Matemática Multimídia

NÚMEROS E FUNÇÕES

GUIA DO PROFESSOR

Software

Como comprar sua moto

Objetivos da unidade

1. Aplicar o conceito de juros compostos;
2. Introduzir o conceito de empréstimo sob juros;
3. Mostrar aplicações de progressão geométrica em matemática financeira.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Como comprar sua moto

Guia do professor

Sinopse
Neste software, o estudante simulará a compra de uma moto. Para isso, primeiramente será preciso guardar dinheiro na poupança e, depois, esse valor será dado como entrada na compra da moto. O restante do preço será financiado. Para facilitar os cálculos dessa aquisição, serão necessários alguns conceitos de Progressão Geométrica.

Conteúdos
- Matemática financeira;
- Juros;
- Progressão geométrica.

Objetivos
1. Aplicar o conceito de juros compostos;
2. Introduzir o conceito de empréstimo sob juros;
3. Mostrar aplicações de progressão geométrica em matemática financeira.

Duração
Uma aula dupla.

Recomendação de uso
Sugerimos que a atividade seja feita em duplas e que o professor mostre alguma propaganda de venda financiada de carro ou moto para motivar o início da atividade.

Material relacionado
- Vídeo: Huguinho e Zezinho, E agora José?, O sonho dourado, Juros divididos – dívida crescente.

Matemática Multimídia

Introdução

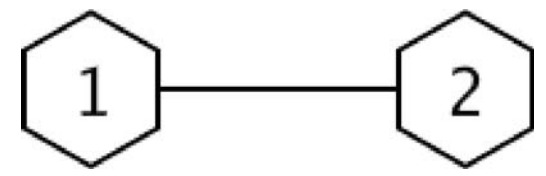
Alguém precisa de dinheiro hoje e promete pagá-lo daqui a algum tempo. Outra pessoa tem dinheiro hoje e pode emprestá-lo, contanto que receba alguma remuneração, chamada de “juro”. O principal objetivo da matemática financeira é mostrar o custo ou o ganho envolvido nesse tipo de transação. Em circunstâncias assim, ambos os lados do acordo devem avaliar as vantagens e desvantagens de se emprestar ou se tomar emprestado.

Um dos objetivos do software é introduzir o conceito de juro incidente ao longo de uma série de pagamentos. Esse é um conceito mais elaborado do que o acúmulo de um montante por incidência de juros compostos.

O software

Estrutura do software

O software é composto de duas atividades. Na primeira, o interessado deposita regularmente um determinado valor em uma instituição financeira, que, por sua vez, paga-lhe os dividendos sobre o montante acumulado ao longo de algum período. Na outra atividade, o jovem vai abater sistematicamente uma dívida assumida para com sua avó, pagando-lhe os dividendos que ela teria recebido caso tivesse deixado o dinheiro rendendo no banco ao invés de tê-lo emprestado ao neto.



TELA 1 *Mapa do software.*

Comentários iniciais

Antes de começar a discutir as atividades propostas no software, vejamos alguns conceitos básicos que serão úteis à diante.

Definição

Taxa de Juro é a razão entre o Juro e o Capital Inicial.

Por exemplo: certo alguém (devedor) pede a outra pessoa (ao credor) R$ 500 sob a promessa de que vai pagar-lhe R$ 600 ao fim de três meses. Este é um acordo. O juro de R$ 100 foi aceito pelo devedor, que terá de repor os R$ 500 e mais R$ 100; e pelo credor, que vai ficar sem os R$ 500 durante o prazo estabelecido. Nesse exemplo, a taxa de juro foi de $100/500 = 20\%$.

Mas a vida não é simples. Por que seriam os empréstimos? Os chamados “juros compostos” são a incidência da taxa de juros sobre algum montante devido, mesmo que este montante já acumule juros de períodos anteriores. Numa transação financeira, tudo isto deve ser acordado previamente, isto é, antes de firmarem o empréstimo, o devedor e o credor devem estabelecer e aceitar as regras por meio das quais o primeiro irá remunerar o segundo com determinada taxa e forma de incidência de juros.

Consideremos o empréstimo de um capital inicial "P", sob a promessa de juros à taxa de "i" ao mês, e renovado automaticamente a cada mês. Enquanto o devedor não pagar, o montante "M" vai crescer na forma de uma P. G.. Este é um acordo subentendido!

$M = P \times (1+i)^n$ em que "n" é o número de meses da renovação automática sem abatimentos durante o período.

Em quantos meses uma dívida acumulada sob taxa de juros de 10% ao ano dobra seu valor? Para responder essa pergunta, calculamos

$$n = \frac{\log(2)}{\log(1,1)} \approx 7,27$$

isto é, no vencimento do sétimo mês, a dívida quase dobra, ou seja $(1,1)^7 \approx 1,95 \Rightarrow 95\%$ de juros. No vencimento do oitavo mês, a dívida passa do dobro: $(1,1)^8 \approx 2,14 \Rightarrow 114\%$ de juros.

As contas são fáceis. O difícil é tomar decisões.

O que é melhor, R$ 200 agora ou ao final do mês? Na maioria das situações financeiras, o dinheiro agora é melhor, pois você pode ter uma oportunidade ou necessidade antes do final do mês. Dessa forma, a taxa de juros pode medir riscos e oportunidades.

Para comparar valores de maneira objetiva e racional, deve-se fazê-lo em um mesmo momento. Dizemos que o dinheiro não tem o mesmo valor durante o tempo por causa das possibilidades de investir (e fazer ganhos) ou evitar prejuízos (e abater dívidas).

Por exemplo: certo empresário tem dinheiro aplicado em um banco com rendimento de 4% ao mês. Ele pretende comprar uma máquina para a sua indústria, ao custo total de R$ 300. Então o vendedor do equipamento lhe oferece três possibilidades:

1. Um desconto de 5% se a máquina for paga em um mês.
2. Pagamento de 3 parcelas de R$ 100 começando imediatamente, isto é, uma entrada mais dois pagamentos.
3. Pagamento de R$ 300 daqui a dois meses, que é o prazo de entrega.

Tudo garantido (idealizado). Qual é a melhor opção? É importante organizar as informações em uma tabela, conforme a seguir:

Tempo em meses	**3 parcelas iguais**	**Desconto de 5%**	**Pagamento na entrada**	**Aplicação**
0	R$ 100,00			R$ 300,00
1	R$ 100,00	R$ 285,00		R$ 312,00
2	R$ 100,00		R$ 300,00	R$ 324,48

TABELA 1

Sem dúvida que essa tabela auxilia a tomada de decisão. Mas, além dela, precisaremos encontrar relações que expressem os valores envolvidos em função do tempo.

Para isso, vamos considerar apenas que o dinheiro pode ser valorizado a 4% ao mês se se mantiver a aplicação. Desta forma, daqui a um mês, os R$ 100 seriam

$$\frac{\text{R\$}\,100}{(1+i)} = \text{R\$}\,96,15$$

Em outra palavras, se aplicarmos os R$ 96,15 hoje a 4% de juros, então teremos (com arredondamento) R$ 100 daqui a um mês.

Definição

O valor atual (tempo zero) “A” de uma parcela “P” após “n” períodos de tempo, assumindo um taxa de juros “i”, é:

$$A = \frac{P}{(1+i)^n}$$

Voltando ao exemplo: então, o valor equivalente atual dos pagamentos em parcelas seria:

$$A_1 = \frac{100}{(1,04)^0} + \frac{100}{(1,04)^1} + \frac{100}{(1,04)^2} = 288,61$$

A segunda opção em valores atuais seria:

$$A_2 = \frac{285}{(1,04)} = 274,04$$

E a terceira opção em valores atuais seria:

$$A_3 = \frac{300}{(1,04)^2} = 277,37$$

Com estes valores atuais, o empresário pode fazer a escolha mais racional, a saber, a segunda opção.

Observe que nem sempre o empresário tem o dinheiro necessário disponível. Nesse caso, é preciso avaliar se o ganho em se adquirir a máquina antecipadamente compensa o juro pago. Ou seria melhor acumular o dinheiro para poder comprar a máquina?

Séries temporais uniformes

Ambas as atividades do software têm uma sequência de pagamentos feitos para acumular um valor ou para abater (diminuir) uma dívida. Vamos apresentar o conceito de Fluxo simples de caixa, conforme ilustra a figura a seguir:

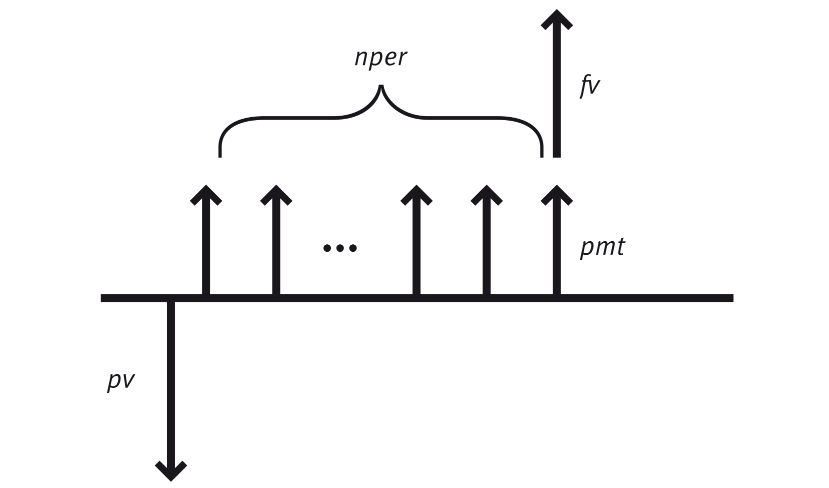


FIG. 1 *Representação de um fluxo de caixa*

Há “$nper$” unidades de tempo (mês, bimestre, ano etc.) em que um pagamento “pmt” de mesmo valor é feito (ou depositado). O valor presente “pv” é a soma de todos os valores atualizados considerando alguma taxa de juros. O valor futuro “fv” é a soma de todos os valores acumulando os juros. Isto é,

$$pv = \frac{pmt}{(1+i)} + \frac{pmt}{(1+i)^2} + \frac{pmt}{(1+i)^3} + \dots \frac{pmt}{(1+i)^{nper}}$$

$$fv = pmt + pmt(1+i) + pmt(1+i)^2 + \dots + pmt(1+i)^{(nper-1)}$$

Ambas as expressões são somas de P. G. que podem ser simplificadas para

$$pv = \frac{pmt}{i}\left[1-(1+i)^{-nper}\right]$$

$$fv = \frac{pmt}{i}\left[(1+i)^{nper}-1\right]$$

Desta forma, podemos computar o valor do dinheiro em um determinado momento, seja no presente (se for uma compra parcelada), seja no futuro (se for um investimento regular).

Para fazer uma compra parcelada, supondo-se haver um desconto tal que o valor da compra à vista seja menor do que “pv”, então vale a pena pagar à vista, obtendo o desconto. Caso contrário, não!

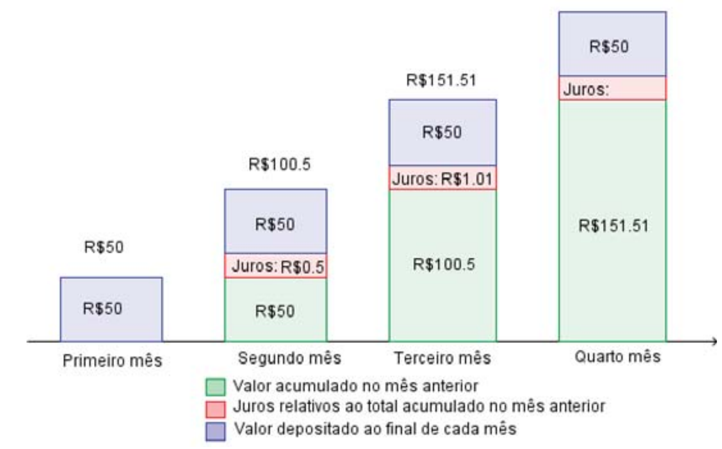
Analisemos agora outro exemplo: certa rede de lojas oferece uma geladeira por R$ 1400 em 10 prestações de R$ 140. O comprador insiste em pagar à vista se receber algum desconto. O gerente diz que não há juros, mas ele dá um desconto de 5% se for pago à vista. Considerando uma taxa de juros de investimentos ou riscos de 1% ao mês, perguntamos. O que é melhor?

O valor presente “pv” das prestações é R$ 1325,98. Se for paga à vista, com o desconto de 5%, a geladeira fica por R$ 1330,00. Assim, é melhor pagá-la em prestações!

ATIVIDADE

1 Guardando no banco

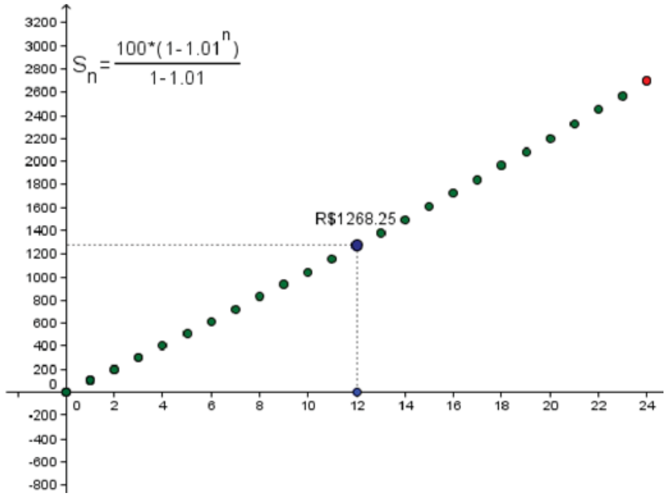
Nessa atividade, o aluno aprenderá o conceito de investimento, entendido como o acúmulo de capital suficiente para se concretizar alguma aquisição, no caso, a compra de uma moto. A cada novo mês, calcula-se o valor depositado e o valor do juro sobre o valor acumulado até o mês anterior.



TELA 2

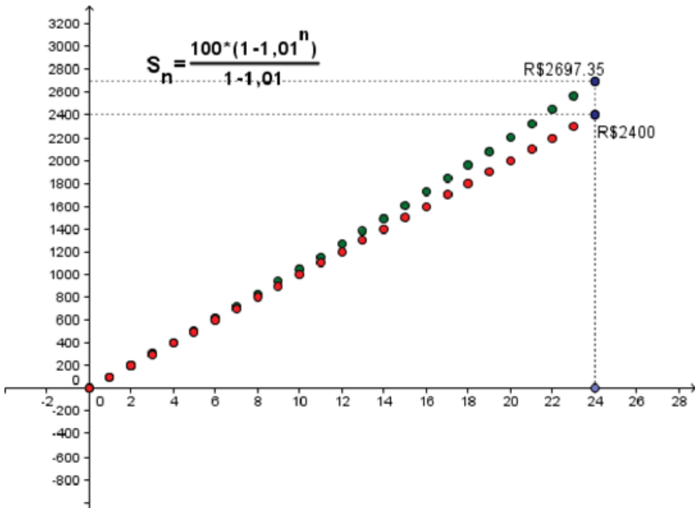
Com isso, o aluno vai entender o conceito de valor futuro, isto é, o valor que será acumulado ao longo do fluxo de caixa.

Na PARTE 4, o gráfico da soma “fv”, conforme demonstrado acima, é apresentado para que o aluno entenda a ideia de valor futuro acumulado.



TELA 3

Na PARTE 5, o aluno pode ver a diferença no acumulado com a incidência de juros compostos e o que seria acumulado sem juro algum, como se fosse apenas guardar em um cofre em casa.



TELA 4

2 O financiamento

Essa atividade apresenta um contexto fictício de que a avó do interessado esteja disposta a pagar o que falta para a compra da moto à vista e o neto se compromete a devolver em parcelas iguais até que a dívida seja quitada. No entanto, para ser justo, ele se compromete a pagar o juro que a avó receberia do banco a cada mês sobre o dinheiro comprometido.

TELA 5

Com essa parte o aluno deve perceber que a dívida diminui gradativamente, mesmo com a incidência de juro sobre o saldo devedor do mês anterior. Isto vai acontecer até o momento que a dívida é completamente quitada.

Fechamento

Sugerimos começar o fechamento dessa atividade aproveitando as questões para o caderno propostas no software:

Questão para o caderno

Procure na sala algum outro grupo que tenha escolhido guardar dinheiro pelo mesmo período que você, mas em uma quantidade diferente. Feito isso, responda:

A. A diferença entre o acumulado em casa e no banco foi a mesma?
B. A razão entre o acumulado em casa e no banco foi a mesma?

O acumulado em casa é simplesmente o número de prestações vezes o valor de pagamento. Enquanto o valor acumulado no banco é dado pela expressão

$$fv = \frac{pmt}{i}\left[(1+i)^{nper}-1\right]$$

Assim a diferença é

$$\frac{pmt}{i}\left[(1+i)^{nper}-1\right] - nper \times pmt = pmt \times \left[\frac{(1+i)^{nper}-1-i\times nper}{i}\right]$$

Fica claro então que a diferença vai depender em proporção direta do valor das parcelas depositadas a cada mês. Assim, ao comparar com outros colegas que tenham depositados valores diferentes, mas com a mesma taxa de juros e pelo mesmo número de parcelas, vai obter valores diferentes.

Substituindo, por exemplo, $nper = 24$, $i = 0{,}01$, e $pmt = \text{R\$}\,100$, obtemos a diferença de R$ 297,35.

No entanto, a razão entre o guardado em casa e o depositado no banco não vai depender do valor depositado em cada mês, isto é,

$$\frac{nper \times pmt}{\frac{pmt}{i}\left[(1+i)^{nper}-1\right]} = \frac{nper \times i}{(1+i)^{nper}-1}$$

não depende do valor das parcelas.

Bibliografia

LIMA, E; CARVALHO, PCP; WAGNER, E; MORGADO, AC. **A Matemática do Ensino Médio**, vol. 2, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2000

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Samuel Rocha de Oliveira

Revisores
Língua Portuguesa
Denis Barbosa Cacique

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (imecc – unicamp)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL