Math Exam Preparation

Roiban Marius-Alexandru

July 22, 2024

Contents

Euclid's Algorithm

```
def euclid_division(a,b):
    sum = 0
    whilst sum <= a:
        sum += b
    return a - sum + b
```

```
def pgcd(a, b):
    if b == 0:
        return a
    r = euclid_division(a, b)
    return pgcd(b, r)
```

Division by 9

For $a = 10^0 a_0 + 10^1 a_1 + \ldots + 10^n a_n$ **prove that** $9 \mid a \equiv 9 \mid \sum_{i=0}^{n} 10^i a_i$**.**

We want to show that if a number n is divisible by 9 then the number modulo 9 should equal 0.

$$n\%9 = 0 \qquad \text{if } 9 \mid \text{n and vice-versa} \tag{1}$$

We want then to prove that $\left(\sum_{i=0}^{n} 10^i \cdot a_i\right)\%9 = 0$ to prove that $9 \mid \sum_{i=0}^{n} 10^i \cdot a_i$.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{n} 10^i \cdot a_i\right)\%9 = 0 & \\ &= (a_0 + 10^1 \cdot a_1 + \ldots + 10^n \cdot a_n)\%9 \\ &= (a_0)\%9 + (10^1 \cdot a_1)\%9 + \ldots + (10^n \cdot a_n)\%9 \\ &= 0 + 0 + \ldots + 0 \\ &= 0 \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{2}$$

We showed that $9 \mid n \equiv 9 \mid \sum_{i=0}^{n} 10^i \cdot a_i$

1. Exercices

1.1. Exercice 1

$9 \mid 99 \equiv 9 \mid (10^0 \cdot 9 + 10^1 \cdot 9)$

We know that $99\%9 = 0$. Now we want to prove that the sum

$$\left(\sum_{i=0}^{1} 10^i \cdot a_i\right) \%9 = 0$$

$$\begin{aligned} &= (9 + 10^1 \cdot 9)\%9 \\ &= (9\%9) + (90\%9) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{3}$$

1.2. Exercice 4

Pour les paires (a, b) suivantes, calculer pgcd(a, b) à l'aide de l'algorithme d'Euclide et trouver x, y tels que ax + by = pgcd(a, b).

1. a = 1287, b = 4004

D'abord calculons le pgcd(1287, 4004)

$$\begin{aligned} \mathrm{pgcd}(1287,\ 4004) &= 0 + 1287 \\ \mathrm{pgcd}(4004,\ 1287) &= 3861 + 143 \\ \mathrm{pgcd}(1287,\ 143) &= 1287 + 0 \\ \mathrm{pgcd}(143,\ 0) &= 143 \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{4}$$

Trouvons maintenant (x, y) pour calculer l'equation

$$\begin{aligned} 1287x + 4004y &= 143 \\ 1287x + 4004 \cdot 1 &= 143 \\ 4004 - 143 &= 1287x \\ 3861 &= 1287x \\ \frac{3861}{1287} &= x = 3 \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{5}$$

On a trouvé comme solution, $x = 3$ et $y = 1$.

2. Graphes

Euler's Formula

On dit qu'un graphe est planaire lorsque la formule d'Euler est satisfaite:

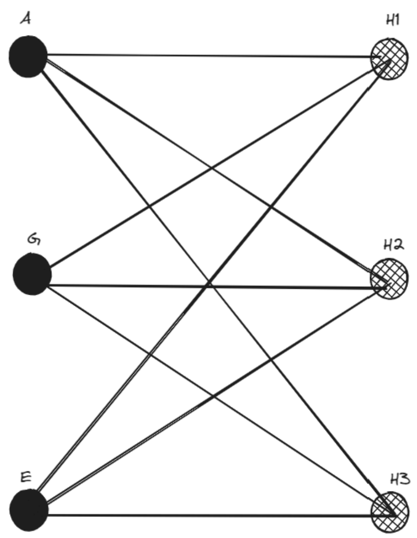
$$v - e + a = 2 \tag{6}$$

Oú $\mid V \mid = v, \mid E \mid = e$ et a est le nombre de faces.

2.1. Exercices

2.1.1. Exercice 11

On a trois maisons et trois usines. La première usine fournit de l'eau, la deuxième du gaz et la troisième de l'électricité. On désire relier chacune des trois maisons aux trois usines pour qu'elles aient accès à l'eau, au gaz et à l'électricité. Une contrainte supplémentaire est que les tuyaux ne doivent jamais se croiser. Est-ce possible ?



On sait qu'on peut utiliser la formule d'Euler pour vérifier la planarité d'un graphe, on montrant la planarité du graphe on a aussi prouvé qu'il n'existe aucun croisement entre les arrêtes du graphes (Donc, il n'y a aucun croisement entre les tuyaux!).

$$\begin{aligned} \mid V \mid - \mid E \mid + f &= 2 \\ 6 - 9 + f &= 2 \\ f &= 2 - 6 + 9 \\ f &= 5 \end{aligned} \tag{7}$$

Après avoir calculer la formule d'Euler, on a trouvé qu'il faut que notre graphe contient 5 faces.

Preuve par l'absurde

Imaginons que la formule d'Euler est respectée et donc il y a un nombre de faces equivalent a 5 dans notre graphe.

Dans un graphe biparti $K_{3,3}$ on sait qu'il n'est pas possible de créer un face avec le nombre minimal de 3 arrêtes, nous auront à la place un quadrilatère formé par 4 arrêtes.

Donc, on peut calculer le nombre minimal de faces à partir de ces données

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{\mid E \mid}{4} &\equiv 2 \cdot \frac{9}{4} \\ &= 4.5 \end{aligned} \tag{8}$$

Ceci rentre en contradiction avec le nombre de faces necessaire pour prouver que le graphe est planaire, donc, ce n'est pas possible de ne pas avoir des tuyaux qui ne se croisent pas. ■

2.1.2. Exercice 12

Soit G un graphe dont les sommets sont les entiers $1, 2, 3, ..., n$ et tel que l'arête pq existe si et seulement si $p \neq q$ et $p + q$ est impair.

(a) Montrer que χ(G) = 2, autrement dit que le graphe est biparti.

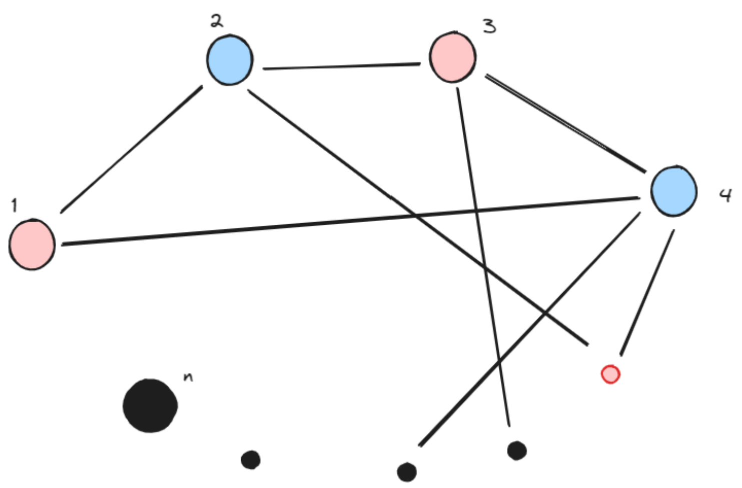


Figure 1: Le graphe G

Preuve par l'absurde

On sait que toute arrête entre 2 sommets (a, b) a existe si $a + b \in I$ avec I l'ensemble des nombres impairs et P l'ensemble des nombres pairs.

Alors imaginons il existe une arrête entre 2 nombres paires ou impaires, leur somme serra d'office paire car

$$\begin{aligned} P + P = P \\ I + I = P \end{aligned} \tag{9}$$

Ceci va en contradiction avec la définition de notre graphe et donc on va necessiter d'une 3eme couleur, alors $\chi(G) > 2$. ■

(b) Que se passe-t-il si "impair" est remplacé par "premier" dans la définition ? Donner l'allure et le nombre chromatique de ce graphe.

$$\begin{aligned} p \neq q \\ p + q \in \text{Prime} \end{aligned} \tag{10}$$

Figure 2: Le graphe G'

Dans ce genre de graphe, nous avons tout les nombres premiers comme impaires sauf le nombre 2. Donc, le graphe G a priori suit une coloriation simmilaire à la situation de base, impliquant que la coloration soit $\chi(G) \leq 2$. De plus, prenons le graphe G' dans la Figure 2, ce graphe contient au minimum 1 arrête car $1 + 2 = 3$ et donc necessite 2 couleur. Donc, $\chi(G') = 2$. En tenant compte de $\chi(G) \leq 2 \wedge \chi(G') = 2$ on conclue que $\chi(G) = 2$ ■

(c) Que se passe-t-il si "impair" est remplacé par "pair" dans la définition ? Donner l'allure et le nombre chromatique de ce graphe.

$$\begin{aligned} p \neq q \\ p + q =\in \text{Paire} \end{aligned} \tag{11}$$

On sait que la somme de nombre pair est paire et la somme de nombre impair est paire aussi

$$\begin{aligned} P + P = P \\ I + I = P \end{aligned} \tag{12}$$

Ceci nous donnera 1 graphe ayant 2 composantes connexes, une partie contenant les nombres pairs et l'autre les nombres impairs. On sait qu'il faudra $\chi(G'') = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ couleurs pour chaque sous graphe.

2.1.3. Exercice 13

Trouver un contre-exemple à l'énoncé (faux) suivant :

Tout graphe simple à 8 sommets et 2-régulier est eulérien

Solution:

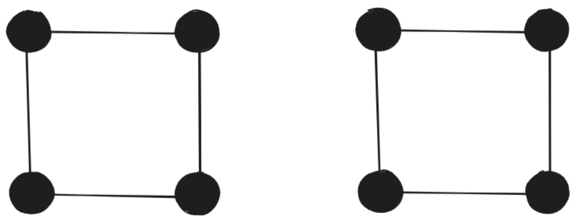


Figure 3: Un graphe ayant 2 composantes connexes

Index of Figures