Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES

Guia do professor

Software

Aviões e matrizes

Objetivos da unidade

1. Mostrar uma aplicação muito importante de matrizes à análise de grafos;
2. Reforçar o significado da multiplicação de matrizes;
3. Introduzir a noção de grafos.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Aviões e matrizes

Guia do professor

Sinopse

Você consegue imaginar que relações existem entre matrizes e rotas aéreas? Neste software, seus alunos verão que as matrizes podem ser utilizadas na análise e na elaboração de malhas aéreas, aplicação que constitui um exemplo prático do produto de matrizes. Além disso, para estabelecer essas relações de maneira simplificada, será introduzido o conceito de grafo.

Conteúdos

- Matrizes, aplicações;
- Grafos.

Objetivos

1. Mostrar uma aplicação muito importante de matrizes à análise de grafos;
2. Reforçar o significado da multiplicação de matrizes;
3. Introduzir a noção de grafos.

Duração

Uma aula dupla, com possibilidade de extensão por mais aulas caso o professor deseje resolver todos os problemas propostos.

Recomendação de uso

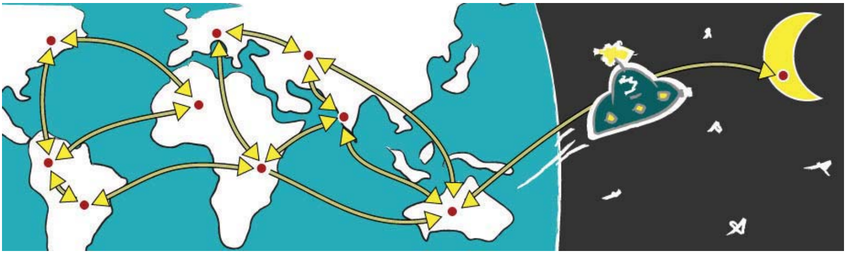
Sugerimos que o software seja utilizado em duplas. Os alunos devem levar lápis e papel para a sala de informática. É desejável que eles dominem a multiplicação de matrizes ao iniciar as atividades.

Material relacionado

- Experimentos: Caminhos e Grafos, Mensagens Secretas com Matrizes.
- Softwares: Determinantes e Áreas, Determinantes e Polígonos, Grafos e Matrizes.
- Vídeos: Bombons a granel, Se eu fosse você.
- Áudio: Pontes de Konigsberg.

Matemática Multimídia

Introdução



Este software mostra uma aplicação simples e muito importante de matrizes na análise de grafos.

É feita uma correspondência entre malhas aéreas e grafos, mas é bom que se diga que o que é discutido ao longo do software também é aplicável às malhas rodoviárias. A opção pelas malhas aéreas se deve a três motivos principais:

1. a questão do número de escalas é mais pertinente nas viagens aéreas do que nas viagens terrestres;
2. a construção de aeroportos, devido ao custo e segurança envolvidos, exige muito mais planejamento do que a construção de rodoviárias;
3. malhas aéreas são bem mais simples do que malhas rodoviárias, na medida em que possuem menos elementos (o número de aeroportos e rotas é menor que o de rodoviárias e estradas), o que torna os cálculos e a análise menores.

Em termos de conteúdo, o maior objetivo deste software é mostrar, dentro do contexto escolhido, que a multiplicação de matrizes, normalmente ensinada apenas como um algoritmo, possui significado e aplicações muito interessantes.

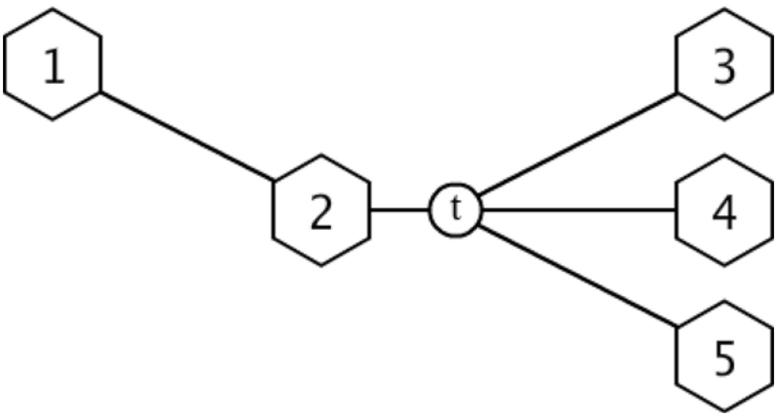
O software

Estrutura do software

Este software é composto por cinco atividades, sendo as três últimas problemas em que é aplicado o conhecimento construído ao longo das duas primeiras.

Recomendamos que, antes de utilizar o software, o professor escolha qual dos três problemas os alunos deverão resolver após concluir as duas primeiras atividades. Salientamos que, apesar de utilizarem o mesmo ferramental, eles estão em ordem crescente de dificuldade.

O tempo previsto para a conclusão das duas primeiras atividades mais um dos problemas é de cerca de 1h10min, ou seja, o tempo hábil de uma aula dupla considerando o dispêndio de tempo envolvido no deslocamento até a sala de informática.



TELA 1 *Mapa do software.*

ATIVIDADE

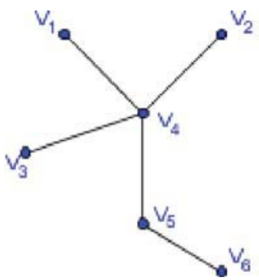
1 Voos, Grafos e Matrizes

Nesta atividade os alunos serão apresentados aos conceitos básicos que serão utilizados ao longo de todo o software: malha aérea e escalas, grafos e matrizes de adjacência.

As malhas aéreas são representadas como grafos ao considerarmos cada aeroporto como um vértice e cada voo como uma aresta. Neste software, não estamos preocupados com as distâncias ou custos de cada voo, apenas com a existência ou não de voos e com o número de escalas necessárias (ou possíveis) para voar entre duas localidades. Além disso, consideramos que todo voo existe sempre nas duas direções: ida e volta.

As matrizes de adjacência são as matrizes que obtemos através de um grafo com n vértices, numerados de 1 a n, da seguinte maneira: a entrada $a_{i,j}$ da matriz é igual a 1 se existe voo direto entre as cidades i e j e zero caso não exista voo. Por definição, as células $a_{i,i}$ são iguais a zero.

Por exemplo, para o grafo abaixo, a matriz de adjacência é a mostrada logo ao lado.



$$M1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

TELA 2

A ATIVIDADE 1 está construída de modo que o aluno entenda como representar uma malha aérea na forma de uma matriz usando a matriz de adjacência do grafo relativo à malha.

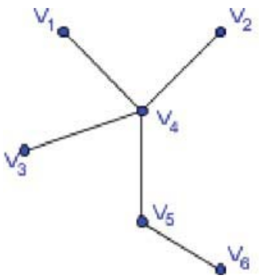
Não se espera que haja grandes dificuldades durante esta atividade.

2 Voos com mais escalas

Esta é a atividade na qual o uso de matrizes para representar as malhas aéreas começa a ganhar sentido. Isso acontece quando se nota que, se M_1 é a matriz de adjacência de um determinado grafo, seu quadrado, a matriz M_1^2, representa, em cada uma de suas células, o número de ligações entre as cidades correspondentes com *exatamente* dois voos!

Sobre esse resultado, a PARTE 2 desta atividade traz o seguinte texto (ligeiramente adaptado):

Tomemos como referência o grafo abaixo e sua respectiva matriz de adjacência M_1:



$$M1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

TELA 3

Para entender o resultado anunciado anteriormente, acompanhe passo a passo o cálculo de uma das células da matriz M_1^2:

$$M_1^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Para calcular, por exemplo, o valor da entrada $m_{4,6}$ da matriz M_1^2, devem-se multiplicar os termos da linha 4 pelos termos da coluna 6:

$$\text{linha 4:} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \text{coluna 6:} \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

O que resulta em:

$$m_{4,6} = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$$

Cada parcela da soma representa um possível caminho entre as duas cidades. A primeira parcela, por exemplo, representa o caminho que passa pela cidade 1. Mas, como a cidade 6 não está ligada à cidade 1, o zero aparece na multiplicação, anulando essa parcela.

A única parcela não nula é a quinta. Ela representa o caminho que passa pela cidade 5, à qual tanto a cidade 4 como a cidade 6 estão ligadas. Se houvesse mais alguma ligação entre elas, o resultado da soma seria maior do que 1, e significaria o número de possíveis caminhos ligando as duas cidades.

Além disso, essa propriedade também vale para potências maiores da matriz M_1. Por exemplo, M_1^3 é igual à matriz que representa as ligações com três voos e assim por diante. Abaixo, está a matriz M_1^3 para o grafo que você está analisando:

$$M_1^3 = M3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Essa é a parte mais conceitual do software e pode ser conveniente interromper a atividade dos alunos para dar algumas explicações adicionais. Contudo, o software foi concebido para que a interação direta dos alunos com ele seja suficiente para a compreensão dos conceitos abordados.

Com isso, professor, você pode assumir um papel de mediador e acompanhar o trabalho dos seus alunos, atento para eventuais dificuldades.

Um detalhe importante sobre a n-ésima potência da matriz de adjacência é que as células representam o número de possibilidades para ir de uma cidade a outra com *exatamente* n voos.

Porém, se tomarmos a soma $M + M^2 + M^3 + \ldots + M^n$ teremos, em cada entrada da matriz, o número de possibilidades para ir de uma cidade a outra com *no máximo* n voos. Isso não é demonstrado no software, mas trata-se de um resultado bastante intuitivo e simples, uma consequência direta das observações anteriores a respeito do significado da i-ésima potência da matriz M.

Pode ser interessante explorar o significado de algumas entradas específicas, como, por exemplo, por que as entradas diagonais (as entradas a_{ii}) da matriz M são sempre nulas, enquanto as entradas diagonais da matriz M^n são necessariamente não nulas se n for par.

Essas duas ferramentas – a n-ésima potência da matriz de adjacência e a soma das n-ésimas primeiras potências da matriz de adjacência – serão utilizadas ostensivamente na resolução dos problemas propostos nas ATIVIDADES 3, 4 e 5 deste software.

ATIVIDADE

3 Problema 1

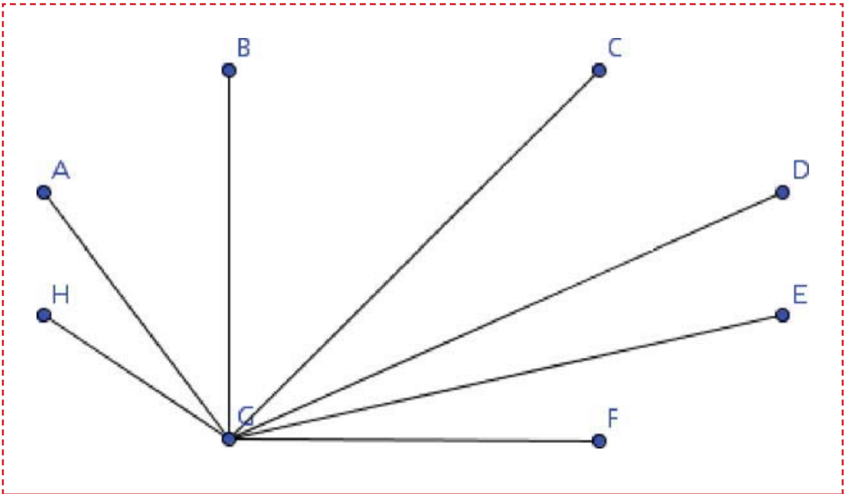
Este é o mais simples dos três problemas propostos. O enunciado é o seguinte:

Construir uma malha aérea pequena, mas que ainda assim atenda às exigências de um país, é um grande desafio. Tente montar a menor malha possível para um país com aeroportos em oito cidades, e cuja forma seja tal que se possa ir de uma cidade a outra com, no máximo, dois voos.

Nos três problemas, utilizamos informalmente a expressão “menor malha” para nos referir à malha com menor número possível de arestas.

Note que a menor malha aérea possível de um país com n aeroportos, sem considerar nenhuma restrição, deve ter pelo menos $n-1$ rotas. Caso contrário, algum dos aeroportos ficaria desconectado dos demais.

A solução do problema colocado é simples se os alunos adotarem a estratégia de concentrar os voos em uma única cidade, da seguinte maneira:



TELA 4

Como essa configuração possui sete voos, ela é a menor configuração possível que permite conectar todos os aeroportos.

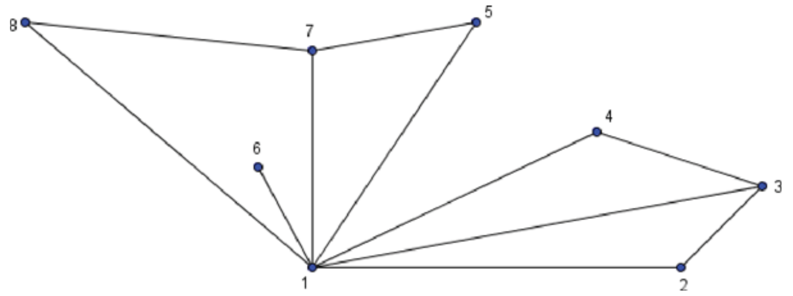
Observamos ainda que os voos poderiam ser concentrados em qualquer uma das oito cidades, o que resultaria em oito soluções diferentes, mas em algum sentido equivalentes, para o problema. Você consegue demonstrar que estas são todas as soluções deste problema?

4 Problema 2

Este problema traz uma novidade em relação ao anterior: nenhuma cidade deve ter muitos voos concentrados nela, para evitar superlotação e dificuldades de gerenciamento. O enunciado do problema é o seguinte:

Modifique os trajetos de tal modo que cada cidade tenha no máximo quatro voos. Além disso, o número total de voos não pode passar de onze, e é imprescindível que se possa ir de uma cidade a outra com, no máximo, três voos.

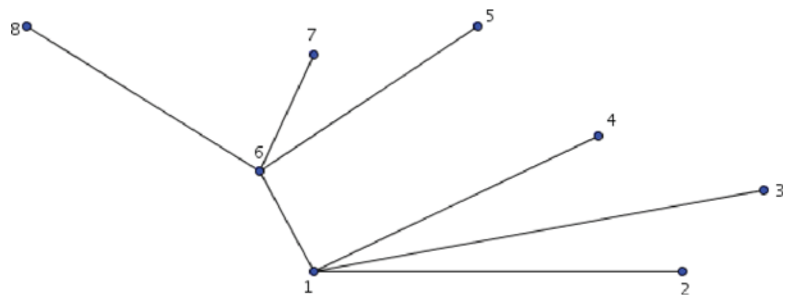
A malha a ser modificada é a seguinte:



TELA 5

A condição do número máximo de onze voos serve apenas para evitar que os alunos façam uma malha muito fragmentada e tenham que criar estratégias complexas para resolver o problema.

Neste caso, a solução pode ser obtida criando-se dois hubs (cidades que concentram um grande número de voos) conectados entre si.



TELA 6

Essa solução representa muito bem a realidade da malha aérea brasileira: algumas cidades possuem grandes aeroportos que servem de hubs para os aeroportos de porte menor próximos a eles.

Este problema termina com uma Questão para o caderno:

Questão para o caderno

Discuta com seus colegas e tente determinar quantas soluções existem com essa configuração (respeitando todas as condições impostas no enunciado e considerando um número máximo de sete voos).

Note que essa solução com apenas sete voos é obtida com a estratégia de dois hubs conectados, portanto, para calcular quantas soluções desse tipo, diferentes entre si, existem, é necessário contar de quantas maneiras duas cidades podem ser escolhidas dentre as oito disponíveis para exercer a função de hub, num total de $8!/(6!2!) = 28$ possíveis escolhas de pares de hubs. Mas isto não é o final da história: é necessário definir ainda quantos aeroportos se conectam a cada um dos hubs (no mínimo um e no máximo cinco) e quais destes aeroportos. Observe que na realidade precisamos definir estes valores apenas para um dos hubs, digamos o hub A (pois os restantes serão conectados ao hub B). Para cada número de aeroportos admissível, temos o seguinte número de possibilidades:

Número de aeroportos conectados ao hub A	Número de possibilidades correspondentes
1	$6!/(5!1!) = 6$
2	$6!/(5!1!) = 6$
3	$6!/(4!2!) = 15$
4	$6!/(3!3!) = 20$
5	$6!/(2!4!) = 15$

TABELA 1

Temos assim, para cada uma das 28 escolhas de pares de hubs, um total de $6+15+20+15+6=62$ possibilidades. Logo, o total de configurações com dois hubs é $28 \times 62 = 1736$.

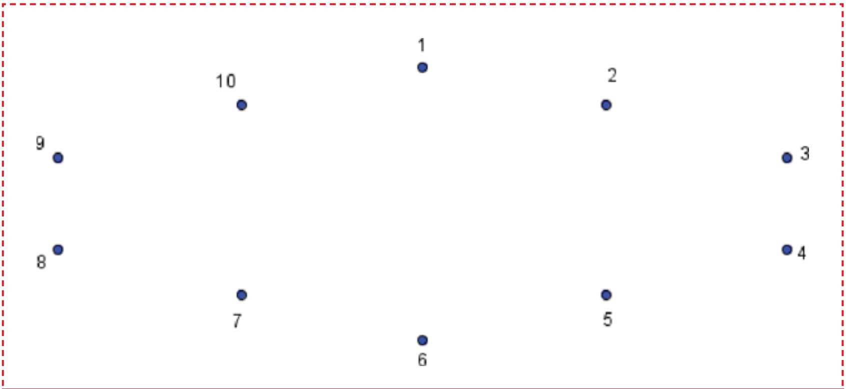
ATIVIDADE

3 Problema 3

A novidade que este problema traz é a restrição em relação à distância entre cidades conectadas por um único voo, ou seja, entre cidades muito distantes, fazer escala é obrigatório.

O enunciado do problema é o seguinte:

Construa uma malha para o país abaixo de tal modo que todas as cidades estejam conectadas por, no máximo, três voos. Porém, como as cidades 4 e 9, 3 e 8, e 2 e 7 estão muito distantes uma da outra, as viagens entre elas devem ser feitas com, pelo menos, dois voos.



TELA 7

Mais uma vez, a solução para o problema pode ser obtida através de hubs que separam as cidades em dois grupos, de modo que em nenhum deles haja cidades com conexão não permitida.

A questão mais interessante em torno deste problema, contudo, aparece como a Questão para o caderno:

Questão para o caderno

É possível construir uma malha aérea menor do que a que você construiu e que satisfaça as condições do problema? Discuta isso com seus colegas e anote no seu caderno a menor malha que você conseguir.

Se os alunos adotarem a estratégia de criar dois hubs e conectá-los, a solução terá apenas nove voos. Pelo argumento exibido anteriormente para o primeiro problema, essa é a menor malha possível para um país com dez aeroportos.

O que pretendemos com essa Questão para o caderno é incentivar os alunos a fazer novas tentativas e analisarem-nas utilizando os recursos aprendidos ao longo de todo o software.

Uma possibilidade de questão adicional, eventualmente para ser discutida em sala de aula, é contar quantas soluções diferentes com apenas nove voos podem ser construídas.

Fechamento

Faremos aqui três sugestões de fechamento para o professor, que tem a liberdade de escolher a que for mais adequada considerando-se o que foi desenvolvido pelos alunos e os recursos disponíveis na escola.

Primeira possibilidade

Caso os alunos não tenham resolvido os três problemas propostos no software e você não tenha o laboratório de informática disponível, proponha aos alunos que resolvam em sala de aula especialmente o terceiro problema (atividade 5), que traz a possibilidade de uma discussão mais longa na Questão para o caderno.

Obviamente, a resolução deve ficar mais enfadonha, pois as análises através das matrizes exigirão muitas contas.

Segunda possibilidade

Caso você tenha o laboratório de informática disponível, mas não queira continuar trabalhando com este software especificamente, sugerimos o software Grafos e Matrizes, que traz apenas a ferramenta que permite ao usuário montar um grafo e extrair a matriz de adjacências, suas potências e somas de potências.

Com o software Grafos e Matrizes, você pode criar novos problemas com as características que desejar. Uma olhada no Guia do professor pode ajudar nesse processo.

Terceira possibilidade

Caso os alunos tenham resolvido os três problemas propostos, consideramos que a melhor alternativa para o fechamento seja discutir as Questões para o caderno propostas no final das atividades 4 e 5 (problemas 2 e 3).

No primeiro caso a resposta envolve conceitos básicos de análise combinatória, enquanto no segundo deixamos a resposta em aberto. Os alunos podem ser desafiados para ver quem obtém a resposta com o menor número de voos.

Finalizando

Existem diversos problemas envolvendo grafos que podem ser propostos aos alunos. O experimento Caminhos e Grafos e o áudio Pontes de Konigsberg são bons exemplos.

Por outro lado, se desejar discutir um pouco mais o significado da multiplicação de matrizes, o vídeo Bombons a Granel e o experimento Mensagens Secretas com Matrizes são boas alternativas.

Bibliografia

SANTOS, José Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C.. **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008.

LIMA, Elon Lages. **Alguns problemas clássicos sobre grafos**. Revista do professor de Matemática, n. 12. São Paulo: SBM, 1988

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Leonardo Barichello
e Marcelo Firer

Revisores
Língua Portuguesa
Ana Cecília Agua de Melo

Projeto gráfico
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL