Matemática Multimídia

NÚMEROS E FUNÇÕES

GUIA DO PROFESSOR

Software

Como montar sua dieta

Objetivos da unidade

1. Entender o que é um problema de programação linear e como resolvê-lo através da inspeção de seus vértices;
2. Aprender como escrever restrições lineares utilizando desigualdades;
3. Identificar graficamente a solução de um problema de programação linear;
4. Conhecer uma aplicação prática para os conceitos de função, equação e inequação afins.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Como montar sua dieta

Matemática Multimídia

Guia do professor

Sinopse

Neste software aprenderemos a resolver alguns problemas de programação linear. Trata-se de problemas bastante úteis em diversas aplicações práticas, pois permitem determinar o valor máximo ou mínimo de funções que modelam problemas reais, por exemplo, o cálculo do menor custo possível para determinada dieta.

Conteúdos

- Função afim, aplicações: gráficos e custos;
- Inequações;
- Interpretação geométrica de equações e inequações;
- Problemas de otimização.

Objetivos

1. Entender o que é um problema de programação linear e como resolvê-lo através da inspeção de seus vértices;
2. Aprender como escrever restrições lineares utilizando desigualdades;
3. Identificar graficamente a solução de um problema de programação linear;
4. Conhecer uma aplicação prática para os conceitos de função, equação e inequação afins.

Duração

Uma aula dupla.

Recomendação de uso

Sugerimos que o software seja utilizado em duplas.

Material relacionado

- Experimento: Dinamômetro com Elástico;
- Vídeo: As desventuras da mãe Joana;
- Software: Problemas de Programação Linear.

Introdução

Neste software temos a oportunidade de explorar um dos problemas de maior importância em matemática aplicada: um problema de programação linear. O nosso interesse é minimizar (também poderia ser maximizar) uma função linear restrita a um conjunto definido por inequações lineares.

Naturalmente os conceitos matemáticos necessários para o desenvolvimento desse conteúdo são abordados no software dentro dos limites de um curso de nível médio.

Através de três problemas práticos, envolvendo situações reais, o aluno será orientado a formular matematicamente os problemas, encontrando, em cada caso, a função custo que se deseja minimizar, bem como o conjunto de todas as restrições do problema. A solução será encontrada através da inspeção dos vértices e exploração gráfica da região de interesse (região factível).

As ideias apresentadas neste software podem ser aplicadas a uma vasta classe de problemas e sem dúvida irão contribuir muito na formação dos alunos, principalmente na compreensão de como a matemática pode ser utilizada para a interpretação e solução de problemas reais.

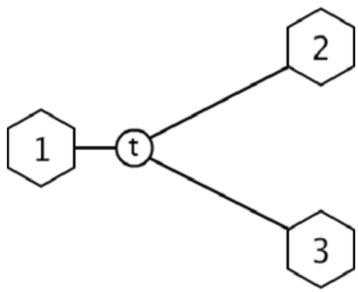
O software

Estrutura do software

O software está dividido em três atividades e uma tela de transição. A primeira atividade apresenta um problema clássico de programação linear conhecido como *problema da dieta*. Neste tipo de problema busca-se encontrar uma dieta que satisfaça algumas exigências preestabelecidas ao mais baixo custo possível. Durante a atividade o aluno é orientado, passo a passo, a modelar o problema, escrevendo cada uma das restrições através de inequações lineares, bem como a função custo que se deseja minimizar. A interpretação geométrica está presente em todas as partes desta atividade e desempenha papel fundamental na obtenção da solução de menor custo.

No final da atividade 1 o aluno deverá ser capaz, além de resolver o problema proposto, de compreender que as ideias utilizadas na atividade podem ser aplicadas a qualquer problema similar (minimizar uma função linear, sujeita a um conjunto de restrições lineares).

Na tela de transição o aluno poderá escolher um entre dois problemas (Atividades 2 e 3), um de transporte e outro de alocação, e resolvê-lo aplicando as técnicas estudadas na atividade 1. Fica a critério do professor definir qual dos dois problemas deve ser resolvido pelos alunos.



tela 1 *Mapa do software.*

1 A dieta

A ATIVIDADE 1 aborda o problema de encontrar uma dieta que atenda às necessidades de vitaminas A e B através do consumo de dois tipos de frutas (banana e abacaxi) com o menor custo possível, de modo que o total de frutas ingeridas não ultrapasse 1000 kcal/dia.

As QUESTÕES 1 e 2 podem ser respondidas através de inspeção gráfica, pela movimentação de um ponto azul que aparece no gráfico e leitura das informações na tela.

Para responder as QUESTÕES 3, 4 e 5 será necessário interpretar o problema em termos de inequações lineares. Os alunos podem ter alguma dificuldade para iniciar essa parte da atividade. Neste caso o professor pode auxiliá-los, explicando, por exemplo, o significado da inequação $260a + 900b \geq 500$.

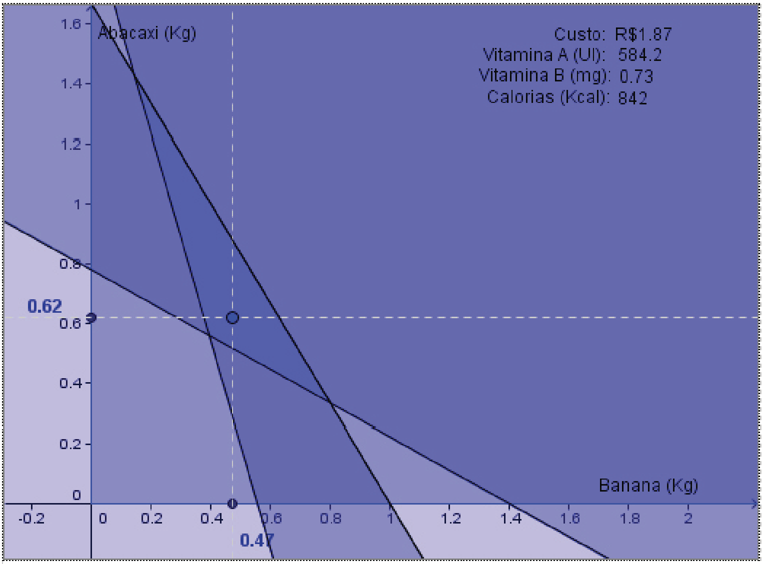
A primeira observação que precisa estar clara é que as variáveis a e b representam as quantidades (em kg) de abacaxi e de banana, respectivamente. Assim, a inequação $260a + 900b \geq 500$ significa que a soma das quantidades ingeridas de vitamina A proveniente das duas frutas deve ser maior ou igual a 500.

De forma análoga, os alunos deverão encontrar uma inequação que represente a necessidade de ingestão de vitamina B e outra inequação para representar o consumo máximo de calorias.

As respostas para as QUESTÕES 3, 4 e 5 são obtidas isolando-se a variável a em cada uma das inequações.

- Resposta para a questão 3: $a \geq \frac{-900}{260} b + \frac{500}{260}$;
- Resposta para a questão 4a: $a \geq \frac{-0,5}{0,9} b + \frac{0,7}{0,9}$;
- Resposta para a questão 4b: $a \leq \frac{-1000}{600} b + \frac{1000}{600}$;
- Respota para a questão 5: $a > 0$ e $b > 0$.

Após o aluno responder corretamente cada uma das questões aparecerá um gráfico representando geometricamente a região do plano delimitada pelas inequações. O triângulo delimitado pelas três inequações (TELA 2) representa a região de interesse ou região factível do problema, ou seja, a região de todos os pontos que atendem às necessidades do problema. Assim, a solução de menor custo para a dieta deverá ser encontrada entre os pontos dessa região.



TELA 2 *Região factível para o problema da dieta.*

Note que existem infinitos pontos nessa região, ou seja, infinitas maneiras de atender às necessidades de ingestão de 500UI de vitamina A e 0,7 mg de vitamina B sem ultrapassar o limite de 1000 kcal diárias de abacaxi e banana. Se o objetivo fosse encontrar uma solução qualquer para o problema, poderíamos escolher qualquer ponto do triângulo, no entanto, estamos em busca da solução de menor custo para a dieta, ou seja, dentre as infinitas possibilidades que atendem às necessidades do paciente, deve ser encontrada a mais barata.

A função que descreve o custo (em reais) da dieta é uma função de duas variáveis, determinada pelos preços de cada produto

$$C(a,b) = 1{,}5a + 2b.$$

Note que o custo é uma função linear nas variáveis a e b. Assim, do ponto de vista matemático o problema da dieta equivale a *minimizar* uma função linear que tem como domínio um conjunto delimitado por inequações lineares. Estamos, desse modo, diante de um *problema de programação linear*.

Para este tipo de problema existe um importante resultado matemático (um teorema) que estabelece que, se existe uma solução ótima (solução de menor custo), essa solução corresponde a um vértice da região factível.

Com base nesse resultado, o *problema da dieta* pode ser resolvido pela localização das coordenadas dos três vértices do triângulo, pelo cálculo do custo em cada um desses vértices e escolha daquele que resultar no menor custo.

A PARTE 3 da ATIVIDADE 1 é dedicada a encontrar esses vértices através da resolução de sistemas de equações lineares. Cada um dos vértices (V_1, V_2, V_3) é determinado pela intersecção de duas retas. Para encontrar cada vértice o aluno deverá escolher as retas correspondentes e o software automaticamente encontrará a solução.

Na PARTE 4, o problema de encontrar a dieta de menor custo é explorado graficamente. Ao final dessa parte o aluno descobrirá que o menor custo da dieta ocorre quando as quantidades ingeridas de banana e abacaxi forem iguais às coordenadas do vértice V_2, isto é, 390 gramas de banana e 560 gramas de abacaxi por dia.

A PARTE 5 é conceitualmente muito importante. Nessa parte apresentamos uma explicação, bastante intuitiva, do porquê de a solução de um problema de programação linear ocorrer num vértice da região factível.

A explicação é baseada nos seguintes fatos: Sabemos que o custo da dieta é dado por uma função linear nas variáveis a e b $C(a,b) = 1{,}5a + 2b$. Se quisermos determinar todas as dietas que atendem às necessidades e custam exatamente R$ 2,00, basta resolver a equação $1{,}5a + 2b = 2$. Note que essa equação possui duas variáveis, ou seja, possui um grau de liberdade, o que significa que existem infinitos pontos (a, b) que satisfazem $1{,}5a + 2b = 2$.

A equação $1,5a+2b=2$ é denominada implícita nas variáveis a e b. Podemos descrever explicitamente estes pontos isolando uma das variáveis como função da outra. Por exemplo

$$a(b)=\frac{-4b}{3}+\frac{4}{3}.$$

Em qualquer caso, os pontos que satisfazem $1,5a+2b=2$ pertencem a uma reta que contém todas as dietas que custam R$ 2,00.

Dizemos que os pontos que satisfazem uma equação do tipo

$$C(a,b)=k$$

pertencem à curva de nível "k" da função custo, ou seja, a reta $1,5a+2b=2$ é uma curva de nível $C(a,b)=2$. Assim, podemos investigar onde se encontram os pontos que correspondem a dietas mais baratas traçando curvas de nível mais baixas para a função custo. Isto pode ser explorado no software pela utilização do seletor que aparece na PARTE 5 da ATIVIDADE 1.

Como a função custo é linear, as curvas de nível serão retas paralelas. Assim, o valor da dieta de menor custo corresponderá à curva de nível de valor mais baixo que tocar a região factível. Isto sempre ocorrerá em um dos vértices da região. Se a região factível tiver um dos lados paralelos às retas de nível, pode haver mais de uma solução ótima, no entanto, isso não invalida o resultado:

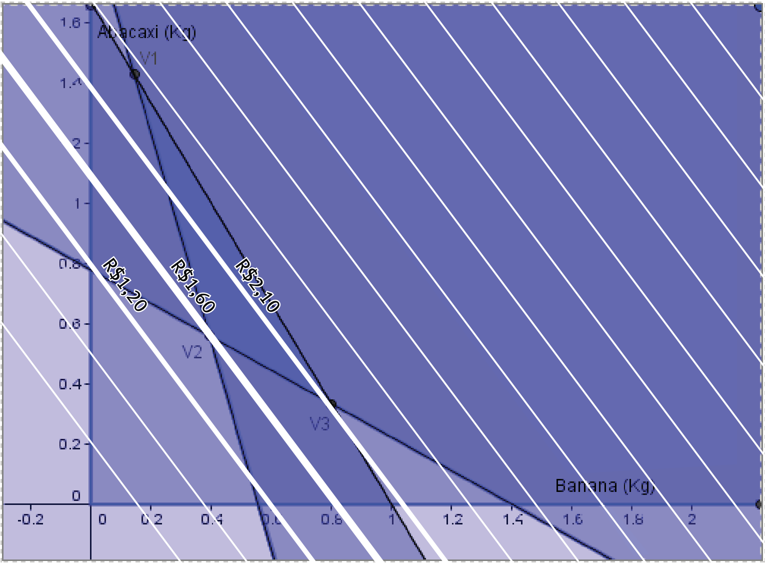
Se existe uma solução ótima para um problema de programação linear, existe um vértice que corresponde à solução ótima.

Na TELA 3, podemos ver diversas retas de custo. Algumas delas não interceptam a região factível do problema. Por exemplo, não existe nenhuma dieta que atenda às necessidades de vitaminas A e B ao custo de R$ 0,80.

Analisando as retas de custo *podemos concluir que*, dentre os pontos que satisfazem às necessidades do problema, aquele que corresponde à *dieta mais barata é o vértice V_2 da região factível*, com *custo de aproximadamente R$ 1,60*. E o que corresponde à dieta mais cara é o vértice V_1 da região (R$ 2,40).

Se imaginarmos que as curvas de nível estão varrendo a região factível, dos custos mais baixos para os custos mais altos, estes pontos são exatamente aqueles onde as curvas de nível da função custo tocam a região factível pela primeira e pela última vez.

Esta ideia intuitiva fornece uma boa interpretação geométrica para a solução de um problema de programação linear e também é a base para um importante método de otimização (que inclui problemas não lineares) denominado Método dos Multiplicadores de Lagrange.



TELA 3 *Retas de custo para o problema da dieta.*

2 Um problema de transporte

Nesta atividade é explorado o seguinte problema:

Uma companhia de transporte tem dois tipos de caminhões: o tipo A tem 2 m³ de espaço refrigerado e 3 m³ de espaço não refrigerado; o tipo B tem 2 m³ de espaço refrigerado e 1 m³ de não refrigerado. O cliente quer transportar produtos que necessitarão de 16 m³ de espaço refrigerado e 12 m³ de área não refrigerada. A companhia calcula que são necessários 110 litros de combustível para uma viagem com o caminhão A e 75 litros para o caminhão B. Quantas viagens deverão ser feitas com cada tipo de caminhão para que se tenha o menor custo de combustível?

A seguir descrevemos as principais etapas para a solução deste problema:

i. *Identificar quais são as variáveis do problema:*
   - Vamos denotar por a a quantidade de caminhões do tipo A, que será representada no eixo horizontal (eixo do x).
   - Vamos denotar por b a quantidade de caminhões do tipo B, que será representada no eixo vertical (eixo do y).

ii. *Determinar as inequações que representam as necessidades de espaço refrigerado e não refrigerado:*
   - Espaço refrigerado: $2a + 2b \geq 16$
   - Espaço não refrigerado: $3a + b \geq 12$

   Note que, como o número de caminhões não pode ser negativo, temos ainda as restrições $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

iii. *Determinar a função custo:*
   Como o único dado de custo que aparece no problema é o consumo de combustível de cada caminhão, vamos assumir que o custo a ser minimizado será a soma desses consumos, ou seja, $C(a, b) = 110a + 75b$.

iv. *Encontrar os vértices da região de interesse (região factível).*

v. *Resolver o problema analisando qual vértice da região de interesse determina o menor custo.*
   Neste caso a solução é designar 2 caminhões do tipo A e 6 caminhões do tipo B.

Questão para o caderno

A. Tente formular duas restrições que limitem a quantidade máxima de caminhões levando em consideração as informações do problema.

B. Essas restrições não afetam a escolha com custo mínimo, mas criam uma escolha com custo máximo. Seguindo as restrições que você formulou, qual é esse custo máximo?

Uma solução possível é limitar o número de caminhões que a companhia possui. Por exemplo: $a \leq 5$ e $b \leq 6$. Ou, então, note que, se usarmos oito caminhões do tipo A, eles já bastam para completar o transporte, portanto, $a \leq 8$ seria uma restrição natural. O mesmo raciocínio pode ser feito para os carros do tipo B.

Observação: Note que, se a quantidade de caminhões for limitada a um número menor que quatro, a solução do problema será alterada.

ATIVIDADE

3 Um problema sobre moradia

Esta atividade explora o seguinte problema:

Parâmetros	**Tipos de casa A**	**Tipos de casa B**
Número de pessoas que abriga	6	4
Custo de construção (R$)	12.000,00	10.000,00
Demanda (nº de famílias que solicitaram)	60	80

TABELA 1

A verba total do governo é de R$2.000.000,00. Sua tarefa neste problema é determinar quantas casas de cada tipo devem ser construídas para que seja abrigado o maior número de pessoas possível.

A seguir descrevemos as principais etapas para a solução deste problema:

i. *Identificar quais são as variáveis do problema:*
   - Vamos denotar por a a quantidade de casas do tipo A, que será representada no eixo vertical (eixo do y).
   - Vamos denotar por b a quantidade de casas do tipo B, que será representada no eixo horizontal (eixo do x).

ii. *Determinar as inequações que representam as necessidades de cada tipo de casa e a limitação financeira.*
   - Limitação financeira: $12000a + 10000b \leq 2000000$
   - Demanda pela casa A: $a \geq 60$
   - Demanda pela casa B: $b \geq 80$

   Note que, como o número de casas não pode ser negativo, temos ainda as restrições $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

iii. *Determinar a função custo:*

   Note que o problema pede que o número de pessoas atendidas seja maximizado. Neste caso a função custo será dada por $C(a,b) = 6a + 4b$ e a solução do problema corresponderá ao vértice de maior custo (maior número de pessoas atendidas).

iv. *Encontrar os vértices da região de interesse (região factível).*

v. *Resolver o problema analisando qual vértice da região de interesse determina o maior custo (maior número de pessoas atendidas).*

   Neste caso a solução ótima consiste em construir 100 casas do tipo A e 80 casas do tipo B. Desta forma é possível abrigar 920 pessoas.

Na parte C acrescenta-se mais um tipo de casa. A tabela seguinte apresenta as novas informações.

Parâmetros	Tipos de casa A	Tipos de casa B	Tipos de casa C
Número de pessoas que abriga	6	4	3
Custo de construção (R$)	12.000,00	10.000,00	8.000,00
Demanda (nº de famílias que solicitaram)	60	80	10

TABELA 2

Perceba que agora a nossa função do número de pessoas abrigadas é $C(a,b,c) = 6a + 4b + 3c$, ou seja, uma função com três variáveis!

Veja também que a desigualdade que rege a limitação financeira é $12000a + 10000b + 8000c \leq 2000000$.

A inadequação acima representa uma região limitada por um plano, ou seja, não conseguimos mais resolver o problema em um plano cartesiano. É preciso ir para a terceira dimensão!

Isso acontece em inúmeros problemas de programação linear, mas a nossa solução continua sendo em um dos vértices.

Questão para o caderno

- Tente resolver essa nova configuração do problema que foi proposta.

Solução

Este problema pode ser resolvido pela listagem do conjunto de todos os vértices que definem a região de interesse (região factível). Neste caso, as restrições são:

$$12000a + 10000b + 8000c \leq 2000000,\ a \geq 60,\ b \geq 80 \text{ e } c \geq 10.$$

Vamos relembrar quais são as variáveis do problema:

$$b = \text{número de casas do tipo B; será representada no eixo do x;}$$
$$a = \text{número de casas do tipo A; será representada no eixo do y;}$$
$$c = \text{número de casas do tipo C; será representada no eixo do z.}$$

Combinando as restrições três a três encontramos os seguintes vértices para a região de interesse do problema:

$$\begin{aligned} V_1 &= (80, 60, 15); \\ V_2 &= (80, 60, 60); \\ V_3 &= (80, 90, 15); \\ V_4 &= (116, 60, 15). \end{aligned}$$

A função custo (número de pessoas abrigadas) que deve ser maximizada é dada por:

$$C(b, a, c) = 6a + 4b + 3c.$$

Avaliando o custo em cada um dos vértices, obtemos:

$$\begin{aligned} C(V_1) &= 725; \\ C(V_2) &= 860; \\ C(V_3) &= 905; \\ C(V_4) &= 869. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso, a solução que maximiza o número de pessoas atendidas corresponde ao vértice V_3 e consiste em construir 60 casas do tipo A, 116 casas do tipo B e 15 casas do tipo C. Desta forma é possível abrigar 905 pessoas. Note que a opção de construir um tipo a mais de casa, com a mesma verba, implicou atender um número menor de pessoas do que o atendido com apenas dois tipos de casas.

Do ponto de vista matemático este problema é comum em programação linear. Sempre que se inclui uma restrição extra o valor ótimo do problema ou se mantém igual, ou piora.

Fechamento

As questões para o caderno, que foram discutidas em cada uma das atividades, podem ser retomadas em sala de aula para o fechamento. Assim, na aula seguinte ao uso do software, o professor pode solicitar que os alunos apresentem algumas respostas anotadas durante a aula no laboratório, de modo que seja possível retomar os principais conceitos estudados e resolver os problemas que ficaram em aberto.

É importante fixar a ideia de que, se a solução de um problema que envolve minimizar ou maximizar uma função linear, sujeita a um conjunto de restrições lineares, existe, ela ocorre em um dos vértices da região. Quando o número de vértices é pequeno, a solução pode ser encontrada pela inspeção de todos os vértices. Se o número de vértices é muito grande, existem métodos matemáticos que permitem encontrar a solução sem a necessidade de testar todos os vértices.

A questão do caderno relativa à atividade 2 pode ser ligeiramente alterada para produzir uma solução diferente daquela encontrada no problema que tem a região ilimitada. Para tanto, basta supor que a quantidade de um tipo de caminhão é limitada a um número inferior a 4. Neste caso, a região de interesse é alterada e a solução original deve ser revista.

Na questão do caderno relativa à atividade 3, pode ser necessário (e interessante) que o professor explique como obter os vértices, como avaliar a função custo em cada um dos vértices e como seria uma interpretação geométrica para o problema. Para interpretar geometricamente a situação envolvendo os três tipos de casas o professor pode fixar um canto da sala como sendo a origem do sistema de coordenadas do R^3 e utilizar as paredes como sendo os planos coordenados. Neste caso, os alunos poderão ter um primeiro contato com um sistema de coordenadas tridimensionais.

O software “Problemas de Programação Linear” oferece um ambiente no qual é possível analisar geometricamente qualquer problema de programação linear envolvendo duas variáveis. Nele, os alunos podem plotar as inequações que delimitam a região válida para o problema, visualizar as coordenadas dos vértices e obter os custos em cada ponto do plano. Com o auxílio dessa ferramenta, é possível sugerir aos alunos outros problemas ou deixar que criem seus próprios. Se os alunos tiverem demonstrado interesse pelo conteúdo, esta pode ser uma boa opção para dar continuidade ao trabalho com ele.

Aprofundamento

Como atividade de aprofundamento o professor pode propor aos alunos que utilizem um software de visualização 3D (como o winplot) para desenhar a região de interesse do problema com três variáveis e interpretar geometricamente a solução encontrada.

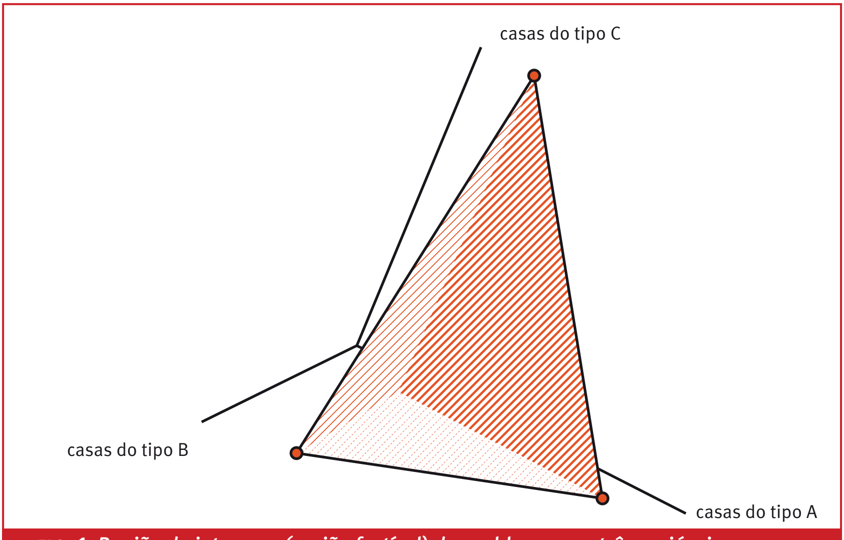


FIG. 1 *Região de interesse (região factível) do problema com três variáveis.*

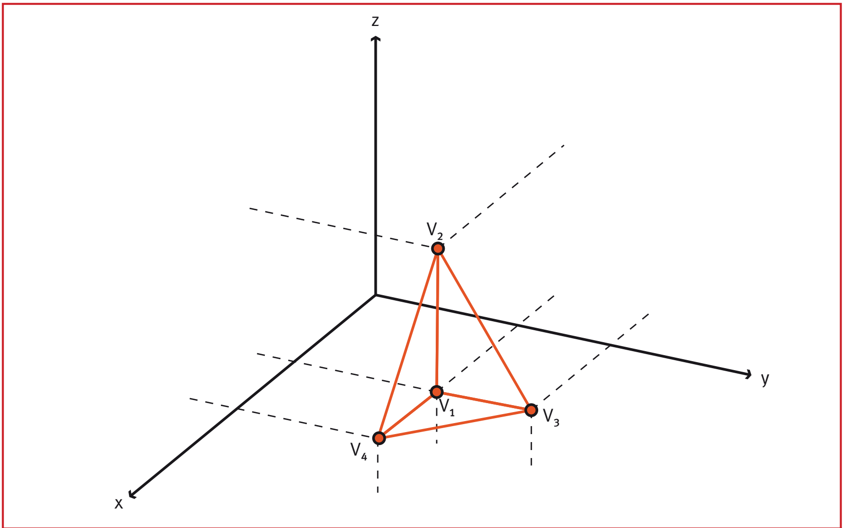


FIG. 2 *Arestas e vértices da região de interesse (região factível) do problema com três variáveis.*

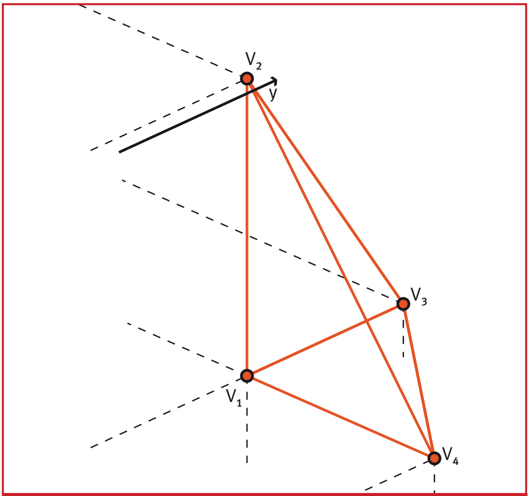


FIG. 3 *Arestas e vértices da região de interesse (região factível) do problema com três variáveis de um outro ângulo.*

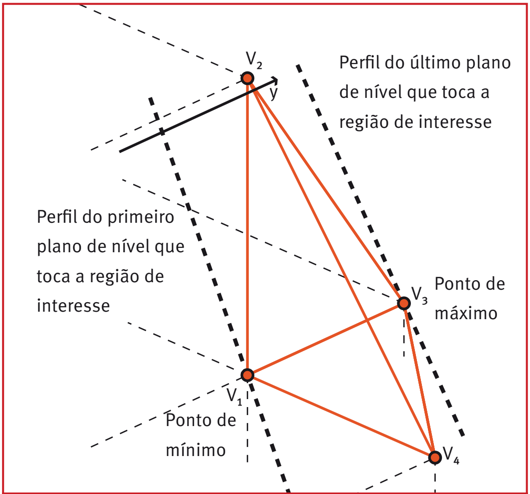


FIG. 4 *Interpretação geométrica do problema das casas com três variáveis.*

A FIGURA 4 mostra os quatro vértices da região de interesse, que neste caso são os pontos de um tetraedro (não regular). O vértice V_1 é o ponto de mínimo da função custo e o vértice V_3 o ponto de máximo. Na figura podemos ver o perfil de dois planos de nível, um para o $C(V_1) = 725$ e outro para o $C(V_3) = 905$. Vale ressaltar que as "curvas de nível" da função $C(b, a, c)$ são pontos que pertencem a um plano no R^3. Na FIGURA 6, vemos um perfil de dois desses planos, definidos por

$$6a + 4b + 3c = 725 \text{ e } 6a + 4b + 3c = 905.$$

Bibliografia

BAZARAA, M. S., JARVIS, J. J., & SHERALI, H. D. **Linear programming and network flows** (2nd ed.). John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1990.

BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I. R., FIGUEIREDO, V. L. & WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**, 3ª ed. Harbra Ltda., 1980.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Cristiano Torezzan

Revisores
Língua Portuguesa
Ana Cecília Agua de Melo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (imecc – unicamp)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal