



Matemática Multimídia

GEOMETRIA  
E MEDIDAS



NÚMEROS  
E FUNÇÕES



## GUIA DO PROFESSOR



# Software

## As curvas de Lissajous

### Objetivos

1. Entender um exemplo de combinação de funções;
2. Introduzir e interpretar curvas parametrizadas;
3. Reconhecer períodos e frequências em funções periódicas.

**REQUISITOS DE SOFTWARE** Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+.

**RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE** Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

**LICENÇA** Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons



UNICAMP



FUNDO NACIONAL  
DE DESENVOLVIMENTO  
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de  
Educação a Distância

Ministério da  
Ciência e Tecnologia

Ministério  
da Educação



# As curvas de Lissajous

## GUIA DO PROFESSOR

### Sinopse

Neste software, o aluno utilizará equações paramétricas para compreender como funcionam as curvas de Lissajous, que possuem um forte apelo visual. Também serão estudados os contextos em que elas podem ser aplicadas.

### Conteúdos

- Gráficos de funções;
- Curvas parametrizadas;
- Funções trigonométricas;
- Funções periódicas.

### Objetivos

1. Entender um exemplo de combinação de funções;
2. Introduzir e interpretar curvas parametrizadas;
3. Reconhecer períodos e frequências em funções periódicas.

### Duração

Uma aula dupla.

### Recomendação de uso

Sugerimos que o software seja feito em duplas, para incentivar a discussão dos conceitos e aplicações.

### Material relacionado

- Experimentos: Roda-gigante;
- Software: Ondas trigonométricas;
- Vídeos: Alice e algumas relações trigonométricas, Alice e a lei dos cossenos, Alice e o cosseno da diferença dos arcos.



# Introdução



Podemos argumentar que o desenho de curvas paramétricas no plano pode ser apresentado ao estudante assim que ele souber identificar um ponto por suas coordenadas no plano cartesiano e entenda o conceito de função. Digamos que um ponto,  $A$ , tenha as coordenadas fornecidas pelo par ordenado  $(x, y)$ . Assim, em poucas palavras, uma curva (contínua) será uma sequência de pontos nos quais cada coordenada é uma função (contínua) de um mesmo parâmetro. Isto é, uma curva  $c(t)$  é representada por  $(x(t), y(t))$ , onde  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções (contínuas) da variável comum (chamada de “parâmetro”)  $t$ .

Um exemplo simples, útil e interessante disto ocorre quando fazemos uma viagem. Se você vai da sua casa até à de um amigo, o hodômetro de seu carro mede apenas a distância percorrida em certo tempo, que você pode registrar com seu relógio. Nesse caso, o hodômetro e seu relógio descrevem uma única função, digamos,  $r(t)$ . No entanto, se você tiver um GPS e olhá-lo durante toda sua viagem, você o verá medindo em tempo real sua latitude ( $Lat(t)$ ) e longitude ( $Long(t)$ ), ou seja, temos um par de funções reais ( $Lat(t), Long(t)$ ) que definem sua posição na Terra em cada momento da viagem. Este caminho mostrado no GPS é um exemplo bem prático de curva parametrizada, isto é, aquela curva cujas coordenadas são funções que dependem de um parâmetro (no caso acima, o tempo).

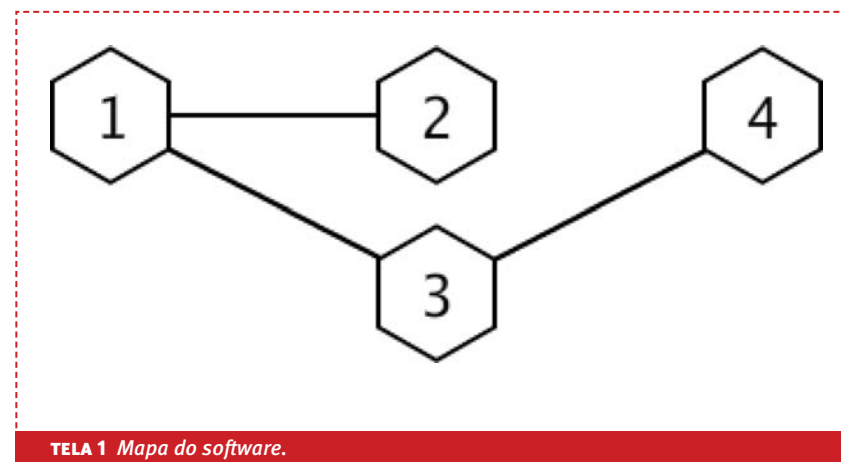
Um dos objetivos deste software é apresentar as curvas de Lissajous, que são curvas paramétricas interessantes para os alunos do ensino médio tanto pela relativa complexidade como pela utilidade e forte apelo visual.

# O software

## Estrutura do software

Este software consiste em quatro atividades. Na primeira delas, o aluno aprenderá como funcionam as equações paramétricas a partir da análise de alguns exemplos. Na atividade seguinte, o aluno poderá experimentar algumas curvas que ele mesmo criar.

No que concerne às curvas de Lissajous, que envolvem somas de funções trigonométricas, a principal atividade é a 3. A ATIVIDADE 4 explica pausadamente o vídeo da introdução do software. Com essa atividade final, o professor pode fazer o fechamento do conteúdo apresentado na ATIVIDADE 3.



TELA 1 Mapa do software.

## Comentários iniciais

Tanto no software como neste GUIA, trataremos de curvas no plano, cujo conceito é facilmente generalizável para curvas no espaço com três ou mais dimensões.

### Definições

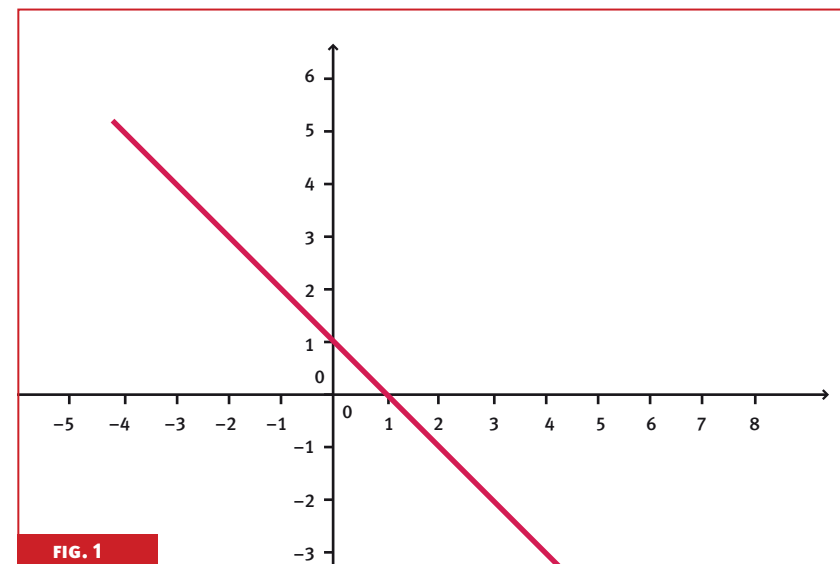
Considere um intervalo na reta real  $I \subset \mathbb{R}$  e duas funções independentes  $x(t)$  e  $y(t)$  que tenham  $I$  como domínio, isto é,  $t \in I$ . A função  $c(t)$  que associa cada valor de  $t$  a um ponto de coordenadas  $(x, y)$  no plano é chamada de “curva parametrizada”. A curva consiste no conjunto de pontos  $\{(x(t), y(t)), t \in I\}$  e referimos às equações  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  como “equações paramétricas”.

### Exemplos

Obviamente, existem infinitas curvas paramétricas. As relacionadas abaixo apresentam expressões relativamente simples e propriedades muito interessantes.

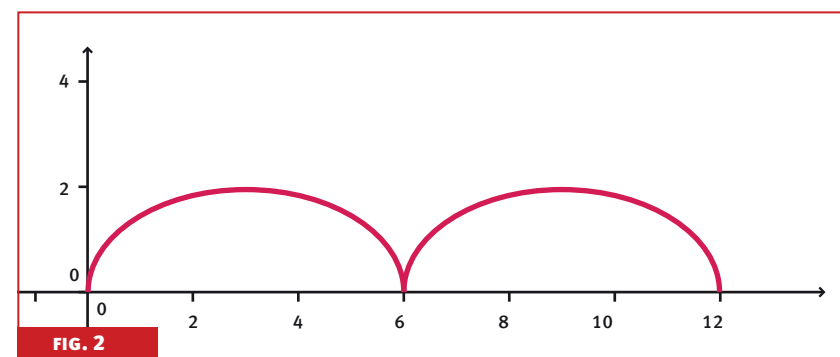
### Reta

$$(x, y) = (t, -t + 1), t \in \mathbb{R}$$



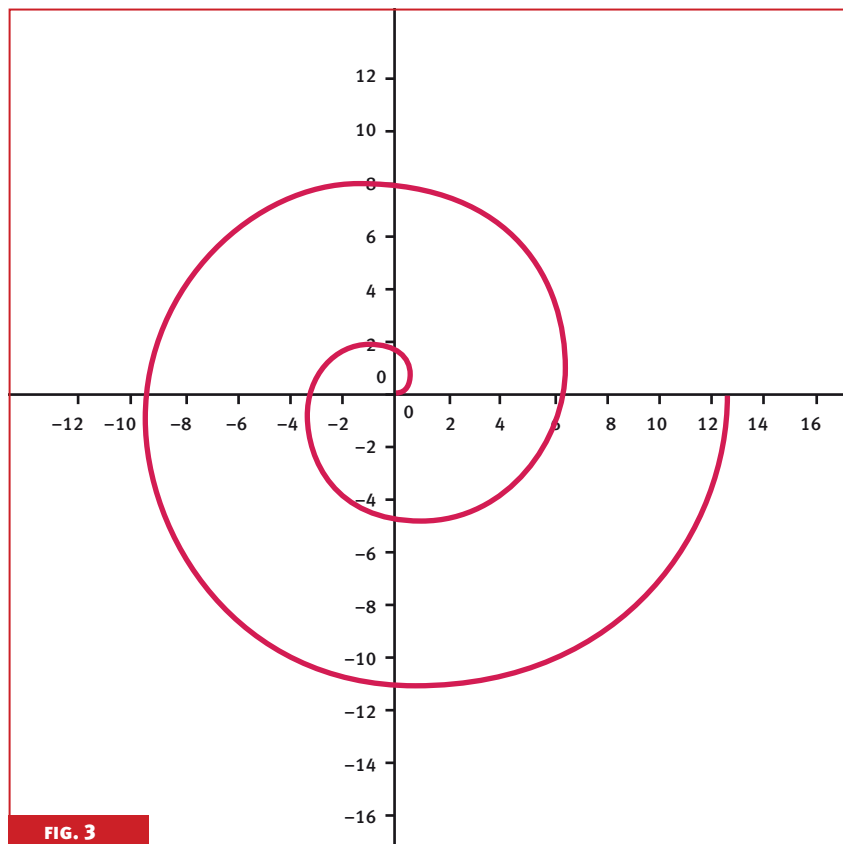
### Cicloide

$$x(t) = t - \sin(t) \text{ e } y(t) = 1 - \cos(t) \text{ para } 0 \leq t \leq 4\pi$$



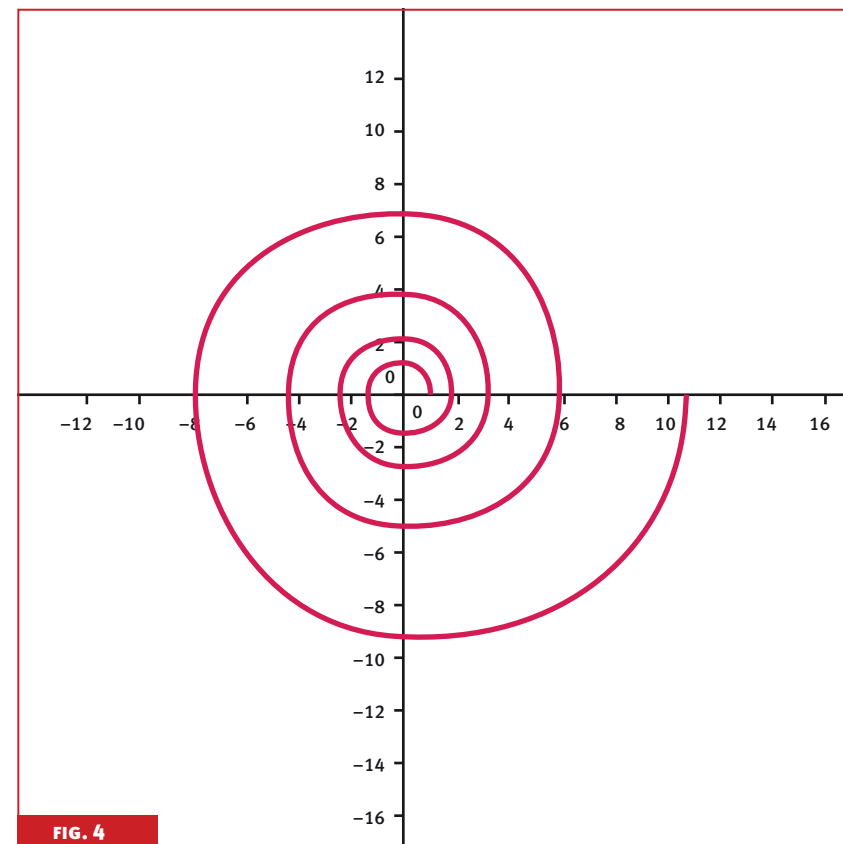
### Espiral de Arquimedes

$x(t) = t \cdot \cos(t)$  e  $y(t) = t \cdot \sin(t)$  para  $0 \leq t \leq 4\pi$



### Espiral Logarítmica

$x(t) = b^t \cdot \cos(t)$  e  $y(t) = b^t \cdot \sin(t)$  para  $0 \leq t \leq 8\pi$ , onde  $b$  é uma base apropriada ou conveniente. Assim,  $b^t$  é uma função exponencial. No gráfico, usamos  $b = 1,1$ .

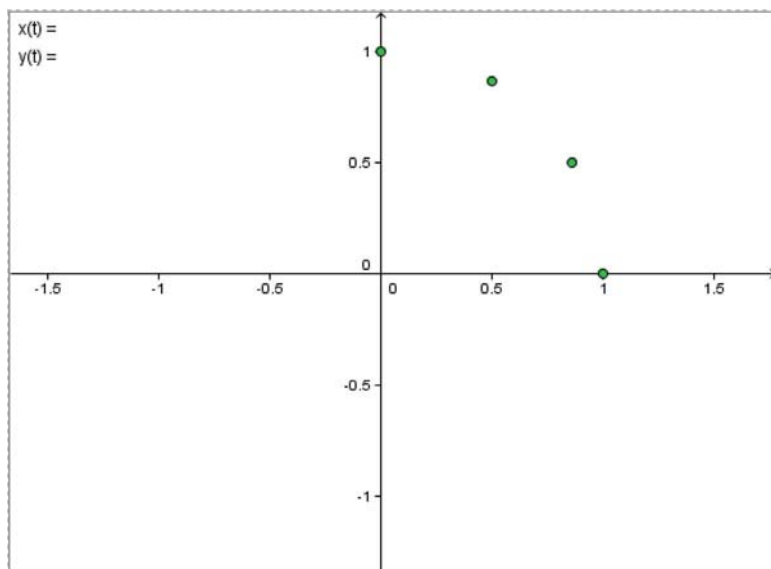


## 1 Equações paramétricas

### ATIVIDADE

Essa ATIVIDADE contém quatro partes.

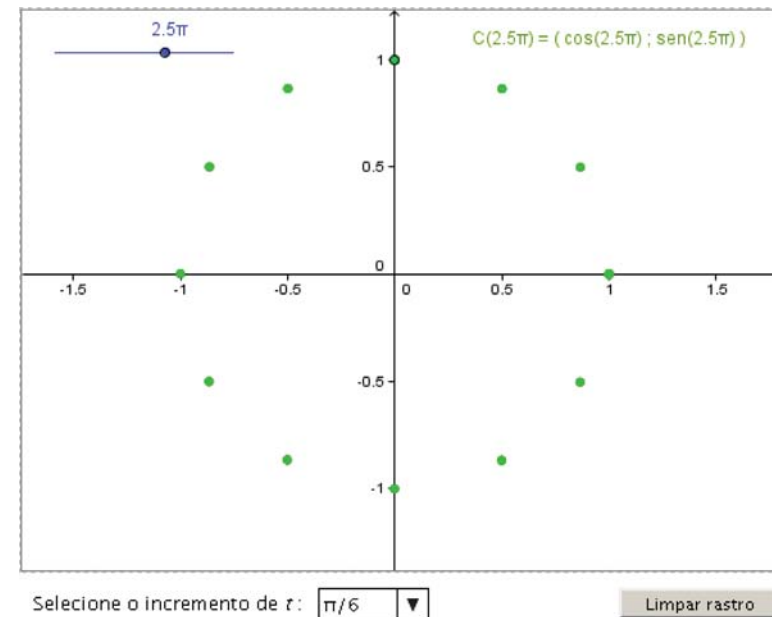
Na primeira, o aluno é convidado a colocar alguns pontos de uma curva paramétrica dada pelas equações paramétricas.



TELA 2

O objetivo dessa parte é familiarizar o aluno com a definição de curva paramétrica como sendo um conjunto de pontos cujas coordenadas são valores específicos das funções dadas.

Na segunda parte, o aluno pode colocar mais pontos na curva com a ajuda da ferramenta.



TELA 3

Nas PARTES 3 e 4, o aluno desenhará, com a ajuda da ferramenta, um círculo com centro em pontos aleatórios e uma elipse com excentricidade variável.

## 2 Crie suas próprias curvas

### ATIVIDADE

Na ATIVIDADE 2, o aluno pode visualizar a curva gerada por algumas equações paramétricas que ele próprio escolher. Algumas curvas são sugeridas na única parte dessa ATIVIDADE, e o professor pode complementar a aula com os exemplos dados nos COMENTÁRIOS INICIAIS deste GUIA.

Essa ATIVIDADE é opcional e cabe ao professor decidir se deseja ou não aprofundar ou diversificar o conteúdo proposto no software através dela.

### 3 As curvas de Lissajous

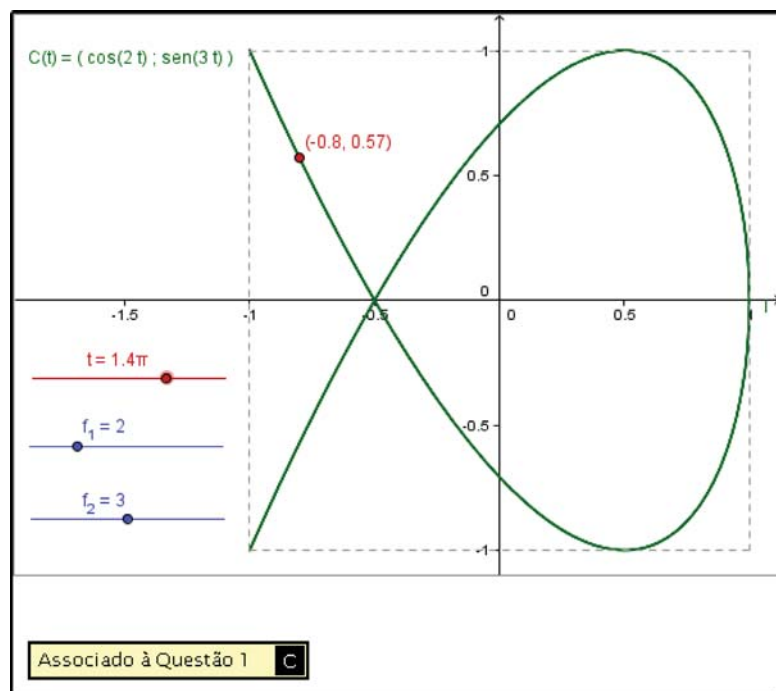
#### ATIVIDADE

São chamadas de “curvas de Lissajous” as curvas paramétricas dadas por equações do tipo

$$l(t) = (a_1 \cdot \cos(f_1 \cdot t + b_1), a_2 \cdot \sin(f_2 \cdot t + b_2))$$

onde  $a_1$ ,  $f_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $f_2$  e  $b_2$  são constantes reais que afetam a forma geométrica da curva, e são chamados de “parâmetros da curva”.

Nessa atividade, o aluno experimentará o efeito de variar cada constante, a combinação de troca de sinais dos parâmetros e outras modificações quaisquer, a fim de perceber seu efeito sobre a forma da curva resultante.



TELA 4

Ao final dessa atividade, o aluno deve perceber o papel de cada par de constantes  $a_1$  e  $a_2$ ,  $f_1$  e  $f_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  e, com isso, será capaz de entender a aplicação em Física das curvas de Lissajous que foi mostrada no vídeo da INTRODUÇÃO e será devidamente discutida na ATIVIDADE 4.

### 4 O vídeo e uma aplicação

#### ATIVIDADE

Essa atividade encerra o software explicando o vídeo mostrado na sua INTRODUÇÃO.

Esse vídeo foi gerado a partir de um osciloscópio, instrumento usado para determinar a frequência de sinais periódicos. Um sinal pode vir de um fonte de som, luz, corrente elétrica etc. Esse tipo de determinação é muito comum em vários ramos da Física e o método que mostramos depende de uma boa interpretação das curvas mostradas no monitor do instrumento, que são justamente curvas de Lissajous.

Ao assistir ao vídeo, o software mostrará alguns textos explicativos que ajudam na interpretação do fenômeno e mostram como os conteúdos aprendidos na ATIVIDADE 3 podem ser usados para descobrir a frequência de um sinal de frequência desconhecida.

## Fechamento

Sugerimos que o fechamento seja conduzido a partir das questões para o caderno sugeridas no software.

#### Questão para o caderno

- 1A Com base no que você aprendeu, qual é a relação entre os valores  $f_1$  e  $f_2$  e a forma da curva resultante?

A forma da curva paramétrica de Lissajous depende das frequências  $f_1$  e  $f_2$  na razão  $f_2/f_1$ , e não dos seus valores independentes. Se usarmos  $f_1$  e  $f_2$  com algum múltiplo natural em comum, a curva pode se repetir em relação à curva na qual  $f_1$  e  $f_2$  são coprimos.

Observem que, para todos os casos considerados,  $f_2/f_1$  é um número racional, e, nesses casos, a curva de Lissajous vai ser periódica, isto é, vai se repetir. Em contraste, se  $f_2/f_1$  fosse irracional, a curva de Lissajous jamais se repetiria.

#### **Questão para o caderno**

Como você calcularia esse valor para uma curva genérica cuja razão entre os parâmetros  $f_1$  e  $f_2$  fosse igual a  $3/2$ ?

Todas as curvas nas quais  $f_1 = 3k/2$  e  $f_2 = 3k/2$  teriam a mesma forma para qualquer valor real  $k$ .

#### **Atividade lúdica ligada às atividades 2 e 3**

Com base nos exemplos acima, o professor pode propor um jogo de adivinhação.

##### *Exemplo 1*

O professor diz que vai trabalhar nos gráficos de retas  $y = ax + b$  (isto é, fixa a classe de curvas a serem adivinhadas). Pede para os alunos desenharem no caderno as figuras correspondentes aos parâmetros que ele coloca na lousa. Depois de algum tempo, mostra o gráfico na tela do computador.

Outro exemplo seria adivinhar a forma de algumas figuras de Lissajous, de parábolas, polinômios, etc. O professor pode enfatizar que a representação usual do gráfico de uma função  $\{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$  é um caso particular de equações paramétricas.

##### *Exemplo 2*

O jogo inverso seria o seguinte: o professor daria uma figura dentro de uma classe, digamos, novamente, Lissajous. A ideia, então, é o aluno, ao

olhar a figura, tentar adivinhar alguma informação sobre os parâmetros, como, por exemplo, sinal, provável intervalo onde está localizado o valor do parâmetro, etc..

Para essa atividade, a ferramenta disponível na ATIVIDADE 2 pode ser bastante útil.

## Bibliografia

JESUS, A.R; SOARES, E.P. **Gráficos animados no Winplot**. RPM – Revista do Professor de Matemática, v. 56, p. 34-44, 2005.

BRAGA, Newton C. **Figuras de Lissajous**. Instituto Newton C Braga. Disponível em: <http://newtoncbraga.com.br/index.php/instrumentacao/78-artigos-diversos/689-figuras-de-lissajous.html>. Acesso em 20 de junho de 2011.





# Ficha técnica

## AUTOR

Samuel Rocha de Oliveira

## REVISORES

### Conteúdo

Adolfo Maia Jr.

### Língua Portuguesa

Denise Barbosa Cacique

## PROJETO GRÁFICO

### E ILUSTRAÇÕES TÉCNICAS

Preface Design

## ILUSTRADOR

Lucas Ogasawara



## UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

### Reitor

Fernando Ferreira Costa

### Vice-Reitor

Edgar Salvadori de Decca

### Pró-Reitor de Pós-Graduação

Euclides de Mesquita Neto

## MATEMÁTICA MULTIMÍDIA

### Coordenador Geral

Samuel Rocha de Oliveira

### Coordenador de Software

Leonardo Barichello

### Coordenador de Implementação

Matias Costa

## INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)

### Diretor

Jayme Vaz Jr.

### Vice-Diretor

Edmundo Capelas de Oliveira

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 