Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES

GEOMETRIA
E MEDIDAS

Guia do professor

Software

Trigonometria e halos

Objetivos da unidade

1. Mostrar a explicação de um fenômeno físico com a ajuda da função seno e sua inversa;
2. Usar a calculadora para calcular o seno de ângulos não notáveis.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Trigonometria e halos

Guia do professor

Sinopse

Neste software vamos estudar alguns aspectos matemáticos do percurso dos raios luminosos que são refletidos ou que podem ser refratados ao passar por duas interfaces planas que separam meios transparentes. Em alguns casos os raios luminosos são desviados de uma maneira bastante característica e isso é determinante para explicar o fenômeno dos halos lunares ou dos halos solares observados na atmosfera em determinadas circunstâncias.

Conteúdos

- Trigonometria, Função Seno
- Trigonometria, Função Arco Seno
- Física, Raios Luminosos e Lei de Snell.

Objetivos

1. Mostrar a explicação de um fenômeno físico com a ajuda da função seno e sua inversa;
2. Usar a calculadora para calcular o seno de ângulos não notáveis.

Duração

Uma aula dupla.

Recomendação de uso

Para melhor aproveitar este software, é recomendável que o aluno já tenha tomado contato com o software "Trigonometria e raios luminosos", que trata explicitamente da Lei de Snell, do ponto de vista geométrico e trigonométrico. Embora as atividades possam ser feitas em qualquer ordem, sugerir ao aluno que execute a sequência indicada no software. Os alunos devem ir para o ambiente informático munidos de um caderno de rascunho e de um lápis ou caneta para anotações.

Material relacionado

- Experimentos: Engenharia de Grego;
- Vídeos: Os ângulos e as Torres, Um caminho para o Curral, Transportando, Alice e as relações trigonométricas, As margens daquele Rio, Sonho dourado;
- Softwares: Trigonometria e Raios Luminosos, Ondas Trigonométricas.

Matemática Multimídia

Introdução

Este software aplica a Lei de Snell de maneira composta em duas interfaces planas que separam meios transparentes. E o fenômeno dos halos, solares ou lunares, pode ser esclarecido pela observação do ângulo de desvio sofrido por raios luminosos que passam por cristais de gelo, em formato de prisma regular de base hexagonal, que compõem algumas nuvens altas na atmosfera.

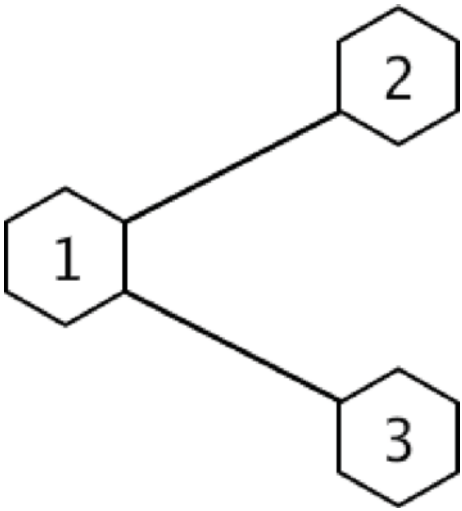
O software

Estrutura do software

Atividade 1 faz uma rápida revisão da Lei de Snell, que estabelece uma função entre os ângulos de entrada e saída em uma superfície que separa meios transparentes.

Já na atividade 2, a Lei de Snell é duplamente utilizada. Para simplificar a apresentação consideramos que o raio luminoso passa do ar para a água e da água para o ar por duas interfaces. Na primeira parte as interfaces são planos paralelos e observamos o corte perpendicular representado por retas paralelas. Na segunda parte as interfaces são planos concorrentes (representados por retas concorrentes). E na terceira parte introduzimos o conceito de desvio efetivo na direção do raio luminoso entre o raio incidente na primeira interface e o raio emergente da segunda interface.

Por fim, na ATIVIDADE 3 aplicamos o conceito desenvolvido na ATIVIDADE 2 para o caso em que o raio luminoso incide em faces de um prisma regular de base hexagonal. Os raios vão experimentar desvio como estudado na PARTE 1 ou na PARTE 2 da ATIVIDADE 2.



TELA 1 *Mapa do software.*

1 Lei de Snell

A ATIVIDADE é composta por uma única parte e tem o objetivo de revisar a Lei de Snell para dois casos em que o raio passa de um meio para o outro: o caso em que ele parte do meio de menor índice de refração para o maior e vice-versa.

Nessa PRIMEIRA PARTE o aluno é convidado a manipular uma ferramenta que permite variar, no meio de cima ou de baixo, o ângulo do raio de incidência, representado por uma semirreta. Para isso o aluno deverá movimentar um ponto azul da mesma. Após a escolha de um ângulo, o aluno deve acionar o botão *Emitir Raio* para visualizar a representação de um raio de luz que passa de um meio para outro. Assim o aluno vai perceber que há um desvio.

As questões dessa parte são feitas como revisão da Lei de Snell

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} = k$$

1.

1.1 Qual é o ângulo de saída se o raio partir do ar e incidir com um ângulo igual a 40°?

$$\operatorname{sen} b / \operatorname{sen} 40 = 1/1{,}33 \to \operatorname{sen}(b) = 0{,}642788/1{,}33 = 0{,}483299.$$

Portanto, usando o arcosen da calculadora, obtemos

$$b = \operatorname{arcsen}(0{,}483299) \approx 28{,}9°.$$

1.2 Qual é o ângulo de saída se o raio partir da água e incidir com um ângulo igual a 30°?

$$\operatorname{sen}(b)/\operatorname{sen}(30) = 1{,}33 \to \operatorname{sen}(b) \approx 1{,}33/2 = 0{,}665.$$

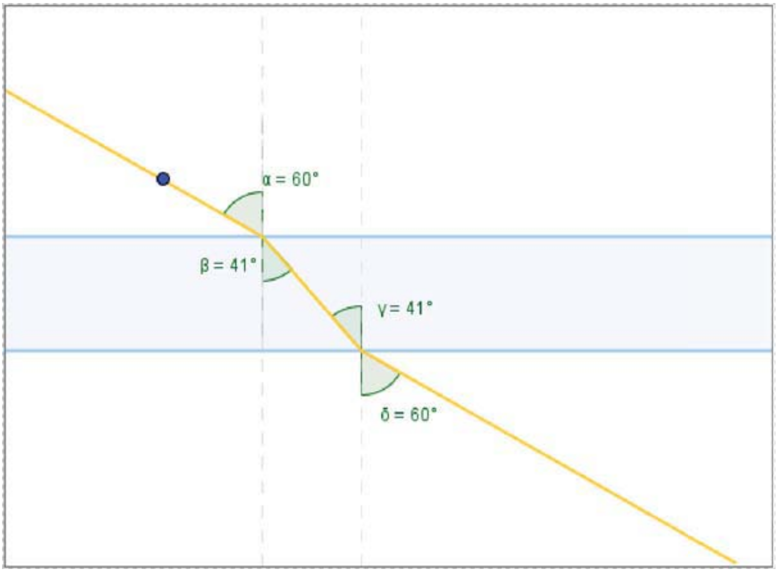
Portanto, usando o arcosen da calculadora, obtemos

$$b = \operatorname{arcsen}(0{,}665) \approx 41{,}68°.$$

2 Mais camadas

Nessa atividade a Lei de Snell é duplamente utilizada. Para simplificar a apresentação consideramos um caso em que o raio luminoso passa do ar para a água e da água para o ar por duas interfaces.

Na primeira parte, as interfaces são planos paralelos, e observamos o corte perpendicular, que fica representado por retas paralelas. As questões colocadas servem para chamar a atenção do aluno para o fato de que as duas refrações da luz, de entrada e de saída, levam apenas uma translação, mas os raios saem na mesma direção em que entraram.



TELA 2

Na SEGUNDA PARTE as interfaces são planos concorrentes (representados por retas concorrentes). O ângulo entre as retas está fixo, mas o aluno pode perceber que haverá um desvio efetivo medido por um ângulo de desvio entre o raio incidente e o emergente.

Convém mencionar as questões:

4. Qual o maior ângulo de incidência na primeira interface para o qual ocorre reflexão total na segunda interface?

   Resposta esperada: A resposta é 15° e esse ângulo pode ser obtido utilizando-se a ferramenta do software, mas é importante os alunos perceberem que ele depende do ângulo entre as retas concorrentes e o índice de refração relativo, os quais, no caso deste software, estão fixos.
5. Sobre o intervalo do ângulo de desvio:

5.1 Qual o maior ângulo de desvio que se pode obter?

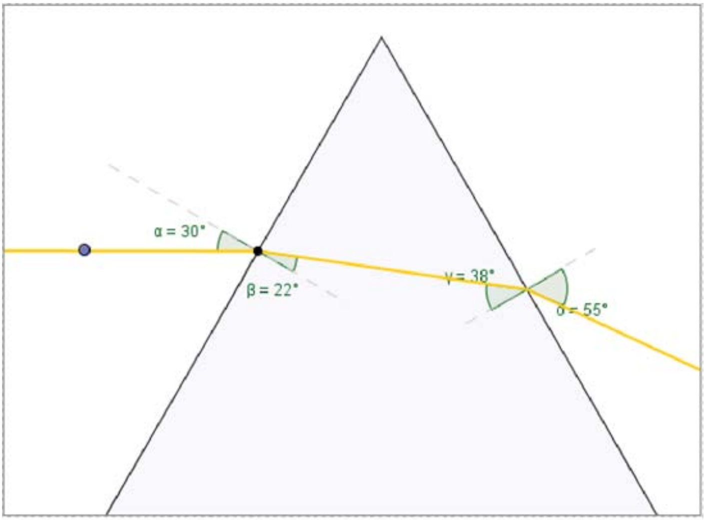
   Resposta esperada: Manipulando a ferramenta chegamos a 45°. Veja a demonstração abaixo.

5.2 E o menor?

   Resposta esperada: Com o uso da ferramenta obtemos 23°.

Considere a seguinte configuração:

O raio incide em um sistema em que as retas concorrentes formam um ângulo A, e o raio luminoso incide na primeira face com ângulo α com a normal N_1. Mostramos a reta do raio incidente para considerações posteriores.



TELA 3

O raio vai ser refratado e vai atingir a outra face do prisma. Na figura anterior mostramos os ângulos β e γ entre o raio que atravessa o meio interno e as retas normais N_1 e N_2 respectivamente. Ao sair o raio forma um ângulo δ com a normal N_2. Mostramos também a reta da direção do raio emergente para percebermos o ângulo de desvio ε indicado na figura.

Observar, por semelhança de triângulos, que os ângulos A_1 e A_2 têm o mesmo valor. E considerando o triângulo que tem os ângulos internos β, γ e $\pi - A_2$, assumindo que devem somar π, concluímos que

$$\beta + \gamma = A_1 = A_2 = A.$$

E considerando o triângulo que tem os ângulos internos $\alpha - \beta$, $\delta - \gamma$ e $\pi - \varepsilon$, assumindo que eles devem somar π, concluímos que o desvio é dado por

$$\varepsilon = \alpha - \beta + \delta - \gamma.$$

Usando a primeira relação anterior, chegamos à fórmula

$$\varepsilon = \alpha + \delta - A.$$

O ângulo de saída δ depende do ângulo de entrada α. De fato:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} = k$$

e portanto

$$\operatorname{sen}(\alpha) = k \operatorname{sen}(\beta) \quad (1)$$

e

$$\frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{\operatorname{sen}(\delta)} = \frac{1}{k}$$

e portanto

$$\operatorname{sen}(\delta) = k \operatorname{sen}(\gamma) = k \operatorname{sen}(A - \beta) \quad (2).$$

Para obtermos uma relação, usamos as expressões (1) e (2). Mas, antes disto, será útil usarmos a expressão para o seno da soma (ou diferença) de dois ângulos:

$$\operatorname{sen}(A \quad B) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) \quad \operatorname{sen}(B)\cos(A)$$

Usando a identidade acima na equação (2) temos:

$$\operatorname{sen}(\delta) = k\left[\operatorname{sen}(A)\cos(\beta) \quad \operatorname{sen}(\beta)\cos(A)\right]$$

mas $\operatorname{sen}(\beta) = {}^{\operatorname{sen}(\alpha)}/k$ e podemos usar a identidade trigonométrica $\cos(\beta)^2 + \operatorname{sen}(\beta)^2 = 1$. Desse modo, temos

$$\operatorname{sen}(\delta) = k\left[\operatorname{sen}(A)\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}(\alpha)^2}{k^2}} - \frac{\cos(A)\operatorname{sen}(\alpha)}{k}\right]$$

que pode ser simplificada para

$$\operatorname{sen}(\delta) = \operatorname{sen}(A)\sqrt{(k^2 - \operatorname{sen}(\alpha)^2)} - \cos(A)\operatorname{sen}(\alpha).$$

Daí podemos extrair uma função que relaciona o ângulo de incidência α, em um domínio bem estabelecido para que os valores sejam reais, com o ângulo de saída δ. Consequentemente, temos a função de desvio efetivo dada por

$$\varepsilon = \alpha \quad A + \operatorname{arcsen}\left\{\operatorname{sen}(A)\sqrt{(k^2 \quad \operatorname{sen}(\alpha)^2)} \quad \cos(A)\operatorname{sen}(\alpha)\right\} \qquad (3)$$

Aqui, α é a variável, para cada ângulo entre as interfaces A e para cada índice de refração k. Esta função ε é bem complicada, mas podemos mostrar que ela tem um valor mínimo para algum ângulo de incidência α. O software tem a ferramenta de observação experimental deste mínimo.

Na TERCEIRA PARTE desta ATIVIDADE 2 convém observar a questão:

7.

7.1 Encontre uma medida do ângulo de incidência para o qual ocorre reflexão total.

Resposta esperada: Deve ser 14° com o devido arredondamento.

8.

8.1 Qual o menor ângulo de desvio que pode ser obtido?

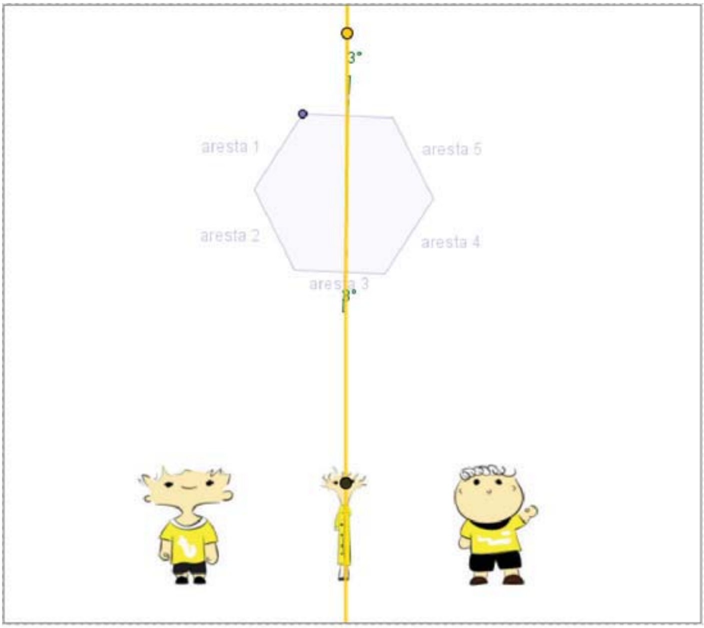
Resposta esperada: 23° com o devido arredondamento.

8.2 Qual o maior ângulo de desvio que pode ser obtido?

Resposta esperada: 45° com o devido arredondamento. Este caso ocorre quando o raio incidente está praticamente tangente à primeira face do triângulo.

3 Halo solar ou lunar

1. Explore todas as variações proporcionais com a ferramenta do software e responda: por qual das faces o raio poderá sair do cristal?



TELA 4

A ferramenta faz com que o raio incida sobre a aresta 6 do hexágono. Na configuração em que estamos trabalhando, o raio refratado da aresta 6 pode atingir as arestas 1, 2, 3, 4 ou 5. No entanto, o raio refratado na direção das arestas adjacentes, a saber, 1 e 5, chegará a essas faces com ângulos muito “rasantes”, sofrendo assim reflexão interna e se dirigindo às outras faces subadjacentes, a saber, 2 e 4. O raio pode também atingir a face 3, que é paralela à face de incidência 6.

Resposta esperada: Portanto a resposta esperada à pergunta acima é "pelas arestas 2, 3 e 4".

2. Qual o desvio angular sofrido por qualquer raio que sai pela aresta 3?

   Resposta esperada: nenhum desvio angular, pois as faces são paralelas. Veja a ATIVIDADE 2.1 do software.

A QUESTÃO 3 está desenvolvida na PRIMEIRA e na SEGUNDA PARTE da ATIVIDADE 2.

3.1 Qual o maior desvio que o raio pode sofrer?

Resposta esperada: Usando a ferramenta concluímos que este ângulo deve ser aproximadamente 45°.

3.2 Com exceção do caso em que o raio sai pela aresta 3, qual o menor desvio que ele pode sofrer?

Resposta esperada: Usando a ferramenta concluímos que este ângulo deve ser aproximadamente 23°.

Fechamento

O fenômeno dos halos solares ou lunares se deve a duas refrações em cristais de gelo formados em nuvens altas sob determinadas condições atmosféricas.

Professor, deixe claro para os alunos que a ênfase deste software está nos conteúdos de matemática que aparecem juntos, a saber, trigonometria, funções seno e sua inversa. Há vários outros aspectos que são mais apropriados para serem discutidos em aulas de física, bem como teoremas de geometria em aulas de matemática.

No software os alunos podem experimentar graficamente a função ε desvio angular do raio incidente em termos do ângulo desse raio com a normal à primeira face do cristal. Neste guia obtivemos explicitamente a função ε na equação (3).

Um hexágono regular tem o ângulo interno entre suas arestas adjacentes de 120°. O ângulo agudo entre as arestas subadjacentes é de 60°.

Por isso estudamos a dupla refração para interfaces concorrentes de 60°. Veja a figura abaixo.

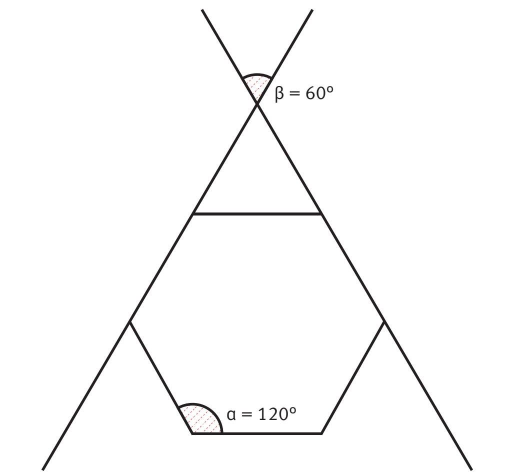


FIG. 1

Recomendamos uma revisão da relação de Snell do ponto de vista da função entre os ângulos:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} = k$$

E quando encontramos uma função complicada do desvio do ângulo para o caso genérico acima, temos muitas possibilidades de refletir sobre o seu comportamento, sobretudo graficamente. Seja $A = 60^\circ$ e $k = 1{,}31$ (o software usou valor de k um pouco maior para realçar os efeitos). O gráfico da função ε da equação (3) dada acima é o seguinte:

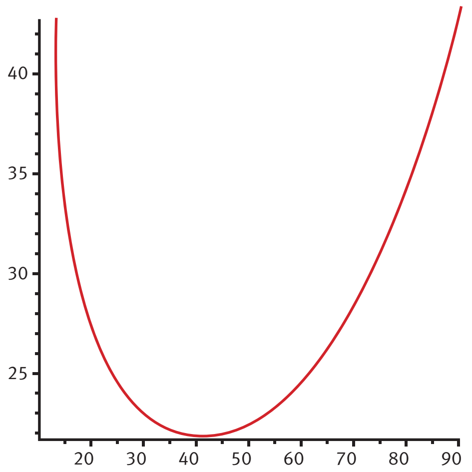


FIG. 2

Analisando o gráfico ε (eixo vertical) em função de α (eixo horizontal) observamos que o menor valor do desvio ε ocorre em torno de 23° quando o ângulo de incidência está em torno de 42°. O domínio desta função está determinado pelas constantes físicas do problema, a saber, $k = 1,31$ e $A = 60^\circ$, isto é, α está no intervalo (15,3°; 90°).

Aprofundamento

Este software tratou de alguns aspectos matemáticos da refração dupla com a aplicação ao hexágono, pois os cristais de gelo formados nas nuvens têm esse formato e o estudo dos ângulos de desvio é consistente com as observações dos halos.

Mas o prisma regular de base hexagonal tem as faces laterais e a base planas com ângulo obtuso de 90°. Os desvios provocados pelos raios que incidem em interfaces assim produzem outro halo, mais raramente observado, que é denominado halo 46°, pois este é aproximadamente o menor valor de desvio. Veja o gráfico do desvio para $A = 90°$ e $k = 1,31$:

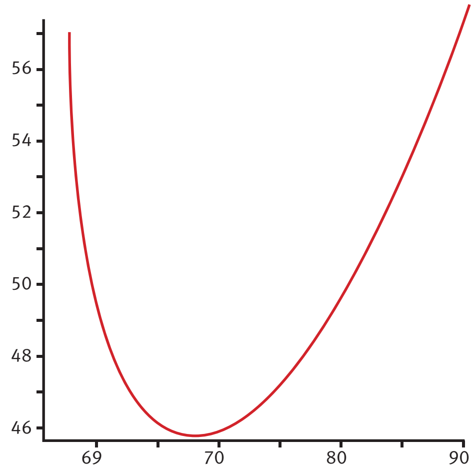


FIG. 3

Observar que o domínio da função é outro, a saber, $55 < \alpha < 90$. O mínimo do desvio é aproximadamente 46º.

Finalmente, analisamos apenas um cristal. Na nuvem há cristais em todas as direções e com muitos formatos. Assim, o fenômeno dos halos contém muitos outros ingredientes. Fica, para os alunos, a sugestão de pesquisar mais, com a ajuda por exemplo do programa HaloSim, indicado na Bibliografia, que simula os halos com muitas variáveis aleatórias tratadas estatisticamente.

Bibliografia

Dante, Luiz Roberto, **Matemática – contexto e aplicações**. São Paulo: Editora Ática, 2007, capítulo 17.

Paiva, Manoel. **Matemática – Conceitos, linguagem e aplicações**. São Paulo: Moderna, 2007, Vol 1, página 271.

HaloSim, *http://www.atoptics.co.uk/halosim.htm*
Visto em 25 de janeiro de 2010.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Samuel Rocha de Oliveira

Revisores
Língua Portuguesa
Ana Cecília Agua de Melo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

foto do halo
Adam Baker

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (imecc – unicamp)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL