Matemática Multimídia

GEOMETRIA
E MEDIDAS

Guia do professor

Software

Determinantes e polígonos

Objetivos da unidade

1. Ensinar como calcular áreas usando determinantes;
2. Mostrar uma aplicação de determinantes de matrizes 2×2;
3. Reforçar a interpretação geométrica de determinantes.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FNDE
FUNDO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Determinantes e polígonos

Guia do professor

Sinopse

Neste software apresentamos um método simples e eficaz para calcular a área de polígonos utilizando determinantes de matrizes 2×2.

Conteúdos

- Matrizes, determinantes;
- Matrizes, aplicações;
- Geometria plana, área de polígonos.

Objetivos

1. Ensinar como calcular áreas usando determinantes;
2. Mostrar uma aplicação de determinantes de matrizes 2×2;
3. Reforçar a interpretação geométrica de determinantes.

Duração

Uma aula dupla.

Recomendação de uso

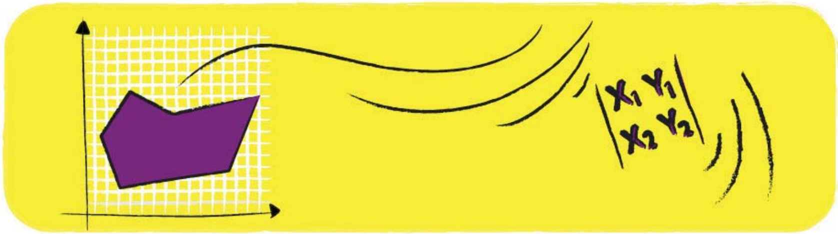
Sugerimos que as atividades sejam realizadas em duplas. É recomendável que os alunos dominem o cálculo de determinantes de matrizes 2×2.

Material relacionado

- Software: Determinantes e Áreas;
- Experimentos: Mensagens Secretas com Matrizes;
- Vídeos: Gabarito Secreto.

Matemática Multimídia

Introdução



Aprendemos em geometria a calcular a área de polígonos decompondo-os em triângulos e calculando a área destes. O cálculo da área dos triângulos pode ser feito através da fórmula clássica Área = $^{(\text{Base} \times \text{Altura})}/_{2}$, que é na realidade quase que uma definição efetiva da área.

Utilizando determinantes de matrizes, conseguimos calcular estas áreas por meio de um outro método, bastante simples e eficaz quando temos polígonos quaisquer em um eixo cartesiano.

O objetivo deste software é, ao mesmo tempo, exibir esse método, explicando como ele funciona, e, através do próprio método, mostrar uma aplicação para o cálculo de determinantes e reforçar a sua interpretação geométrica.

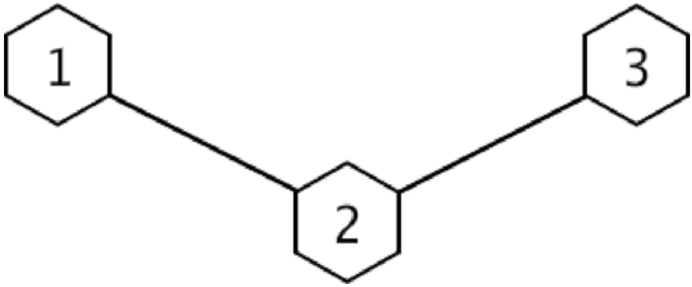
O software

Estrutura do software

Este software é composto de 3 atividades.

A primeira delas serve como uma revisão do software Determinantes e Áreas, que antecede este software em termos de conteúdo. Nela mostramos rapidamente como calcular, por meio de determinantes, a área de um triângulo que tem um dos vértices na origem do plano cartesiano.

Na segunda atividade estendemos este método para triângulos quaisquer e, por fim, na terceira e última atividade vemos como podemos calcular a área de um polígono qualquer usando esse método.



TELA 1 *Mapa do software.*

ATIVIDADE

1 Área de triângulos

Nesta atividade verificamos experimentalmente como podemos determinar a área de um triângulo com um vértice na origem como sendo metade do (valor absoluto) do determinante da matriz 2×2 cujas entradas são coordenadas dos vértices não nulos. Esta fórmula pode ser verificada com o auxílio da geometria analítica, mas existem métodos mais elegantes para fazer a demonstração.

Considere $\triangle_{OAB}$ o triângulo com vértices

$$O = (0,0),\ A = (a_1, a_2) \text{ e } B = (b_1, b_2)$$

e seja $\square_{OXYZ}$ o menor retângulo contendo $\triangle_{OAB}$, com duas arestas nos eixos coordenados. Esse retângulo tem vértices $O = (0,0)$, $X = (a_1, 0)$, $Y = (a_1, b_2)$ e $Z = (0, b_2)$.

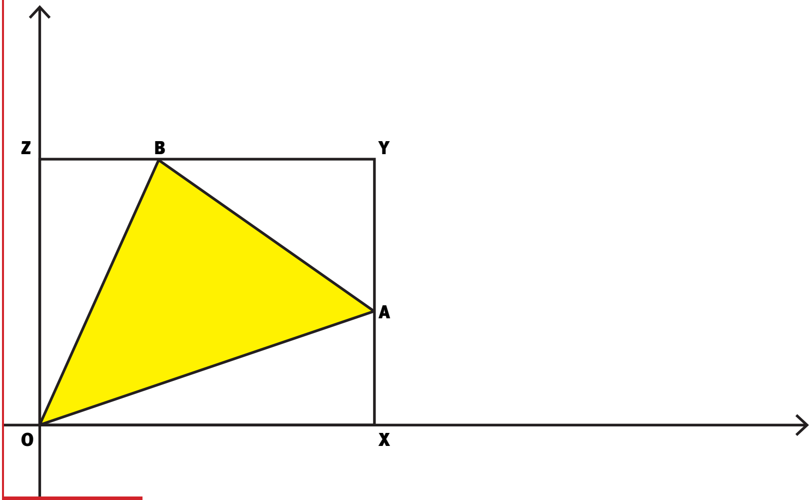


FIG. 1

Temos que :

$$\text{Área}(\square_{OXYZ}) = \text{Área}(\triangle_{OAB}) + \text{Área}(\triangle_{OXA}) + \text{Área}(\triangle_{ABY}) + \text{Área}(\triangle_{OZB})$$

Temos então, além do triângulo no qual estamos interessados (triângulo $\triangle_{OAB}$), um retângulo e três triângulos retângulos, cujas áreas são:

$$\text{Área}(\square_{OXYZ}) = a_1 b_2,\ \text{Área}(\triangle_{OXA}) = \frac{a_1 a_2}{2}$$
$$\text{Área}(\triangle_{ABY}) = \frac{(b_2 - a_2)(a_1 - b_1)}{2},\ \text{Área}(\triangle_{OZB}) = \frac{b_1 b_2}{2}$$

Isolando $\text{Área}(\triangle_{OAB})$ na primeira equação e substituindo os valores conhecidos obtemos:

$$\text{Área}(\triangle_{OAB}) =$$

$$= \text{Área}(\square_{OXYZ}) - \text{Área}(\triangle_{OXA}) - \text{Área}(\triangle_{ABY}) - \text{Área}(\triangle_{OZB})$$
$$= a_1 b_2 - \frac{a_1 a_2}{2} - \frac{(b_2 - a_2)(a_1 - b_1)}{2} - \frac{b_1 b_2}{2}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_1b_2 - \frac{a_1a_2}{2} + \frac{b_1b_2}{2} + \frac{a_1a_2}{2} - \frac{a_1b_2}{2} - \frac{a_2b_1}{2} - \frac{b_1b_2}{2}\\
&= a_1b_2 - \frac{a_1b_2}{2} - \frac{a_2b_1}{2}\\
&= \frac{a_1b_2}{2} - \frac{a_2b_1}{2}\\
&= \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Sugerimos que, caso os alunos tenham dificuldade com o conteúdo desta atividade, eles sejam convidados a resolver primeiro o software Determinantes e Áreas, no qual esse conteúdo é tratado com maior detalhamento.

ATIVIDADE

2 Área de um triângulo qualquer

Nesta atividade vemos como calcular a área de um triângulo qualquer utilizando determinantes. Se na primeira atividade o método foi apresentado acompanhado de evidências meramente circunstanciais (exemplos que o aluno pode trabalhar), nesta, utilizando o resultado obtido para triângulos com um vértice na origem, desenvolvemos um método para triângulos quaisquer, apresentando todos os passos de uma verdadeira demonstração. Apresentamos a área de um triângulo qualquer como soma e diferença de áreas de três triângulos que têm um vértice na origem e, a partir disso, obtemos a área como soma de determinantes.

É necessário realçar a necessidade de orientar os vértices do triângulo em sentido anti-horário, não importando qual o vértice inicial.

Destacamos ainda que o resultado obtido é conhecido no Ensino Médio através de uma fórmula mnemônica: Se os vértices do triângulo têm coordenadas $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$, então

$$
\text{Área}(\triangle_{ABC}) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{pmatrix}
$$

Essa fórmula é equivalente àquela que apresentamos, bastando desenvolver o determinante acima para obter

$$\text{Área}(\triangle_{ABC}) = \frac{1}{2}\left(\det\begin{pmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x_c & y_c \\ x_a & y_a \end{pmatrix}\right).$$

3 Áreas de polígonos

ATIVIDADE

Nesta terceira e última atividade, generalizamos o resultado obtido para triângulos para o caso de polígonos quaisquer. A generalização é bem simples: basta decompor um polígono em triângulos e utilizar o resultado obtido na atividade anterior.

É interessante observar que apresentamos uma decomposição em triângulos unindo um dos vértices do polígono aos restantes. Esse procedimento é um pouco particular, pois não é possível no caso de polígonos não convexos, conforme ilustrado abaixo.

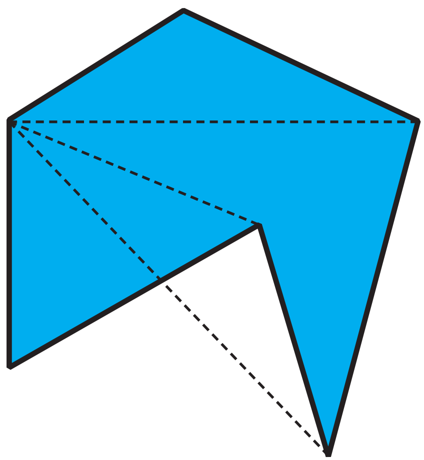


FIG. 2 *Polígono não convexo – problema de triangulação tomando como ponto-base um vértice específico.*

Contudo, podemos criar livremente um ou mais vértices interiores ao polígono e fazer uma triangulação do mesmo contornando o problema da convexidade, conforme ilustrado a seguir.

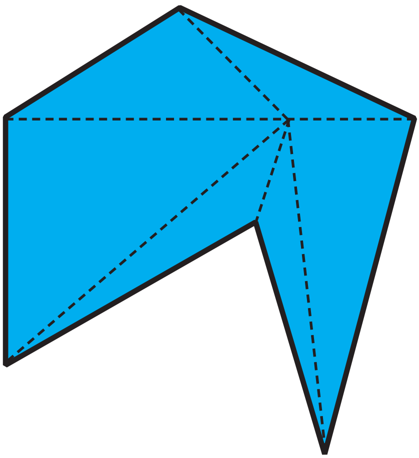
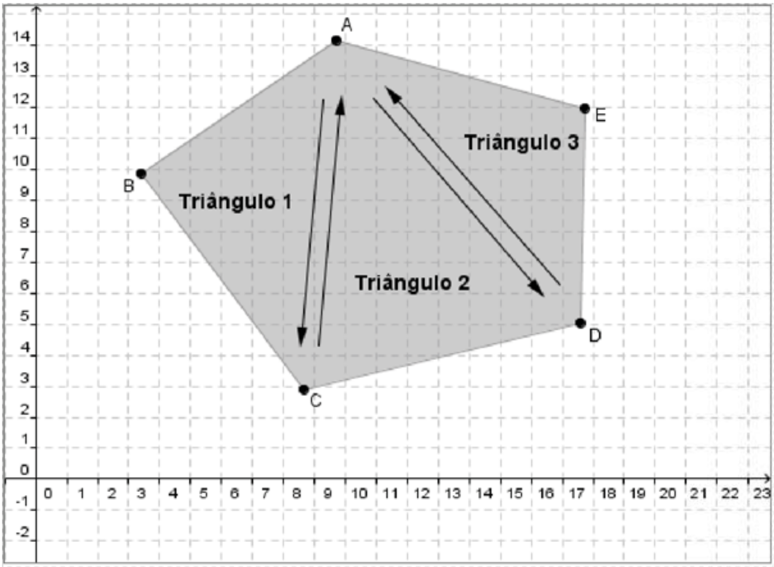


FIG. 3 *Triangulação de polígono não convexo, acrescentando-se vértice interno ao polígono.*

Observamos que neste exemplo adicionamos um número maior de arestas, que implicam em princípio mais determinantes a serem calculados. No entanto, os determinantes associados a estas arestas internas aparecem duas vezes, sempre com sinais opostos, e assim se cancelam do mesmo modo que vimos na PARTE 2 da ATIVIDADE 2:



TELA 2

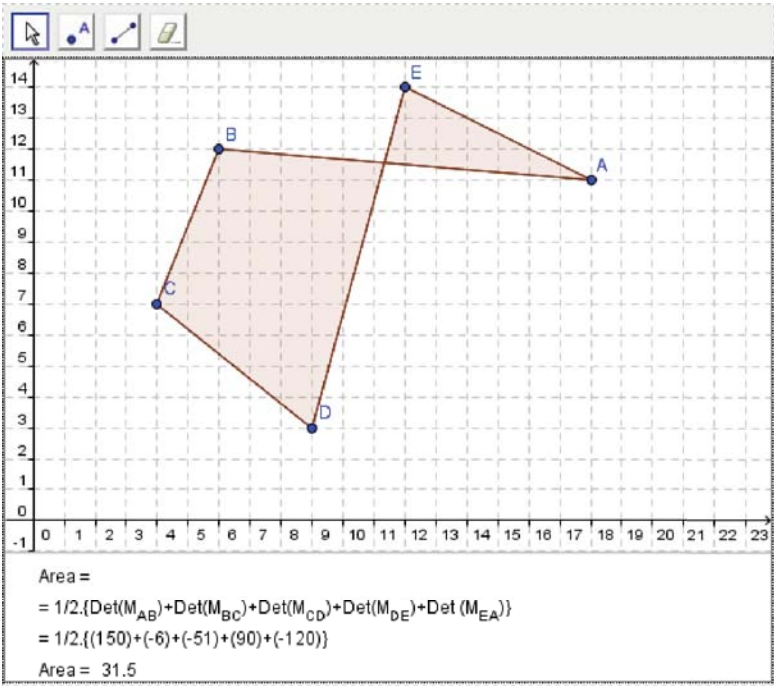
Fechamento

Para fechar a atividade, é interessante discutir as questões da ATIVIDADE 3 PARTE 3 anotadas no caderno.

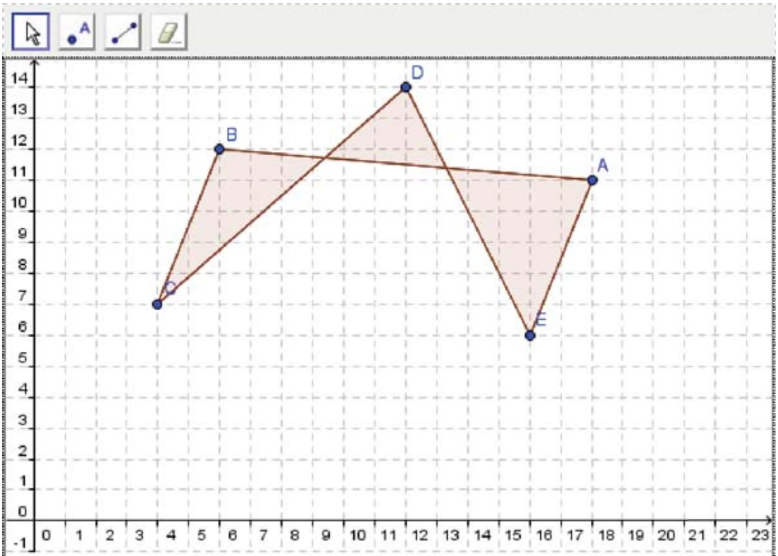
Questão para o caderno

1a. Mova os vértices de modo que duas arestas do polígono se intersectem. Isso vai resultar em uma figura que não é mais um polígono, mas que é formada por dois polígonos unidos por um vértice (o ponto de intersecção).

Neste caso, o(s) ponto(s) de intersecção deve(m) ser considerado(s) como vértice(s) adicional(is). Temos então não um, mas dois ou mais polígonos.



TELA 3



Area =

$= 1/2.\{Det(M_{AB})+Det(M_{BC})+Det(M_{CD})+Det(M_{DE})+Det\,(M_{EA})\}$

$= 1/2.\{(150)+(-6)+(-28)+(-152)+(68)\}$

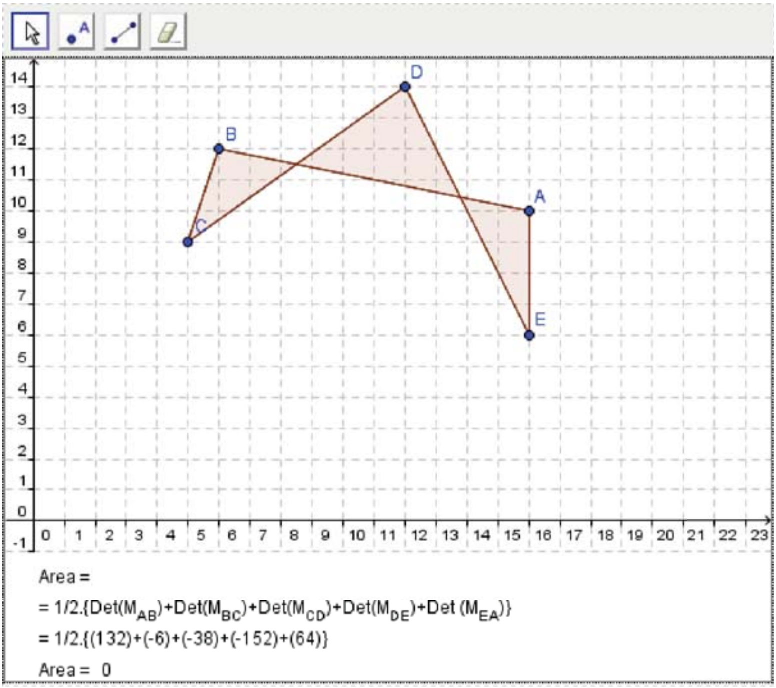
Area = 16

TELA 4

Questão para o caderno

1b. Tente obter uma figura desse tipo que faça com que o método para o cálculo da área resulte em área igual a 0.

A resposta pode ser obtida de maneira empírica, bastando arrastar os vértices de modo a balancear as áreas. Ao brincar com os vértices, vemos que obtemos inclusive resultados negativos. É óbvio que neste caso estamos obtendo um resultado numérico que não tem significado de área. Como explicar isto? Essa é a próxima questão.



TELA 5

Questão para o caderno

1c. Você consegue explicar por que isso acontece?

A explicação é deveras simples: Temos um método para cálculo de área que utiliza a soma de certos determinantes, determinados por uma sequência de vértices. Esta soma depende de uma orientação (anti-horária) que é violada quando geramos auto-intersecção dos polígonos. Nesta situação estamos na realidade somando algumas áreas e subtraindo outras. Vale a pena explorar em detalhes o significado verdadeiro (em termos de áreas) dos determinantes que aparecem nesta soma em alguns casos propostos pelos alunos.

A ferramenta disponível na PARTE 3 da terceira atividade pode ser usada para calcular a área de qualquer polígono de até 8 lados. Isso pode viabilizar atividades como o cálculo da área do quarteirão ou do terreno da escola (provavelmente mais irregulares do que as figuras planas estudadas no Ensino Médio) a partir de um mapa no qual se desenha um eixo cartesiano com medidas compatíveis com as da ferramenta.

Além disso, algumas situações um pouco mais complexas surgem naturalmente da última atividade. Você pode explorar com os alunos, em sala de aula, como determinar um método para calcular a área de figuras com "buracos", como estas que ilustramos a seguir.

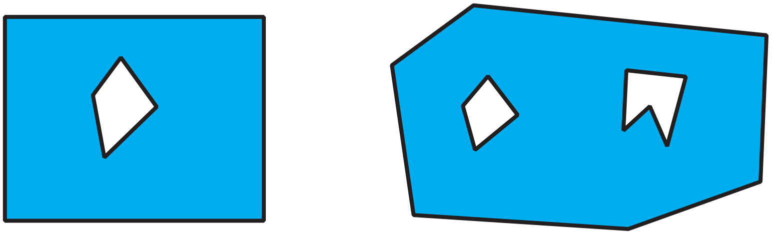


FIG. 4

Bibliografia

COSTA, F. S. **Áreas e Contornos. Dissertação de Mestrado**. Campinas: Unicamp, 2008.

DANTE, L. R. **Matemática – contexto e aplicações**. São Paulo: Editora Ática, 2007.

http://www.ime.unicamp.br/~marcio/hpteia/vect01/vect13.htm,
acessado em 24/02/2010.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Marcelo Firer

Revisores
Língua Portuguesa
Ana Cecília Agua de Melo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (imecc – unicamp)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL