Matemática Multimídia

NÚMEROS E FUNÇÕES

GEOMETRIA E MEDIDAS

Guia do professor

Software

Otimização de janelas

Objetivos da unidade

1. Despertar a percepção da variação de valores de uma função de uma variável;
2. Modelar matematicamente uma situação por meio de uma função determinando restrições de seu domínio;
3. Investigar o comportamento de função polinomial do segundo grau – valores máximos e mínimos.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Otimização de janelas

Matemática Multimídia

Guia do professor

Sinopse

Este software ilustra um processo de otimização utilizando polinômios do segundo grau. Nele, é considerada uma situação hipotética em que o objetivo é encontrar a janela retangular que tem a maior área dentre as que tem perímetro fixo. As funções que descrevem estas situações são polinômios do segundo grau com domínio restrito. O caminho de investigação proposto parte da percepção visual dos valores por meio de gráficos dinâmicos e induz o "modelamento" do problema por funções.

Conteúdos

- Funções: Função quadrática;
- Geometria: perímetro e área.

Objetivos

1. Despertar a percepção da variação de valores de uma função de uma variável;
2. Modelar matematicamente uma situação por meio de uma função determinando restrições de seu domínio;
3. Investigar o comportamento de função polinomial do segundo grau – valores máximos e mínimos.

Duração

Uma aula dupla.

Recomendação de uso

Sugerimos que a unidade seja utilizada em duplas e que os alunos levem papel e lápis para a sala de informática.

Material relacionado

- Experimentos: Otimização da Cerca, Polígonos e Círculo e Qual é o prisma de maior volume?
- Vídeos: A Lenda de Dido e Roda de Samba.
- Software: Otimização do Arco Ferradura, Otimização de Janelas com topo triangular e Otimização do Arco Romano.
- Áudio: O que é uma parábola?

Introdução

No dia-a-dia, é muito comum encontrar problemas que exigem otimização. Por exemplo, numa fábrica, estamos sempre interessados em minimizar o tempo de produção e maximizar o lucro. Do ponto de vista da matemática, isto equivale, em geral, a procurar valores máximos e mínimos de uma função. Neste software, você terá a oportunidade de realizar atividades que ilustram um processo de otimização, utilizando polinômios do segundo grau. No caso de uma janela, uma maior iluminação está vinculada a uma maior área. Nos problemas aqui propostos, vamos considerar uma situação hipotética em que, a partir da medida do contorno fixo, procuramos a janela que tem a maior área.

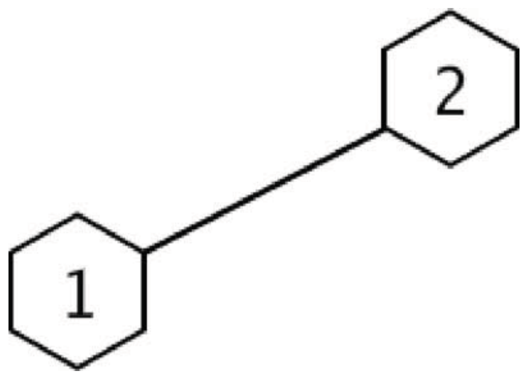
Problemas desta natureza são denominados "isoperimétricos", e sempre estiveram presentes na história da matemática.

Outros três programas: Otimização de Janelas com topo triangular, Otimização do Arco Ferradura e Otimização do Arco Romano tratam de problemas semelhantes ao desenvolvido nesta unidade. Além deles, no item Material Relacionado outros programas, experimentos e vídeos deste projeto que abordam problemas isoperimétricos são sugeridos.

O software

Estrutura do software

Este software é composto por duas atividades, a primeira mais longa e que conduz o aluno desde as primeiras impressões sobre o problema até a sua algebrização, análise do gráfico da função e conclusão. Enquanto que na segunda atividade o objetivo é visualizar o problema mais geral e permitir uma melhor compreensão das expressões algébricas envolvidas.

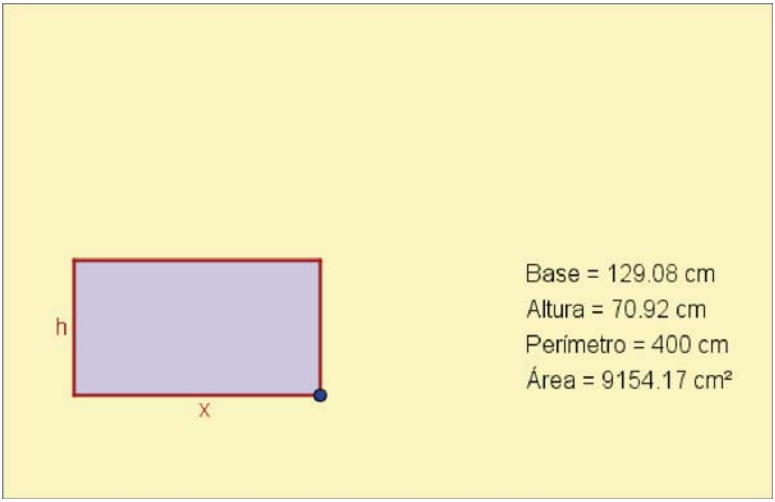


TELA 1 *Mapa do software.*

ATIVIDADE

1 Janelas retangulares

O problema aqui apresentado é o de otimização de janelas retangulares.



TELA 2

Esta atividade é dividida em 5 partes, além de uma parte C final, com o objetivo de consolidar e generalizar as conclusões da ATIVIDADE 1.

Os objetivos das 3 primeiras partes são: investigar e analisar, por meio da visualização dinâmica, como varia a área do retângulo à medida que a base aumenta, mas o perímetro permanece fixo igual a 400 cm. Além disso, o desenvolvimento é direcionado a investigar as medidas possíveis para a base da janela retangular (domínio da função).

No final da PARTE 3, é apresentada uma pergunta para ser respondida no caderno. Esta pergunta poderá ser comentada pelo professor em algum momento apropriado, como, por exemplo, durante o fechamento na aula seguinte ao uso do software.

Na PARTE 4, é solicitado encontrar uma expressão para a área da janela retangular em termos de sua base. Desta forma, chamando de x a medida da base do retângulo, obtém-se a regra que define a função área $A(x)$.

Na PARTE 5, é apresentado o gráfico desta função com o objetivo de, por meio da visualização e da movimentação de um ponto no gráfico, investigar a maior área possível e, também, as dimensões aproximadas do retângulo de área máxima.

A PARTE C apresenta algumas conclusões sobre o problema com algumas perguntas para que o aluno reflita sobre os fatos observados.

No final desta parte, é citado o seguinte resultado mais geral:

Dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é aquele que tem a maior área.

Este resultado pode ser justificado da seguinte forma:

Sendo p o perímetro fixo e x a medida da base do retângulo, a altura é $h = p/2 - x$ e a área do retângulo é $A(x) = x \cdot h = -x^2 + (p/2)\,x$, com x variando entre 0 e $p/2$.

Vamos determinar o valor da base x (em função de p) para o qual a área do retângulo correspondente é máxima.

Somando e subtraindo $p^2/16$ na expressão da área, temos:

$$\begin{aligned} A(x) &= -x^2 + (p/2)\,x \\ &= p^2/16 - p^2/16 - x^2 + (p/2)\,x \\ &= p^2/16 - (x^2 - (p/2)\,x + p^2/16) \end{aligned}$$

ou seja,

$$A(x) = p^2/16 - (x - p/4)^2 \qquad (*)$$

Como x varia entre 0 e $p/2$, o maior valor de $A(x)$ ocorre quando $x = p/4$. Neste caso, $h = (p/2) - x = p/2 - p/4 = p/4$. Portanto, as dimensões do retângulo de área máxima com perímetro p são $x = h = p/4$. Logo, o quadrado é o de área máxima e a área é igual a $A(p/4) = (p/4)^2$. Note que, no gráfico da função $A(x)$, o ponto $(p/4 \cdot A(p/4))$ é o vértice da parábola.

2 Qual o melhor retângulo?

A ATIVIDADE 2 apresenta uma animação comparando as áreas de um retângulo e de um quadrado de mesmo perímetro. Ela pode ser vista quantas vezes for necessário, e permite perceber claramente que a área do quadrado é maior do que a área do retângulo. Além disso, a animação sugere uma forma simples para calcular o quanto a área do quadrado é maior do que a do retângulo. Finalmente, a questão seguinte solicita que a expressão dessa diferença seja apresentada em função do perímetro.

Note que a expressão final $(*)$ para a área do retângulo colocada na seção referente à ATIVIDADE 1 descreve exatamente a relação ilustrada na animação, pois a área do retângulo pode ser vista como a área do quadrado menos a área do quadradinho.

Fechamento

A seguir, vamos comentar as questões do final da PARTE 3 da ATIVIDADE 1, sugeridas para serem respondidas no caderno.

Questão para o caderno: 1A (ATIVIDADE 1)

Analisando os valores da tabela, descreva como varia a área do retângulo à medida que a base aumenta. Ao escrever, diga se é verdade que, quanto maior é a base, maior é a área.

Perímetro	Base (x)	Altura (h)	Área
400	89.31	110.69	9885.72
400	200	0	0.00
400	189.91	10.09	1916.19
400	181.33	18.67	3385.43
400	154.04	45.96	7079.68
400	65.14	134.86	8784.78
400	54.22	145.78	7904.19
400	42.52	157.48	6696.05
400	30.04	169.96	5105.60
400	18.34	181.66	3331.64

TELA 3

Nesta questão, é esperado que os alunos concluam que, ao variar a medida da base entre zero e 100, a área do retângulo aumenta. A partir de 100, a área começa a diminuir. É provável que os alunos não localizem exatamente o valor 100, a partir do qual a área começa a diminuir, mas deverão pelo menos notar que, à medida que a base varia de zero a 100, a área começa a aumentar e, após algum valor, começa a diminuir. Talvez seja o caso de sugerir uma melhor distribuição de valores para a base.

Questão para o caderno: 2A (ATIVIDADE 1)

Encontre dois retângulos com perímetro igual a 400 cm e que tenham a mesma área, mas cujas bases sejam diferentes. O que você pode dizer sobre eles?

Nesta questão é esperado que os alunos notem que se invertermos a ordem dos valores para as medidas da base e da altura da janela, as áreas correspondentes são iguais.

Uma sugestão para aprofundar a discussão de problemas de natureza isoperimétrica com os alunos é dada no esquema a seguir.

Para um perímetro p *fixado*, comparar e fornecer o percentual de aumento:

- A área do quadrado com a do hexágono. Observar que a janela de topo triangular ótima é parte de um hexágono.
- A área de um hexágono com a área do círculo.
- A área de um polígono regular de n lados com a área do círculo.

O experimento "Polígonos e Círculo" faz uma abordagem semelhante a essa, enfatizando a análise e a comparação do gráfico de funções polinomiais de segundo grau.

Os resultados da discussão podem ser relacionados com a lenda de Dido, relatada na Eneida de Virgílio e comentada nas CURIOSIDADES deste software.

Por fim, salientamos que os softwares OTIMIZAÇÃO DE JANELAS COM TOPO TRIANGULAR, OTIMIZAÇÃO DO ARCO ROMANO e OTIMIZAÇÃO DO ARCO FERRADURA trazem propostas muito semelhantes à deste software, mas com algumas novidades, e podem ser usados em sequência.

Bibliografia

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**, Vol 1, Coleção do Professor de Matemática, (6ª Edição). Rio de Janeiro: SBM, 2006

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autoras
Sueli I. Costa
e Claudina Izepe Rodrigues

Revisores
Língua Portuguesa
Denis Barbosa Cacique

Projeto gráfico
Preface Design

Fotografia da janela
Markus Eisele

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL