Matemática Multimídia

NÚMEROS E FUNÇÕES

GEOMETRIA E MEDIDAS

GUIA DO PROFESSOR

Software

Trigonometria e raios luminosos

Objetivos da unidade

1. Mostrar uma aplicação da função seno e sua inversa por meio de um fenômeno físico (refração da luz) de fácil observação e presente em nosso cotidiano;
2. Usar a calculadora para calcular o seno de ângulos não notáveis;
3. Mostrar o conceito geométrico associado à reflexão da luz.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Trigonometria e raios luminosos

Matemática Multimídia

Guia do professor

Sinopse

Neste software vamos estudar alguns aspectos matemáticos do percurso dos raios luminosos que são refletidos ou que podem ser refratados ao passar de um meio transparente para outro, como as imagens que podem ser observadas numa gota d'água ou a régua quebrada quando parcialmente imersa em um copo d'água.

Conteúdos

- Trigonometria, Função Seno
- Trigonometria, Função Arco Seno
- Física, Raios Luminosos e Lei de Snell.

Objetivos

1. Mostrar uma aplicação da função seno e sua inversa por meio de um fenômeno físico (refração da luz) de fácil observação e presente em nosso cotidiano;
2. Usar a calculadora para calcular o seno de ângulos não notáveis;
3. Mostrar o conceito geométrico associado à reflexão da luz.

Duração

Uma aula dupla.

Recomendação de uso

Este software tem como pré-requisitos os seguintes conteúdos: semelhança de triângulos, razões trigonométricas no triângulo retângulo, função seno, arco seno e arco tangente. Embora as atividades possam ser feitas em qualquer ordem, sugerir ao aluno que execute a sequência indicada no software. Os alunos devem ir para o ambiente informático munidos de um caderno de rascunho e de um lápis ou caneta para anotações.

Material relacionado

- Experimentos: Roda Gigante, Altura da Árvore, Engenharia de Grego;
- Vídeos: Os ângulos e as Torres, Um caminho para o Curral, Transportando, Alice e as relações trigonométricas, As margens daquele Rio, Sonho dourado;
- Software: Trigonometria e Halos, Ondas Trigonométricas.

Introdução

Este software reforça o conceito de domínio de uma função, no caso seno ou arco seno, usando, passo a passo, a explicação do fenômeno da refração para meios transparentes resumida na Lei de Snell. Entre esses meios transparentes podemos assumir um plano de interface. Além disso, usando argumentos básicos de geometria euclidiana, o fenômeno da reflexão da luz em uma superfície polida é explicado.

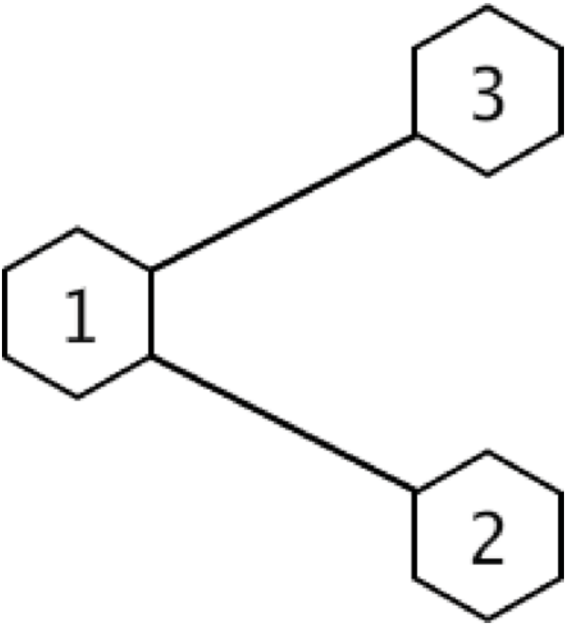
O software

Estrutura do software

Na Atividade 1, estuda-se a Lei de Snell, que estabelece uma função entre os ângulos de entrada e saída em uma superfície que separa meios transparentes. Salientamos que não é necessário que o aluno tenha estudado a Lei de Snell, normalmente ensinada na disciplina de Física, para resolver essa atividade. Pelo contrário, ela foi concebida para que o aluno aprenda as propriedades matemáticas básicas dessa lei.

Já na Atividade 2, usamos a Lei de Snell para explicar o videoclipe mostrado na Introdução do software, no qual uma xícara, ao ser preenchida com água, revela um dado que estava no fundo.

Por fim, na Atividade 3 estuda-se o Princípio de Fermat e como ele pode ser utilizado para explicar o comportamento da luz no contexto da reflexão e refração ótica.



TELA 1 *Mapa de navegação do software*

ATIVIDADE

1 Encontrando a Lei de Snell

Nesta Atividade o aluno é convidado a manipular uma ferramenta que permite variar o ângulo do raio de incidência, representado por uma semirreta, movimentando um ponto azul da mesma. Após a escolha de um ângulo, o aluno deve acionar o botão “Disparar raio” (ou “Emitir raio”) para visualizar a representação de um raio de luz que passa de um meio para outro. A partir dessa manipulação efetuamos uma análise matemática do desvio que esse raio de luz sofre. Nesse caso, estamos simulando a passagem do raio do ar para a água.

A Atividade é composta de cinco partes e tem o objetivo de permitir aos alunos observar as relações que estabelecem os princípios da Lei de Snell.

Primeira parte

É composta por três questões e uma tela dinâmica que permite ao aluno simular a refração do raio de luz ao passar de um meio para outro. Os dados obtidos nessa simulação servirão de base para a análise matemática dos ângulos, com o eixo vertical à superfície no ponto de incidência, que denominaremos de alfa (α), e de refração, que denominaremos de beta (β).

Ao movimentar o ponto azul o aluno controlará o ângulo, formado pela semirreta e um eixo imaginário vertical no ponto de incidência, e assim o raio incidirá na camada de transição entre os meios (ângulo de incidência).

Quando o aluno clicar o botão “Disparar (emitir) raio”, uma seta, simulando o raio de luz, se moverá pela tela representando a trajetória do raio de luz e indicando o ângulo de saída do mesmo ao mudar de meio.

Os dados obtidos pelos alunos nesta atividade deverão ser digitados nas células correspondentes. Após a validação, caso os dados estejam corretos, a ferramenta representará automaticamente no gráfico os pontos referentes a eles.

Questão 1: Conhecendo as ferramentas
O aluno é solicitado a movimentar o ponto azul e escolher um ângulo qualquer e disparar/emitir o raio, registrando os dados. O objetivo é que o aluno tome contato com a ferramenta observando o seu funcionamento.

Por exemplo: Caso o aluno tenha escolhido um ângulo de 66° o ângulo de refração será de 43°.

Questão 2: Coletando dados
Nesta questão o aluno é convidado a ajustar alguns ângulos de incidência, disparar/emitir o raio e preencher a célula correspondente através da seguinte instrução: "Agora responda qual o ângulo de saída quando o ângulo de incidência é igual a:"

Os dados esperados estão representados na tabela abaixo:

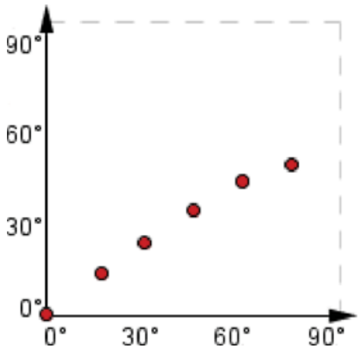
Ângulo de incidência (α em graus)	**Ângulo de refração (β em graus)**
15	11
30	22
45	32
60	40
75	46

TABELA 1

O objetivo é o de coletar dados que serão usados na sequência da atividade.

Após a validação dos dados a ferramenta plota os pontos automaticamente, gerando o gráfico representado abaixo.

Nota-se que os pontos gerados não estão alinhados de forma a permitir que uma única reta acomode todos os pontos. Essa característica dificulta a formulação de uma relação que permita prever qual o ângulo de saída, de refração, para um dado ângulo de entrada, de incidência.



TELA 2

Questão 3: Estudando os casos-limite

Os casos-limite são sempre muito úteis para entendermos o comportamento de fenômenos naturais. Para o que nos interessa aqui, a análise de situações críticas põe em evidência situações importantes no momento da generalização para a formulação da lei de Snell. Por meio da análise colocamos em discussão os valores extremos para o ângulo de incidência, como no caso em que o raio incidente é vertical, zero grau em relação ao eixo de incidência (a superfície que separa os dois meios). Nessa situação haveria refração? E qual é o ângulo formado pelo raio de luz com o eixo imaginário?

A seguir questionamos qual o maior ângulo de saída possível, no caso do raio ser lançado quase que paralelamente à superfície, ângulo próximo de noventa graus (caso que na prática não levaria à refração, visto que o raio não incidiria sobre a superfície que separa os meios analisados).

A seguinte questão procura evidenciar tais situações.

a. Qual o ângulo de saída quando o de incidência é igual a 0°?

Resposta: 0 (zero) grau.

b. Qual o maior ângulo de saída possível?

Resposta: 49 graus.

Observar que o ângulo de incidência para zero grau é real e pode ser obtido experimentalmente, já um ângulo de incidência de noventa graus não. Mas a análise desses valores permitirá o aprofundamento na sequência da atividade.

Segunda parte

Nesta parte o aluno é conduzido a explorar a relação que permite prever qual o ângulo de refração para um dado ângulo de incidência e vice-versa. Esse tipo de previsão é fundamental na arquitetura, para o desenvolvimento de projetos que permitem direcionar a luz externa, a fim de economizar energia, e também na construção de instrumentos como lentes que permitem direcionar os raios de luz para um ponto específico.

Buscando essa exploração pedimos, na questão quatro, que os alunos façam uso da calculadora para determinar os valores do seno de dois ângulos específicos, de onze e quinze graus, preenchendo as células correspondentes.

Questão 4: Usando a calculadora disponível na barra de ferramentas abaixo calcule

- $\text{sen}\left(15°\right)$ resposta esperada: $0,26$;
- $\text{sen}\left(11°\right)$ resposta esperada: $0,19$.

O mesmo é pedido, na questão cinco, para os demais pontos!

Questão 5: A tabela abaixo recupera os valores que você obteve na parte anterior.

Preencha as duas últimas colunas com os valores do seno dos ângulos de incidência (α) e saída (β).

α	Β	Seno de α	Seno de β
0	0	0	0
30	22	0,5	0,37
45	32	0,71	0,53
60	40	0,87	0,64
75	46	0,97	0,72
90	49	1	0,75

TABELA 2

Quando os dados obtidos são validados, a ferramenta automaticamente preenche o gráfico ao lado e a seguinte análise é feita:

Veja que o gráfico obtido é formado por pontos próximos a uma reta que passa pela origem, determinando uma função linear, ou seja, $\operatorname{sen}\alpha = k \cdot \operatorname{sen}\beta$.

Isso indica que o seno do ângulo de saída é proporcional ao seno do ângulo de incidência, ou seja:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = k$$

onde k está relacionado com os meios envolvidos no fenômeno.

Esse é o grande resultado que vai nos ajudar a compreender fenômenos como os halos ou o aparecimento do dado na xícara quando colocamos água.

Observação

Os dados lançados na tabela da atividade 2 são aproximações dos valores reais das razões de seno de α e seno de β e portanto podem levar a erro no cálculo da constante k. Nesse sentido peça aos alunos que efetuem a divisão usando a função seno direto na calculadora.

Exemplo para obter a razão: Na primeira linha digitar na calculadora:

$\dfrac{\operatorname{sen}45}{\operatorname{sen}22}$, ao invés de simplesmente os valores indicados na tabela.

Observe que essa razão traz algumas aparentes incoerências, a saber:

- Para um ângulo de incidência de zero grau a razão apresenta uma indeterminação. Porém, a luz passa para o outro meio e, nesse sentido, a refração existe. Entretanto observamos que nesse caso não existe desvio no raio.
- Para o ângulo de incidência exato de noventa graus não ocorre a refração, visto que o raio tem trajetória paralela à superfície, mas, em princípio, para ângulos maiores ou iguais a zero e tão próximos (no sentido de aproximação de números reais) quanto possível de noventa graus haverá refração.

Terceira parte
O próximo passo para compreender o fenômeno da refração de um raio de luz é calcular o valor de k da relação encontrada anteriormente:

Questão 6: Escolha um dos pontos e substitua na relação acima. Use a calculadora. Qual o valor de k?
Resposta esperada: $1,33$.

Agora, vamos usar a relação encontrada para calcular o ângulo de saída de um raio sem fazer nenhuma simulação.

Questão 7: Quanto vale o seno de β quando α é igual a 50º?
Resposta esperada: $0,57$.

Usando o botão ARCSEN da calculadora, calcule o valor de β a partir da resposta do item anterior.
Resposta esperada: 35 graus.

Questão 8: Agora calcule diretamente: qual o ângulo de saída quando o ângulo de incidência é igual a 40º?
Resposta esperada: 29 graus.

Note que para a refração que estamos analisando (o raio passando do ar para a água) o ângulo de incidência é sempre maior do que o ângulo de refração.

O que aconteceria se invertêssemos o processo, ou seja, se analisássemos a trajetória do raio saindo da água e indo para o ar?

Quarta parte
Nesta parte o aluno irá simular o raio no sentido inverso, do meio água para o ar. Da mesma forma que na Atividade 1, o aluno é instruído a mover o ponto azul para obter os ângulos desejados.

Obs.: O aluno pode mover o ponto azul do meio água para o meio ar.

A nona questão solicita que o aluno refaça a primeira atividade buscando verificar que o fenômeno observado tem o mesmo comportamento quando o raio parte do meio água para o ar.

Assim, quando o raio partir do meio ar para o meio água, os ângulos de incidência e de refração serão de 20 graus e 15 graus respectivamente; quando o raio partir da água para o ar os ângulos de incidência e refração, localizados em meios diferentes, serão agora de 15 graus e 20 graus, o que mostra que o fenômeno se relaciona com as propriedades de interação da luz com o respectivo meio. Deve-se conduzir o aluno a observar que, quando o raio é emitido a partir da água, os ângulos de saída são maiores do que os ângulos de entrada, ao contrário do que vinha acontecendo antes.

A compreensão desse fenômeno é reforçada através da seguinte pergunta: Mas será que esses ângulos têm alguma relação com os ângulos que obtivemos ao analisar o raio indo do ar para a água?

As próximas questões, dez e onze, têm por objetivo conduzir o aluno a responder de forma afirmativa a pergunta formulada anteriormente. Cabe chamar a atenção para o fato de que o ângulo de saída obtido no item B das duas questões anteriores é igual ao de incidência do item A, e vice-versa. Isso ocorre porque a luz faz a mesma trajetória, independentemente da origem do raio.

Isso nos permite chegar à seguinte conclusão: para analisarmos esse novo caso, basta inverter o que estamos chamando de ângulos de saída e entrada, logo, a relação entre o seno dos ângulos para o caso do raio partindo da água vai ser igual a $1/k$.

Quinta parte

Nesta parte fechamos a primeira atividade propondo duas questões teóricas sobre o ângulo máximo de refração. Na questão 12, analisamos uma situação crítica que facilita a visualização desse ângulo por parte do aluno. Nela solicitamos ao aluno que manipule o ângulo observando qual o valor máximo em que o raio conseguirá escapar do meio água para o meio ar.

O texto a seguir introduz a questão 12: Como a trajetória do raio de luz não depende de onde está a origem, na ferramenta ao lado já está representado o raio incidente e o raio de saída. Também está indicada a porção do raio luminoso que refletiu na superfície (semirreta tracejada).

Questão 12: Movimentando o ponto azul, identifique qual o maior ângulo de incidência para o qual ainda ocorre refração do raio.
Resposta esperada: 48 graus

A questão é proposta da seguinte forma:

Fisicamente, a partir desse ângulo de incidência, ocorre apenas a reflexão do raio luminoso.

Matematicamente, essa restrição é imposta pelo fato de a função seno só assumir valores entre -1 e 1.

Questão 1 e 2 para o Caderno
Ver no Fechamento deste Guia.

ATIVIDADE

2 Entendendo a xícara

Para obter o efeito do vídeo apresentado na introdução, a câmera foi posicionada de forma a ocultar o dado, de aresta 1 centímetro, no centro de uma xícara de altura aproximada de 7 cm. Isso foi possível posicionando a câmera de tal forma que o ângulo da reta que a une com a borda superior da xícara era de 45 graus em relação à horizontal. Nessas condições o dado só seria visível caso tivesse aresta maior que um terço da altura da xícara.

Nessa etapa iremos compreender como foi possível visualizar o dado dentro da xícara apresentada no vídeo da introdução desta unidade. Para tanto o aluno deve realizar a atividade proposta e efetuar os cálculos necessários.

Buscando evidenciar a solução das questões a serem propostas na sequência disponibilizamos uma ferramenta que permite que o aluno movimente um ponto azul (F) representando o nível da água na xícara e observe o que acontece com o raio de luz que chega ao olho do observador (ponto marrom). A opção “Mostrar pontos” torna visíveis alguns pontos que ajudarão a calcular o nível da água a partir do qual o dado fica visível.

A seguir propomos as questões:

O ângulo a partir do qual o observador olha a superfície da água está indicado na imagem. Representamos, esquematicamente, a xícara pela secção meridiana de um cubo de aresta 7 cm, estando o dado posicionado no centro da base da mesma. O dado é representado por um quadrado de lado igual a 1 cm.

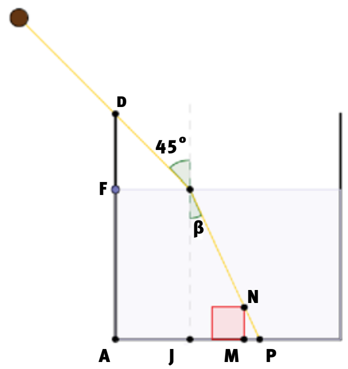
Questão 1: Posicione o ponto F, que indica o nível da água, de modo que o raio de luz passe pelo vértice superior direito do dado.

Questão 2: Usando os pontos auxiliares e as medidas dadas anteriormente, calcule a medida do segmento AF.

A opção "ajuda" fornece ao aluno a seguinte informação:

Note que $\mathrm{AM} = 4$ (pelas medidas da xícara e do dado) e $\mathrm{AJ} = 7 - \mathrm{AF}$ (pois o triângulo DHF é isósceles). Portanto, você pode descrever a medida de PJ em função de AF e, com a ajuda do ângulo β, calcular AF.

De acordo com o exposto podemos representar a situação esquematicamente da seguinte forma:



TELA 3

A questão pode ser respondida estabelecendo-se relações entre os triângulos formados e o ângulo de refração β dado por:

$$\beta = \text{arcsen}\left(\text{sen}\,45^\circ/1{,}33\right) \approx 32^\circ$$

Observe que no triângulo MNP

$$\text{tg}\,\beta = \frac{MP}{1}, \text{ logo } \text{tg}\,\beta = MP$$

$$AP = AM + MP, \text{ logo } AP = 4 + \text{tg}\,\beta$$

$$AJ = 7 - AF$$

$$AP = AJ + JP, \text{ logo } 4 + \text{tg}\,\beta = 7 - AF + JP$$

Temos também que:

$$\text{tg}\,\beta = \frac{JP}{AF}, \text{ logo } AF \cdot \text{tg}\,\beta = JP$$

Logo:

$$4 + \text{tg}\,\beta = 7 - AF + AF \cdot \text{tg}\,\beta \text{ ; como } \text{tg}\,32^\circ \approx 0{,}62$$

$$4 + 0{,}62 = 7 - AF + AF \cdot 0{,}62 \text{ portanto } AF \approx 6{,}26\,\text{cm}.$$

ATIVIDADE

3 Encontrando o Princípio de Fermat

Primeira parte

Nesta parte analisaremos o princípio formulado teoricamente por Pierre de Fermat. De acordo com esse princípio, a trajetória da luz entre dois pontos será sempre aquela que minimiza o tempo total de viagem.

As instruções, na tela, solicitam ao aluno que simule o percurso de um raio de luz que partindo de ponto A chega a um ponto B após ter refletido em C sobre a superfície indicada.

A distância total percorrida pelo raio luminoso é indicada no canto superior direito.

Como a velocidade da luz não muda ao longo do trajeto, para minimizar o tempo basta minimizar a distância percorrida, e é isso que vamos fazer nas questões a seguir.

Questão 1: Movimente o ponto C e observe a distância total percorrida pelo raio em cada trajetória.

a. Qual a menor distância percorrida?

Resposta esperada: $824,85\,\mathrm{cm}$ (que aparece na tela)

b. Clique em "Mostrar Ângulos" para ver os ângulos de incidência e reflexão do raio. O que você pode observar em relação a eles quando a distância total é a menor possível?

Resposta: os ângulos possuem aproximadamente a mesma medida

O texto na tela esclarece que: Se você aumentar muito a precisão das medidas da ferramenta ao lado notará que a menor trajetória é aquela em que o ângulo de incidência e de reflexão são iguais, exatamente como observado na realidade quando algum objeto reflete em uma superfície.

A seguir o aluno é solicitado a anotar e responder no caderno uma pergunta. Ver no FECHAMENTO deste GUIA.

Segunda parte

E como podemos aplicar o Princípio de Fermat à refração?

O primeiro detalhe a ser considerado é que a velocidade da luz muda de acordo com o meio em que ela está se propagando: quanto mais denso o meio transparente, mais lentamente a luz se move. Por exemplo, no ar a sua velocidade é de 300.000 $^{m}/_{s}$ e na água, 225.000 $^{m}/_{s}$.

Novamente solicitamos ao aluno que manipule uma ferramenta que simula a refração de um raio luminoso que parte de A e deve chegar a B. Entretanto, agora estamos analisando o tempo necessário para que o raio atinja o ponto B, passando pelo ponto C. Desejamos saber em quais ângulos de incidência e de refração esse tempo é o mínimo. Ou seja, que relação deve existir entre esses ângulos para que satisfaçam o princípio de Fermat.

Ao mover o ponto C o aluno pode observar, no canto superior direito da tela, o tempo total para completar a trajetória.

Após identificar quais os ângulos que minimizam o tempo nessa trajetória o aluno é convidado a calcular a razão entre o ângulo de incidência e o ângulo de refração usando a Lei de Snell.

Lê-se a seguinte observação no texto apresentado na tela: A Lei de Snell foi uma constatação empírica, baseada em observações em laboratório, enquanto o Princípio de Fermat é uma proposição teórica que explica o comportamento observado da luz. Apesar de terem origens diferentes, um confirma o outro e ambos são utilizados em diversos contextos para compreendermos o comportamento da luz.

Fechamento

Professor, peça a seus alunos que determinem a razão entre as velocidades da luz no ar e na água e procurem explicar qual a relação dessa razão com a Lei de Snell.

Questão 1 para o caderno

Usando a calculadora e considerando a Lei de Snell e o fato de o seno só assumir valores entre -1 e 1, encontre os valores exatos que limitam os ângulos alfa e beta quando $k = 1,33$.

Resolução

Como $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = 1,33$ então $\operatorname{sen}\alpha = 1,33 \cdot \operatorname{sen}\beta$

Como $-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$ temos que $-1 \leq 1{,}33 \cdot \operatorname{sen}(\beta) \leq 1$.

Portanto $-\dfrac{1}{1{,}33} \leq \operatorname{sen} \beta \leq \dfrac{1}{1{,}33}$, ou seja $-0{,}7519 < \operatorname{sen} \beta < 0{,}7519$.

Como $\operatorname{arcsen}(0{,}7519) \approx 48{,}75°$ temos que $-48{,}75° < \beta < 48{,}75°$.

Observamos que um raio cujo ângulo de incidência é de noventa graus, proveniente do ar não provocaria refração, visto que seria paralelo a superfície. Entretanto, para ângulos próximos à noventa graus, a refração assume um valor máximo de aproximadamente $48{,}75°$. Quando o raio vem da direção oposta, do meio água para o ar, com ângulos de incidentes maiores que esse valor máximo o raio de luz não consegue ultrapassar para o meio ar.

Donde se conclui que para que exista a refração devemos ter:

Quando a luz parte do meio ar para o meio água: $0° < \alpha < 90°$.

Quando a luz parte do meio água para o meio ar: $-48{,}75° < \alpha < 48{,}75°$.

Questão 2 para o caderno

Chamamos de ângulo de desvio, o ângulo entre a semirreta formada pela raio incidente e a semirreta formada pelo raio de saída. Qual o ângulo de desvio quando o ângulo de entrada é igual a $30°$ e $k = 1{,}33$?

Resolução

Como $\dfrac{\operatorname{sen}(30°)}{\operatorname{sen}(\beta)} = 1{,}33$, temos que $\operatorname{sen} \beta = \dfrac{\operatorname{sen}(30°)}{1{,}33} = \dfrac{0{,}5}{1{,}33} \simeq 0{,}3759$.

Logo

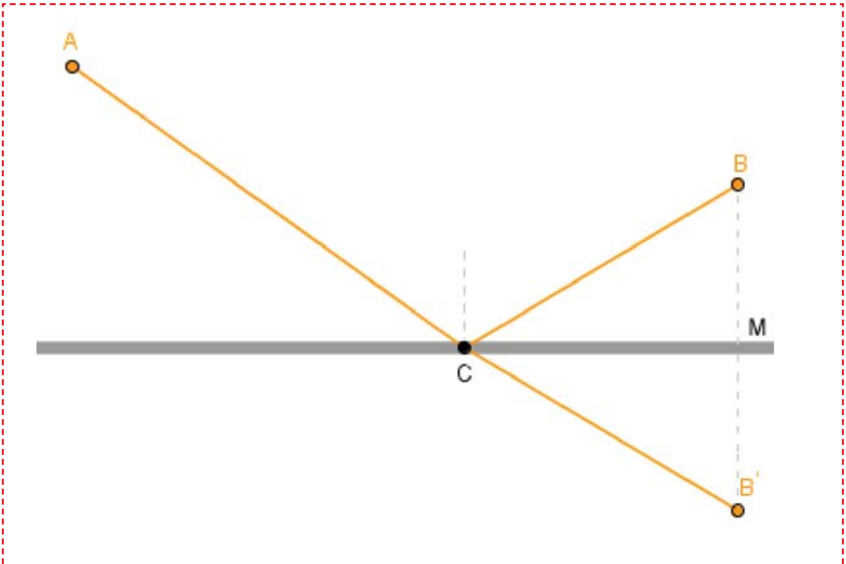
$$\beta = \operatorname{arcsen}(0{,}3759) \approx 22{,}08° \approx 22°.$$

Portanto o ângulo de desvio $= 30° - 22° = 8°$.

Esse ângulo é importante para se compreender a formação de halos solares e lunares.

Questão para o caderno

Na imagem abaixo, o ponto B' é a reflexão do ponto B na reta que sugere a superfície refletora. Mostre que, para que a distância percorrida pelo raio luminoso, passando pelos pontos A, C e B, seja mínima, A, C e B' devem estar alinhados.



TELA 4

Considerando o esquema acima temos que a distância percorrida pelo raio, que chamaremos de d, é dada por $d = \overline{AC} + \overline{CB}$. Para que a distância d seja mínima é necessário que $d = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB'}$, pois a menor distância entre dois pontos é o segmento de reta que os une.

Nos triângulos MCB e CMB' temos que $\overline{CM}$ é lado comum. Como B' é o simétrico de B em relação à superfície temos: $\overline{BM} = \overline{MB'}$; e $\overline{BB'} \perp \overline{CM}$ logo $B\hat{M}C$ e $B'\hat{M}C$ são ângulos retos.

Logo, pelo caso LAL o $\triangle BCM \cong \triangle CMB$ o que implica que $\overline{CB'} = \overline{CB}$.

Então $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{CB'} = \overline{AB'} = d$.

Logo, ACB' estão alinhados.

Aprofundamento

Este software tratou alguns aspectos matemáticos da refração e reflexão da luz. Estudamos apenas o comportamento da refração de uma luz monocromática na aproximação ótica que interage com os meios transparentes água e ar. Em geral a luz contém ondas eletromagnéticas associadas a várias cores.

A Lei de Snell que estudamos, é resumida na relação

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \mathrm{k}$$

onde k é uma constante para cada cor da luz e é denominado índice de refração relativo entre os dois meios transparentes. Em outras palavras k varia com a cor da luz e consequentemente o trajeto dos raios luminosos é diferente para cores diferentes.

Pode-se aprofundar o estudo considerando frequências múltiplas e as suas distinções, para a luz visível, nas cores que a compõem e podemos mencionar que a decomposição de cores por um prisma ou as cores do arco-íris são explicados pela refração diferenciada dos raios luminosos de cores distintas.

Finalmente, como mencionamos no Material Relacionado deste Guia, um aprofundamento muito interessante pode ser feito com o software Trigonometria e Halos que explica os princípios geométricos do fenômeno atmosférico dos halos solares ou lunares como da foto a seguir.

FIG. 1 *Fotografia de Sébastian Dahl.*

Bibliografia

DANTE, Luiz Roberto, **Matemática – contexto e aplicações**. São Paulo: Editora Ática, 2007, capítulo 17.

PAIVA, Manoel. **Matemática – Conceitos, linguagem e aplicações**. São Paulo: Moderna, 2007, Vol 1, página 271.

FASSARELLA, Lúcio. **Lei de Snell generalizada**. Rev. Bras. Ensino Fís. [online]. 2007, vol.29, n.2 pp. 215-224. Disponível em *http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172007000200006&lng=en&nrm=iso*. ISSN 1806-1117. Acessado em 7 de dezembro de 2009.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autores
Carlos Roberto da Silva, Lourival Pereira Martins, Marcelo de Melo e Samuel Rocha de Oliveira.

Revisores
Matemática
Samuel Rocha de Oliveira
Língua Portuguesa
Ana Cecília Agua de Melo

Projeto gráfico
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara

Fotografia da torre
Wagner T. Cassimiro "Aranha"

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL