Coloração de grafos(r,l)

Matheus Souza D'Andrea Alves e Uéverton dos Santos Souza

29 de agosto de 2017

Resumo

A intenção do trabalho aqui descrito é a de explorar e elaborar uma dicotomia para o problema de Coloração mínima em Grafos(r,l) (i.e. grafos que podem ser particionados em r conjuntos independentes e l cliques) quanto a sua complexidade.

Sumário

1 Conceitos básicos

1.1 Grafos(r,l)

Definição 1. *Um Grafo dito Grafo(r,l) ou abreviadamente* $G(r, l)$ *é qualquer grafo pertencente á classe dos grafos que podem ser particionados em r conjuntos independentes e l cliques.*

1.2 Coloração mínima de Grafos

Definição 2. *Entrada: um Grafo* G *e um inteiro* k
Questão: Cada vértice pertencente à G *pode ser colorido com uma entre* k *cores de tal forma que dado quaisquer dois vértices adjacentes eles tenham cores distintas e* k *seja o mínimo de cores possível?*

2 Exploração do problema de coloração mínima em Grafos(r, l)

O problema de coloração aplicado a Grafos(r,l) é de fácil solução para algumas especificações, por exemplo um Grafo vazio, que é um Grafo(0,0) pode ser colorido com 0 cores, um Grafo disperso i.e um Grafo(1,0) é colorível com apenas uma cor, já que não existem arestas nesse grafo.

Já um Grafo completo, ou seja um Grafo(0,1), é colorível com K cores onde K é a quantidade de vértices nesse grafo completo, em um Grafo split que é um Grafo(1,1) essa regra se repete, já que cada vértice do conjunto independete pode ser colorível com alguma cor já presente na clique.

E por fim, Grafos bipartidos são coloridos com 2 cores uma cor para cada conjunto independente.

Sabemos então que coloração é de solução polinomial para grafos completos, dispersos, split e para grafos bipartidos. Assim, temos como ponto de partida para a exploração futura da complexidade de Grafos de cardinalidade superiores a seguinte tabela.

$r \backslash l$	0	1	2	3	4	...	n
0	P	P	?	?	?	...	?
1	P	P	?	?	?	...	?
2	P	?	?	?	?	...	?
3	?	?	?	?	?	...	?
4	?	?	?	?	?	...	?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	?
n	?	?	?	?	?	...	?

Tabela 1: 1ł Dicotomia parcial do problema de coloração em Grafos(r,l)

Portanto agora nos é interessante abordar a complexidade para as classes na fronteira do que já conheçemos

- Grafo(0,2):

  Teorema 1. *Coloração de Grafo(0,2) é Polinomial.*

  Demonstração. Um Grafo(0,2) é um grafo separável em 2 cliques, e que todo vértice faz parte de alguma das cliques, logo conhecer a clique máxima é simples e tendo a clique máxima sabemos que o numero mínimo de cores que pode ser usado para colorir o grafo é a cardinalidade da clique máxima. □

- Grafo(3,0):

Teorema 2. *Coloração de Grafo(3,0) é Polinomial.*

Demonstração. Tendo um Grafo G da classe (3,0) como entrada para o problema de coloração sabemos então que o grafo pode ser colorido com 3 cores, resta saber se 3 é o o número mínimo de cores que pode ser usado, portanto devemos verificar se G é bipartido (colorível com duas cores) ou um grafo sem arestas (colorível com uma cor), como ambas verificações são polinomiais podemos afirmar que coloração de Grafo(3,0) é resolvível de forma polinomial. □

- Grafo(4,0):

Teorema 3. *Coloração de Grafo(4,0) é NP-Completo.*

Demonstração. Sabemos que todo grafo planar é 4-colorível, e que alguns Grafos(4,0) são planares, portanto sabemos que para qualquer Grafo G $\in$ subconjunto de planares de Grafos(4,0), sua quantidade máxima de cores é 4, nos resta saber se 4 também é sua quantidade mínima, porém 3-coloração de planar é NPc logo descobrir a coloração mínima de G é NPc e consequentemente coloração de Grafos(4,0) é NPc □

É importante notar aqui que, todo Grafo(r,l) é simultaneamente um Grafo(r+1,l) já que podemos formar uma nova clique trivial utilizando qualquer vértice, e um Grafo(r,l+1) já que podemos formar um novo conjunto independente trivial a partir de qualquer vértice, portanto se o problema de coloração é NP-Completo para um Grafo(r,l) então ele é NP-Completo para qualquer Grafo(r+1,l) ou Grafo(r,l+1).

Esses resultados nos levam à preencher a dicotomia da seguinte forma

r \ l	0	1	2	3	4	...	n
0	P	P	P	?	?	...	?
1	P	P	?	?	?	...	?
2	P	?	?	?	?	...	?
3	P	?	?	?	?	...	?
4	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	NPc
n	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc

Tabela 2: 2ł Dicotomia parcial do problema de coloração em Grafos(r,l)

Ainda nos falta mostrar a complexidade para alguns casos de fronteira, que necessitam de uma demonstração mais complexa.

Iremos demonstrar abaixo a complexidade para tais casos utilizando o seguinte teorema.

Teorema 4. *Coloração de Grafos*$(1, 2)$ *é NP-Completo*

Demonstração. A prova do teorema baseia-se em mostrar que uma solução de lista coloração para grafos(r, l) implica em uma solução para o problema de coloração de um Grafo$(r, l + 1)$ H_G, portanto para provarmos é preciso mostrar que

- Se um grafo G(r, l) possui uma lista coloração própria então H_G é k-colorível para k=nž de cores nas listas (1)

- Se H_G é k-colorível então G possui uma lista coloração própria (2)

(1):

Usaremos a seguinte construção:
Considere G um grafo(r, l) e que para cada vértice $v \in V(G)$ exista uma lista de cores S_v referente a esse vértice, cada lista contém pelo menos uma cor do conjunto $C = \{c_1, c_2, c_3, ..., c_k\}$, sendo G uma instância sim para o problema de lista coloração, criemos uma clique K onde cada vértice $k \in V(K)$ representa uma cor presente em C. Seja $H_G = G \cup K$ para todo vértice $v \in G$ e todo vértice $u_i \in K$ adicione uma aresta (u_i, v) à H_G se e somente se v não possui a cor c_i em sua lista coloração em G

Podemos então generalizar da seguinte forma, dado um grafo(r, l) G onde cada vértice de G possui uma lista de possíveis cores então o grafo H_G obtido pela construção anterior possui uma k-coloração.

Note que a clique K possui exatamente k vértices, consequentemente para colorirmos K precisaremos de k cores, sem perda de generalidade assumimos que u_1 será colorido com c_1, u_2 com c_2 e assim por diante.

Por construção uma aresta de u_i só existe para v_a em

$$H_G$$

se e somente se, v_a não possui c_i em sua lista de cores, portanto a coloração atribuída à K não conflita com a com a lista coloração de G, e portanto para todo vértice perntecente a G podemos lhe atribuir a mesma cor que lhe foi atribuída no problema de lista coloração, obtendo uma coloração própria mínima para H_G

(2):
Suponha que o grafo H_G possua uma K-coloração própria, onde k é o número de cores nas listas de G

Seja K a maior clique presente em H_G, por construção H_G é colorível com k cores onde k é a cardinalidade de K, observe que a remoção de K não afeta a coloração de $H_G - K$

Como H_G é k-colorível e a clique K possui k vértices todas as cores de tal k-coloração estão presentes em K. Sem perda de generalidade podemos assumir que as cores $c_1, c_2, ..., c_k$ estão atribuídas aos vértices $u_1, u_2, ..., u_k$ pertencentes à K

Por construção de H_G todo par (v, u_i) onde $v \in H_G - K$ e $u_i \in K$ é não adjacente se e somente se o vértice v não possui c_i em sua lista coloração no grafo G

Logo a k-coloração atribuídas aos vértices em $H_G - K$ formam uma coloração para G onde todo vértice em $V(G)$ possui uma cor de sua lista. Portanto G é uma instância sim de lista coloração □

Corolário 1. *Se lista coloração é NP-Completo para Grafos split então coloração é NP-Completo para Grafos*$(1, 2)$.

Demonstração. A NP-Completude de lista coloração em grafos split é demonstrado por Jensen et al. em "Generalized coloring for tree-like graphs" □

Corolário 2. *Se Lista coloração é NP-Completo em Grafos(2,0) então Coloração é NP-Completo em Grafos*$(2, 1)$.

Demonstração. A NP-Completude de lista coloração em grafos bipartido é demonstrado por Fellows et al. em "List Coloring and Precoloring Extension are W[1]-hard parameterized by treewidth" □

Corolário 3. *Se lista coloração é NP-Completo para Grafos(0,2) então Coloração é NP-Completo em Grafos(0,3).*

Demonstração. Para essa demonstração nos basearemos em um resultado obtido por Jensen em "Complexity results for the optimum cost chromatic partition problem". a demonstração se baseia em realizar uma redução do problema 3-SAT restrito para lista coloração de co-bipartido i.e. Grafo(0,2). Suponha o problema 3-SAT com as seguintes restrições:

- cada cláusula c_i contém dois ou três literais.
- cada literal ou sua negação aparece no máximo em 3 cláusulas

Construiremos agora uma instância de lista coloração da seguinte forma: Para cada varíavel j crie seis vértices: $a_j^{(1)}$, $a_j^{(2)}$, $a_j^{(3)}$; $b_j^{(1)}$, $b_j^{(2)}$, $3_j^{(3)}$. Atribuindo a cada uma lista de cores da seguinte forma:
$a_j^{(k)} <= \{x_j^{(k)}, \overline{x_j}^{(k)}\}$; $b_j^{(k)} <= \{\overline{x_j}^{(k)}, x_j^{((k \pmod 3))+1)}\}$
Definimos como A o conjunto de todos os $a_j^{(k)}$ e B o conjunto de todos os $b_j^{(k)}$ e construímos uma clique com os vértices de A e B. Observe que só existem duas maneiras de se colorir este grafo:

- (1) $f(a_j^{(k)}) = x_j^{(k)} => b_j^{(k)} = \overline{x_j}^{(k)}$

- (2) $f(a_j^{(k)}) = \overline{x_j}^{(k)} => b_j^{(k)} = x_j^{((k \pmod 3))+1)}$

Agora, para cada cláusula definimos um vértice c_i e sua lista de cores da seguinte forma: para cada literal j ou sua negação $\overline{j}$ presente na cláusula adicionamos à lista de c_i o $x_j^{(k)}$ onde k é o indice de ocorrência do literal ou de sua negação.

Por exemplo, suponha o seguinte 3-SAT:
$(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s)$
suas cláusulas seriam traduzidas para

- c_1 com lista: $\{p^1,\ q^1,\ r^1\ \}$
- c_2 com lista: $\{\overline{p}^2,\ q^2,\ r^2\ \}$
- c_3 com lista: $\{\overline{p}^3,\ \overline{r}^3,\ s^1\ \}$

Seja C o conjunto contendo todos os c_i criamos uma clique com $C \cup A$. Nosso grafo tem portanto a seguinte configuração(considere x' como $\overline{x}$):

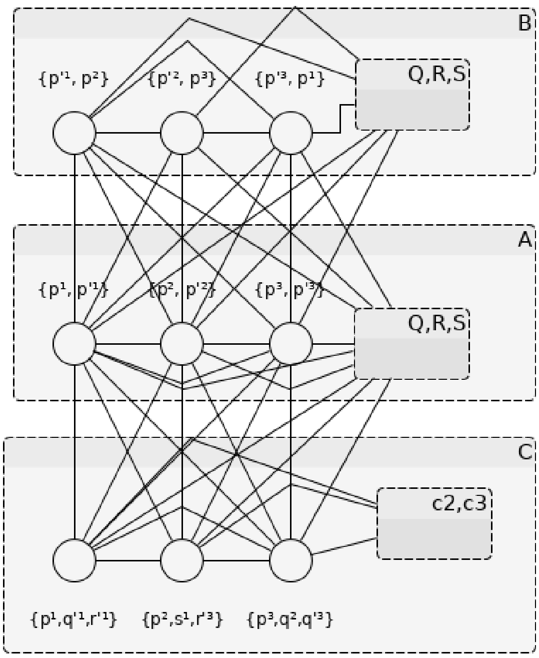

Figura 1: Grafo G: Transformaçao de 3-SAT em co-bipartido

Suponha a cláusula p, se p é falso então $a_p^{(1)}, a_p^{(2)}, a_p^{(3)}$ será colorido com p^1, p^2, p^3 respectivamente

Dessa forma mostramos que o o grafo construído só tem solução para lista coloração se existe pelo menos um literal verdadeiro em todas as cláusulas $\square$

Portanto podemos agora completar nossa tabela com:

$r \backslash l$	0	1	2	3	4	...	n
0	P	P	P	NPc	NPc	...	NPc
1	P	P	NPc	NPc	NPc	...	NPc
2	P	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc
3	P	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc
4	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	NPc
n	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc

Tabela 3: Dicotomia do problema de coloração em Grafos(r,l)

3 Conclusão

3.1 Sobre a complexidade do problema

Conseguimos mostrar através desse trabalho a complexidade para o problema de coloração em quaisquer grafos que sejam um Grafo(r,l), conseguimos também definir a intimicidade do problema de lista coloração em Grafos(r,l) com coloração mínima de Grafos(r,l+1).

3.2 Trabalhos futuros

Agora que conhecemos a dicotomia do Problema de coloração mínima em Grafos(r,l) uma pergunta surge naturalmente, quais são as características que tornam os casos fronteiriços mais complexos que seus pares de ordem inferior? seria possível determinar características que tornassem o problema parametrizávelmente resolvível?

Sobre essas perguntas se basearão os trabalhos futuros, determinar se possível um algoritmo parametrizado para a resolução da coloração de Grafos(r,l) que sejam NP-Completos.