



Matemática Multimídia

ANÁLISE DE DADOS
E PROBABILIDADE



GUIA DO PROFESSOR



Software


Explorando o jogo do máximo

Objetivos da unidade

1. Capacitar o aluno a tomar decisões de acordo com o resultado de um experimento aleatório;
2. Aplicar o conceito de interpretação geométrica de probabilidade.

REQUISITOS DE SOFTWARE Requisitos de software Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Java 1.6+ e Adobe Flash Player 9.0+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Não há suporte para navegação exclusiva via teclado ou recurso nativo de alto contraste.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 



UNICAMP



FUNDO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação



Explorando o jogo do máximo

GUIA DO PROFESSOR

Sinopse

Esse software possibilita aos alunos explorarem as probabilidades envolvidas no jogo do máximo, cujas regras são: dois dados são lançados, o primeiro jogador vence se a maior face obtida for 1, 2, 3 ou 4 e o segundo se a maior face for 5 ou 6. Motivados pela questão “o jogo do máximo favorece algum dos jogadores?”, os alunos poderão explorar o jogo primeiro através de uma análise de frequências e depois das probabilidades teóricas.

Conteúdos

Probabilidade: Função máximo de variáveis aleatórias, Independência.

Objetivos

1. Investigar o comportamento aleatório de um jogo simples com dados;
2. Entender funções de variáveis aleatórias;
3. Ler e compreender gráficos de frequências.

Duração

Uma aula dupla.

Recomendação de uso

Sugerimos que a unidade seja utilizada em duplas.



Introdução



Além da motivação relacionada ao interesse natural que jogos de azar despertam nas pessoas, consideramos esse tema interessante para o ensino e aprendizagem de Matemática por dois motivos.

Primeiro, as suas regras são simples e permitem explorar conceitos básicos de probabilidade e estatística de maneira bastante natural e acessível.

Em segundo lugar, a resposta para a pergunta motivadora deste software contradiz a primeira impressão derivada da análise rápida das regras, estimulando a investigação do jogo em questão.

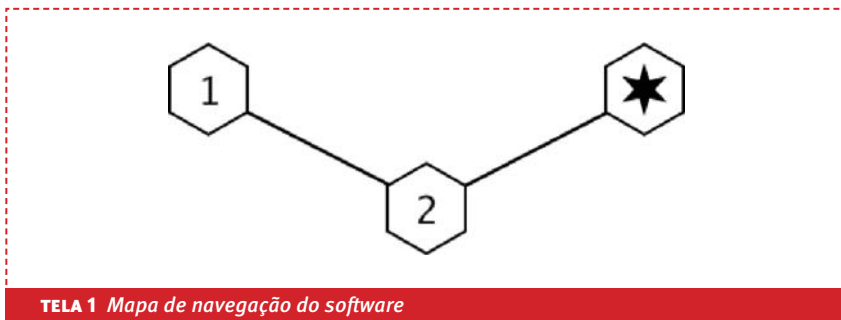


O software

Estrutura do software

O software “Explorando o Jogo do Máximo” é composto por duas ATIVIDADES, ambas fundamentais para a desenvolvimento do conteúdo, e um DESAFIO, com uma proposta mais aberta e difícil.

Todas as ATIVIDADES possuem algumas questões que devem ser respondidas pelos alunos em seus cadernos, e essas questões podem ser utilizadas após a utilização do software para o fechamento das discussões.

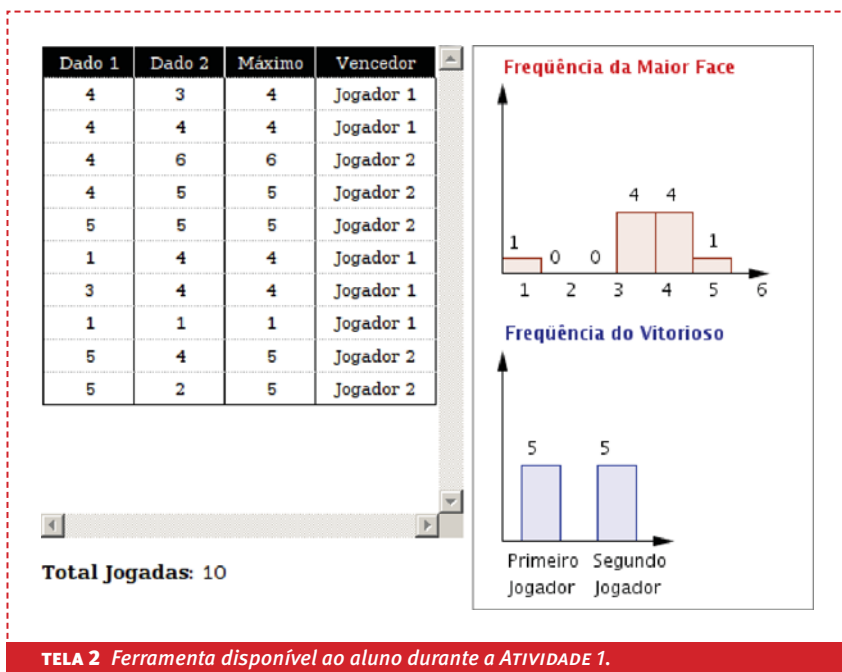


ATIVIDADE

1 Investigando o jogo

Na primeira parte da atividade, o aluno deverá realizar simulações de jogadas “lançando” virtualmente dois dados.

Os resultados serão representados pelo software em uma tabela que registra separadamente cada uma das jogadas, um gráfico de frequências para a maior face obtida (gráfico vermelho) e outro para o jogador vencedor (gráfico azul), como mostrado na imagem a seguir.



TELA 2 Ferramenta disponível ao aluno durante a ATIVIDADE 1.

Analisando o jogo, note que a face 1 será o valor máximo somente no caso em que for obtido (1, 1), ou seja, face 1 nos dois dados. A face 2 será o valor máximo se for obtido um dos resultados (1, 2), (2, 1), (2, 2). Ou seja, a face 2 tem 3 vezes mais chance que a face 1 de ser o valor máximo. A face 6 será o valor máximo se for observado qualquer resultado com uma das faces igual a 6, {(1, 6), (2, 6), ..., (6, 6), (6, 1), ..., (6, 5)}, 11 combinações possíveis! A face 6 tem 11 vezes mais chance que a face 1 e quase 4 vezes mais chance que a face 2 de ser o valor máximo.

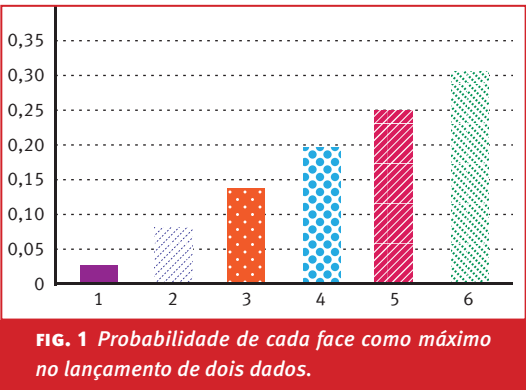
Assim, valores maiores têm mais chance de serem o valor máximo no lançamento dos dois dados.

Depois de muitas simulações, a altura de cada barra do gráfico de frequências deverá se aproximar da probabilidade teórica de cada um dos resultados possíveis.

Em outras palavras, depois de muitas simulações, o 2 deveria aparecer 3 vezes mais que o 1 e o 6 deveria aparecer 11 vezes mais que o 1,



aproximadamente. Esta proporcionalidade deveria se observar nas alturas das respectivas barras, como no gráfico abaixo.



A altura de cada barra representa a probabilidade de que cada face seja o valor máximo em dois lançamentos de um dado. Estas probabilidades estão descritas na TABELA 1, e a demonstração desses valores será feita mais adiante.

Face	Probabilidade
1	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{3}{36}$
3	$\frac{5}{36}$
4	$\frac{7}{36}$
5	$\frac{9}{36}$
6	$\frac{11}{36}$

TABELA 1 Distribuição de probabilidade de cada face como máximo no lançamento de dois dados.

Neste ponto da atividade, todos os alunos já deverão estar convencidos de que o jogo favorece o segundo jogador. É possível que, para algum aluno, mesmo depois de muitas jogadas, o primeiro jogador tenha ganhado mais vezes. Se isto ocorrer, pode ser interessante propor aos alunos que confrontem seus resultados com os de alguns colegas.

Observe também que as respostas às perguntas feitas na atividade não são únicas, pois dependem dos lançamentos realizados pelos alunos. Porém, à medida que o total de lançamentos aumenta, as respostas devem ficar muito próximas dos valores ideais indicados no gráfico anterior.

2 Compreendendo o jogo

ATIVIDADE

Na segunda atividade, o aluno é conduzido ao cálculo da probabilidade de vitória para cada um dos jogadores no Jogo do Máximo.

Os 36 possíveis resultados do lançamento de dois dados podem ser representados em uma tabela 2x2 na qual cada linha indica o resultado do primeiro dado e cada coluna o resultado do segundo. Essa tabela está disponível na Atividade 2 como uma ferramenta interativa que poderá ser preenchida pelo próprio aluno.

Em cada casa da tabela, o aluno deve preencher qual é o valor máximo observado. Por exemplo, se em um lançamento for obtido o resultado (4,5), então o aluno deve preencher o valor 5 (máximo entre 4 e 5) na casa correspondente à linha 4 e à coluna 5, como indicado na TELA 2.

Depois de completada a tabela com o valor máximo de todos os resultados possíveis, o aluno deve identificar quais são os resultados favoráveis ao primeiro jogador e quais são os favoráveis ao segundo jogador. No software isso será indicado pela cor do fundo de cada célula que for preenchida corretamente pelo aluno.


Fique atento ao trabalho dos alunos nesse momento, pois alguns podem ter dificuldade no preenchimento da tabela. Incentive a leitura da explicação sobre como ela funciona e o uso do botão “Corrigir”.




Os resultados favoráveis ao primeiro jogador são todos aqueles com máximo até 4, ou seja, todos os compreendidos entre as linhas de 1 a 4 e as colunas de 1 a 4. Portanto, há $4 \times 4 = 16$ combinações possíveis favoráveis ao primeiro jogador.

Os resultados favoráveis ao segundo jogador são todos os restantes:
 $36 - 16 = 20$.

1º Dado



2º Dado



		2º Dado					
		1	2	3	4	5	6
1º Dado	1						
	2						
	3						
	4					5	
	5						
	6						

TELA 3 Ferramenta disponível ao aluno durante a ATIVIDADE 2, PARTE 1.

		2º Dado					
		1	2	3	4	5	6
1º Dado	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	2	3	4	5	6
	3	3	3	3	4	5	6
	4	4	4	4	4	5	6
	5	5	5	5	5	5	6
	6	6	6	6	6	6	6

TELA 4 Ferramenta disponível ao aluno durante a ATIVIDADE 2, PARTE 1.

Novamente, como os dados são balanceados, a probabilidade de ocorrência é a mesma para cada par possível: $\frac{1}{36}$. Portanto, a probabilidade de que o primeiro jogador ganhe o jogo é $\frac{16}{36} = 0,444 \dots$ ou aproximadamente 44,44% e a probabilidade de que o segundo jogador ganhe o jogo é o complementar:

$$1 - 0,4444 = 0,5556 \text{ ou } 55,56\%.$$

Portanto, o Jogo do Máximo favorece o segundo jogador!

Desafio

A situação proposta no desafio envolve a possibilidade de viciar os dados utilizados no Jogo do Máximo, atribuindo pesos para cada uma das faces. Com isso, é colocado o seguinte desafio:

Tente viciar os dados de forma que o Jogo do Máximo passe a ser honesto.

Trata-se de uma pergunta mais complexa e que admite múltiplas respostas. A proposta é que os alunos testem as suas escolhas e depois procurem justificar as probabilidades de cada jogador vencer (o que pode ser feito através de um raciocínio muito próximo daquele desenvolvido na ATIVIDADE 2).

Daremos um exemplo de possível solução.

Consideremos os pesos da tabela na TELA 4:





Estes pesos representam um dado que tem apenas as faces 1 e 6, onde a face 1 tem probabilidade $\frac{5}{7}$ e a face 6, $\frac{2}{7}$ de ser observada em um lançamento (você pode imaginar um dado com 7 faces, das quais duas têm valor 6 e cinco têm valor 1). Ou seja, a face 1 aparece na proporção de 5 para 2 em relação à face 6.

Neste caso, a probabilidade de obter maior face igual a 1 nos dois lançamentos é igual à probabilidade de obter face 1 nos dois dados:

$$\frac{5}{7} \times \frac{5}{7} = 0,5102 \text{ ou } 51,02\%.$$

E a probabilidade de obter face 6 como máximo é o complementar, portanto, aproximadamente igual a 48,98%.

Com esta configuração para os pesos, o jogo é “quase” honesto.

Como foi dito, esta não é a única solução, porém, representa bem as possíveis respostas que poderão ser encontradas pelos alunos. Para que o desafio não se transforme em um jogo de tentativa e erro, peça aos alunos que justifiquem os pesos que atribuíram às faces, de maneira similar aos cálculos que apresentamos no exemplo anterior.

Fechamento

A parte fundamental do software é composta pelas ATIVIDADES 1 e 2, de forma que o DESAFIO deve ser encarado como algo complementar, que pode inclusive ser resolvido pelos alunos em suas casas.

Com isso, propomos uma fechamento dividido em duas partes: a primeira explorando a ATIVIDADE 1, ou seja, com uma ênfase empírica, e a segunda explorando a ATIVIDADE 2, ou seja, com ênfase no cálculo das probabilidades.

O ponto de partida para ambas são as “Questões para o Caderno” que foram propostas ao longo das atividades. Na ATIVIDADE 1, são colocadas as seguintes (PARTE 4 da ATIVIDADE 1):

1. Como você poderia obter o gráfico azul a partir do gráfico vermelho?
- 2.
- 2.1 Houve muita diferença entre o total de vitórias de cada jogador?
- 2.2 Com base nisso, você diria que este jogo é justo? Porquê?
3. Após analisar os resultados que você obteve nas questões anteriores, qual jogador você escolheria: o primeiro ou o segundo?

A QUESTÃO 1 explora a compreensão dos gráficos utilizados ao longo de toda a atividade. Aproveite a oportunidade para verificar se todos os alunos compreenderam as informações transmitidas por cada um dos gráficos e como é possível obter o gráfico azul a partir do vermelho.

A QUESTÃO 2.1 abre margem para discutir os resultados obtidos por cada aluno. Ao olharmos para as respostas obtidas pela classe toda, devem aparecer mais vitórias do segundo jogador. Explore esse fato, esclarecendo que um resultado mais provável que outro não ocorre necessariamente mais vezes quando observamos um caso particular.

A QUESTÃO 2.1 deve ser uma consequência direta dos resultados obtidos por cada aluno ao longo da atividade. Procure confrontar essa resposta



tanto com as impressões iniciais da turma (antes de iniciar a Atividade) quanto com as impressões após o término da ATIVIDADE 2.

Na ATIVIDADE 2, são colocadas as seguintes “Questões para o Caderno” (PARTE 4 da ATIVIDADE 2):

1.
 - 1.1 Qual a probabilidade do primeiro jogador vencer o Jogo do Máximo?
 - 1.2 Qual a probabilidade do segundo jogador vencer?
2. Se as regras do jogo fossem mudadas de modo que o segundo jogador vencesse quando a maior face fosse 1 ou 3, o jogo passaria a ser vantajoso para o primeiro jogador, pois as chances do segundo ganhar seriam:

$$\frac{(1 + 5)}{16} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,17$$

Quais deveriam ser as duas faces do segundo jogador para que o jogo fosse justo?

Os itens 1.1 e 1.2 devem ser respondidos sem muita dificuldade pelos alunos, devido às questões que foram propostas anteriormente.

Já a QUESTÃO 2 é um pouco mais desafiadora e serve como fechamento da atividade como um todo. Ela vai além da questão proposta inicialmente e permite verificar se o aluno compreendeu o significado da tabela de resultados preenchida ao longo da atividade. Sugerimos que o professor a copie na lousa para poder discutir a solução dessa questão com seus alunos.

		2º Dado					
		1	2	3	4	5	6
1º Dado	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	2	3	4	5	6
	3	3	3	3	4	5	6
	4	4	4	4	4	5	6
	5	5	5	5	5	5	6
	6	6	6	6	6	6	6

TELA 6

Para resolver a questão, precisamos fazer com que metade dos resultados possíveis favoreça o primeiro jogador e metade favoreça o segundo, tornando o jogo justo, ou seja, 18 resultados para cada jogador.

Note que a face 6 é o máximo em 11 resultados, enquanto que a face 4 é o máximo em outros 7 resultados. Como $11 + 7 = 18$, temos que o jogo seria justo se o segundo jogador vencesse quando a maior face fosse 4 ou 6 ao invés de 5 ou 6.

Apesar de aparentemente simples, a resolução dessa questão passa pelo entendimento da tabela de resultados possíveis e do cálculo de probabilidade de um evento, que são conteúdos chaves deste software como um todo.



Bibliografia

W. FELLER (1976). **Introdução à Teoria das Probabilidades e suas Aplicações**, vol I. Editora Edgard Blücher.

Site recomendado

ALEA — Acção Local de Estatística Aplicada, <http://alea-estp.ine.pt>

Ficha técnica

AUTORES

Leonardo Barichello
e Laura Leticia Ramos Rifo

REDAÇÃO

Leonardo Barichello

IMPLEMENTAÇÃO

Matias Costa

REVISORES

Conteúdo

Laura Leticia Ramos Rifo

Língua Portuguesa

Denis Barbosa Cacique

Usabilidade e Acessibilidade

Heloísa V. Rocha

PROJETO GRÁFICO

E ILUSTRAÇÕES TÉCNICAS

Preface Design

ILUSTRADOR

Lucas Ogasawara

FOTÓGRAFO

Augusto Fidalgo Yamamoto



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Reitor

José Tadeu Jorge

Vice-Reitor

Fernando Ferreira da Costa

GRUPO GESTOR DE PROJETOS EDUCACIONAIS (GGPE – UNICAMP)

Coordenador

Fernando Arantes

Gerente Executiva

Miriam C. C. de Oliveira

MATEMÁTICA MULTIMÍDIA

Coordenador Geral

Samuel Rocha de Oliveira

Coordenador de Software

Leonardo Barichello

Coordenador de Implementação

Matias Costa

Supervisão de Software

Heloísa V. Rocha

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)

Diretor

Jayme Vaz Jr.

Vice-Diretor

Edmundo Capelas de Oliveira

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 