Matemática Multimídia

GEOMETRIA
E MEDIDAS

GUIA DO PROFESSOR

Software

Determinantes e áreas

Objetivos da unidade

1. Verificar a relação entre áreas e determinantes;
2. Investigar como as operações elementares com linhas de matrizes afetam a área de paralelogramos representados por estas matrizes.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FUNDO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Determinantes e áreas

Guia do professor

Sinopse

Este software permite aos alunos interpretarem geometricamente o conceito de determinantes de matrizes 2×2, aproximando-se da definição de determinantes de matrizes como forma de medir volumes de paralelepípedos.

Conteúdos

- Matrizes, determinantes;
- Geometria Plana, áreas.

Objetivos

1. Verificar a relação entre áreas e determinantes;
2. Investigar como as operações elementares com linhas de matrizes afetam a área de paralelogramos representados por estas matrizes.

Duração

Uma aula dupla.

Recomendação de uso

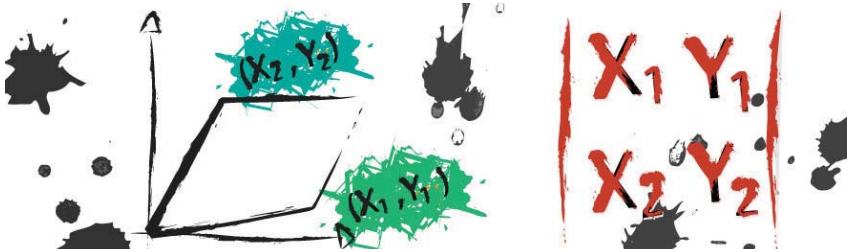
Para o bom aproveitamento do material é desejável que o aluno domine os conceitos de determinante de uma matriz, área do paralelogramo e coordenadas cartesianas. *Sugerimos que o software seja utilizado em duplas.*

Material relacionado

- Software: Determinantes e Polígonos

Matemática Multimídia

Introdução

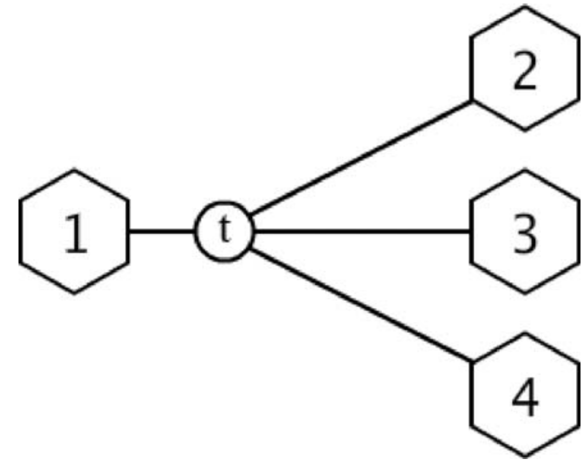


Determinantes costumam ser definidos no ensino médio por meio das regras aplicadas a matrizes 2×2 ou 3×3, e muitas vezes eles são relacionados apenas à existência de soluções de sistemas de equações lineares. Nesta atividade, os alunos poderão explorar o significado geométrico de determinantes, percebendo a relação entre determinantes e áreas e entendendo, em termos geométricos, como e porque as operações básicas com linhas de uma matriz (multiplicação por escalar, soma de linhas ou colunas e mudança da ordem de linhas ou colunas) afetam o determinante da matriz.

O software

Estrutura do software

O software “Determinantes e Áreas” é composto por quatro atividades. Na primeira delas, por meio de exemplos, que introduzem paralelogramos em posições especiais, os alunos podem verificar como calcular a área de um paralelogramo utilizando determinantes. Nas três atividades seguintes, são exploradas as operações elementares com linhas de matrizes, bem como as relações entre o modo como os determinantes e áreas são afetados por estas operações.



TELA 1 *Mapa de navegação do software*

1 Áreas dos paralelogramos

ATIVIDADE

Para compreender a relação entre o determinante de uma matriz 2×2 e a área de um paralelogramo, é necessário lançar mão de algumas idéias da geometria analítica vetorial, que serão sintetizadas a seguir, a título de auxílio ou de lembrança ao professor.

Partindo da idéia de que cada par ordenado de números reais (x_1, y_1) está associado a um ponto do plano, lembremos que, dados os pares ordenados $A(x_y, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, a diferença $A - B$ é definida como o par ordenado $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

Os vetores, que correspondem a segmentos de reta orientados no plano, podem ser representados algebricamente como pares ordenados, como indicado na figura abaixo, em que o vetor $\overrightarrow{AB}$ pode ser representado por $B-A$. Assim, sendo $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$, temos que $\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

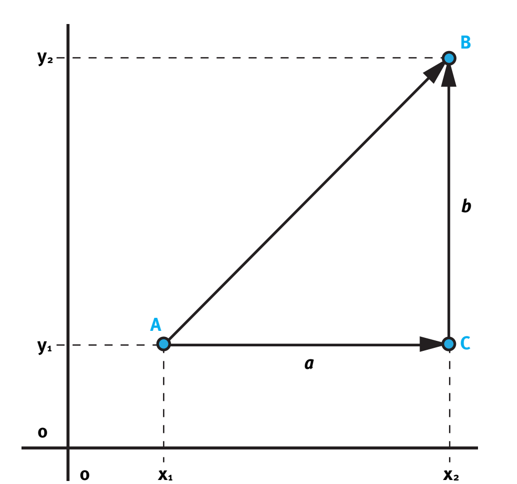


FIG. 1

$$\overrightarrow{AB}=(a,b)=(x_2-x_1,y_2-y_1)$$

É importante lembrar também a idéia de módulo de um vetor, que, no caso do vetor $\overrightarrow{AB}$, é definida por $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{a^2+b^2}$. Geometricamente, o módulo de $\overrightarrow{AB}$ corresponde à distância entre os pontos A e B.

No problema tratado no software, a título de simplificação, foram adotados dois vetores partindo da origem, como os indicados na figura a seguir. Esse procedimento faz com que as componentes do vetor coincidam numericamente com as coordenadas de dois vértices do paralelogramo.

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(x_b-0,y_b-0)=(x_b,y_b)$$

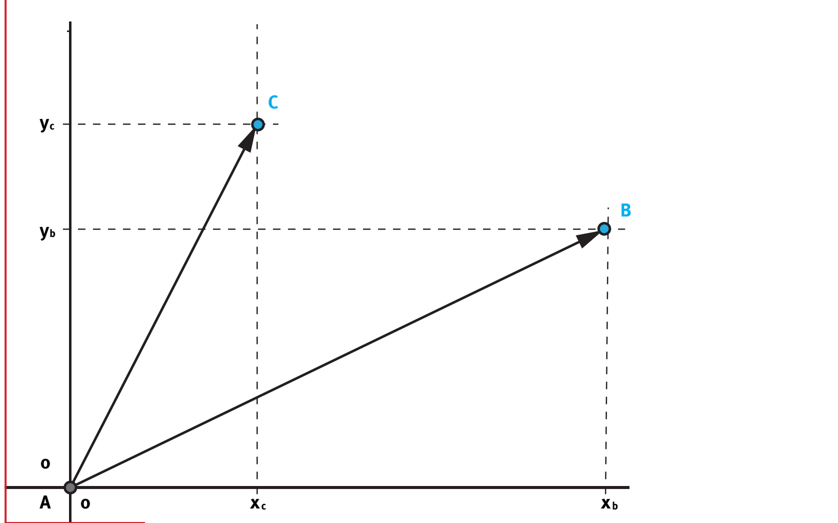


FIG. 2

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(x_c-0,y_c-0)=(x_c,y_c)$$

Deve-se observar também que dois vetores (3 vértices) são suficientes para definir um paralelogramo, pois o quarto vértice está obrigatoriamente no encontro das paralelas a esses vetores pelas extremidades de cada um.

O conceito de produto escalar de dois vetores também será útil na associação que buscamos, entre a área do paralelogramo e o determinante da matriz.

Dados dois vetores, $\overrightarrow{A}=(x_a,y_a)$ e $\overrightarrow{B}=(x_b,y_b)$, define-se produto escalar $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}$ entre esses vetores o número real $x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b$.

Pode-se definir o módulo de um vetor pelo produto escalar:

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}=(x_a,y_a)(x_a,y_a)=x_a^{\,2}+y_a^{\,2}=(|\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}|)^2,$$

assim,

$$|\overrightarrow{A}|=\sqrt{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}} \qquad (\mathrm{I})$$

Partindo das ideias de módulo e de produto escalar de dois vetores, pode-se chegar ao ângulo de dois vetores no plano:

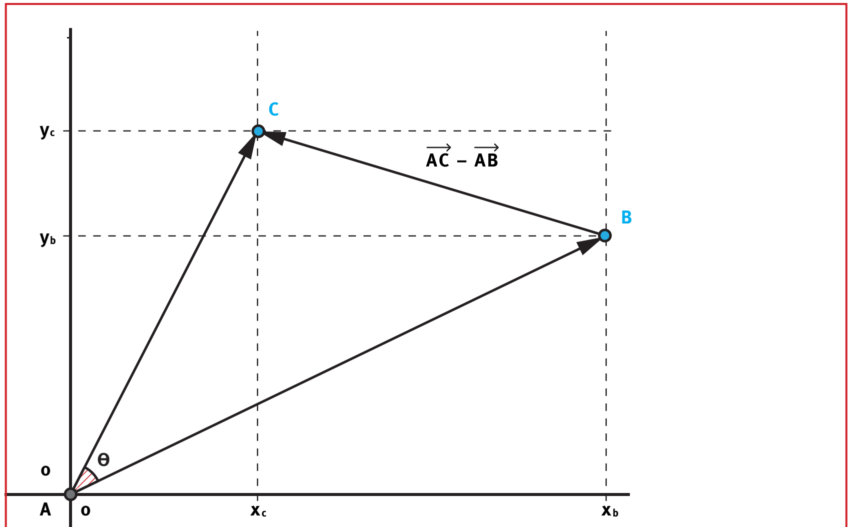


FIG. 3

Pela lei dos cossenos, temos:

$$(|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|)^2 = (|\overrightarrow{AB}|)^2 + (|\overrightarrow{AC}|)^2 - 2 \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos\theta$$

Usando a relação (I):

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC}) - 2 \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos\theta$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} - 2 \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos\theta$$

Logo: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

Partindo dessas relações, pode-se chegar a uma expressão para a área S do paralelogramo definido por dois vetores, seguindo os passos abaixo:

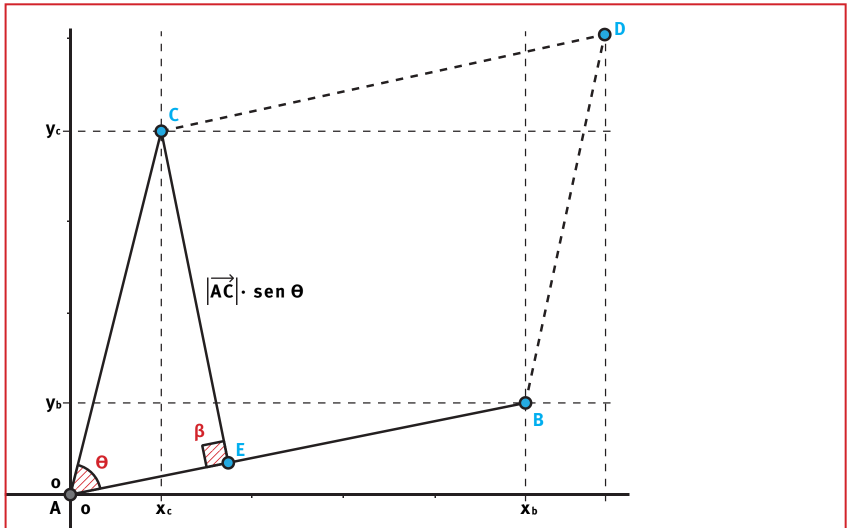


FIG. 4

Observe que:

$$S = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \frac{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}{|\overrightarrow{AB}^2| \cdot |\overrightarrow{CD}^2|}} = \frac{\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

$$S = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \frac{\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

$$= \sqrt{|\overrightarrow{AB}^2| \cdot |\overrightarrow{AC}^2| - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

Assim, considerando que o ponto A tem coordenadas (0,0)

$$S = \sqrt{(x_b^2 + y_b^2) \cdot (x_c^2 + y_c^2) - (x_b \cdot x_c + y_b \cdot y_c)^2}$$

Desenvolvendo:

$$S = \sqrt{x_b^2 \cdot x_c^2 + x_c^2 \cdot y_b^2 + x_b^2 \cdot y_c^2 + y_b^2 \cdot y_c^2 - x_b^2 \cdot x_c^2 - 2 \cdot x_b \cdot x_c \cdot y_b \cdot y_c - y_b^2 y_c^2}$$

Simplificando e fatorando:

$$S = \sqrt{(x_c \cdot y_c - x_b \cdot x_b \cdot y_c)^2} = |x_c \cdot y_b - x_b \cdot y_c|$$

Entretanto:

$$x_c \cdot y_b - x_b \cdot y_c = \begin{vmatrix} x_c & y_c \\ x_b & y_b \end{vmatrix}$$

Assim:

$$|x_c \cdot y_b - x_b \cdot y_c| = \left\| \begin{matrix} x_c & y_c \\ x_b & y_b \end{matrix} \right\|$$

Com este procedimento, portanto, verifica-se que

A área de um paralelogramo que tem um dos vértices na origem é numericamente igual ao módulo do determinante de uma matriz 2×2 cujas linhas são as coordenadas dos dois vértices adjacentes à origem.

ATIVIDADE

2 Multiplicação por escalar

Observando que:

- ao multiplicar um vetor por um escalar, o valor de seu módulo também é multiplicado por esse escalar;
- as entradas de cada linha da matriz correspondem às componentes de um vetor cujo módulo é o comprimento de dois lados paralelos do paralelogramo;

As considerações acima permitem concluir com facilidade que, ao se multiplicar uma linha da matriz por uma constante k, a área do paralelogramo será também multiplicada por k e, consequentemente, se as duas linhas forem multiplicadas por k, a área será multiplicada por k^2.

ATIVIDADE

3 Soma de linhas

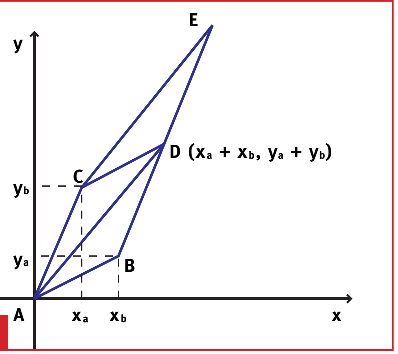


FIG. 5

Observando na figura acima que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ podemos concluir que trocar uma linha do determinante pela soma das suas linhas significa trocar um dos vetores originais pelo vetor $\overrightarrow{AD}$.

Geometricamente, essa operação corresponde a trocar o paralelogramo $ABCD$ pelo paralelogramo $ADEC$. É fácil constatar na figura que esses dois paralelogramos são equivalentes.

ATIVIDADE

4 Sinal do determinante

No desenvolvimento apresentado para associar a área do paralelogramo a um determinante, o valor da área corresponde ao módulo do valor de um determinante, indicando que a expressão fornece o valor da área mesmo quando o sinal do determinante é negativo. Inverter a linhas de uma matriz 2×2 faz com que seu determinante seja mude de sinal. Essa inversão corresponde, na prática, a inverter a ordem com que se escrevem as coordenadas dos pontos que definem o paralelogramo no determinante, o que, evidentemente, não altera a área.

Fechamento

Para o fechamento da atividade, sugerimos, antes de tudo, recapitular os passos sutis que foram percorridos para se estabelecer a relação entre determinantes e áreas, principalmente no que se refere aos passos explorados no final da Atividade 1 e na tela de transição, ao abordamos a questão da área de um paralelogramo com arestas não coincidindo com os eixos coordenados, ou seja, quando introduzimos matrizes de rotação.

Na sequência, o professor pode explorar outras direções, utilizando determinantes para calcular a área de qualquer polígono ou o volume de sólidos.

O software Determinantes e Polígonos oferece uma continuidade bastante natural para este software, ao explorar um método para o cálculo da área de qualquer polígono por meio de determinantes.

Aprofundamento

Em contextos muito amplos, podemos definir o determinante de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ do seguinte modo:

Vamos denotar por $v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ a i-ésima linha da matriz A. Cada uma destas linhas é o que chamamos de uma n-upla ordenada de números reais. Como a matriz é determinada por suas linhas, vamos pensar no determinante como sendo uma função que, a cada conjunto de n n-uplas, associa um número real, que denotamos por $\det(A)$, ou $\det(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Considerando a operação sobre as linhas das matrizes, o determinante satisfaz algumas propriedades essenciais:

1. É uma operação n-linear, ou seja,

$$\begin{aligned}\det(v_1, \ldots, av_i + bw_i, \ldots, v_2) = {} & a\det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_2) \\ & + b\det(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_2),\end{aligned}$$

quaisquer que sejam as n-uplas $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n, w_i$ e quaisquer que sejam os números reais a, b.

Observamos que esta propriedade é uma propriedade essencial para definirmos uma forma de medir volumes de paralelepípedos, se considerarmos o paralelepípedo n-dimensional gerado pelas linhas da matriz.

2. O determinante é nulo se duas linhas da matriz são iguais (o que corresponde a um paralelepípedo degenerado, com uma linha em cima da outra);
3. O determinante muda de sinal se mudar a posição de duas linhas.

Na realidade, estas propriedades, espelhadas nas propriedades desejadas por uma boa definição de volumes de paralelepípedos, ou seja, uma definição que atenda a percepção sensorial que temos de sólidos, são suficientes para definir uma função determinante a menos de uma constante multiplicativa. Esta é definida quando dizemos que o determinante da matriz identidade é 1, o que corresponde a dizer que o volume de um cubo de lados unitários tem volume correspondente a uma unidade de volume.

Bibliografia

Lima, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2009

Machado, Antonio dos Santos. Álgebra Linear e Geometria Analítica, Editora Atual, São Paulo, 1993

Hurley, Sue. **"Area of a Parallelogram" from The Wolfram Demonstrations Project**. Disponível em *http://demonstrations.wolfram.com/AreaOfAParallelogram/*. Acesso em 11 de novembro de 2009.

Papadopoulous, Helen. **"Area of Parallelogram and Trapezoids" from The Wolfram Demonstrations Project.** Disponível em *http://demonstrations.wolfram.com/AreasOfParallelogramsAndTrapezoids/*. Acesso em 11 de novembro de 2009.

Warendorff, Jay. **"The Area of a Triangle as Half a Rectangle" from The Wolfram Demonstrations Project**. Disponível em *http://demonstrations.wolfram.com/TheAreaOfATriangleAsHalfARectangle/*. Acesso em 11 de novembro de 2009.

Wolfram, Stephen. **"Areas of a Parallelograms" from The Wolfram Demonstrations Project**. Disponível em *http://demonstrations.wolfram.com/AreasOfAParallelograms/*. Acesso em 11 de novembro de 2009.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autores
Marcelo Firer,
Rosa Maria Machado e
Wilson Roberto Rodrigues

Revisores
Língua Portuguesa
Ana Cecília Agua de Melo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL