Projet : Calcul de Probabilité

Exercice 4 :

1. Pour un vecteur gaussien X de moyenne b et de matrice de variance V, montrons que :

$$\Phi_X(u) = e^{\langle u,b\rangle - \frac{1}{2}\langle u,Vu\rangle}.$$

La fonction caractéristique d e X $\longrightarrow$ *N(m,*σ^2*) est donnée par :*

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$$

Preuve :

ϕx *se calcule* à l'aide ϕz *tel que z* $\longrightarrow$ N(0,1)

$\forall t \in \mathbb{R} \;\; \varphi_z(t) = -t\,\varphi'_z(t)$

Posons (U ,V)= itu (U , VU) = $\frac{\sigma^2 t^2}{2}$ < = > $\boldsymbol{\varphi_x(u)}$ **= exp** $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}) - (\frac{1}{2})(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{Vu}))$

2. Montrons que Px est à valeur réel

$\forall t \in \mathbb{R}\, d$, Nous savons que Q(-t) = Q(t), avec O le point de symétrie

Q(0)= 1 < = > **Px est valeur réel** 3.

Montrer que ΦX est p fois dérivable :

Soit *n* un entier positif. Le produit des deux fonctions d'une variable définies et dérivables jusqu'à l'ordre *n* sur un intervalle est dérivable jusqu'à l'ordre *n*. La formule de Leibniz fournit sa dérivée d'ordre *n* donnée par

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}$$

$\boldsymbol{\varphi^t}_{(x)}$ ***est p fois dérivable d'après la formule Leibniz***