definiamo quindi un PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ deterministico se e solo se:

1. $\delta(q, a, X)$ ha al massimo un elemento $\forall q \in Q, a \in \Sigma, X \in \Gamma$
2. Se $\delta(q, a, X)$ non è vuoto per un $a \in \Sigma$ allora $\delta(q, \epsilon, X)$ deve essere vuoto

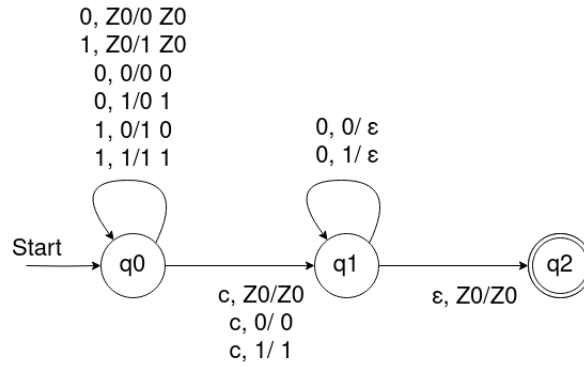


Figura 30: Esempio di PDA deterministico (DPDA)

11.1 DPA che accettano per stato finale

$\text{Regex} \subset L(\text{DPDA}) \subset \text{CFL}$.

Teorema Se L è regolare allora $L = L(P)$ per un qualsiasi DPDA P .

Prova: Dato che L è regolare \exists DFA A tale che $L = L(A)$

$$A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$$

definiamo il DPDA

$$P = (Q, \Sigma, \{Z_0\}, \delta_P, q_0, Z_0, F)$$

dove

$$\sigma_P(q, a, Z_0) = \{(\delta_A(q, a), Z_0)\}$$

$\forall p, q \in Q$ e $a \in \Sigma$

appliciamo un'induzione su $|w|$

$$(q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \epsilon, Z_0) \iff \hat{\delta}(q_0, w) = p$$

11.2 DPDA che accettano per la pila vuota

Si usa la **proprietà del prefisso**: un linguaggio ha la proprietà del prefisso se NON esistono due stringhe uguali una che è il prefisso dell'altra.

L_{pal} ha la proprietà del prefisso

$\{0\}^*$ non ha la proprietà del prefisso

Teorema $L \in N(P)$ per un qualche DPDA P se e solo se L ha la proprietà del prefisso e L è $L(P')$ per qualche DPDA P'

11.3 DPDA e non ambiguità

$L(\text{DPDA})$ non per forza coincide con CFL non ambigue, viceversa invece è vero.

Theorem 1 Se $L = N(P)$ per qualche DPDA P , allora L ha una grammatica non ambigua

Dimostrazione stessa dimostrazione che fai da PDA a CFG, solo che parti con un DPDA

L'enunciato può essere rafforzato

Theorem 2 *Se $L = L(P)$ per qualche DPDA P , allora L ha una grammatica non ambigua*

Dimostrazione

Sia $\$$ un simbolo non presente in L , e sia $L' = L\$$. In altri termini L' sono le stringhe L seguite da $\$$. Dal Teorema. 1 L' ha la proprietà di prefisso. Dal Teorema. 2 esiste una grammatica G' che genera un linguaggio $N(P')$ che è L' .

Costruiamo quindi una grammatica G tale che $L(G) = L$, dobbiamo solo togliere $\$$ dalla fine delle stringhe, così che G' coincida con G . Introduciamo $\$$ in G

$$\$ \rightarrow \epsilon$$

Visto che $L(G') = L'$ consegue che $L(G) = L$. G non è ambigua.

12 Proprietà di CFG

Elenco delle proprietà:

- *Semplificazione* di una CFG. Una CFL ha una grammatica in forma speciale
- *Pumping Lemma* per CFG, simile alle regex
- *Proprietà di chiusura*.
- *Proprietà di decisione*. Verifichiamo l'appartenenza e l'essere vuoto

12.1 Forma normale di Chomsky

Ogni CFL (senza ϵ) è generato da una CFG dove tutte le forme sono

$$A \rightarrow BC, A \rightarrow a$$

dove A, B, C sono variabili, mentre a è un terminale. Questa è detta forma di Chomsky e per ottenerla dobbiamo pulire la grammatica:

- Eliminare i *simboli inutili*, ovvero ogni simbolo che non appartiene a $S \xRightarrow{*} w$
- Eliminare le *produzioni ϵ* , dalla forma $A \rightarrow \epsilon$
- Eliminare le *produzioni unità* ovvero le produzioni $A \rightarrow B$

12.2 Eliminazione di simboli inutili

Un simbolo X è *utile* per una grammatica $G = (V, T, P, S)$ se esiste una derivazione

$$S \xRightarrow[G]{*} \alpha X \beta \xRightarrow[G]{*} w$$

per una stringa $w \in T^*$. Possiamo eliminare i simboli inutili senza cambiare il significato della grammatica. Un simbolo utile deve avere 2 caratteristiche:

1. X è un *generatore* se esiste una stringa w tale che $X \xRightarrow{*} w$. Ogni terminale è un generatore di se stesso in 0 passi

2. X è *raggiungibile* se esiste una derivazione $S \xRightarrow{*} \alpha X \beta$ per qualche $\{\alpha, \beta\} \subseteq (V \cup T)^*$

Un simbolo deve essere sia raggiungibile che generatore, eliminando prima i non generatori e poi i non raggiungibili abbiamo una grammatica solo di simboli utili.

Esempio: Consideriamo la grammatica

$$S \rightarrow AB|a$$

$$A \rightarrow b$$

A genera b, S genera A, B non è un simbolo generatore. Eliminando B:

$$S \rightarrow a$$

$$A \rightarrow b$$

Adesso solo a è raggiungibile quindi

$$S \rightarrow a$$

che è la nostra grammatica iniziale

NB se elimino prima i simboli non raggiungibili non cambia nulla, tutto è raggiungibile

$$S \rightarrow AB|a$$

$$A \rightarrow b$$

ora elimino B

$$S \rightarrow a$$

$$A \rightarrow b$$

e ho una grammatica con simboli inutili

12.3 Eliminazione delle produzioni epsilon

Se L è un CFL, allora $L \setminus \{\epsilon\}$ ha una grammatica priva di produzioni ϵ .

La variabile A è annullabile se $A \xRightarrow{*} \epsilon$

Sia a annullabile, rimpiazzo

$$B \rightarrow \alpha A \beta$$

con

$$B \rightarrow \alpha\beta$$

indico con $n(G)$ l'insieme dei simboli annullabili della grammatica $G = (V, T, P, S)$.

Esempio Sia la grammatica

$$S \rightarrow AB, A \rightarrow aAA|\epsilon, B \rightarrow bBB|\epsilon$$

Abbiamo $n(G) = \{A, B, S\}$, la prima regola diventa

$$S \rightarrow AB|A|B$$

la seconda regola diventa

$$A \rightarrow aAA|aA|aA|a$$

la terza regola diventa

$$B \rightarrow bBB|bB|bB|b$$

La nuova grammatica sarà:

$$S \rightarrow AB|A|BA \rightarrow aAA|aA|aB \rightarrow bBB|bB|b$$

12.4 Eliminazione produzioni unità

$$A \rightarrow B$$

è una produzione unità nel caso in cui A e B siano variabili. Le produzioni variabili sono eliminabili.

Data la grammatica

$$E \rightarrow T|E + T$$

$$T \rightarrow F|T * F$$

$$F \rightarrow I|(E)$$

$$I \rightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1$$

le produzioni unità sono $E \rightarrow T, T \rightarrow F, F \rightarrow I$

Considero la produzione $E \rightarrow T$ e la espando

$$E \rightarrow F, E \rightarrow T * F$$

poi espando $E \rightarrow F$

$$E \rightarrow I, (E), T * F$$

Infine espando $E \rightarrow I$

$$E \rightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1|(E)|T * F$$

lo stesso applico lo stesso procedimento con $T \rightarrow F$ e $F \rightarrow I$:

$$T \rightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1|(E)$$

$$F \rightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1$$

la nuova grammatica sarà

$$E \rightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1|(E)|T * F|E + T$$

$$T \rightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1|(E)|T * F$$

$$F \rightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1|(E)$$

$$I \rightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1$$

Questo procedimento non funziona nel caso in cui ci siano dei cicli. Se trovo un unità già espansa la rimuovo.

Esempio Si consideri la grammatica

$$A \rightarrow B|a$$

$$B \rightarrow C|b$$

$$C \rightarrow A|c$$

Espando $A \rightarrow B$

Da $A \rightarrow B$ ottengo

$$A \rightarrow C|b$$

Da $A \rightarrow C$ ottengo

$$A \rightarrow A|c|b$$

Da $A \rightarrow A$ ottengo

$$A \rightarrow B a|c|b$$

Qui mi fermo perché tornerai a fare le stesse produzioni, mi rimane:

$$A \rightarrow a|c|b$$

eseguo per le altre 3 e la nuova grammatica risulta

$$A \rightarrow a|b|c$$

$$B \rightarrow a|b|c$$

$$C \rightarrow a|b|c$$

12.5 Sommario

Per pulire una grammatica bisogna:

1. Eliminare le produzioni ϵ
2. Eliminare le produzioni unità
3. Eliminare simboli inutili

in quest'ordine

12.6 Forma normale di Chomsky, CNF

Ogni CNF non vuoto, senza ϵ , ha una grammatica G di simboli inutili nella seguente forma $A \rightarrow BC$ dove $\{A, B, C\} \subseteq V$ oppure $A \rightarrow a$ dove $a \in T$ e $A \in V$.

Per arrivare a questa forma bisogna:

- Pulire la grammatica
- Modificare le produzioni con 2 o più simboli in modo che siano tutte variabili
- Ridurre le produzioni con più di 2 simboli in catene da 2 simboli

Quindi per ogni terminale a più lungo di 1 creo una nuova variabile $A \rightarrow a$.
Mentre per ogni regola

$$A \rightarrow B_1, B_2, \dots, B_k$$

$k \geq 3$ creo nuove variabili C_1, C_2, \dots, C_{k-2}

$$A \rightarrow B_1, C_1$$

$$C_1 \rightarrow B_2, C_2$$

...

$$C_{k-3} \rightarrow B_{k-2}, C_{k-2}$$

$$C_{k-2} \rightarrow B_{k-1}, B_k$$

Esempio Usiamo la grammatica

$$E \rightarrow |E + F|T * F|(E)|b|Ia|Ib|I0|I1$$

$$\begin{aligned}
T &\rightarrow (E)|T * F|a|b|Ia|Ib|IO|I1 \\
F &\rightarrow (E)|a|b|Ia|Ib|IO|I1 \\
I &\rightarrow a|b|Ia|Ib|IO|I1
\end{aligned}$$

applichiamo il passo 2

$$\begin{aligned}
A &\rightarrow a, B \rightarrow b, Z \rightarrow 0, O \rightarrow 1 \\
P &\rightarrow +, M \rightarrow *, L \rightarrow (, R \rightarrow)
\end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
E &\rightarrow EPF|TMF|LER|b|IA|IB|IZ|IO \\
T &\rightarrow LER|TMF|a|b|IA|IB|IB|IO \\
F &\rightarrow LER|a|b|IA|IB|IZ|IO \\
I &\rightarrow a|b|IA|IB|IZ|IO \\
A &\rightarrow a, B \rightarrow b, Z \rightarrow 0, O \rightarrow 1 \\
P &\rightarrow +, M \rightarrow *, L \rightarrow (, R \rightarrow)
\end{aligned}$$

Applichiamo il passo 3

$$\begin{aligned}
E &\rightarrow EPT \text{ diventa } E \rightarrow EC_1, C_1 \rightarrow PT \\
E &\rightarrow TMF, T \rightarrow TMF \text{ diventa } E \rightarrow TC_2, T \rightarrow TC_2, C_2 \rightarrow MF \\
E &\rightarrow LER, T \rightarrow LER, F \rightarrow LER \text{ diventa } E \rightarrow LC_3, T \rightarrow TC_3, F \rightarrow \\
&LC_3, C_3 \rightarrow ER
\end{aligned}$$

La grammatica finale diventa

$$\begin{aligned}
E &\rightarrow EC_1|TC_2|LC_3|b|IA|IB|IZ|IO \\
T &\rightarrow LC_3|TC_2|a|b|IA|IB|IB|IO \\
F &\rightarrow LC_3|a|b|IA|IB|IZ|IO \\
I &\rightarrow a|b|IA|IB|IZ|IO \\
C_1 &\rightarrow PT, C_2 \rightarrow MF, C_3 \rightarrow ER \\
A &\rightarrow a, B \rightarrow b, Z \rightarrow 0, O \rightarrow 1 \\
P &\rightarrow +, M \rightarrow *, L \rightarrow (, R \rightarrow)
\end{aligned}$$

12.7 Pumping lemma per CFL

Pumping lemma per i linguaggi regolari: per una stringa sufficiente lunga è possibile causare un ciclo e creare un infinità di stringhe che appartengono al linguaggio

Pumping lemma per CFL: per una stringa sufficiente lunga è possibile

trovare due sottostringhe vicine che si possono iterare "in tandem". Posso iterare i volte per trovare nuove stringhe appartenenti al linguaggio.

Formalmente:

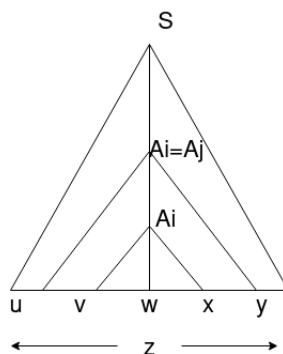
Sia L un CFL. Allora $\exists n \geq 1$ che soddisfa: ogni $z \in L : |z| \geq n$ è composto da 5 stringhe $z = uvwxz$ tali che:

1. $|vwx| \leq n$
2. $|vx| > 0$
3. $\forall i \geq 0, uv^iwx^iy \in L$

Dimostrazione:

- Si consideri una grammatica per $L \setminus \{\epsilon\}$ in CNF
- Assumiamo che la grammatica abbia m variabili, con $n = 2^m$
- Sia $z \in L$ una qualsiasi stringa tale che $|z| \geq 2^m$ allora ogni albero sintattico di z ha un cammino $\geq m + 1$
- Se tutti i cammini dell'albero hanno lunghezza $\leq m$ allora la stringa generata ha lunghezza $\leq 2^{m-1}$

Prendendo un cammino sufficientemente lungo, a partire da A fino a A_0 fino a A_k a un certo punto troverò due sotto alberi A_i, A_j con $i \neq j$ che sono uguali. Questo succede perché $k \geq m$, quindi avendo solo m variabili distinte è normale che si ripetano. Ora posso radicare l'albero A_j sotto A_i e la stringa finale non cambia, perché rispetta $z = uv^iwx^iy$ Notiamo che:



- l'albero in A_i ha altezza $\leq m + 1$ quindi la stringa corrispondente ha lunghezza $\leq 2^m = n$ e quindi $(|vwx| \leq n)$
- v e x non possono essere vuote, perché la grammatica genera variabili non terminali perciò $|vx| > 0$
- posso ripetere l'albero A_i n volte e creo sempre una stringa valida $(uv^iwx^iy \in L)$

12.8 Applicazione Pumping lemma

Possiamo usarlo per dimostrare che un linguaggio non è libero.

Esempio: Si consideri $L = 0^m 10^m 10^m : m \geq 1$, dimostra che L non è CFL.

Dimostrazione: Assumiamo, per assurdo, che L sia CFL. Sia n la costante del Pumping lemma. Si consideri la stringa $z = 0^n 10^n 10^n$. Si ha che $z \in L$ e $|z| \geq n$. Allora per il Pumping lemma, $z = uvwxy$ con $|uwx| \leq n$, $|vx| > 0$ e $uv^iwx^iy \in L$ per ogni $i \geq 0$. Consideriamo i seguenti casi:

- vx contiene almeno un 1, la catena può essere replicata all'infinito quindi sicuramente per $i \geq 2$ $|uwx| \notin L$
- vx contiene almeno un 0, in questo caso non viene rispettata 0^n perché sia se vx forma un gruppo di 0, sia se ne forma 2, andrà in ogni caso a ridurre il numero di 0 totali

In entrambi i casi $uv^iwx^iy \notin L$

Esempio 2: Si consideri $L = 0^{k^2} : k > 1$, dimostra che L non è CFL.

Dimostrazione: Assumiamo, per assurdo, che L sia CFL. Sia n la costante del Pumping lemma. Si consideri la stringa $z = 0^{n^2}$. Si ha che $z \in L$ e $|z| \geq n$. Allora per il Pumping lemma, $z = uvwxy$ con $|uwx| \leq n$, $|vx| > 0$ e $uv^iwx^iy \in L$ per ogni $i \geq 0$. Consideriamo il seguente caso:

$uv^2wx^2y \in L$ per Pumping Lemma

(Presumo che qua stiamo contando il numero di 0) $n^2 < |uv^2wx^2y| \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. Non esiste un quadrato perfetto tra n^2 e $(n + 1)^2$, il numero di 0 non torna, quindi $uv^2wx^2y \notin L$.

12.9 Proprietà di chiusura dei CFL

Theorem 3 I CFL sono chiusi rispetto ai seguenti operatori: unione, concatenazione e chiusura di Kleene ($*$) e chiusura positiva $+$

Theorem: se L è CFL allora lo è anche L^R

Dimostrazione: Supponiamo che L sia generato da $G = (V, T, P, S)$. Costruiamo $G^R = (V, T, P^R, S)$ dove

$$P^R = \{A \rightarrow \alpha^R : A \rightarrow \alpha \in P\}$$

Si può dimostrare per induzione che $(L(G))^R = L(G^R)$

12.10 I CFL NON sono chiusi rispetto all'intersezione

Sia $L_1 = \{0^n 1^n 2^i : n \geq 1, i \geq 1\}$. Allora L_1 è CFL con grammatica

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow 0A1|01$$

$$B \rightarrow 2B|2$$

Inoltre $L_2 = \{0^i 1^n 2^n : n \geq 1, i \geq 1\}$. Allora L_2 è CFL con grammatica

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow 0A0|0$$

$$B \rightarrow 1B2|12$$

Invece, $L_1 \cap L_2 = \{0^n 1^n 2^n : n \geq 1\}$ non è CFL per pumping lemma.

12.11 Operazioni su linguaggi liberi e regoli

Theorem 4 Se L è CFL e R è regolare, allora $L \cup R$ è CFL

Prova: Sia L che accetta PDA

$$P = (Q_P, \Sigma, \Gamma, \delta_P, q_P, Z_0, F_P)$$

per stato finale, e sia R accettato dal DFA

$$A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_A, F_a)$$

Costruiamo un PDA per $L \cup R$:

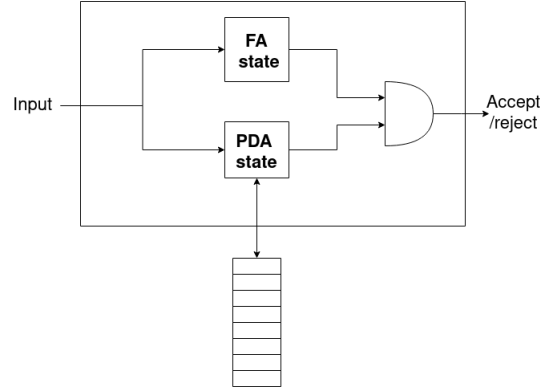


Figura 31: Semplice automa

Formalmente definiamo

$$P' = (Q_P \times Q_A, \Sigma, \Gamma, \delta, (q_P, q_A), Z_0, F_P \times F_A)$$

dove

$$\delta((q, p), a, X) = \{((r, \hat{\delta}(p, a)), \gamma) : (r, \gamma) \in \delta_P(q, a, X)\}$$

Per induzione si può provare per induzione su \vdash^* che

$$(q_P, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \gamma) \text{ in } P$$

se e solo se

$$((q_P, q_A), w, Z_0) \vdash^* ((q, \hat{\delta}(q_A, w)), \epsilon, \gamma) \text{ in } P'$$

Theorem 5 *Siano L, L_1, L_2 CFL e R regolare, Allora*

- $L \setminus R$ è CFL
- \overline{L} è per forza CFL
- $L_1 \setminus L_2$ non è per forza CFL

Prova:

1. \overline{R} è regolare, $R \cap \overline{R}$ è CFL e $L \cap \overline{R}$ è CFL e $L \cap \overline{R} = L \setminus R$

2. Se \bar{L} fosse sempre CFL, seguirebbe che

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

è sempre una CFL

3. Notare che Σ^* è CFL; quindi se $L_1 \setminus L_2$ è CFL allora lo è anche $\Sigma^* \setminus K = \bar{L}$

12.12 Proprietà di decisione per CFL

Analizziamo i seguenti problemi decidibili:

- Verificare che $L(G) \neq \emptyset$ per una CFG G
- Verificare che $w \in L(G)$, per una stringa w ed una CFG G

E faremo un elenco di **problemi indecidibili**

12.12.1 Verificare se un CFL è vuoto

$L(G)$ è non vuoto se il simbolo iniziale S è generante.

Con un implementazione naive il tempo è $O(n^2)$, ottimizzando si passa $O(n)$

12.12.2 Appartenenza a un CFL

$$w \in L(G)?$$

Tecnica inefficiente

Supponiamo che G sia in CNF, e che la stringa w abbia lunghezza $|w| = n$, allora il suo albero binario ha al più $2n - 1$ nodi.

Genero tutti gli alberi sintattici di G e controllo se w è in uno di quelli, tempo esponenziale in n

12.12.3 Problemi indecidibili per CFL

Elenco di problemi indecidibili:

1. Una data CFG G è ambigua?
2. Un dato CFL L è inerentemente ambigua?

3. L'intersezione di 2 CFL è vuota?
4. 2 CFL sono uguali?
5. Un CFL è universale?

13 Analisi Lessicale e sintattica

There are 3 kinds of execution environment (language processor):

- Compilers: translate code in a forma that is executable by computers. More generally a compiler can *translate* code into an equivalent code in another language.

Compilers also check for errors. If the compiled language is executable the users can add input and get output with the program.

C and Java are compiled.

- Interpreters: Unlike a compiler the interpreter directly executes a program without producing an executable.

Interpreters are slower than compilers, but can have better errors recognition since they execute the source statement by statement.

Scheme, lisp and perl are interpreted

- Virtual machines: You can also combine the interpreter and the compiler. This is the case in Java where the code is begin compiled into *bytecode* and executed by the JVM.

The advantage is you can 2 machines, one for compiling and the other for interpreting thus speeding the interpretation process.

Some java compilers translate the code *just-in-time* (JIT) for the execution.

The whole process is the following: source -> preprocessor -> compiler -> assembler -> linker/loader.

13.1 The compiler

The operation of the compiler can be divided in 2 parts: *analysis* and *synthesis*.

The analysis breaks the program into pieces and enforces grammatical structure. If there are syntactic errors the user will get an error message. If everything goes well then the program is translated it into a intermediate representation. It also creates a *symbol table*, which will be used later.

The synthesis translates into the desired program, using the intermediate representation and the symbol table.

Here's the steps:

- Scanning (Lexical analysis)
- Parsing (Syntactic analysis)
- Type checking (Semantic analysis)
- Optimisation
- Code generation

13.1.1 Lexical analysis

Translates words into units.

Ex. if x==y \Rightarrow if, x, ==, y

13.1.2 Parsing

Once the lexical analysis is over, you can translate it into some kind of representation like *diagram sentences*(it's just a tree).

13.2 Building a lexer

Our input is this code snippet.

```
1      if ( i == j ) :  
2          z = 0  
3      else  
4          z = 1
```

The compiler actually sees it as such:

$$\backslash tif(i == j) \backslash n \backslash t \backslash tz = 0; \backslash n \backslash t else \backslash n \backslash t \backslash tz = 1;$$

We need to partition this string into substrings (lexemes) and classify them into role (tokens).

Each lexeme has a name and value $\langle tokenname, value \rangle$

Therefore our input will be split. White spaces don't count and some special tokens will be grouped, line $\backslash t$ means newline.

It's not a good idea to write a lexer by hand it's: tedious, error prone and non-maintainable. There are *lexer generators* where you can define the lexemes and tokens and it will do the rest.

This way we can focus on what the lexer should do rather than how. The what is done with declarative programming, while the how with imperative programming.

First we build the lexer by hand in java, to get the feel of the code that will be hidden.

ID	sequence of alphanumeric that start with a letter
EQUALS	"=="
PLUS	"+"
TIMES	"*"

Tabella 7: Esempio di tabella

```

1      c=nextChar();
2      if (c == '=') { c=nextChar(); if (c == '=')
          {return EQUALS;}}
3      if (c == '+') { return PLUS; }
4      if (c == '*') { return TIMES; }
5      if (c is a letter) {
6          c=NextChar();
7          while (c is a letter or digit) { c=NextChar(); }
8          undoNextChar(c);
9          return ID;
10     }
```

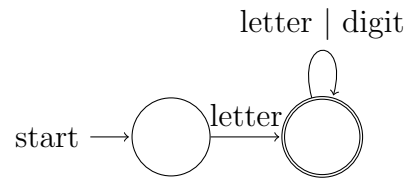
Imperative lexer

undoNextChar() determines if the next character is part of the lexeme or not. Each lexeme is usually partitioned at the maximum match, in order to avoid errors like "iffy" partition into "if" "fy" instead of the whole ID.

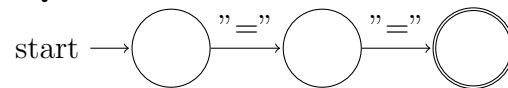
Each comparison is the *how*, but anything else is the *what*. We could abstract the how using automata. Each token is an automata or a regex, and the token reading is an automata responsible for the scanning.

Let's define the automata:

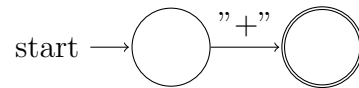
- ID: $[a-zA-Z][a-zA-Z0-9]^*$, ovvero legge una lettera e poi legge lettere o numeri



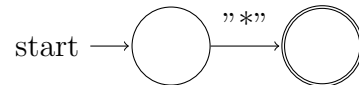
- EQUALS: $==$



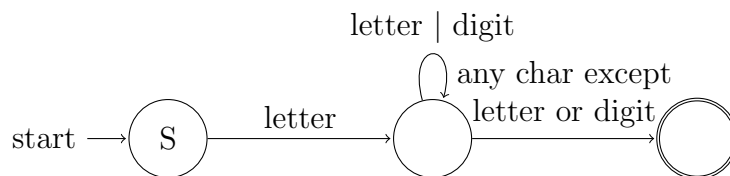
- PLUS: $+$



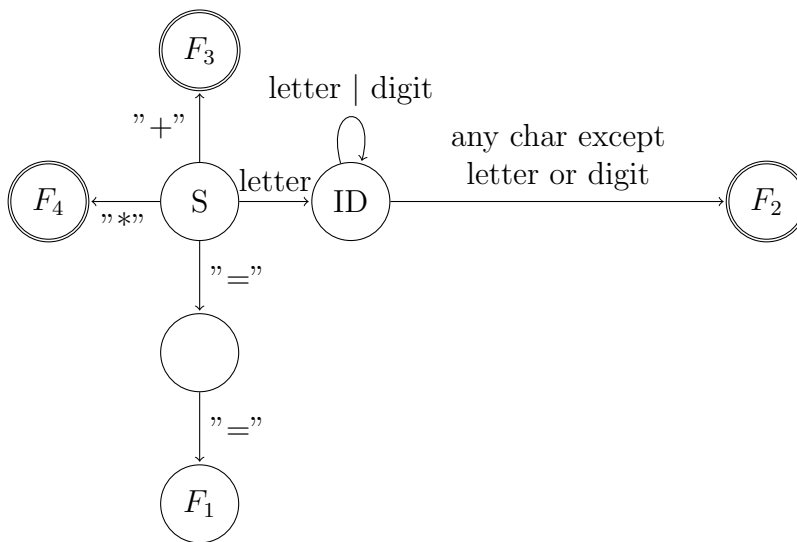
- TIMES: $*$



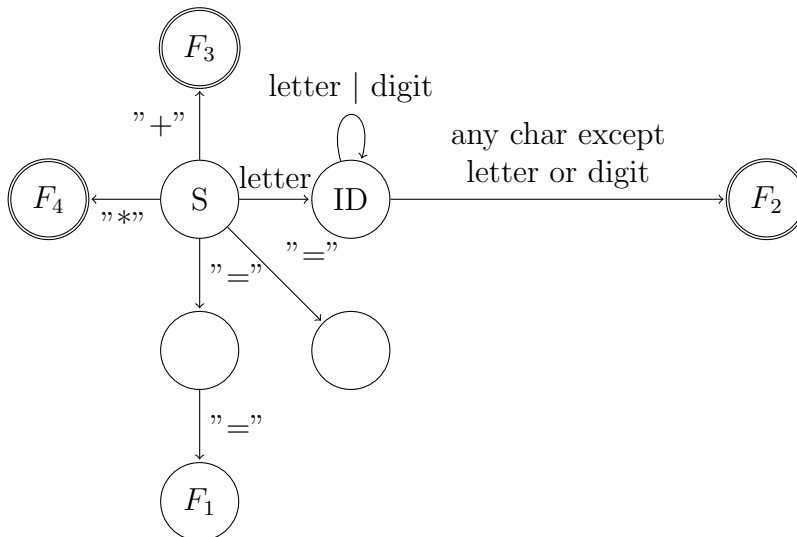
Now let's extend the FA to accept the whole input.



By the end of the operation we return a token and reset the automata to S.
If we put everything together into a single automata:



Let's add the ASSIGN



At this point we need to know if the automata is not deterministic, then we convert it to a deterministic one. The only missing piece is remembering the position of the input, if the lexer errors we can return information about where.

Some practical concerns:

- Ambiguity: if the input is "if" is it an ID or a keyword? We can solve

this by giving priority to the keywords, if has priority over ID.

- Discard white space: final state white space jumps to start
- Error inputs: discard illegal lexemes and return an error token, this token has the lowest priority

Automata are not the only way to build a lexer, we can also use regex. The advantage is that regex are way easier to represent textually, thus being a better specification. Regex also are very compact.

Let's define the regex for ID: $[a-zA-Z] \cdot ([a-zA-Z] \mid [0-9])^*$

- \cdot is any character (prof says followed by???), middle priority
- $*$ is 0 or more repetitions, highest priority
- \mid is the or operator, lowest priority
- $()$ is the grouping operator

In ANTLR operands corresponds to FA edge labels, which are single char. $[a-z]$ is written as 'a'..'z' in ANTLR. $[0-9]$ is written as '0'..'9' in ANTLR.

Let's define the regex for Integer:

1. in english: ϵ , + or - followed by a digit followed by 0 or more digits
2. regex: $(+ \mid - \mid \epsilon) \cdot [0-9] \cdot [0-9]^*$
3. we can omit the \cdot : $(+ \mid - \mid \epsilon)[0-9][0-9]^*$
4. we can omit the $*$ using $+$: $(+ \mid - \mid \epsilon)[0-9]^+$

A DFA in practice is implemented as a 2D table T. One dimension is the state, the other is the input symbol. Every transition becomes $T[i,a]=k$. During execution I check the input the skip to the next state, very efficient. We could use flex to generate the lexer, the input is a set of regex and some C instruction. The output is C program that has a function `yylex()` which reads inputs and executes the C functions.

13.3 Building a parser

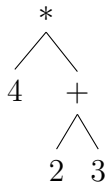
A parser checks the syntax of the program and builds a representation of the program.

After reading the tokens provided by the lexer, the parser generates a parse tree and then the AST. The intermediate step between tokens and AST is rarely explicit, but for our purpose it will be.

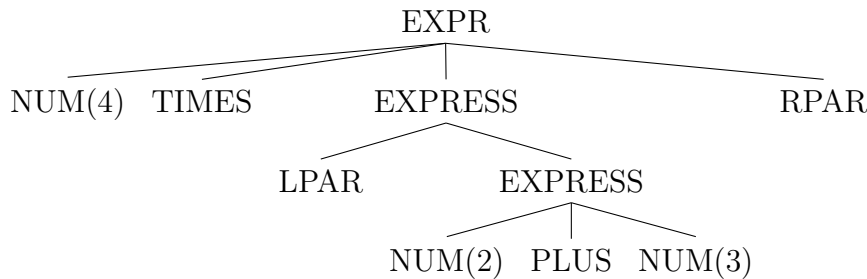
Let's parse this expression $4*(2+3)$.

Parser input: NUM(4) TIMES LPAR NUM(2) PLUS NUM(3) RPAR

Parse output AST



Parse tree



Leaves are

tokens.

The AST is a simplified version of the parse tree, it's more compact and easier to process. You can think of the parse tree as concrete syntax.

The parser therefore has 2 tasks: syntax checking and AST generation (from parse tree).

We can a parser by hand but, same as the lexer, it's hard, error prone and there are parser generators. We will write one manually just to see why it's no fun.

The first problem is syntax checks: are parentheses balanced? We can't do this using the automata because (this is my guess) the language is non deterministic.

Define the implementation:

- let TOKEN be enums: NUM, LPAR, RPAR, PLUS, MINUS, TIMES, DIV

- `in[]` is a global with the inputs
- `next` is a global with the index of next input

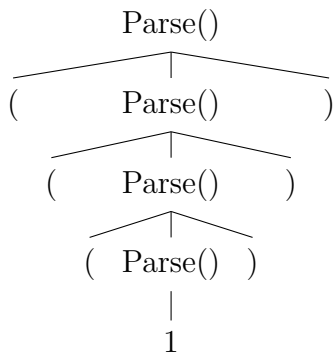
```

1 void Parse() {
2     nextToken = in[next++];
3     if (nextToken == NUM) return;
4 }
5 if (nextToken != LPAR) print("syntax_error");
6 Parse();
7 if (in[next++] != RPAR) print("syntax_error");

```

Balanced parentheses parser

The output for `(((1)))` is:



Let's add subtraction:

```

1 void Parse() {
2     if ((nextToken = in[next++]) == NUM) {
3         if (in[next] == MINUS) { next++;
4             Parse(); }
5     } else if (nextToken == LPAR) {
6         Parse();
7         if (in[next++] != RPAR) print("syntax_
8             error");
9         if (in[next] == MINUS) { next++;
10             Parse(); }
11     } else print("syntax_error");
12 }

```

Balanced parentheses parser

Obviously this is tedious, we will therefore use a parser generator. To determine how our language will be generated we will use a CFG. Here's for example a simple CFG for arithmetic expressions: $E \rightarrow n \mid \text{id} \mid (E) \mid E + E \mid E * E$.

CFG will guarantee that there is no syntax error, how? One way is the naive solution, derive any possible string and check if your program is among them. Actually used in real world (damn).

14 Top-down parsing

Let's parse a string. Recursive descent parsers try each production in turns, always left most, until there is a mismatch or a match.

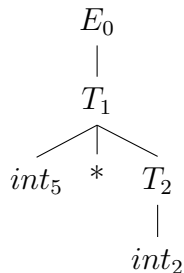
14.1 Recursive descent parser

Consider the following grammar:

- $E \rightarrow T + E \mid T$
- $T \rightarrow (E) * T \mid (E) \mid \text{int} * T \mid \text{int}$

Let's parse the string $\text{int}_5 * \text{int}_2$, starting with E.

1. $E_0 \rightarrow T_1 + E_1$
2. $T_1 \rightarrow (E_2) * T_2$, no token int_5
3. $T_1 \rightarrow (E_2)$, no token int_5
4. $T_1 \rightarrow \text{int} * T_2$, now we do all T_1 rules until we match. But after



Define function that checks the token for match of the following:

- a given token terminal
`bool term(TOKEN tok) { return in[next++] == tok; }`
- a given production of S (the n^{th})
`bool Sn() { ... }`
- any production of S:
`bool S() { ... }`

Each function advance next.

Now let's get specific:

- $E \rightarrow T + E$
`bool $E_1()$ { return $T()$ && term(PLUS) && $E()$; }`
- $E \rightarrow T$
`bool $E_2()$ { return $T()$; }`
- any production from E:
`bool $E()$ { int save = next; return $E_1()$ || (next = save, $E_2()$); }`

Let's define non-terminal T functions:

- `bool $T_1()$ { return term(OPEN) && $E()$ && term(CLOSE) && term(TIMES) && $T()$; }`
- `bool $T_2()$ { return term(OPEN) && $E()$ && term(CLOSE) }`
- `bool $T_3()$ { return term(INT) && term(TIMES) && $T()$ }`
- `bool $T_4()$ { return term(INT) }`
- `bool $T()$ {
int save = next;
return $T_1()$
|| (next = save, $T_2()$) || (next = save, $T_3()$) || (next = save, $T_4()$) }`

To start the parser next have to point to the first token and then you can invoke $E()$. If we have a special char \$ at the end of our token array, $E()$ shall return true and the pointer to \$.

This approach is easy to implement, but does not always work. Consider $S \rightarrow Sa$ this is a infinite loop, also called left-recursive grammar. We can fix the recursion.

Consider $S \rightarrow aS|b$, we can rewrite it as $S \rightarrow bS'$ and $S' \rightarrow aS'|\epsilon$.

In general

$$S \rightarrow S\alpha_1|\dots|S\alpha_n|\beta_1|\dots|\beta_m$$

should be rewritten as

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \beta_1S'|\dots|\beta_mS' \\ S' &\rightarrow \alpha_1S'|\dots|\alpha_nS'|\epsilon \end{aligned}$$

ANTLR4 does this automatically.

Another left recursive grammar is

$$S \rightarrow S\alpha|\delta$$

$$S \rightarrow S\beta$$

can be eliminated using this algorithm:

List all non terminals symbols A_1, A_2, \dots, A_n , for $i:=1$ to n :

- replace all $A_i \rightarrow A_j\beta$ such as $j < i$ with $A_i \rightarrow \delta_1\beta|\delta_2\beta|\dots|\delta_k\beta$ where $A_j \rightarrow \delta|\delta_2|\dots|\delta_k$
- eliminate direct left recursion in A_i
- after i -th steps all productions are $A_i \rightarrow A_k\beta$ where $k < i$

This algorithm it's good enough for small languages but inefficient.

14.2 Predictive parsing

It would be nice if the parse "knew" which production to expand next.

Let's try and replace:

```
1 return E() || (next = save, E2())
```

with

```
1 switch( something ) {  
2     case L1: return E1();  
3     case L2: return E2();  
4     otherwise: print ("syntax_error");  
5 }
```

"something" is the lookahead, the next token.

This parser:

- uses the recursive descent but can predict which production to use
the prediction are made by looking the next token
no backtracking

- accept LL(k) grammars
L: left to right scan of inputs
L: leftmost derivation
k: k tokens of lookahead
- we will use LL(1) grammars
ANTLR can do LL(*) grammars

LL(1) means that for each non-terminal and token there is at most 1 production that leads to success. This method can be specified as a 2D table:

- one dimensions are non-terminals
- one dimensions are tokens
- each cell contains a production

For example the grammar:

$$E \rightarrow T + E \mid T$$

$$T \rightarrow (E) * T \mid (E) \mid \text{int} * T \mid \text{int}$$

is impossible to predict, because for T 2 productions start with int and (. E is unclear how to predict.

In general a language must be left-factore(ANTLR does this on it's own).

The new fixed grammar is:

$$E \rightarrow T + X$$

$$X \rightarrow +E \mid \epsilon$$

$$T \rightarrow (E) * Y \mid \text{int} * Y$$

$$Y \rightarrow *T \mid \epsilon$$

14.2.1 LL(1) parser

For simplicity sake we will use a LL(1) *table* and *parse stack*.

Here's our left-factore grammar

$$E \rightarrow TX$$

$$X \rightarrow +E \mid \epsilon$$

$$T \rightarrow (E)Y \mid \text{int} Y$$

$$Y \rightarrow *T \mid \epsilon$$

The corresponding LL(1) parsing table: The empty spots are errors. Like

	int	*	+	()	\$
T	int Y			(E)Y		
E	T X			TX		
X			+E		€	€
Y		*T	€		€	€

Tabella 8: Esempio di tabella

[E,*], we can't know that it's a string if it starts with *.

We use a similar method to recursive descent. The difference is: we choose the production based on the next token.

There is a stack used to keep track on pending non terminals . We reject when there is an error and accept when we encounter end of input.

Here's the pseudo code of the algorithm:

```

1  // We start the stack with <S,\$>
2  repeat
3      case stack of
4          <X rest> : if T[X,*next] = Y1...Yn
5                      then stack := <Yn...Y1 rest>
6                      else error()
7          <t rest> : if t == *(next++)
8                      then stack := <Yn...Y1 rest>
9                      else error()
10 until stack == <>

```

LL(1) languages are defined by a parsing table. No table entry can be multiply defined. We want to generate parsing tables from CFG.

Consider the state $S\$ \xRightarrow{*} \beta A \gamma$, b is the next token and we want to match the string $\beta b \delta$

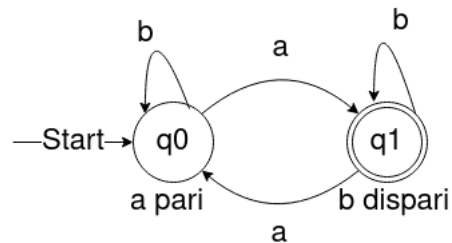
15 Esercitazioni

15.1 Esercitazione 21/09/23

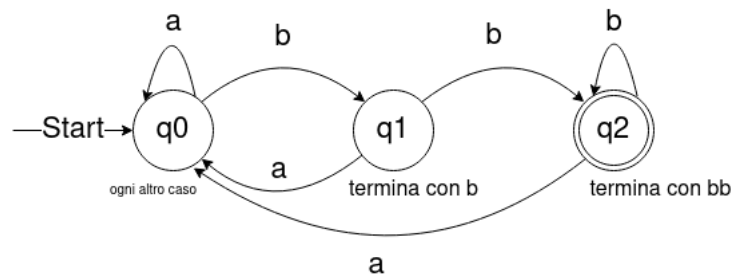
15.1.1 Costruzione DFA

Consideriamo l'alfabeto $\{a,b\}$. Realizzare dei DFA che riconoscono i seguenti linguaggi:

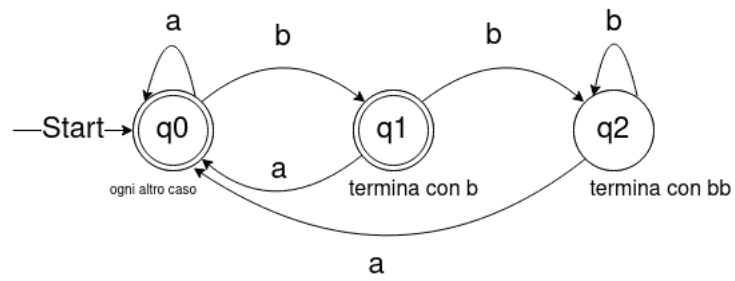
1. stringhe con un numero dispari di a
SI ab,aaa,bba,aaba
NO ϵ ,aa



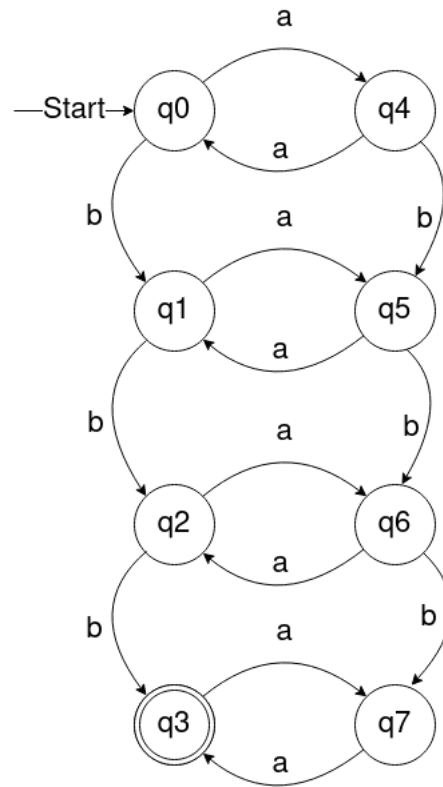
2. stringhe che terminano con bb
SI bb,babb
NO ϵ ,ba,a,aba



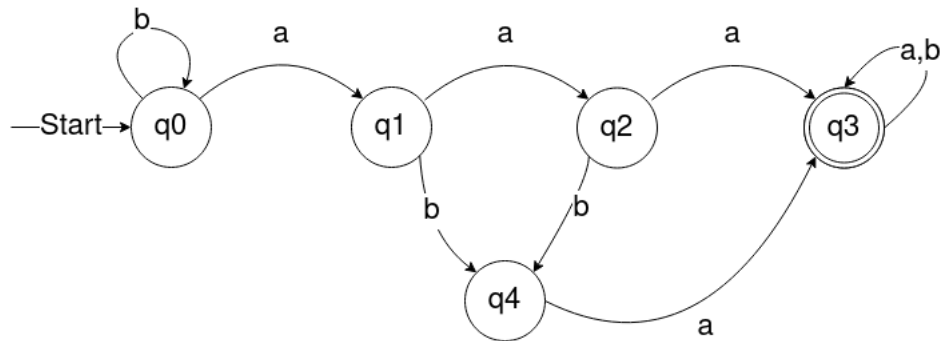
3. stringhe che non terminano con bb
SI ϵ ,ba,a,aba
NO bb,babb



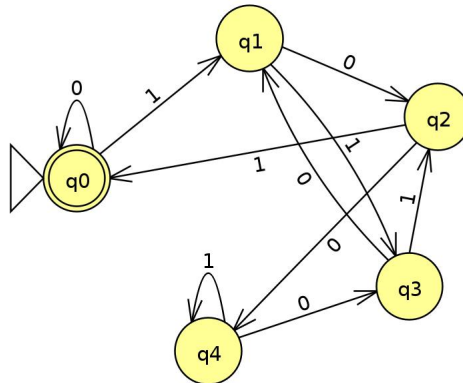
4. stringhe con un numero pari di a ed almeno 3 b
 SI bbb,bababb
 NO ϵ ,bbaa,bababa



5. stringhe che contengono la sottostringa aaa o la sottostringa aba (contengono almeno una delle due)
 SI babab,aaaa,aaaba
 NO ϵ ,abba,a,b,ab

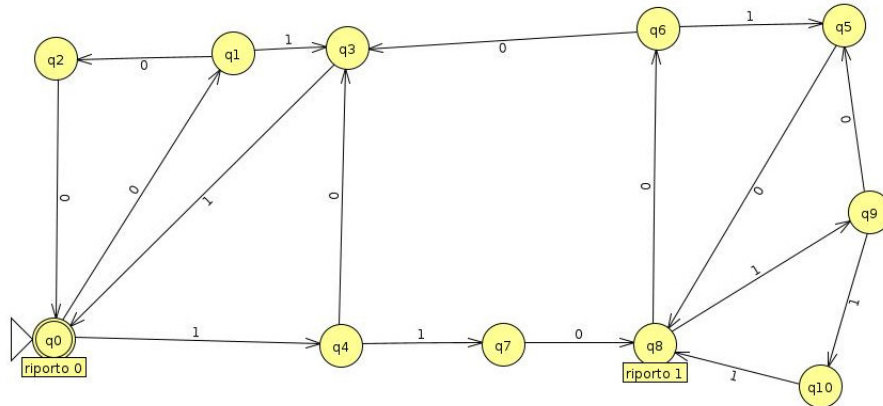


6. Realizzare un DFA che riconosca il seguente linguaggio su alfabeto $\{0,1\}$: stringhe che interpretate come numero binario risultano un multiplo di 5
 SI 101,1010,1111,0
 NO 111,1,10



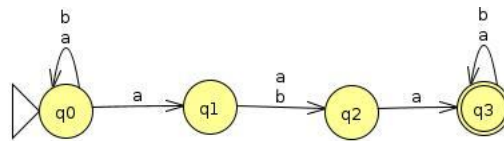
NB: Devi considerare tutti i numeri fino a 5!

7. Sempre considerando alfabeto $\{0,1\}$, realizzare un DFA che controlla la correttezza delle somme binarie: data la stringa: $a_0b_0c_0a_1b_1c_1\dots a_nb_nc_n$ controlla se $a_n\dots a_1a_0 + b_n\dots b_1b_0 = c_n\dots c_1c_0$ (cioè $a+b=c$ con a,b,c numeri binari con stessa lunghezza)

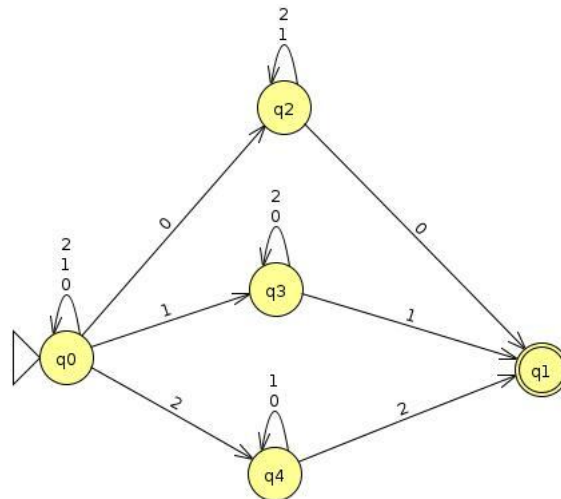


15.1.2 NFA

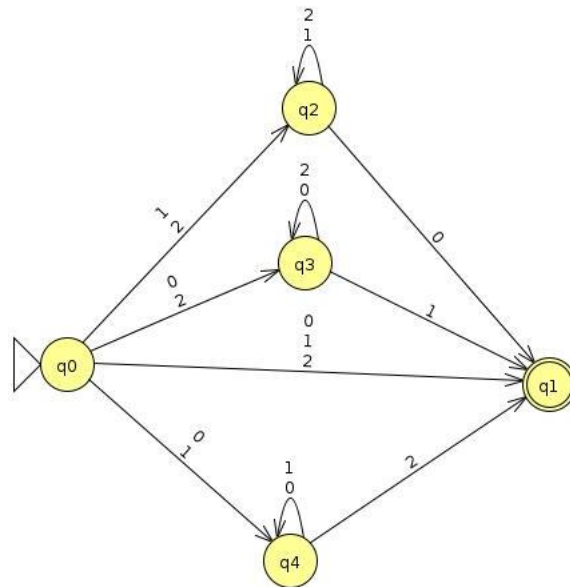
1. Dato l'alfabeto $\{a,b\}$ realizzare un NFA che riconosce le stringhe che contengono aaa oppure aba
SI babab,aaaa,aaaba
NO ϵ ,abba,a,b,ab



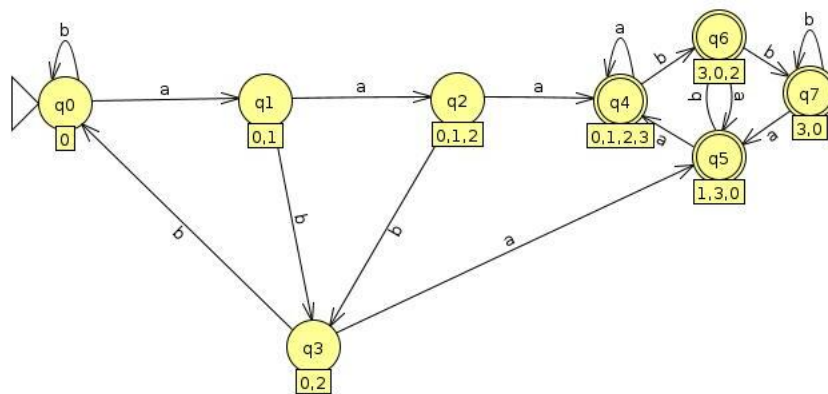
2. Realizzare un NFA che riconosce le stringhe non vuote sull'alfabeto $\{0,1,2\}$ in cui l'ultima cifra appare almeno una volta in precedenza
SI 011,121,22,0120
NO ϵ ,012,20,1



3. Realizzare un NFA che riconosce le stringhe non vuote sull'alfabeto 0,1,2 in cui l'ultima cifra NON appare in precedenza
 SI 012,20,1
 NO ϵ ,011,121,22,0120



4. Dato l'alfabeto a,b si consideri l'NFA fatto all'esercizio 1, che riconosce le stringhe che contengono aaa oppure aba. Trasformarlo in DFA.



15.2 Esercitazione 28/09/23

15.2.1 Pumping lemma

Mostrare che i seguenti linguaggi non sono regolari:

1. Linguaggio sull'alfabeto $\{a,b\}$ delle stringhe $a^h b^m$ con $m \geq 2h$ **Soluzione**

Si supponga per assurdo che L sia regolare.

Deve quindi esistere un DFA A tale che $L = L(A)$.

Quindi, chiamato n il numero degli stati di A , si ha che:

$\exists n \geq 1 : \forall w \in L, |w| \geq n, w$ può essere scomposta in $w = xyz$ con $|y| > 0, |xy| \leq n, xy^k z$ appartiene ad L per ogni $k \geq 0$
(PUMPING LEMMA)

Considero la stringa $w = a^n b^{2n}$, e decido che la stringa y è composta da sole a e almeno una. Prendiamo $k > 2$ allora la stringa risultante è $z = xyz$, il numero delle a è aumentato ma il numero delle b no, paradosso. Si può concludere che $w \notin L$ quindi L non è regolare.

2. Linguaggio delle parentesi tonde bilanciate; cioè, delle stringhe, sull'alfabeto composto dai due simboli "(" e ")", che sono espressioni Exp fatte come segue.

Una Exp e' nella forma: (Exp1) oppure Exp1 Exp2 oppure ϵ

Esempi di stringhe del linguaggio:

$()()((()))$

$((()))$

$((()))((()))$

Esempi di stringhe non del linguaggio:

$)()$

$((()$

Formalmente dimostro che $L = \{ "(", ")", " " \}$ non è regolare:

Si supponga per assurdo che L sia regolare.

Deve quindi esistere un DFA A tale che $L = L(A)$.

Quindi, chiamato n il numero degli stati di A , si ha che:

$\exists n \geq 1 : \forall w \in L, |w| \geq n, w$ può essere scomposta in $w = xyz$ con $|y| > 0, |xy| \leq n, xy^k z$ appartiene ad L per ogni $k \geq 0$
(PUMPING LEMMA)

Prendiamo la stringa $w = ({}^n)^n$, e decido che y è composta da ${}^n({}^n$ e che $k > 2$. Allora la stringa $z = xy yz$ ma così ho più ${}^n({}^n$ che ${}^n)$, assurdo.

Si può concludere che $w \notin L$ quindi L non è regolare.

3. Linguaggio sull'alfabeto binario delle stringhe del tipo xy dove y coincide con il complemento di x (0 diventano 1, 1 diventano 0).
Sinceramente il testo mi confonde e alla fine dei conti è uguale alle 2 dimostrazioni precedenti, quindi non la metto.
4. Linguaggio sull'alfabeto binario delle stringhe del tipo ww

Formalmente dimostro che $L = \{w^2n\}$ non è regolare:

Si supponga per assurdo che L sia regolare.

Deve quindi esistere un DFA A tale che $L = L(A)$.

Quindi, chiamato n il numero degli stati di A , si ha che:

$\exists n \geq 1 : \forall w \in L, |w| \geq n, w$ può essere scomposta in $w = xyz$ con $|y| > 0, |xy| \leq n, xy^kz$ appartiene ad L per ogni $k \geq 0$
(PUMPING LEMMA)

Prendiamo la stringa $s = w^2n$, e decido che y è composta da w e che $k > 0$. Allora la stringa $z = xyz$ ma così ho più w dispari.

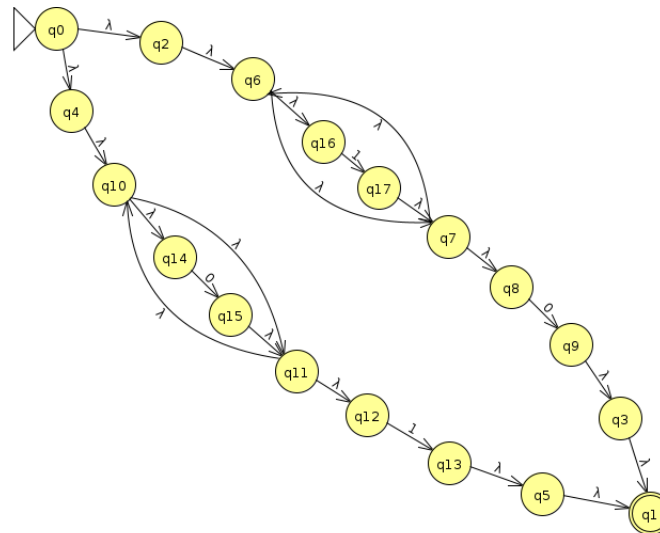
Si può concludere che $s \notin L$ quindi L non è regolare.

15.2.2 Espressioni regolari

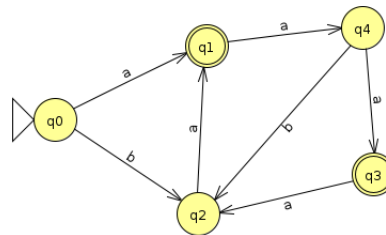
1. Considerare l'espressione regolare $0^*(0+11)1^*$. Dire quale linguaggio rappresenta.

$$L = \{0^n \times 1^m | n \geq 0, m \geq 0, x \in \{0, 11\}\}$$

2. Considerare l'espressione regolare 1^*0+0^*1 . Trasformalo in un ϵ -NFA.



3. Trasformare in RE il seguente automa



$$(a+ba)(aba+aaaa)^*+(a+ba)(aba)^*aa(aa(aba)^*aa)^*$$

È una banale applicazione della formula

4. 5 Si consideri l'alfabeto $\{a,b\}$.

Definisci un RE che accetta un numero pari di a seguito da un numero di b che diviso per 3 da' resto 2

$$(aa)^*+bb(bbb)^*$$

15.3 Esercitazione 05/10/23

15.3.1 CFG

1. Definire una grammatica libera dal contesto (CFG) per i seguenti linguaggi sull'alfabeto $\{a,b,c\}$:

- (a) linguaggio delle stringhe $a^n b^{2n}$ (mostrare che "aabbbb" è derivabile dalla CFG)

$$S \rightarrow aSbb$$

$$S \rightarrow \lambda$$

- (b) linguaggio delle stringhe $(abc)^n (cba)^n$

$$S \rightarrow abcScba$$

$$S \rightarrow \lambda$$

- (c) linguaggio delle stringhe $a^n b^m$ in cui $n \leq m$

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow Sb$$

$$S \rightarrow \lambda$$

- (d) linguaggio delle stringhe $a^n b^m c^n$ con n pari e m dispari

$$S \rightarrow aaScc$$

$$S \rightarrow bA$$

$$A \rightarrow bbA$$

$$S \rightarrow \lambda$$

- (e) linguaggio delle stringhe $a^n b^m c^p$ in cui $n \leq m + p$

$$S \rightarrow aSc$$

$$S \rightarrow Sc$$

$$B \rightarrow \lambda$$

$$S \rightarrow B$$

$$B \rightarrow aBb$$

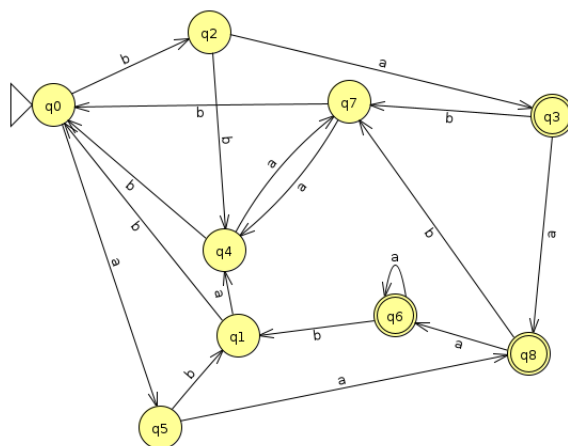
$$B \rightarrow Bb$$

2. Dire se la CFG del punto "e" dell'esercizio 3 è ambigua o meno. In caso affermativo mostrare una stringa generata dalla CFG che abbia (almeno) due alberi sintattici/derivazioni canoniche sinistre. Mostrare tali alberi sintattici e le corrispondenti derivazioni canoniche sinistre.

È ambigua, ho due derivazioni di abc

$S \rightarrow aSc$	$S \rightarrow Sc$
$S \rightarrow aBc$	$S \rightarrow aBbc$
$S \rightarrow abc$	$S \rightarrow abc$

3. Esercizio su minimizzazione DFA. Effettuare (a mano con l'algoritmo riempi-tabella visto a lezione) la minimizzazione dell'automa in `exMinimization.jff`



	q_0	q_1	q_2	$*q_3$	q_4	q_5	$*q_6$	q_7	$*q_8$
q_1	+								
q_2	o	o							
$*q_3$	x	x	x						
q_4	o		o	x					
q_5	o	o		x	o				
$*q_6$	x	x	x		x	x			
q_7	o		o	x		o	x		
$*q_8$	x	x	x		x	x			

Tabella 9: Tabella riempita

- (a) x: primo giro, distinguo gli stati

- (b) o: secondo giro, trovo lo stato di ogni copia con entrambi i simboli.
Se lo stato trovato è una x allora metto una o
- (c) +: terzo giro, ripeto il 2