Matemática Multimídia

GEOMETRIA E MEDIDAS

NÚMEROS E FUNÇÕES

Guia do professor

Software

Corrida no lago

Objetivos da unidade
Utilizar conhecimentos de Funções, Geometria Plana e Física para resolver um problema de otimização.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Corrida no lago

Guia do professor

Sinopse

Este software apresenta um problema de otimização baseado em uma corrida em um lago circular na qual o competidor pode decidir que estratégia utilizar: fazer todo o percurso correndo ao redor do lago, fazer todo o percurso nadando ou então começar correndo e depois saltar para a água. A pergunta que surge naturalmente e que será investigada pelos estudantes neste software é: qual a melhor estratégia?

Conteúdos

- Geometria Plana, Problemas de Otimização;
- Funções, Análise de Gráficos;
- Conceitos básicos de Física.

Objetivos

Utilizar conhecimentos de Funções, Geometria Plana e Física para resolver um problema de otimização.

Duração

Uma aula dupla.

Recomendação de uso

Sugerimos que o software seja utilizado em duplas. Os alunos devem levar papel e caneta para a sala de informática.

Material relacionado

- Experimento: Polígonos e Círculo.

Matemática Multimídia

Introdução

O ponto alto da proposta deste software está no fato de ele mobilizar conhecimentos em Geometria Plana, Funções e Física (mais precisamente, Cinemática) para a resolução de um problema de otimização com formulação bastante simples: se você fosse disputar uma corrida em um lago circular, devendo sair de um determinado ponto e ir até o ponto diametralmente oposto, e tivesse que escolher entre ir nadando ou correndo, o que faria? E se você pudesse correr até certo ponto e, depois, pular no lago e terminar o percurso nadando?

Ao longo do software, seus alunos poderão levantar e testar hipóteses sobre o problema, algebrizá-lo e encontrar a solução através da análise de gráficos e depois generalizá-la.

Um outro detalhe atraente do problema é que a solução final contraria o senso comum. Surpreenda-se!

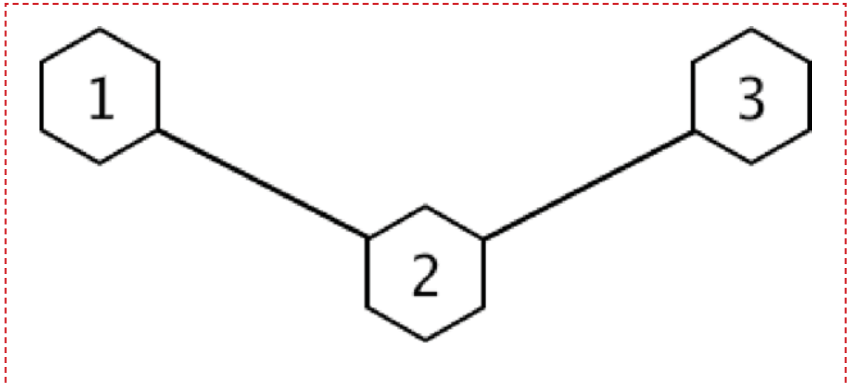
O software

Estrutura do software

O software é dividido em três atividades, das quais as duas primeiras formam o núcleo básico.

Na PRIMEIRA, os alunos poderão fazer uma série de simulações para compreender bem como a disputa funciona e levantar suas primeiras hipóteses. Na SEGUNDA, poderão algebrizar o problema para valores de velocidades escolhidos por eles mesmos e, então, descobrir qual a melhor estratégia para vencer.

A TERCEIRA ATIVIDADE, por sua vez, generaliza o resultado encontrado na anterior para qualquer velocidade do competidor correndo ou nadando. Esta atividade é um pouco mais densa em termos de conteúdo, contudo, foi montada para que os alunos possam chegar a essa generalização experimentando e analisando o gráfico.



TELA 1 *Mapa do software.*

1 Primeiras simulações

ATIVIDADE

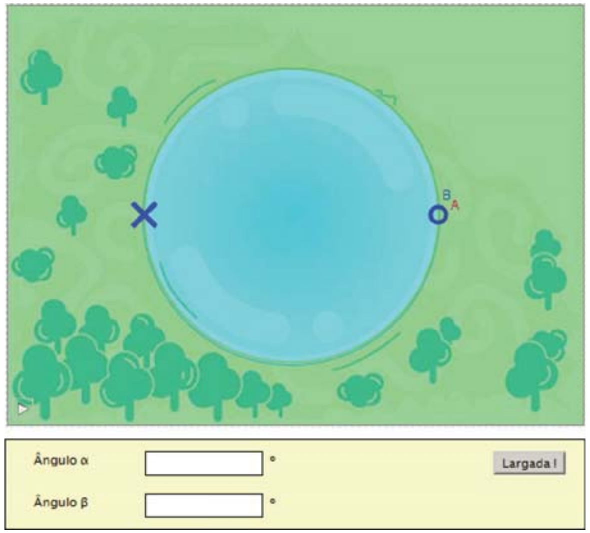
Esta primeira atividade é importante para que os alunos compreendam bem as regras da disputa. Se necessário, leia e esclareça com eles as regras que são colocadas no começo da primeira parte:

Regras da disputa

Comparados entre si, os dois competidores, A e B, possuem o mesmo desempenho correndo e nadando, ou seja, as mesmas velocidades;

Uma vez dada a largada, os competidores começam correndo ao redor do lago e podem decidir a qualquer momento saltar no lago e terminar o percurso pela água (também é válido fazer todo o percurso por terra ou por água);

Vence quem alcança primeiro a chegada.



TELA 2

Uma vez entendidas as regras, os alunos deverão fazer as simulações pedidas nas questões, mas também podem fazer outras, para entender bem o problema e formular as primeiras hipóteses sobre a estratégia vencedora.

Na segunda parte desta atividade, eles poderão definir as velocidades dos competidores na corrida e no nado, contanto que estas sejam minimamente compatíveis com a realidade. Note que os valores usados na primeira parte se referem ao desempenho de atletas olímpicos, portanto, os valores escolhidos pelos alunos não podem passar muito destes.

Incentive a discussão entre os alunos, o levantamento e o teste de hipóteses. Essa etapa pode motivá-los para a algebrização que será feita na próxima atividade.

Uma possibilidade é apresentar a atividade para os alunos em sala de aula e deixar que eles usem o software em casa para levantar e escrever suas hipóteses sobre a estratégia vencedora. Porém, lembre-se, eles poderão também acessar as atividades seguintes e completar o software antes da próxima aula!

2 Resolvendo o problema

ATIVIDADE

Nesta atividade os alunos irão algebrizar o problema e encontrar uma função do tempo total em termos do ângulo em que o competidor salta para a água.

No software, as perguntas foram definidas de modo que cada etapa dessa algebrização seja resolvida separadamente e com auxílio visual da ferramenta, que vai mostrando os elementos geométricos importantes para cada uma das etapas. Porém, neste guia, faremos a demonstração de maneira mais direta.

Vamos considerar a figura a seguir como referência:

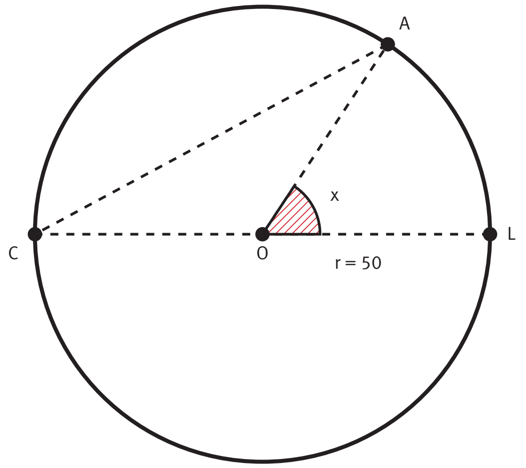


FIG. 1

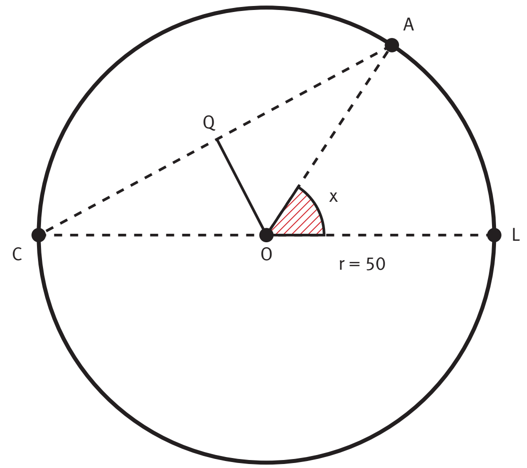


FIG. 2

O ponto C representa a chegada, o ponto L a largada e o ponto A é o ponto no qual o competidor troca de meio, ou seja, é o ponto determinado pela nossa variável, o ângulo central x, que será sempre considerado em radianos.

Como o raio do lado é igual a 50 m, a distância percorrida correndo é igual a $50x$.

Para calcular a distância percorrida a nado, note primeiramente que $A\hat{O}C = \pi - x$. Note também que o triângulo AOC é isósceles. Portanto, se traçarmos a altura desse triângulo a partir de O, esta dividirá o ângulo $A\hat{O}C$ e o segmento AC ao meio, e criará dois triângulos retângulos.

Aplicando relações trigonométricas no triângulo OQA, temos que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi - x}{2}\right) = \frac{\overline{QA}}{50} \Rightarrow \overline{QA} = 50 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)$$

Portanto,

$$\overline{CA} = 100 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi - x}{2}\right).$$

Note que a expressão $\operatorname{sen}\left((2\pi - x)/2\right)$ poderia ser substituída por outra mais simples envolvendo a função cosseno, mas como esta é a forma utilizada no software, decidimos mantê-la. Salientamos que o sistema de correção aceita outras respostas, contanto que estejam corretas.

Agora vamos precisar de um pouco de Física. Por definição, sabemos que:

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo}} \Rightarrow \text{tempo} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{velocidade média}}.$$

Portanto, sendo V_C a velocidade do competidor correndo e V_N a velocidade do competidor nadando, o tempo gasto correndo, T_C, e o tempo gasto nadando, T_N, são dados por:

$$T_C = \frac{50x}{V_C} \text{ e } T_N = \frac{100 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi - x}{2}\right)}{V_N}$$

De onde tiramos que o tempo total, T_T, para completar o trajeto em função de x é dado por:

$$T_T = \frac{50x}{V_C} + \frac{100 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi - x}{2}\right)}{V_N}$$

Na ATIVIDADE 2 os alunos deverão chegar a esse resultado para dois valores escolhidos por eles para V_C e V_N. Para fins de ilustração, plotamos abaixo o gráfico obtido para $V_C = 10\,m/s$ e $V_N = 2\,m/s$ (próximos do desempenho de um atleta olímpico).

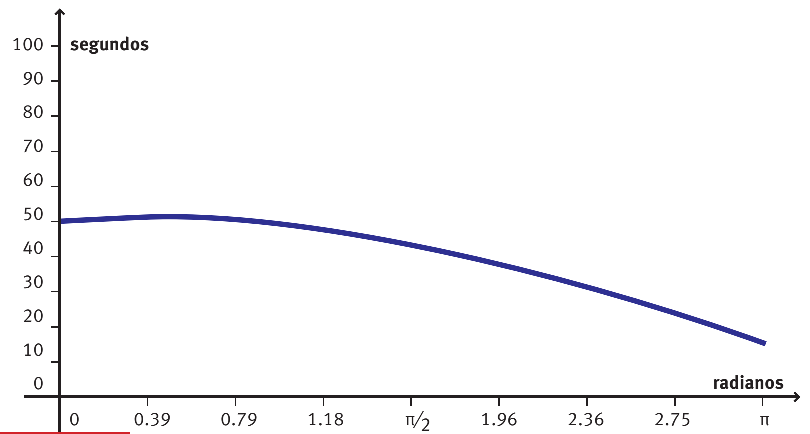


FIG. 3

O domínio da função é $[0, \pi]$.

Agora vem o resultado que contraria o bom senso!

Ao contrário do que a formulação do problema sugere, o ponto que resulta no menor tempo possível não está no meio da trajetória. Os pontos de mínimo da função obtida ocorrem nos seus extremos, ou seja, a melhor estratégia para essa disputa, nesse caso, é fazer todo o percurso correndo $(x = \pi)$.

Se plotarmos o gráfico para o caso $V_C = 3\,m/s$ e $V_N = 2\,m/s$, veremos que o quadro se inverte, ou seja, a melhor estratégia passa a ser fazer todo o percurso nadando $(x = 0)$, porém, a resposta continua ocorrendo nos extremos da função.

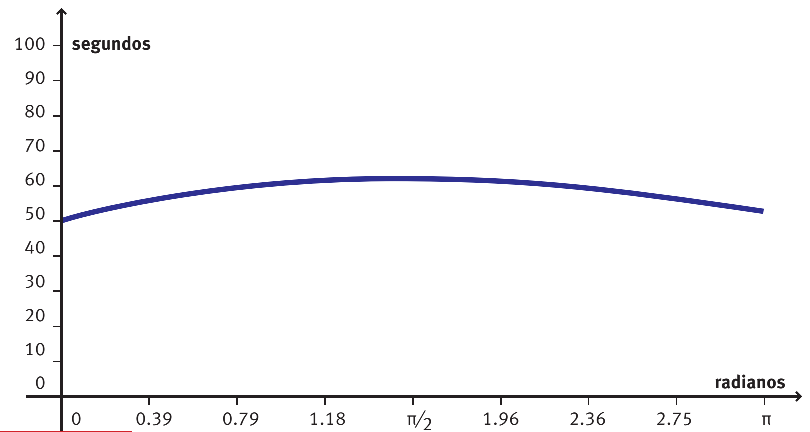


FIG. 4

Comparando os dois gráficos anteriores, você pode notar que ambos possuem aspecto muito parecido (concavidade para baixo), porém, o valor da função nas extremidades difere.

Note que $f(0)$ (percurso feito todo pela água) anula a primeira parcela da função, enquanto $f(\pi)$ (percurso feito todo por terra) anula a segunda parcela. Isso significa que esses valores dependem apenas dos valores de V_N e V_C, respectivamente.

A resposta obtida pelos alunos nesta atividade depende das velocidades que cada um definiu, porém, invariavelmente, a resposta será um dos dois casos extremos: percurso todo por água ou percurso todo por terra.

Isso pode ser demonstrado facilmente através de derivadas: basta mostrar que, no intervalo dado, essa função possui apenas um ponto crítico e a segunda derivada da função é sempre negativa.

Se desejar reforçar as conclusões obtidas nesta atividade, peça a seus alunos que anotem alguns valores obtidos no gráfico e voltem para a ATIVIDADE 1 para fazer algumas simulações. Mas atenção para um detalhe: as imprecisões resultantes da análise visual do gráfico ou da limitação das casas decimais utilizadas podem fazer com que os alunos obtenham resultados ligeiramente diferentes dos esperados.

ATIVIDADE

3 Generalizando o resultado

Esta atividade é um adicional ao problema proposto inicialmente, mas generaliza o resultado obtido por seus alunos e pode resultar em discussões muito interessantes sobre o comportamento do gráfico da função obtida na ATIVIDADE 2.

A ferramenta disponível nesta atividade permite aos alunos variar o valor de V_N e V_C e observar, simultaneamente, o gráfico resultante. Com isso, os alunos podem visualizar as respostas obtidas pelos outros grupos.

O objetivo da primeira pergunta é mostrar aos alunos que existem casos em que o trajeto inteiro por água é mais vantajoso. Contudo, note que as velocidades necessárias para que isso aconteça são irreais!

A segunda pergunta coloca uma situação especial: quais devem ser os valores de V_N e V_C para que ocorra empate quando um corredor opta por fazer todo o trajeto por terra e o outro opta por fazer todo o trajeto por água?

No primeiro caso, a distância percorrida pelo competidor é igual a 50π e no segundo, é igual a 100. Para que os tempos sejam iguais, temos que:

$$\frac{50\pi}{V_C} = \frac{100}{V_N} \Rightarrow 50\frac{\pi}{100} = \frac{V_C}{V_N} \Rightarrow \frac{V_C}{V_N} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$$

Portanto, para que as estratégias extremas resultem em empate, a razão entre as velocidades em terra e em água deve ser igual a $\pi/2$. Contudo, essas velocidades são muito pouco prováveis em um contexto real: um competidor teria que ser muito bom na piscina e o outro teria que andar devagarao invés de correr.

Esta atividade termina com uma QUESTÃO PARA O CADERNO, que será discutida logo a seguir, no FECHAMENTO.

Fechamento

Como cada grupo pôde escolher as velocidades do competidor, é possível que tenham chegado a resultados diferentes. Sugerimos que o professor comece o fechamento desta atividade reunindo os dados de cada grupo na lousa, em uma tabela como a indicada abaixo:

Velocidade em terra	Velocidade em água	Melhor estratégia	Tempo total
10	2	$x = 180°$	15,7 segundos
...	...	...	...

TABELA 1

Os tempos vão variar de acordo com as velocidades escolhidas, bem como o valor de x que resultou na estratégia vencedora. Porém, se os grupos escolheram valores coerentes com a realidade para as velocidades, a grande maioria deve chegar ao mesmo resultado, $x = 180°$. Discuta essas semelhanças e as eventuais diferenças com eles.

Isso feito, esboce o gráfico da função $T_T(x)$ na lousa e discuta suas características gerais com os alunos: domínio, concavidade e valores assumidos nos extremos. Apesar de a função obtida não ser de nenhum tipo estudado explicitamente pelos alunos, não é difícil perceber suas características gerais.

Outro detalhe interessante do gráfico da função, que é abordado na Questão para o caderno da Atividade 3, é a possibilidade de haver empate entre dois competidores com mesmo desempenho que escolham momentos diferentes para saltar na água.

Questão para o caderno

É possível que haja empate entre dois competidores que escolham momentos diferentes para trocar de meio? Se sim, dê um exemplo.

Isso pode ser visto no gráfico abaixo.

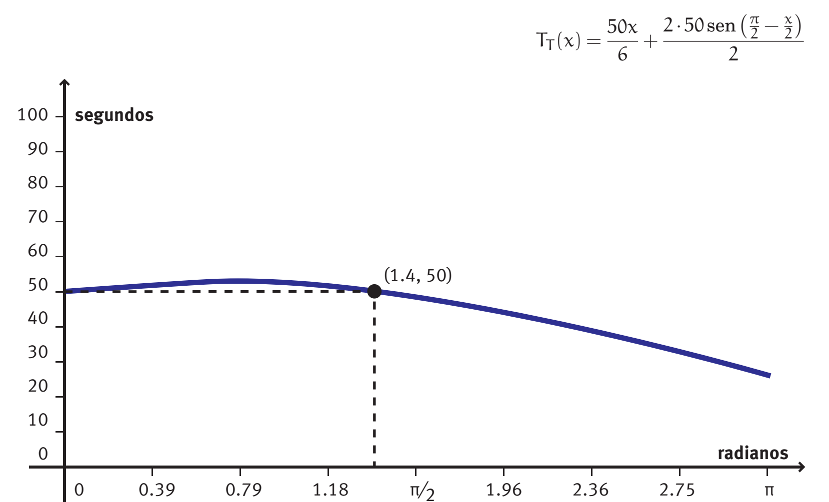


FIG. 5

Note que o segmento horizontal corta o gráfico em dois pontos, ou seja, para dois valores diferentes do domínio, a função tem a mesma imagem. No caso retratado no gráfico acima, as opções de saltar na água com $x = 0$ radianos e $x = 1{,}4$ radianos resultam em empate.

De fato, qualquer valor maior do que a maior imagem dos dois extremos, e menor do que o máximo da função, é imagem de dois valores diferentes do domínio da função.

Por fim, uma sugestão para finalizar as atividades em torno deste problema é apresentar, resolver e discutir com os alunos o problema apresentado no texto “Trigonometria e um antigo problema de otimização”, publicado por José Luiz Pastore Mello na **Revista do Professor de Matemática**, vol. 52.

Bibliografia

Dolce, O.; Pompeo, J. N.. **Fundamentos de Matemática Elementar** — vol. 9. São Paulo: Atual Editora, 2005.

Mello, J. L. P. **Trigonometria e um antigo problema de otimização**. Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, v. 52.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Leonardo Barichello

Revisores
Língua Portuguesa
Ana Cecília Agua de Melo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL