Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES

GUIA DO PROFESSOR

Software

Embaralhando imagens

Objetivos da unidade

1. Analisar permutações de elementos do ponto de vista de sua estrutura interna;
2. Introduzir de maneira sutil a noção de grupo de permutação;
3. Resolver um problema que envolve e dá significado ao conceito de mínimo múltiplo comum.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FUNDO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Embaralhando imagens

Guia do professor

Sinopse

Partindo de um exemplo simples, um quebra-cabeças com 9 peças, exploramos o conceito de permutação, não do ponto de vista de contagem, mas da sua estrutura interna de ciclos. A partir dessa estrutura, vemos o que se pode aprender sobre a ordem da permutação, ou seja, sobre o número de vezes que ela tem de ser repetida para se retornar a posição inicial.

Conteúdos

- Permutações;
- Funções bijetoras;
- Mínimo Múltiplo Comum;
- Números primos, Teorema Fundamental da Aritmética.

Objetivos

1. Analisar permutações de elementos do ponto de vista de sua estrutura interna;
2. Introduzir de maneira sutil a noção de grupo de permutação;
3. Resolver um problema que envolve e dá significado ao conceito de mínimo múltiplo comum.

Duração

Uma aula dupla, com possibilidade de extensão para mais aulas caso o professor deseje resolver também o Desafio.

Recomendação de uso

Sugerimos que o software seja utilizado em duplas.

Matemática Multimídia

Introdução

No ensino de combinatória elementar, são introduzidos os conceitos de permutação e arranjo enfatizando o aspecto da contagem de quantos arranjos ou permutações existem em determinada situação. Neste software, vamos estudar não o conjunto de todas as permutações de uma determinada situação, mas a estrutura interna de uma permutação dada.

Trabalharemos com uma situação simples, porém bastante genérica, o embaralhamento das peças de um quebra-cabeça. Esse embaralhamento nada mais é do que uma bijeção de um conjunto finito, e exploramos a riqueza de estrutura deste tipo de função.

A questão central que procuramos abordar é a seguinte: ao se criar uma regra específica para embaralhar as peças do quebra-cabeça, quantas vezes devemos embaralhá-lo até que todas as peças retornem à posição inicial?

O software

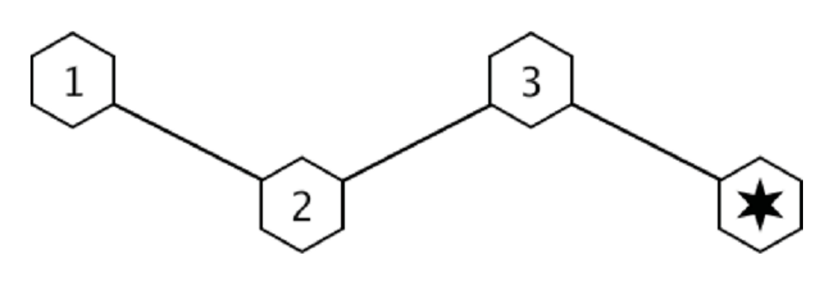
Estrutura do software

Este software é constituído de três atividades e de um desafio.

Na primeira atividade, introduzimos o conceito de permutação. Analisando uma permutação como uma bijeção de um conjunto finito, vemos como ela pode ser aplicada sucessivamente e quais propriedades resultam desse processo.

Na segunda atividade, apresentamos o conceito de ciclos, um tipo elementar de permutação. Além disso, vemos como toda permutação pode ser decomposta como produto de ciclos.

Na terceira atividade, definimos o conceito de ordem de uma permutação, e vemos como ela é determinada pela estrutura de ciclos. Por fim, temos um desafio, no qual exploramos algumas propriedades da decomposição de um número natural em fatores primos para determinar a estrutura de ciclos de uma permutação.



TELA 1 *Mapa do software.*

1 O que é um embaralhamento?

ATIVIDADE

Nesta atividade, introduzimos o conceito de permutação de um conjunto por meio de uma situação concreta, o embaralhamento das peças de um quebra-cabeça de 9 peças. De modo formal, uma permutação de um conjunto X nada mais é do que uma função bijetora $f : X \to X$. No nosso caso, o conjunto X pode ser entendido como o conjunto das 9 posições do quebra-cabeça.

Preste atenção ao fato de que as peças do quebra-cabeça foram sinalizadas com letras (A, B, C, D, E, F, G, H, I) apenas para facilitar a identificação das peças. O que, na realidade, estamos permutando, é a posição das peças, assinaladas com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Ao embaralharmos as peças sucessivamente usando a mesma "regra de embaralhamento", estamos, na realidade, considerando as funções compostas $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, e assim sucessivamente. Considerando a permutação apresentada na primeira parte da atividade, temos o seguinte quadro com as potências de f:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
f^1	3	6	8	4	9	7	5	1	2
f^2	8	7	1	4	2	5	9	3	6
f^3	1	5	3	4	6	9	2	8	7
f^4	3	9	8	4	7	2	6	1	5
f^5	8	2	1	4	5	6	7	3	9
f^6	1	6	3	4	9	7	5	8	2
f^7	3	7	8	4	2	5	9	1	6
f^8	8	5	1	4	6	9	2	3	7
f^9	1	9	3	4	7	2	6	8	5
f^{10}	3	2	8	4	5	6	7	1	9
f^{11}	8	6	1	4	9	7	5	3	2
f^{12}	1	7	3	4	2	5	9	8	6
f^{13}	3	5	8	4	6	9	2	1	7
f^{14}	8	9	1	4	7	2	6	3	5
f^{15}	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABELA 1

Se observarmos a 15ª linha da TABELA 1, vemos que, após 15 embaralhamentos sucessivos, cada peça retorna ao seu local original. De modo formal, dizemos que f^{15} é a função identidade, que denotamos por Id.

Um primeiro fato importante de ser notado é que, considerando X um conjunto finito, existe um número natural k tal que $f^k = \mathrm{Id}$. É possível perceber como demonstrar este fato observando atentamente a tabela acima. Cada linha da tabela é uma permutação do conjunto original. E como um conjunto de n elementos tem no máximo $n!$ permutações, após $n!$ linhas, devemos necessariamente ter linhas repetidas. Não estamos dizendo ainda que alguma das linhas será igual à primeira linha $(1, 2, 3, \ldots, n-1, n)$, mas este é o ponto de partida para demonstrar este fato.

Como existe um número natural k tal que $f^k = \mathrm{Id}$, deve existir um menor natural com esta propriedade, que chamamos de "ordem da permutação" f. Se k é a ordem de uma permutação f, então $f^m = \mathrm{Id}$ se, e somente se, m for um múltiplo de k.

2 Ciclos de uma permutação

ATIVIDADE

Esta atividade começa introduzindo o conceito de ciclo, ou "permutação cíclica". Para se apresentar o conceito de permutação cíclica de maneira clara, basta *desenhar e recortar* dois discos de papelão ou de cartolina, sendo um ligeiramente maior que o outro, e desenhar, como se fossem os marcadores de um relógio, os números (ou símbolos) correspondentes ao ciclo, na mesma ordem e com mesmo espaçamento em ambos. Colocando uma taxinha ou um pedaço de arame como eixo comum de ambos os discos, fica fácil entender o significado de um ciclo e o porquê da escolha deste nome: ao girarmos um dos discos uma posição, temos a ação do ciclo f; ao girarmos k posições, temos a ação do ciclo f^k.

Após definir o que é um ciclo, a atividade explora a decomposição de uma permutação em ciclos disjuntos. Em certo sentido, os ciclos são as unidades básicas e indecomponíveis de uma permutação, tendo um papel semelhante aos de números primos na decomposição dos números naturais ou inteiros: a menos da ordem em que são apresentados, uma permutação pode ser decomposta de modo único como produto de ciclos disjuntos. Por "ciclos disjuntos" entendemos os ciclos que não envolvem o mesmo símbolo.

Na sequência, mostramos que também é possível construir permutações com uma estrutura de ciclos pré-definida, desde que a soma do comprimento de todos os ciclos seja igual ao número de elementos do conjunto em questão. É importante realçar que, se um elemento j fica fixo pela permutação f (ou seja, se $f(j) = j$), então temos um ciclo de comprimento 1, denotado por (j). Também destacamos que a representação de um ciclo não é única, ou seja, são equivalentes os ciclos representados por

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-2}, a_{k-1}, a_k) =$$
$$= (a_2, a_3, a_4, \dots, a_{k-1}, a_k, a_1) = \dots = (a_3, a_4, a_5\ \dots, a_k, a_1, a_2)$$

ATIVIDADE

3 Como voltar à configuração inicial?

Nesta atividade, vemos como determinar a ordem de uma permutação. Conhecendo a estrutura de ciclos de uma permutação, somos capazes de determinar sua ordem a partir da ordem dos ciclos: a ordem de uma permutação é o menor múltiplo comum entre a ordem dos ciclos disjuntos que a compõem. De fato, para que todas as peças retornem à posição inicial, as peças de cada ciclo devem retornar à posição inicial; e como os ciclos são disjuntos, isto só ocorre após um número de vezes que seja múltiplo da ordem de cada um dos ciclos.

Desafio

Este desafio faz jus ao nome, pois nele invertemos a abordagem: propomos determinar a estrutura de ciclo conhecendo apenas a ordem da permutação proposta. Para se obter a resposta, é necessário analisar os fatores primos (2 e 5) da ordem do ciclo (10) e, então, perceber que, ao escrevermos 9 como soma de parcelas naturais, sendo que 2 e 5 são duas destas parcelas, as parcelas restantes devem somar $9 - 5 - 2 = 2$, de modo que só temos duas possibilidades: ou duas parcelas iguais a 1 (o que é descartado observando que nenhuma peça fica fixa pela permutação) ou uma parcela igual a 2.

Considerando o exemplo explorado na atividade, qual seja, permutações de um conjunto com 9 elementos, todas as possíveis estruturas de ciclo estão descritas na tabela a seguir, assim como o mínimo múltiplo comum entre a ordem dos ciclos em cada uma das 30 possibilidades.

Estrutura de ciclos									MMC
9									9
8	1								8
7	2								14
7	1	1							7
6	3								6
6	2	1							12
6	1	1	1						6
5	4								20
5	3	1							15
5	2	2							10
5	2	1	1						10
5	1	1	1	1					5
4	4	1							4
4	3	2							12
4	3	1	1						12
4	2	2	1						4
4	2	1	1	1					4
4	1	1	1	1	1				4
3	3	3							3
3	3	2	1						6
3	3	1	1	1					3
3	2	2	2						6
3	2	2	1	1					6
3	2	1	1	1	1				6
3	1	1	1	1	1	1			3
2	2	2	2	1					2
2	2	2	1	1	1				2
2	2	1	1	1	1	1			2
2	1	1	1	1	1	1	1		2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

TABELA 2

Observamos que esta tabela foi feita exaurindo todas as possibilidades, e não é conhecida alguma fórmula para determinar o valor máximo que pode assumir o mmc das parcelas que podem decompor um número natural em parcelas naturais positivas.

Apesar da dificuldade, acreditamos que o desafio pode instigar os alunos a explorarem a questão proposta, uma vez que as primeiras abordagens do problema podem ser feitas experimentalmente mediante a observação do comportamento das 9 partes.

Fechamento

Os pontos importantes discutidos ao longo do software e que podem servir como norteadores do fechamento da atividade são:

- Entender o que chamamos de “embaralhamento”. É importante notar que, ao contrário do procedimento comum de embaralhar cartas, o que usamos neste software é um embaralhamento seguindo uma certa regra de movimentação das partes da imagem. Isso é explorado na Atividade 1;
- Perceber que as partes da imagem se movimentam em ciclo, e aprender como identificá-los e representá-los com uma notação adequada. Isso é discutido na Atividade 2;
- Perceber que as partes voltam para suas posições originais quando o número de embaralhadas é um múltiplo comum do tamanho de cada ciclo. Isso é discutido na Atividade 3.

Pode ser interessante sintetizar essas ideias na lousa para certificar que os alunos compreenderam o que foi apresentado no software.

Uma questão que pode ser explorada em sala de aula com os alunos é a seguinte: para as imagens propostas no software, ou seja, divididas em 9 partes, qual é o embaralhamento que resulta no maior número de embaralhadas para que as partes voltem para suas posições originais?

Analisando a tabela 2, notamos que o maior mmc que aparece é 20, para o caso com um ciclo de tamanho 5 e outro de tamanho 4. Contudo, obter esse resultado pode não ser simples.

Outro detalhe interessante, e que pode ser explorado em sala de aula, é que todos os números de 2 a 15 aparecem como mmc na TABELA 2, exceto 11 e 13 (pois ambos são primos maiores do que 9). Será que os alunos conseguem construir embaralhamentos que tenham todos esses tamanhos listados?

Por fim, note que essa mesma atividade pode ser feita no papel: cada grupo pode trazer uma imagem, colá-la em algum material mais resistente, como papel cartão, e recortá-la em quantas partes desejar. Isto feito, cada grupo pode criar uma regra de embaralhamento e passá-la, junto com a imagem recortada, para um outro grupo, a fim de que este descubra com quantas embaralhadas as cartas voltam para suas posições originais e quais são os ciclos.

Essa atividade pode ser realizada depois do uso do software. Nesse caso, sugerimos que os grupos recortem as imagens em um número de partes diferente de 9, ou mesmo antes de os alunos utilizarem o software, para que se familiarizem com a proposta.

Aprofundamento

Neste software, fazemos uma introdução à estrutura do que chamamos de "grupos de permutação". Consideremos o conjunto S_n de todas as permutações de um conjunto com n elementos, digamos o conjunto $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. Antes de tudo, observemos que a função identidade Id, definida por $\mathrm{Id}(x) = x$, $\forall x \in [n]$ pertence a S_n. Cada permutação $\sigma \in S_n$ é uma bijeção $\sigma : [n] \to [n]$. Como uma bijeção σ é uma função invertível, e sua inversa σ^{-1} também é uma bijeção, temos que $\sigma \in S_n \Rightarrow \sigma^{-1} \in S_n$. Mais ainda, como a composição de bijeções também é uma bijeção, temos que $\sigma, \tau \in S_n \Rightarrow \sigma \circ \tau \in S_n$, onde o símbolo $\circ$ denota a composição usual de funções. Como a composição de funções é sempre associativa, temos que o conjunto S_n, com a composição usual de funções $\circ$, é um grupo, no sentido de satisfazer os seguintes axiomas:

Definição de grupo

Um grupo é um conjunto G, com uma operação $\circ : G \times G \to G$, que, a cada par $(\sigma, \tau) \in G \times G$, associa um elemento $\sigma \circ \tau \in G$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. (*Existência de elemento neutro*) Existe elemento $e \in G$ tal que $e \circ \sigma = \sigma \circ e$, $\forall \sigma \in G$;
2. (*Existência de inverso*) Dado $\sigma \in G$, existe elemento $\tau \in G$ tal que $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = e$. Este elemento será denotado por σ^{-1}, o inverso de σ;
3. (*Associatividade*) $(\sigma \circ \tau) \circ \mu = \sigma \circ (\tau \circ \mu)$, $\forall \sigma, \tau, \mu \in G$.

Grupos são estruturas algébricas abstratas, presentes em inúmeras áreas da matemática e extremamente úteis. Os grupos de permutação são, em certo sentido, objetos universais, no sentido de que todo grupo pode ser visto como um grupo de permutações de um conjunto (não necessariamente finito), e por isto, o estudo dos grupos de permutação tem um papel importante na matemática.

Bibliografia

GARCIA, Arnaldo; LEQUAN, Yves. **Álgebra: um curso de introdução**. Rio de Janeiro: SBM, 1988.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Grupos e Combinatória**. S. J. do Rio Preto: Ibilice, 1979.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Marcelo Firer

Revisores
Língua Portuguesa
Denis Barbosa Cacique

Projeto gráfico
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL