Matemática Multimídia

NÚMEROS E FUNÇÕES

Guia do professor

Software

Movimentos complexos

Objetivos da unidade

1. Estudar o efeito da translação, rotação, dilatação e contração no plano complexo;
2. Aplicar os conceitos e propriedades de número complexo;
3. Utilizar as propriedades geométricas das operações de números complexos.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Movimentos complexos

Guia do professor

Sinopse

Neste software, utilizando o conceito e propriedades de números complexos, são estudadas as transformações de translação, rotação, dilatação e contração no plano complexo. O estudo é realizado por meio da análise do efeito dessas transformações em triângulos e, em especial, são utilizadas as interpretações geométricas das operações de números complexos.

Conteúdos

- Transformações: translação, rotação, dilatação e contração;
- Números complexos: operações e propriedades;

Objetivos

1. Estudar o efeito da translação, rotação, dilatação e contração no plano complexo;
2. Aplicar os conceitos e propriedades de número complexo;
3. Utilizar as propriedades geométricas das operações de números complexos.

Duração

Uma aula dupla.

Recomendação de uso

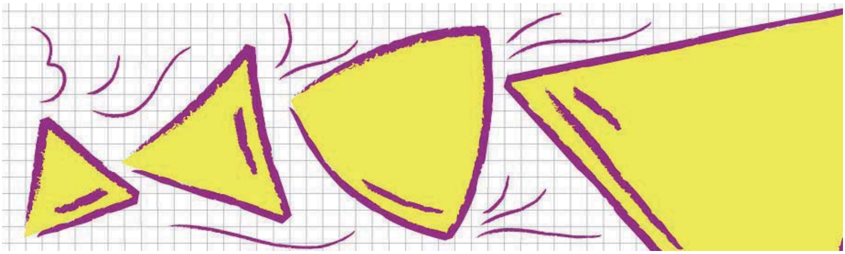
Sugerimos que as atividades sejam realizadas em duplas e que os alunos levem lápis e papel para a sala de informática.

Material relacionado

- Experimento: Transformações de Möbius.
- Vídeo: Um sonho complexo.

Matemática Multimídia

Introdução



As transformações geométricas constituem ferramentas importantes em geometria facilitando a resolução de vários problemas. O objetivo desse software é o estudo das transformações geométricas de translação, rotação, dilatação e contração utilizando o conceito, operações, propriedades e interpretação geométrica das operações de números complexos. Sobretudo, são exploradas as relações entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano. Sendo assim, a proposta constitui uma motivação para o estudo dos números complexos adequada para o desenvolvimento no Ensino Médio.

O software

Estrutura do software

O software Movimentos Complexos é composto por uma atividade e um desafio, sendo que este último pode gerar novos desafios aleatoriamente enquanto o usuário desejar.

TELA 1 *Mapa do software.*

A Atividade 1 cobre todo conteúdo, enquanto que o desafio explora o conteúdo apresentado anteriormente com um grau de dificuldade maior. Fica a cargo do professor decidir como usá-lo com seus estudantes.

ATIVIDADE

1 Os movimentos

O objetivo desta atividade é o estudo da translação, rotação, dilatação e contração no plano, utilizando o conceito e operações de números complexos, propriedades e características geométricas. Desse modo, é conveniente que, antes do início do software, seja feita com os alunos uma recordação desses tópicos (ver a seção Fechamento deste guia).

Esta atividade é dividida em 6 partes.

Parte 1: Apresentação

Na parte 1 é apresentada uma ilustração com dois triângulos de vértices os números complexos A, B, C e A', B', C', respectivamente. O triângulo ABC é fixo e o triângulo $A'B'C'$ é obtido a partir do triângulo ABC e de dois números complexos Z_1 e Z_2, da forma descrita a seguir.

O vértice A' é obtido multiplicando-se A por Z_1 e ao resultado o número complexo Z_2 é somado. Ou seja, $A' = A \cdot Z_1 + Z_2$. No software, este procedimento é denotado por $A' = A \cdot Z_1 + Z_2$. De modo análogo são obtidos os vértices B' e C'.

O aluno pode variar os números complexos Z_1 e Z_2, e o software automaticamente apresenta na tela o triângulo $A'B'C'$. Sugerimos que os alunos sejam orientados a calcular os números complexos A', B', C' utilizando o procedimento descrito anteriormente e comparar com os valores apresentados pela ferramenta. Inclusive é aconselhável que estes números sejam analisados via a interpretação geométrica das operações dos números complexos. Enfim, o objetivo desta parte é a familiarização com a ferramenta.

Parte 2: Rotação

Na PARTE 2 o número complexo Z_2 é igual a $0+0i$ e Z_1 pode variar em uma circunferência de centro na origem e raio igual a 1. Assim, o número complexo Z_1 tem módulo 1 e seu argumento varia. Sendo θ_1 o argumento de Z_1 e Z um número complexo qualquer de módulo r e argumento θ, o produto $Z \cdot Z_1$ tem módulo r e argumento $\theta + \theta_1$. Assim, o número complexo $Z \cdot Z_1$ é a rotação de ângulo θ_1 do número complexo Z. Em particular, isto ocorre com os pontos do triângulo ABC. Portanto, o triângulo $A'B'C'$ é a rotação de ângulo θ_1 do triângulo ABC.

Ao variar Z_1 na circunferência podemos observar o triângulo $A'B'C'$ girando em volta da origem do plano complexo.

A rotação preserva distâncias

Para justificar que a rotação preserva distâncias, vamos utilizar a forma trigonométrica de números complexos e a identificação de um número complexo com um par ordenado.

Sejam os números complexos

$$A = r_a(\cos\theta_a + i \operatorname{sen}\theta_a) \text{ e } B = r_b(\cos\theta_b + i \operatorname{sen}\theta_b).$$

Para um dado número complexo Z_1 na circunferência de centro na origem e raio igual a 1, sendo θ seu argumento, temos

$$Z_1 = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.$$

Assim, como $A' = AZ_1$ e $B' = BZ_1$, segue que

$$A' = r_a[\cos(\theta_a + \theta) + i \operatorname{sen}(\theta_a + \theta)] \text{ e } B' = r_b[\cos(\theta_b + \theta) + i \operatorname{sen}(\theta_b + \theta)],$$

que são identificados com os pares ordenados

$$(r_a \cos(\theta_a + \theta), r_a \operatorname{sen}(\theta_a + \theta)) \text{ e } (r_b \cos(\theta_b + \theta), r_b \operatorname{sen}(\theta_b + \theta)),$$

respectivamente. Assim, usando a fórmula da distância entre dois pontos no plano, a distância entre A' e B', denotada por $d(A'B')$ é

$$d(A'B') =$$

$$= \sqrt{[r_a \cos(\theta_a + \theta) - r_b \cos(\theta_b + \theta)]^2 + [r_a \operatorname{sen}(\theta_a + \theta) - r_b \operatorname{sen}(\theta_b + \theta)]^2}$$

Usando as identidades de cosseno e seno da soma de ângulos chegamos a

$$d(A'B') = \sqrt{[r_a \cos\theta_a - r_b \cos\theta_b]^2 + [r_a \operatorname{sen}\theta_a - r_b \operatorname{sen}\theta_b]^2}.$$

Assim, $d(A'B') = d(AB)$, ou seja, a rotação preserva distâncias.

Definição

Uma função do plano no plano que preserva distâncias é chamada isometria. Assim, as rotações são isometrias.

Algumas propriedades da rotação

Utilizando o fato das rotações preservarem distâncias, podem ser provados os seguintes resultados: as rotações transformam retas em retas, segmentos em segmentos congruentes, retas perpendiculares em retas perpendiculares, retas paralelas em retas paralelas, ângulos em ângulos congruentes. (ver **Isometrias**. E. L. Lima). Sugerimos que, utilizando o software gratuito GeoGebra (www.geogebra.org), sejam elaboradas algumas atividades simples para que os alunos constatem visualmente esses resultados. Neste software é muito fácil utilizar o recurso rotação.

A rotação em torno da origem de uma reta r que passa pela origem é uma reta r' que também passa pela origem. Além disso, se A é um ponto em r, distinto da origem O, a medida do ângulo AOA' é igual à medida do ângulo da rotação θ_1, onde θ_1 é o argumento do número complexo Z_1.

Se a reta r não passa pela origem, a rotação de ângulo θ_1 em torno da origem, para θ_1 distinto de $180°$ e de $360°$, é uma reta r' que não passa pela origem e as duas retas, r e r', são concorrentes em um ponto X distinto da origem. De fato, considerando a reta s paralela a r passando pela origem e lembrando que a rotação transforma retas paralelas em retas paralelas, as retas s' e r' são paralelas, onde s' e r' são as rotações de s e r, respectivamente. Como s' não é paralela a s, pois também passa pela origem e é distinta de s (θ_1 diferente de $180°$ e de $360°$), a reta r' também não é paralela a r. Portanto, r' não passam pela origem e as retas r e r' são concorrentes em um ponto X distinto da origem.

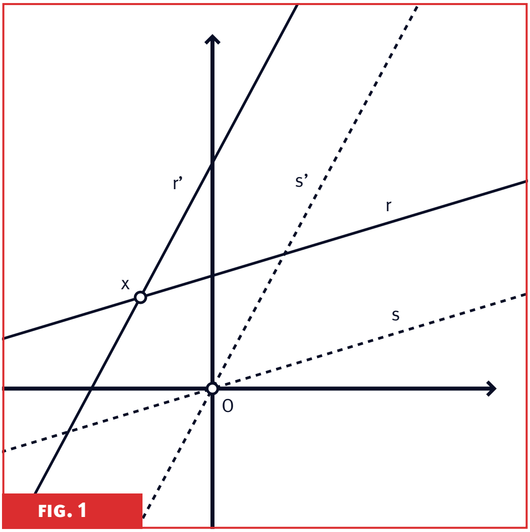


FIG. 1

A seguir vamos analisar os ângulos determinados pelas retas r e r' quando r não passa pela origem.

Em X as retas r e r' determinam dois pares de ângulos congruentes opostos pelo vértice, assim como, em O ocorre o mesmo com as retas s e s'. Podemos observar as relações entre esses ângulos na ilustração seguinte.

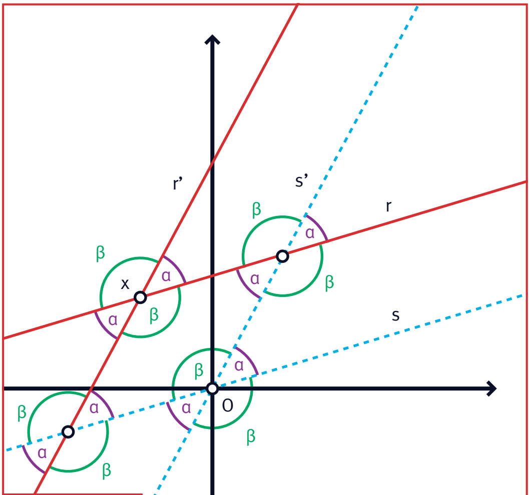


FIG. 2

O próximo objetivo é ver a relação desses ângulos e o ângulo de rotação θ_1. Essa relação depende do valor de θ_1, ou seja, do argumento do número complexo Z_1.

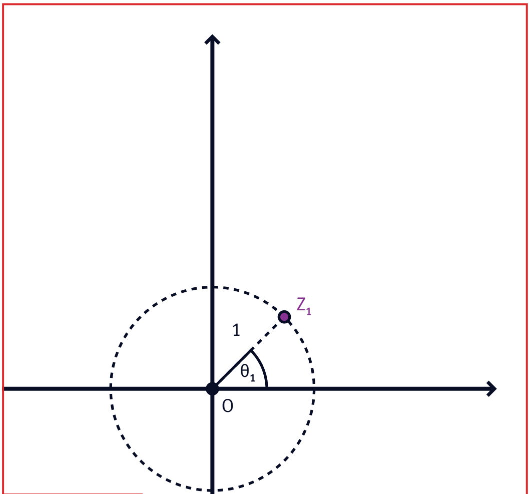


FIG. 3

Podemos resumir em quatro situações ilustradas a seguir. Em cada uma delas também está representado o número complexo Z_1.

1. $0 < \theta_1 \leq 90$
   O ângulo de vértice a origem destacado na ilustração determinado pelas retas s e s' é θ_1 e, como r e s são paralelas, assim como, as retas r' e s', o ângulo de vértice X também destacado é θ_1. Enfim, o ângulo de vértice X destacado na ilustração tem medida igual ao argumento de Z_1.

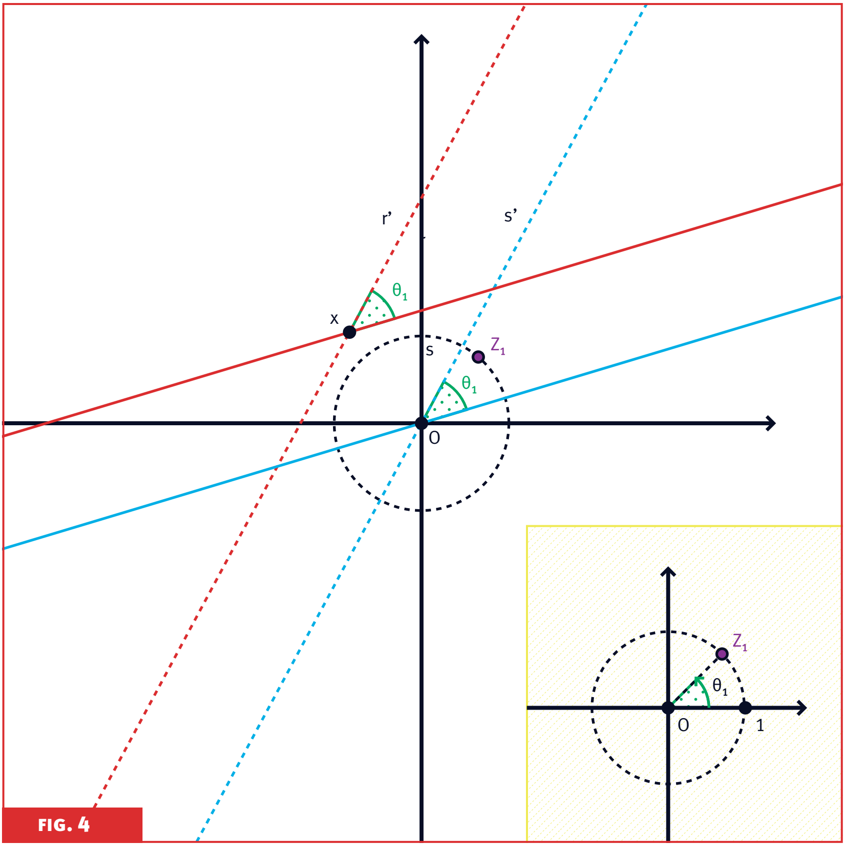


FIG. 4

2. $90 < \theta_1 < 180$

De modo análogo, os ângulos destacados na ilustração têm medidas iguais ao argumento de Z_1.

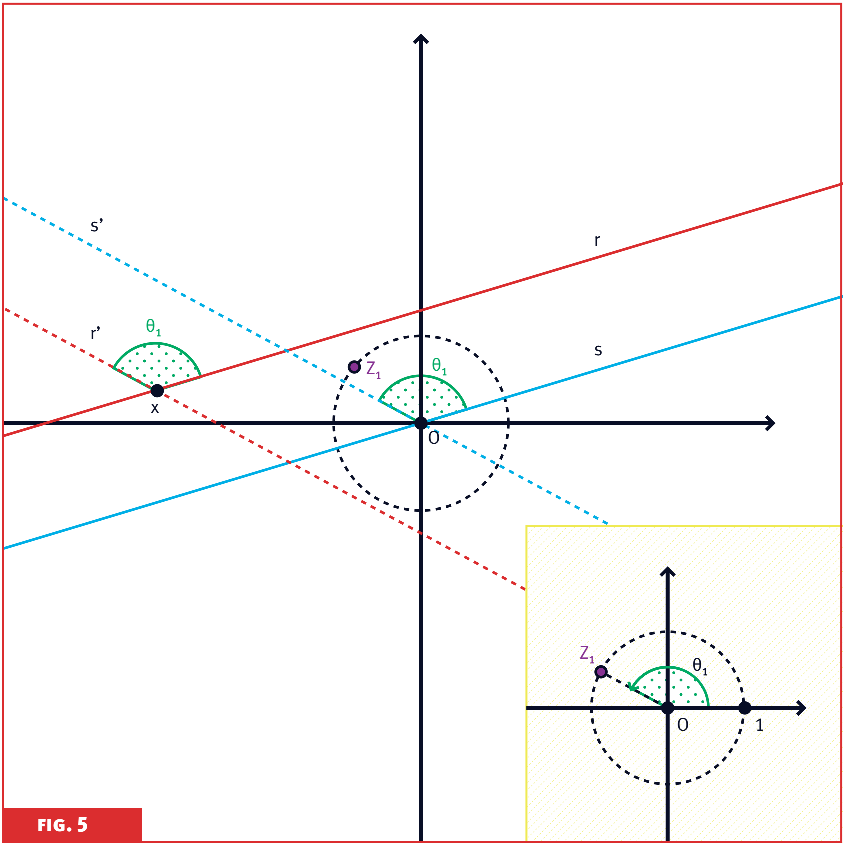


FIG. 5

3. Idem para $180 < \theta_1 \leq 270$. Os ângulos marcados têm medidas iguais ao argumento de Z_1.

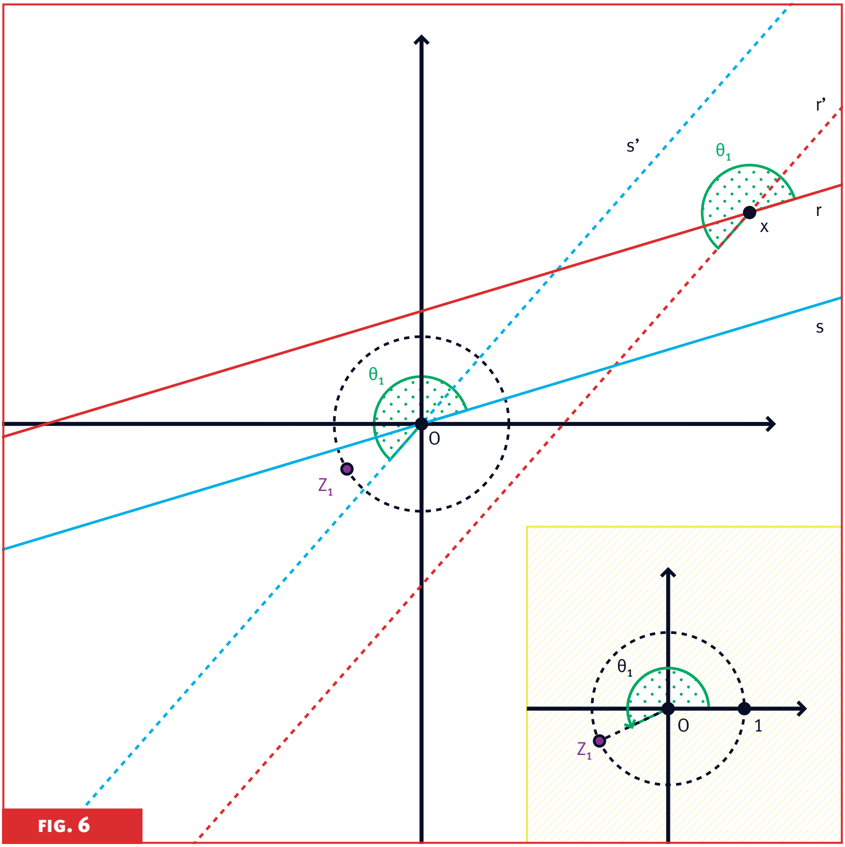


FIG. 6

4. Idem para $180 < \theta_1 \leq 270$. Os ângulos marcados têm medidas iguais ao argumento de Z_1.

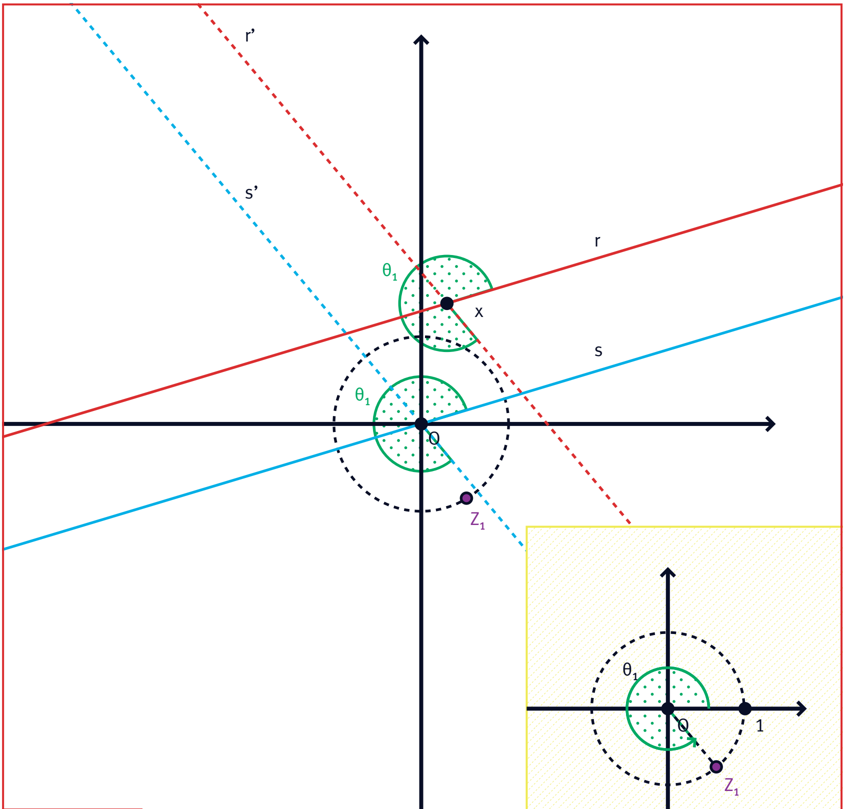


FIG. 7

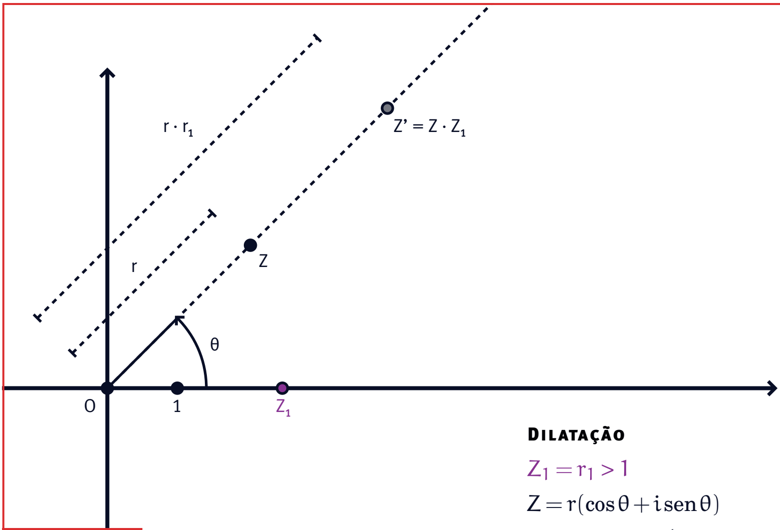
Parte 3: Dilatação

O número complexo $a + 0i$, ou seja, o número complexo cuja parte imaginária é igual a zero, é identificado com o número real a. Esta identificação permite considerar os números reais como um subconjunto dos números complexos.

Na PARTE 3 o número Z_1 pode variar entre os números reais positivos e diferente de 1. Ou seja, a parte imaginária é igual a zero e a parte real, r_1, é positiva e diferente de 1. O número complexo Z_2 é fixo e igual a $0 + 0i$.

Sendo $Z_1 = r_1$, $Z_2 = 0 + 0i$ e Z um número complexo qualquer, com argumento θ e módulo r, o número complexo $Z' = ZZ_1 + Z_2 = Z \cdot Z_1$ é o número complexo de argumento θ e módulo rr_1. Assim, cada número complexo Z do plano complexo é transformado no número complexo Z' de mesmo argumento e de módulo igual ao módulo de Z multiplicado por r_1.

Se $Z_1 = r_1 > 1$ a transformação $Z' = Z \cdot Z_1$ é denominada dilatação, com fator de dilatação r_1.



Dilatação

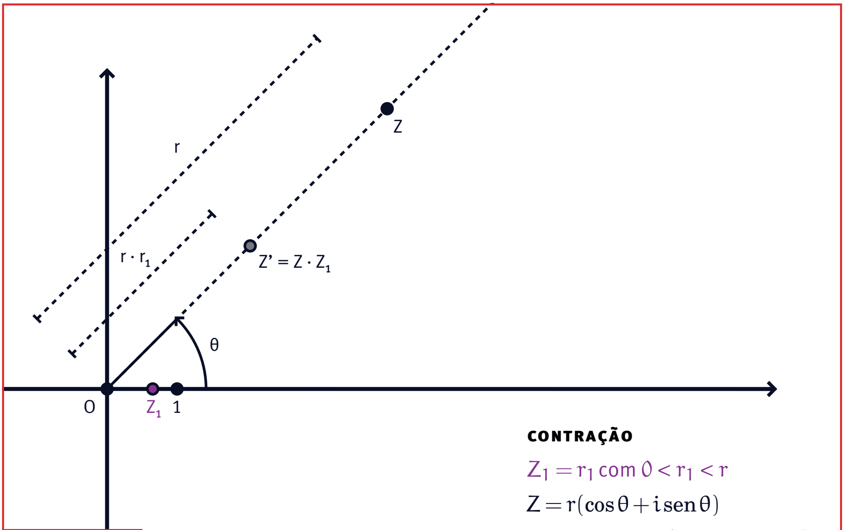
$Z_1 = r_1 > 1$

$Z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$Z' = ZZ_1 = rr_1(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

FIG. 8

Se $Z_1 = r_1$ com $0 < r_1 < r$, a transformação $Z' = Z \cdot Z_1$ é denominada contração, com fator de contração r_1.



CONTRAÇÃO

$Z_1 = r_1$ com $0 < r_1 < r$

$Z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$Z' = ZZ_1 = rr_1(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

FIG. 9

Em particular, para o triângulo ABC temos:

$$A' = AZ_1 + Z_2 = AZ_1$$

$$B' = BZ_1 + Z_2 = BZ_1$$

$$C' = CZ_1 + Z_2 = CZ_1$$

O mesmo acontece com os demais pontos do triângulo. A figura a seguir ilustra a imagem $A'B'C'$ do triângulo ABC pela transformação $Z' = Z \cdot Z_1$.

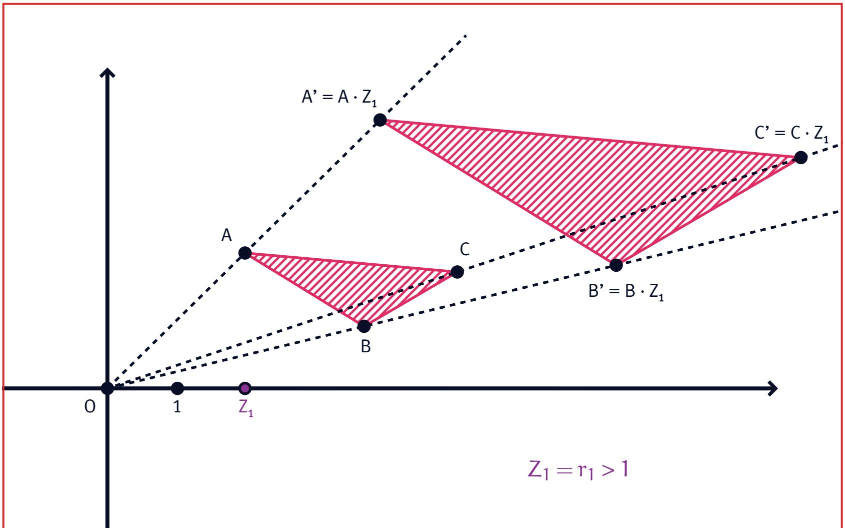


FIG. 10

Note que os pontos O, A e A' são colineares, assim como, os pontos O, B e B' são colineares e, também, os pontos O, C e C'.

Distância entre pontos

Sejam os números complexos

$$A = r_a(\cos\theta_a + i\,\mathrm{sen}\,\theta_a) \text{ e } B = r_b(\cos\theta_b + i\,\mathrm{sen}\,\theta_b).$$

Como $A' = AZ_1$ e $B' = BZ_1$, segue que

$$A' = r_a r_1(\cos\theta_a + i\,\mathrm{sen}\,\theta_a) \text{ e } B' = r_b r_1(\cos\theta_b + i\,\mathrm{sen}\,\theta_b),$$

que são identificados com os pares ordenados

$$(r_a r_1 \cos\theta_a, r_a r_1\,\mathrm{sen}\,\theta_a) \text{ e } (r_b r_1 \cos\theta_b, r_b r_1\,\mathrm{sen}\,\theta_b),$$

respectivamente. Assim, a distância entre A' e B', denotada por $d(A'B')$ é

$$d(A'B') = \sqrt{(r_a r_1 \cos\theta_a - r_b r_1 \cos\theta_b)^2 + (r_a r_1\,\mathrm{sen}\,\theta_a - rb_r 1\,\mathrm{sen}\,\theta_b)^2}\,.$$

Assim,

$$d(A'B') = r_1\sqrt{(r_a\cos\theta_a - r_b\cos\theta_b)^2 + (r_a\,\mathrm{sen}\,\theta_a - r_b\,\mathrm{sen}\,\theta_b)^2}.$$

Portanto, $d(A'B') = r_1 \cdot d(AB)$, ou seja, a distância entre os pontos A' e B' é igual à r_1 multiplicado pela distância entre A e B.

Consequências

- A medida do segmento $A'B'$ é igual a r_1 multiplicado pela medida do segmento AB.
- Para o triângulo ABC e seu transformado $A'B'C'$ valem as seguintes relações entre as medidas de seus lados:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = r_1.$$

Assim, pelo caso LLL de semelhança de triângulos, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes com razão de semelhança r_1.

Parte 4: Rotação e dilatação

Nesta parte, o aluno poderá variar livremente o número complexo Z_1 e o número complexo Z_2 permanecerá fixo na origem. Esperamos que o aluno perceba que a transformação sofrida pelo triângulo é a composição de uma rotação e de uma dilatação ou contração.

Sendo Z_1 de argumento θ_1 e módulo r_1, para qualquer número complexo Z de argumento θ e módulo r, o número complexo Z', definido por $Z' = ZZ_1 + Z_2 = Z \cdot Z_1$, tem argumento $\theta + \theta_1$ e módulo rr_1. Assim, Z' é a rotação de θ_1 de Z, seguida de uma dilatação ou contração de fator r_1.

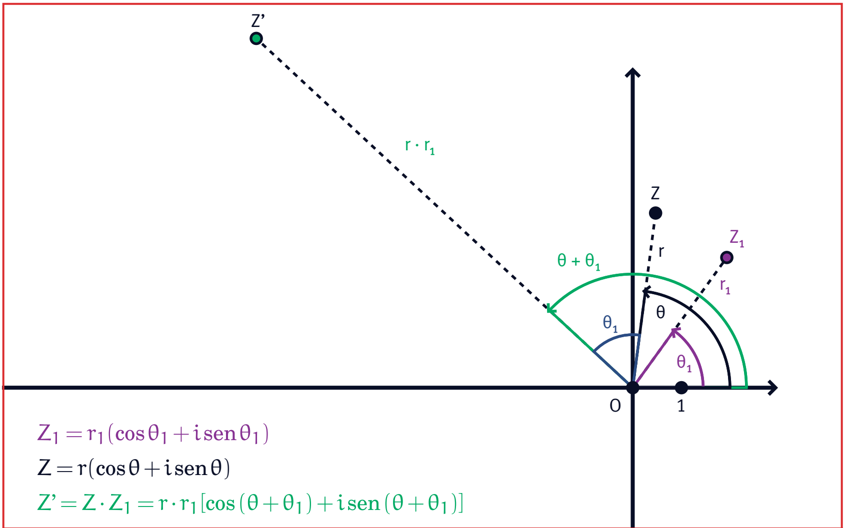


FIG. 11 *Composição de rotação e dilatação*

Com isso, podemos concluir que o triângulo $A'B'C'$ é obtido por meio da rotação de ângulo θ_1 seguido da dilatação, se $r_1 > 1$, (ou contração, se $0 < r_1 < 1$) do triângulo ABC com fator igual a r_1.

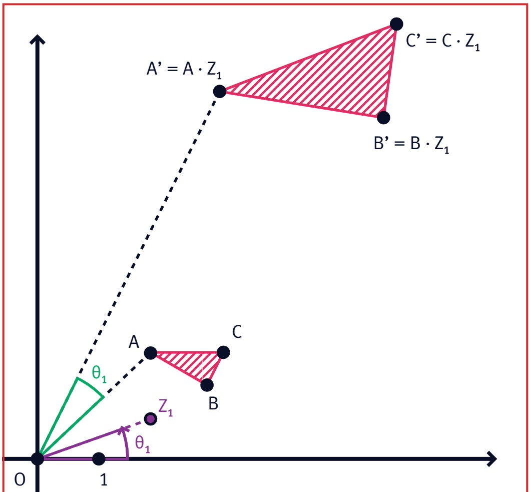


FIG. 12 *Composição de rotação e contração.*

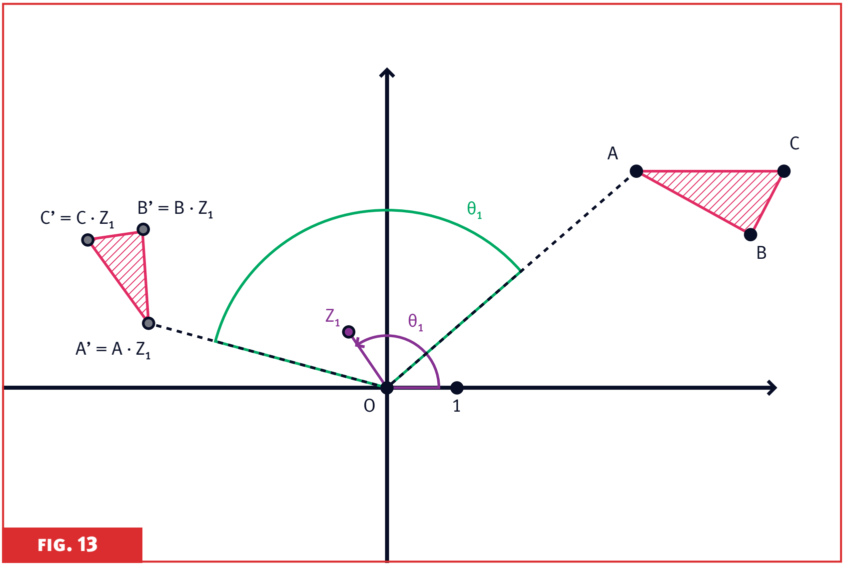


FIG. 13

Parte 5: Translação

Nas questões desta parte, o número complexo Z_1 é mantido fixo igual a $1+0i$ e Z_2 pode ser qualquer valor diferente de $0+0i$.

Sendo $Z_2 = a+bi$, para qualquer número complexo $Z = x+iy$, o número complexo Z', definido por $Z' = ZZ_1 + Z_2$, é a translação de Z na direção e sentido do vetor correspondente ao número complexo Z_2, pois $Z' = (x+iy)(1+0i)+(a+bi) = (x+a)+(y+b)i$.

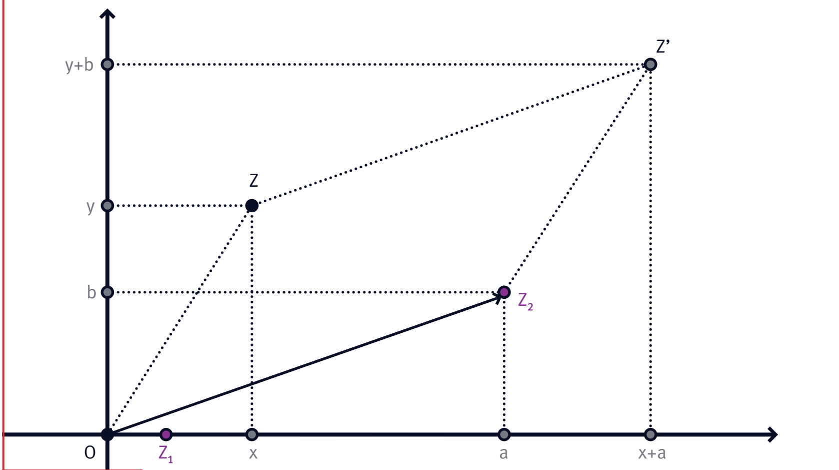


FIG. 14

Assim, para $Z_1 = 1 + 0i$ e $Z_2 = a + bi$, onde $(a, b) \neq (0, 0)$, o triângulo $A'B'C'$, com $A' = AZ_1 + Z_2$, $B' = BZ_1 + Z_2$ e $C' = CZ_1 + Z_2$, é a translação do triângulo ABC na direção e sentido do vetor correspondente ao número complexo Z_2.

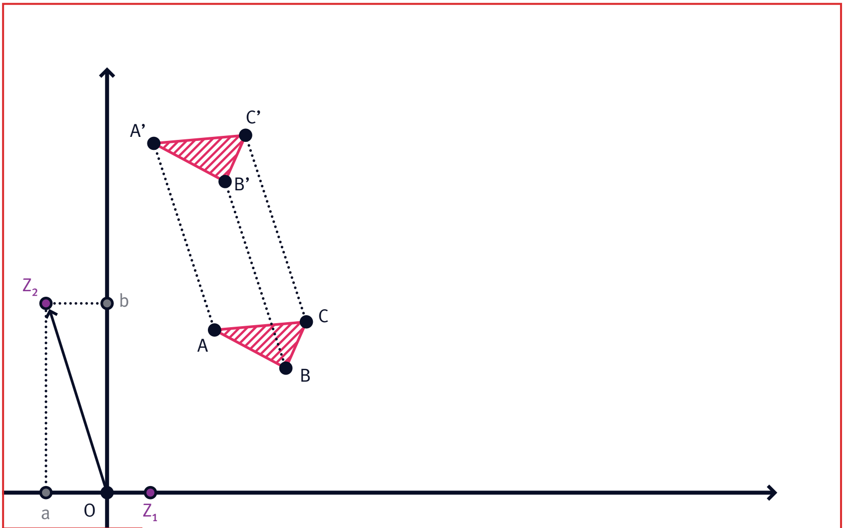


FIG. 15

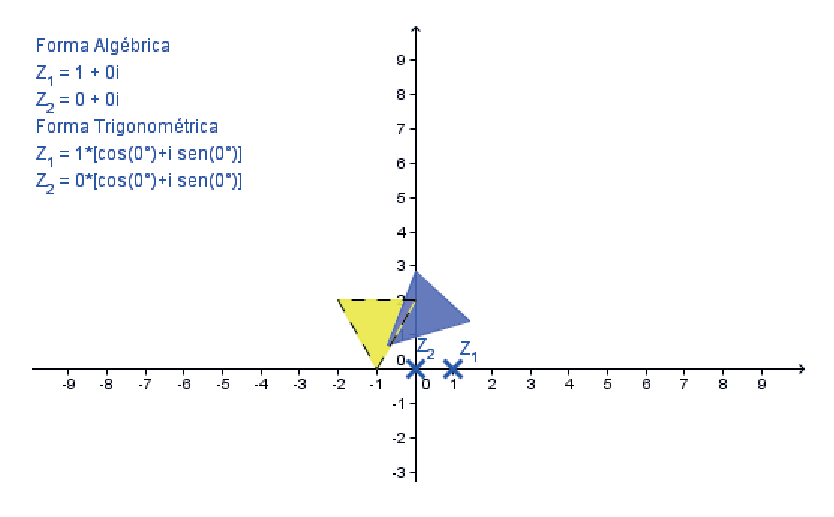
Parte 6: Mãos a obra!

Nas questões desta parte são apresentados dois triângulos ABC e DEF, sendo que DEF é obtido a partir de ABC por meio de uma única transformação: ou rotação; ou dilatação (ou contração); ou translação. O aluno deve descobrir, inicialmente por meio da visualização, qual é a transformação. A seguir, deve movimentar os pontos Z_1 e Z_2 para descobrir seus valores para que tal transformação ocorra.

Para realizar as questões, é preciso ter em mente as conclusões obtidas nas partes anteriores, a saber:

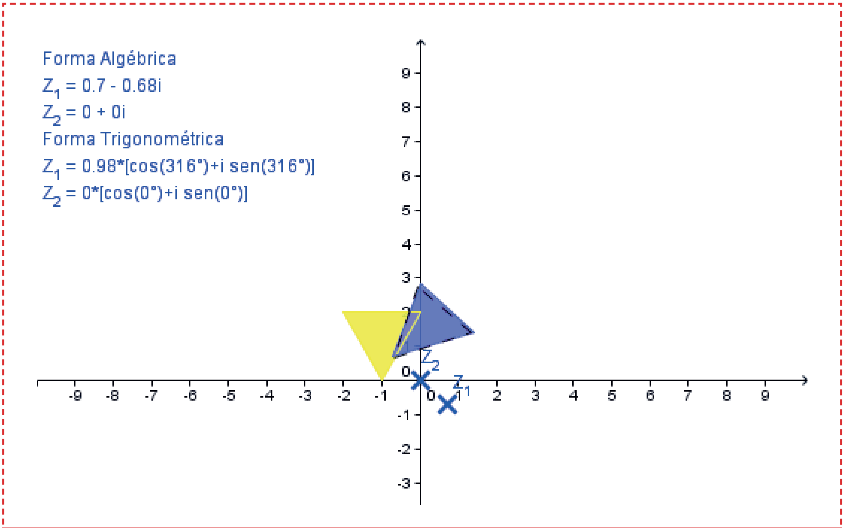
- Se o módulo de Z_1 é igual a 1 e $Z_2 = 0 + 0i$ ocorre uma rotação em torno da origem do triângulo. Além disso, o ângulo de rotação é igual ao argumento de Z_1.
- Se Z_1 é um número real positivo, diferente de 1, e $Z_2 = 0 + 0i$ ocorre uma dilatação (ou contração) do triângulo.
- Se $Z_1 = 1 + 0i$ e $Z_2 = a + bi$, com $(a, b) \neq (0, 0)$, ocorre uma translação do triângulo. A translação ocorre na direção e sentido do vetor correspondente ao número complexo Z_2.

Por exemplo, a ilustração a seguir apresenta dois triângulos. Percebemos facilmente que o triângulo azul não é obtido por meio de uma dilatação (ou contração) a partir do amarelo e, também, não é obtido por meio de uma translação. Por outro lado, é possível perceber que uma rotação transformará o amarelo no azul.



TELA 2

Para descobrir os valores de Z_1 e Z_2, movimentamos estes pontos até que o triângulo pontilhado se sobreponha ao triângulo azul. No caso de rotação, convém lembrar-se que Z_2 deve coincidir com a origem e Z_1 deve ter módulo 1. Assim, deixamos Z_2 na origem e movimentamos o ponto Z_1 fazendo-o percorrer bem próximo aos pontos de módulo 1 (pontos na circunferência de raio 1 e centro na origem) até que o triângulo pontilhado coincida com o triângulo azul. Em geral, no software, isto é conseguido de modo aproximado, como mostra a ilustração a seguir. É preciso fazer coincidir o máximo possível os dois triângulos.



TELA 3

Lembrando que $A' = AZ_1 + Z_2$, $B' = BZ_1 + Z_2$ e $C' = CZ_1 + Z_2$, e considerando os valores para Z_1 e Z_2 encontrados pelos alunos, cujas formas trigonométricas aparecem na ferramenta, sugerimos que o professor oriente os alunos a comparar as transformações visualizadas na ferramenta com as interpretações geométricas das operações com números complexos.

Desafio

No desafio são apresentados dois triângulos ABC e DEF, sendo que DEF é obtido a partir de ABC por meio de uma transformação que é uma composição de algumas das transformações estudadas na ATIVIDADE 1. O aluno deve descobrir a transformação que leva o triângulo ABC no triângulo DEF movimentando os pontos Z_1 e Z_2. Convém primeiro movimentar o ponto Z_1, deixando Z_2 na origem, para descobrir a rotação e dilatação (ou contração) envolvidas, caso existam, e, depois, movimentar o Z_2 no caso de ocorrer alguma translação.

Depois de encontrar os valores para Z_1 e Z_2, sugerimos que o professor oriente os alunos a descrever as transformações envolvidas. Para isso, devem utilizar a forma trigonométrica de Z_1 e a forma algébrica de Z_2, que aparecem no canto superior esquerdo da ferramenta, e, também, as interpretações geométricas das operações de números complexos.

Fechamento

Na aula anterior ao uso do software, sugerimos que seja feita uma recordação do conceito de números complexos e suas operações. Especial atenção deve ser dada as interpretações geométricas dessas operações.

Números Complexos

O número complexo $z = x + yi$ pode ser representado em um plano cartesiano pelo ponto $P(x, y)$ e, também, pelo vetor com ponto inicial na origem e ponto final em P.

O plano em que os números complexos são representados é chamado plano complexo ou plano de Argand-Gauss.

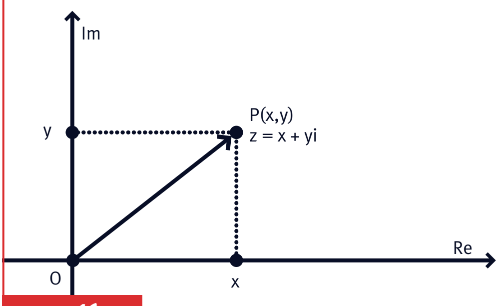


FIG. 16

A soma de números complexos

A soma dos números complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$ é definida por

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Interpretação geométrica da soma de números complexos

A soma $z_1 + z_2$ corresponde ao ponto $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e, também, ao vetor com ponto inicial na origem e ponto final em $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Assim, o número complexo $z_1 + z_2$ é representado pela soma dos vetores que representam z_1 e z_2, como mostra a figura.

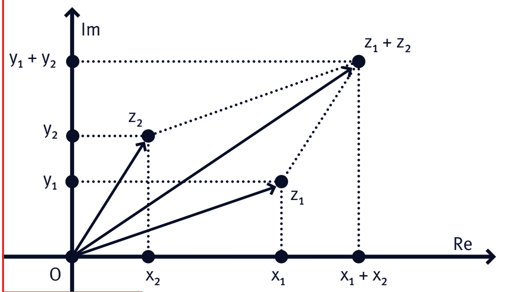


FIG. 17

O produto de números complexos

Sejam r e θ as coordenadas polares do ponto representando $z = x + yi$, como na figura, onde $r \geq 0$. O número r é chamado o módulo de z e θ o argumento. Geometricamente, θ é o ângulo de inclinação do vetor representando o número complexo z e r o comprimento do vetor.

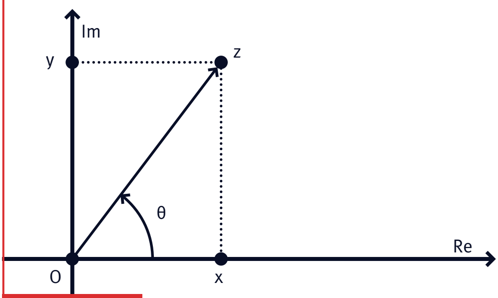


FIG. 18

Assim, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, com $r \geq 0$.

Expressão trigonométrica para o produto de números complexos
Para encontrar a expressão do produto de $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = r_1(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$, fazemos:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

$$= r_1 \cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)]$$

$$= r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)].$$

Produto de números complexos

A expressão para o produto dos números complexos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$ é

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)].$$

Interpretação geométrica do produto de números complexos
Pela expressão para o produto obtemos que o módulo do produto é o produto dos módulos, ou seja, $r_1 \cdot r_2$, e o argumento do produto é a

soma dos argumentos, ou seja, $\theta_1 + \theta_2$. Geometricamente, a distância do ponto representando o número complexo $z_1 \cdot z_2$ até a origem é igual a $r_1 \cdot r_2$, ou seja, é igual ao produto das distâncias dos pontos representando z_1 e z_2 à origem. Além disso, o ângulo de inclinação do produto é a soma dos ângulos θ_1 e θ_2, conforme figura.

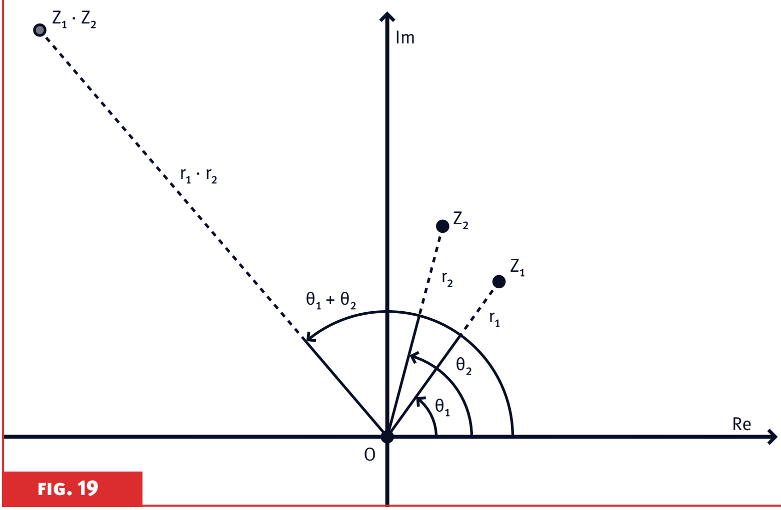


FIG. 19

Sugerimos que, ao término de cada uma das partes de 2 a 6 da ATIVIDADE 1, o professor comente com os alunos sobre os resultados obtidos nas questões e enfatize a relação entre as operações com números complexos envolvidas em cada parte e a correspondente transformação geométrica. O mesmo convém ser feito após a realização da PARTE 2 do desafio.

Bibliografia

E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner, A. C. Morgado. **A Matemática do Ensino Médio**, Vol. 3, Coleção do Professor de Matemática, (3ª Edição). Rio de Janeiro: SBM, 2000.

E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho. **Coordenadas no Plano. Coleção do Professor de Matemática**, (5ª Edição). Rio de Janeiro: SBM, 2005.

E. L. Lima. **Isometrias**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autora
Claudina Izepe Rodrigues

Revisão do conteúdo
Samuel Rocha de Oliveira

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL