Matemática Multimídia

GEOMETRIA E MEDIDAS

NÚMEROS E FUNÇÕES

Guia do professor

Software

As curvas de Lissajous

Objetivos

1. Entender um exemplo de combinação de funções;
2. Introduzir e interpretar curvas parametrizadas;
3. Reconhecer períodos e frequências em funções periódicas.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

As curvas de Lissajous

Matemática Multimídia

Guia do professor

Sinopse

Neste software, o aluno utilizará equações paramétricas para compreender como funcionam as curvas de Lissajous, que possuem um forte apelo visual. Também serão estudados os contextos em que elas podem ser aplicadas.

Conteúdos

- Gráficos de funções;
- Curvas parametrizadas;
- Funções trigonométricas;
- Funções periódicas.

Objetivos

1. Entender um exemplo de combinação de funções;
2. Introduzir e interpretar curvas parametrizadas;
3. Reconhecer períodos e frequências em funções periódicas.

Duração

Uma aula dupla.

Recomendação de uso

Sugerimos que o software seja feito em duplas, para incentivar a discussão dos conceitos e aplicações.

Material relacionado

- Experimentos: Roda-gigante;
- Software: Ondas trigonométricas;
- Vídeos: Alice e algumas relações trigonométricas, Alice e a lei dos cossenos, Alice e o cosseno da diferença dos arcos.

Introdução

Podemos argumentar que o desenho de curvas paramétricas no plano pode ser apresentado ao estudante assim que ele souber identificar um ponto por suas coordenadas no plano cartesiano e entenda o conceito de função. Digamos que um ponto, A, tenha as coordenadas fornecidas pelo par ordenado (x,y). Assim, em poucas palavras, uma curva (contínua) será uma sequência de pontos nos quais cada coordenada é uma função (contínua) de um mesmo parâmetro. Isto é, uma curva $c(t)$ é representada por $(x(t),y(t))$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções (contínuas) da variável comum (chamada de “parâmetro”) t.

Um exemplo simples, útil e interessante disto ocorre quando fazemos uma viagem. Se você vai da sua casa até à de um amigo, o hodômetro de seu carro mede apenas a distância percorrida em certo tempo, que você pode registrar com seu relógio. Nesse caso, o hodômetro e seu relógio descrevem uma única função, digamos, $r(t)$. No entanto, se você tiver um GPS e olhá-lo durante toda sua viagem, você o verá medindo em tempo real sua latitude $(\mathrm{Lat}(t))$ e longitude $(\mathrm{Long}(t))$, ou seja, temos um par de funções reais $(\mathrm{Lat}(t),\mathrm{Long}(t))$ que definem sua posição na Terra em cada momento da viagem. Este caminho mostrado no GPS é um exemplo bem prático de curva parametrizada, isto é, aquela curva cujas coordenadas são funções que dependem de um parâmetro (no caso acima, o tempo).

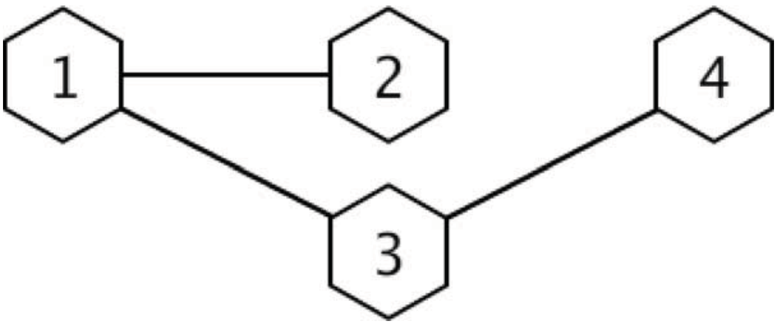
Um dos objetivos deste software é apresentar as curvas de Lissajous, que são curvas paramétricas interessantes para os alunos do ensino médio tanto pela relativa complexidade como pela utilidade e forte apelo visual.

O software

Estrutura do software

Este software consiste em quatro atividades. Na primeira delas, o aluno aprenderá como funcionam as equações paramétricas a partir da análise de alguns exemplos. Na atividade seguinte, o aluno poderá experimentar algumas curvas que ele mesmo criar.

No que concerne às curvas de Lissajous, que envolvem somas de funções trigonométricas, a principal atividade é a 3. A ATIVIDADE 4 explica pausadamente o vídeo da introdução do software. Com essa atividade final, o professor pode fazer o fechamento do conteúdo apresentado na ATIVIDADE 3.



TELA 1 *Mapa do software.*

Comentários iniciais

Tanto no software como neste Guia, trataremos de curvas no plano, cujo conceito é facilmente generalizável para curvas no espaço com três ou mais dimensões.

Definições

Considere um intervalo na reta real $I \subset \mathbb{R}$ e duas funções independentes $x(t)$ e $y(t)$ que tenham I como domínio, isto é, $t \in I$. A função $c(t)$ que associa cada valor de t a um ponto de coordenadas (x, y) no plano é chamada de “curva parametrizada”. A curva consiste no conjunto de pontos $\{(x(t), y(t)), t \in I\}$ e referimos às equações $x = x(t)$ e $y = y(t)$ como “equações paramétricas”.

Exemplos
Obviamente, existem infinitas curvas paramétricas. As relacionadas abaixo apresentam expressões relativamente simples e propriedades muito interessantes.

Reta

$(x, y) = (t, -t + 1), t \in \mathbb{R}$

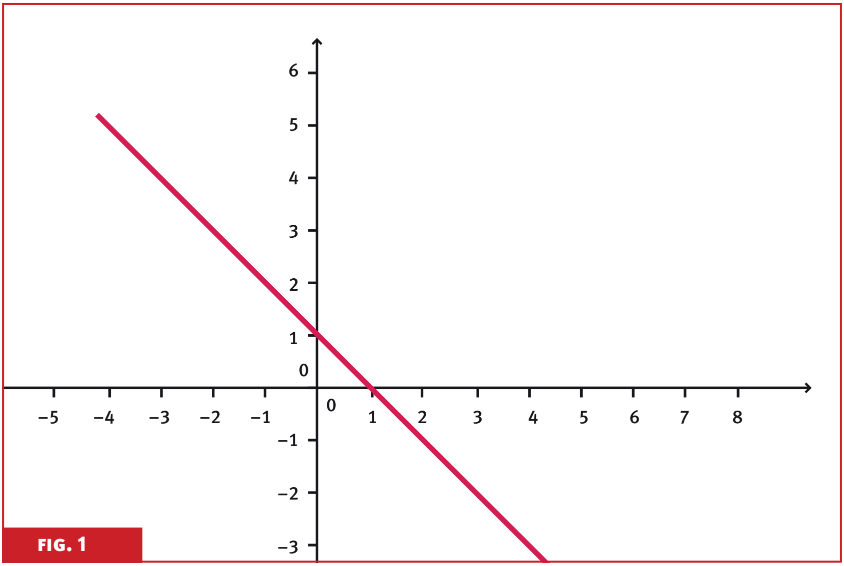


FIG. 1

Cicloide

$x(t) = t - \text{sen}(t)$ e $y(t) = 1 - \cos(t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$

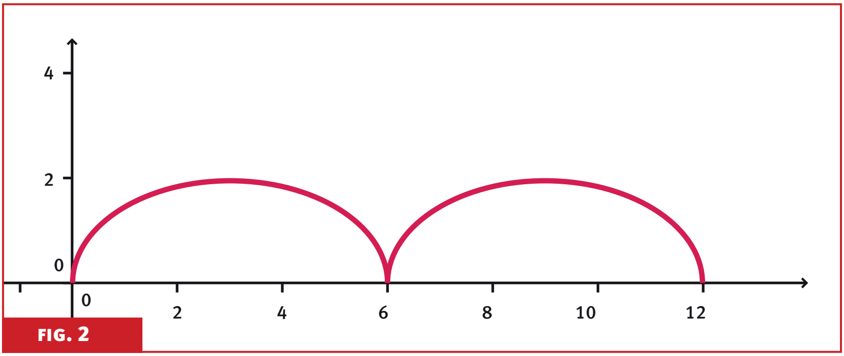


FIG. 2

Espiral de Arquimedes

$x(t) = t \cdot \cos(t)$ e $y(t) = t \cdot \mathrm{sen}(t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$

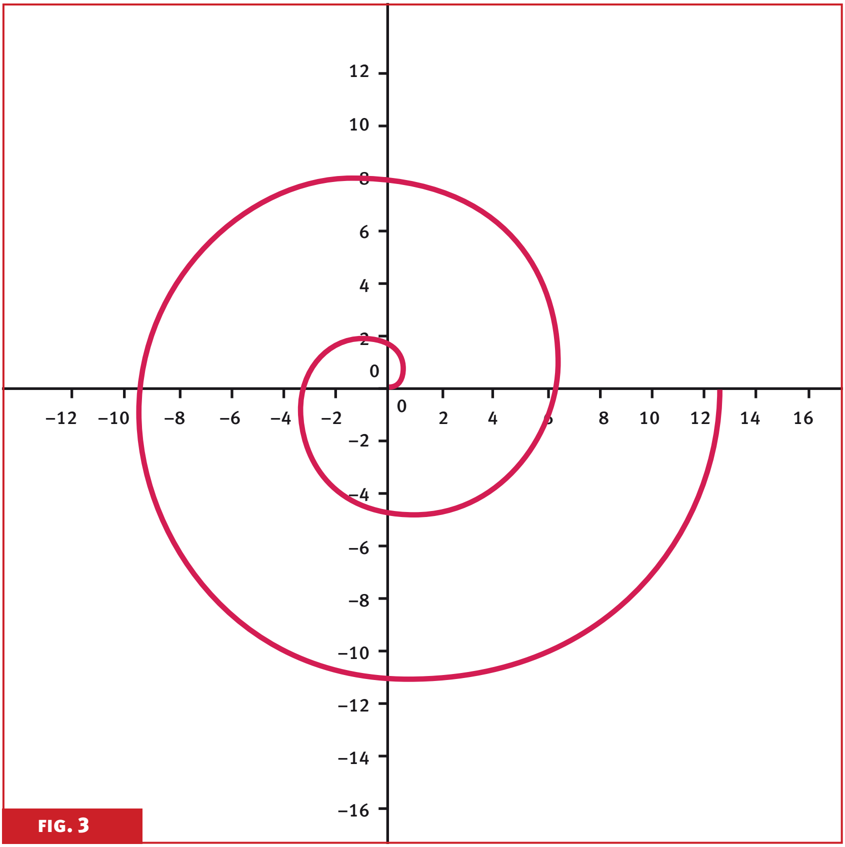


FIG. 3

Espiral Logarítmica

$x(t) = b^t \cdot \cos(t)$ e $y(t) = b^t \cdot \text{sen}(t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 8\pi$, onde b é uma base apropriada ou conveniente. Assim, b^t é uma função exponencial. No gráfico, usamos $b = 1,1$.

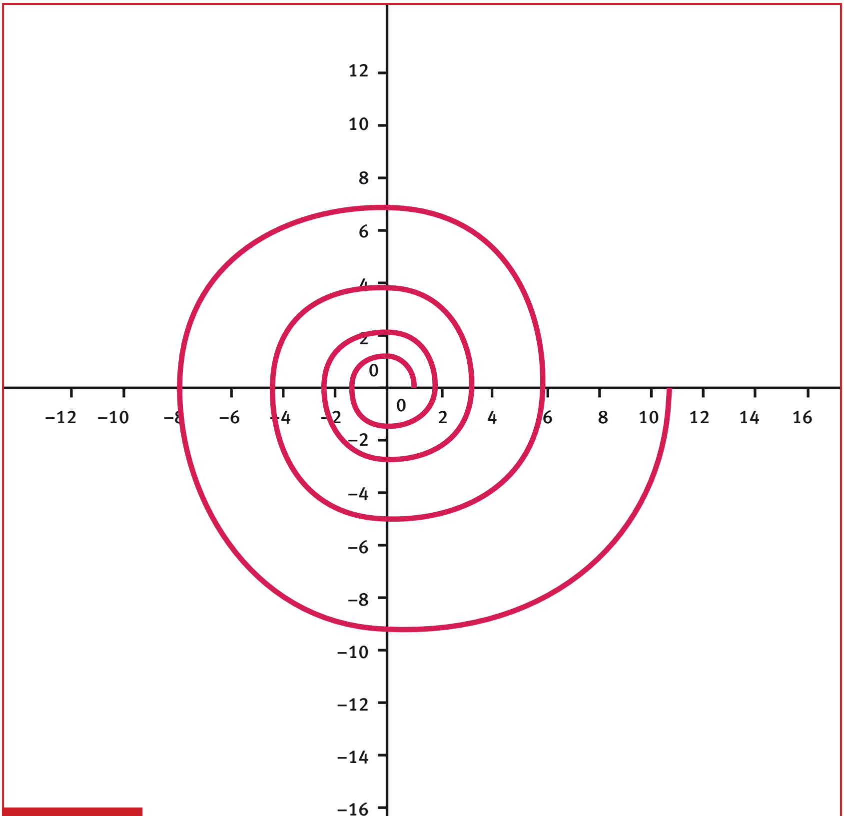
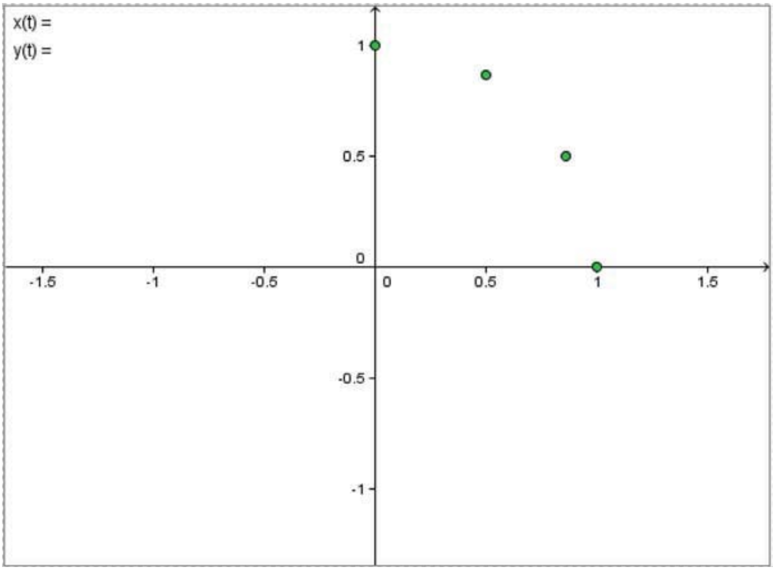


FIG. 4

1 Equações paramétricas

Essa ATIVIDADE contém quatro partes.

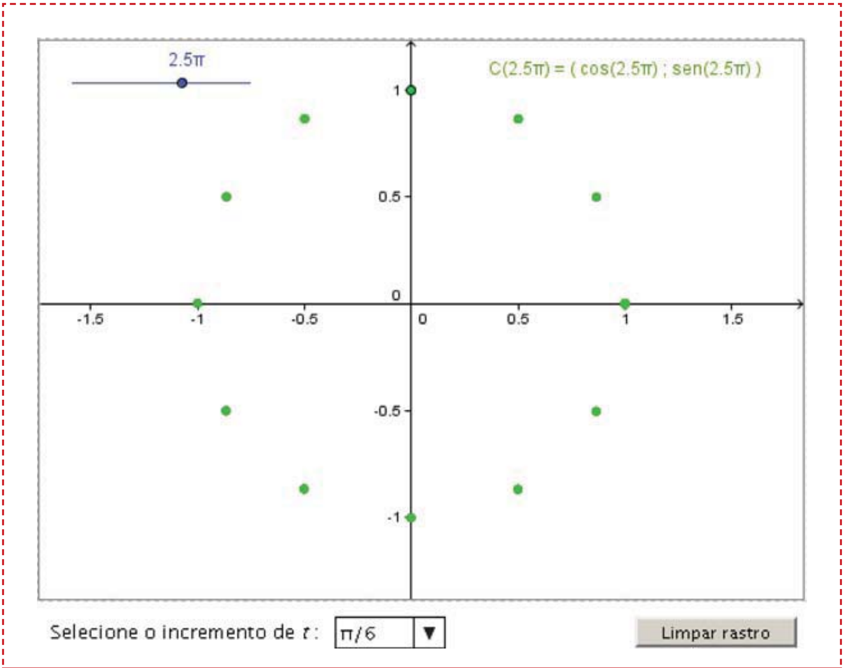
Na primeira, o aluno é convidado a colocar alguns pontos de uma curva paramétrica dada pelas equações paramétricas.



TELA 2

O objetivo dessa parte é familiarizar o aluno com a definição de curva paramétrica como sendo um conjunto de pontos cujas coordenadas são valores específicos das funções dadas.

Na segunda parte, o aluno pode colocar mais pontos na curva com a ajuda da ferramenta.



TELA 3

Nas PARTES 3 e 4, o aluno desenhará, com a ajuda da ferramenta, um círculo com centro em pontos aleatórios e uma elipse com excentricidade variável.

ATIVIDADE

2 Crie suas próprias curvas

Na ATIVIDADE 2, o aluno pode visualizar a curva gerada por algumas equações paramétricas que ele próprio escolher. Algumas curvas são sugeridas na única parte dessa ATIVIDADE, e o professor pode complementar a aula com os exemplos dados nos COMENTÁRIOS INICIAIS deste GUIA.

Essa ATIVIDADE é opcional e cabe ao professor decidir se deseja ou não aprofundar ou diversificar o conteúdo proposto no software através dela.

ATIVIDADE

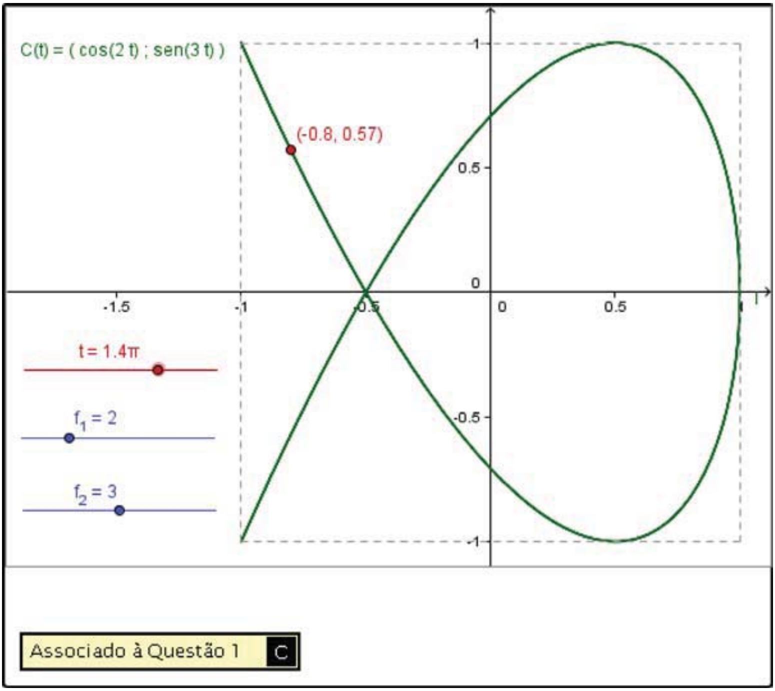
3 As curvas de Lissajous

São chamadas de "curvas de Lissajous" as curvas paramétricas dadas por equações do tipo

$$l(t) = (a_1 \cdot \cos(f_1 \cdot t + b_1), a_2 \cdot \mathrm{sen}(f_2 \cdot t + b_2))$$

onde a_1, f_1, b_1, a_2, f_2 e b_2 são constantes reais que afetam a forma geométrica da curva, e são chamados de "parâmetros da curva".

Nessa atividade, o aluno experimentará o efeito de variar cada constante, a combinação de troca de sinais dos parâmetros e outras modificações quaisquer, a fim de perceber seu efeito sobre a forma da curva resultante.



TELA 4

Ao final dessa atividade, o aluno deve perceber o papel de cada par de constantes a_1 e a_2, f_1 e f_2, b_1 e b_2 e, com isso, será capaz de entender a aplicação em Física das curvas de Lissajous que foi mostrada no vídeo da Introdução e será devidamente discutida na Atividade 4.

4 O vídeo e uma aplicação

ATIVIDADE

Essa atividade encerra o software explicando o vídeo mostrado na sua Introdução.

Esse vídeo foi gerado a partir de um osciloscópio, instrumento usado para determinar a frequência de sinais periódicos. Um sinal pode vir de um fonte de som, luz, corrente elétrica etc. Esse tipo de determinação é muito comum em vários ramos da Física e o método que mostramos depende de uma boa interpretação das curvas mostradas no monitor do instrumento, que são justamente curvas de Lissajous.

Ao assistir ao vídeo, o software mostrará alguns textos explicativos que ajudam na interpretação do fenômeno e mostram como os conteúdo aprendidos na Atividade 3 podem ser usados para descobrir a frequência de um sinal de frequência desconhecida.

Fechamento

Sugerimos que o fechamento seja conduzido a partir das questões para o caderno sugeridas no software.

Questão para o caderno

1A Com base no que você aprendeu, qual é a relação entre os valores f_1 e f_2 e a forma da curva resultante?

A forma da curva paramétrica de Lissajous depende das frequências f_1 e f_2 na razão f_2/f_1, e não dos seus valores independentes. Se usarmos f_1 e f_2 com algum múltiplo natural em comum, a curva pode se repetir em relação à curva na qual f_1 e f_2 são coprimos.

Observem que, para todos os casos considerados, f_2/f_1 é um número racional, e, nesses casos, a curva de Lissajous vai ser periódica, isto é, vai se repetir. Em contraste, se f_2/f_1 fosse irracional, a curva de Lissajous jamais se repetiria.

Questão para o caderno

Como você calcularia esse valor para uma curva genérica cuja razão entre os parâmetros f_1 e f_2 fosse igual a $3/2$?

Todas as curvas nas quais $f_1 = 3k/2$ e $f_2 = 3k/2$ teriam a mesma forma para qualquer valor real k.

Atividade lúdica ligada às atividades 2 e 3

Com base nos exemplos acima, o professor pode propor um jogo de adivinhação.

Exemplo 1

O professor diz que vai trabalhar nos gráficos de retas $y = ax + b$ (isto é, fixa a classe de curvas a serem adivinhadas). Pede para os alunos desenharem no caderno as figuras correspondentes aos parâmetros que ele coloca na lousa. Depois de algum tempo, mostra o gráfico na tela do computador.

Outro exemplo seria adivinhar a forma de algumas figuras de Lissajous, de parábolas, polinômios, etc. O professor pode enfatizar que a representação usual do gráfico de uma função $\{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ é um caso particular de equações paramétricas.

Exemplo 2

O jogo inverso seria o seguinte: o professor daria uma figura dentro de uma classe, digamos, novamente, Lissajous. A ideia, então, é o aluno, ao olhar a figura, tentar adivinhar alguma informação sobre os parâmetros, como, por exemplo, sinal, provável intervalo onde está localizado o valor do parâmetro, etc..

Para essa atividade, a ferramenta disponível na ATIVIDADE 2 pode ser bastante útil.

Bibliografia

JESUS, A.R; SOARES, E.P. **Gráficos animados no Winplot**. RPM – Revista do Professor de Matemática, v. 56, p. 34-44, 2005.

BRAGA, Newton C. **Figuras de Lissajous**. Instituto Newton C Braga. Disponível em: *http://newtoncbraga.com.br/index.php/instrumentacao/78-artigos-diversos/689-figuras-de-lissajous.html*. Acesso em 20 de junho de 2011.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Samuel Rocha de Oliveira

Revisores
Conteúdo
Adolfo Maia Jr.
Língua Portuguesa
Denise Barbosa Cacique

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL