The colourability problem on (r, ℓ)-graphs.

And a few parametrized solutions

Matheus S. D'Andrea Alves, **Uéverton dos Santos Souza**

August 2018

Topics

The problem

(r, ℓ)-Graph
A graph which the vertex set is partitionable into r independent sets and ℓ cliques.

Proper vertex coloring
A proper vertex coloring of a graph G is the assignment of one element from a set C of q to each vertex in $V(G)$, such that no two adjacent vertices share a common color. A coloring using at most q color is called a (proper) q-coloring.

Our question:

When does this problem become NP-Complete?

Why?

Our approach

The strategy

Build a dichotomy of the problem, based on the growth of both r and ℓ.

Use the results to find patterns that exposes the hardness of the problem.

First step

It is easy to see that:

- A *null* graph (i.e. a graph with 0 vertices) is 0-colorable.
-
-
-
-

First step

It is easy to see that:

- A *null* graph (i.e. a graph with no vertices) is 0-colorable.
- A empty graph (i.e. a graph with no edges) is 1-colorable.
-
-
-

First step

It is easy to see that:

- A *null* graph (i.e. a graph with no vertices) is 0-colorable.
- A empty graph (i.e. a graph with no edges) is 1-colorable.
- A bipartite graph (i.e. a graph partitionated into two independent sets) is 2-colorable.
-
-

First step

It is easy to see that:

- A *null* graph (i.e. a graph with no vertices) is 0-colorable.
- A empty graph (i.e. a graph with no edges) is 1-colorable.
- A bipartite graph (i.e. a graph partitionated into two independent sets) is 2-colorable.
- A complete graph (i.e. a graph in which every pair of distinct vertices is connected) is n-colorable where n is the size of $V(G)$.
-

First step

It is easy to see that:

- A *null* graph (i.e. a graph with no vertices) is 0-colorable.
- A empty graph (i.e. a graph with no edges) is 1-colorable.
- A bipartite graph (i.e. a graph partitionated into two independent sets) is 2-colorable.
- A complete graph (i.e. a graph in which every pair of distinct vertices is connected) is n-colorable where n is the size of $V(G)$.
- A split graph (i.e. a graph partitionated into a independent set and a clique) is k-colorable where k is the size of the maximal clique.

Partial dichotomy

$r \backslash l$	0	1	2	3	4	...	n
0	P	P	?	?	?	...	?
1	P	P	?	?	?	...	?
2	P	?	?	?	?	...	?
3	?	?	?	?	?	...	?
4	?	?	?	?	?	...	?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	?
n	?	?	?	?	?	...	?

Table 1: Partial dichotomy on the Colourability problem in (r, ℓ)-graphs

Theorem
Colourability in $(0,2)$-graphs can be solved in polynomial time.

Proof.
A co-bipartite graph is a graph partitionated into two cliques such that every vertex belongs to a clique. It is widely known that any co-bipartite graph is a perfect graph, therefore, your chromatic number is the size of it's maximal clique. It has been shown that, to find the maximal clique in a co-bipartite graph is equivalent to find a vertex cover in it's complement, and therefore solvable in polynomial time. $\square$

Theorem
Colourability in $(3, 0)$*-graphs can be solved in polynomial time.*

Proof.
As we know that the given graph is a $(3, 0)$-graph, we know that it is $3 - colorable$.

To find out if it is 2-colorable (i.e bipartite) or 1-colorable (i.e a empty graph) is solvable in polynomial time. Therefore determining the chromatic number of such graph can be solved in polynomial time. $\square$

Partial dichotomy

r \ l	0	1	2	3	4	...	n
0	P	P	P	?	?	...	?
1	P	P	?	?	?	...	?
2	P	?	?	?	?	...	?
3	P	?	?	?	?	...	?
4	?	?	?	?	?	...	?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	?
n	?	?	?	?	?	...	?

Table 2: Partial dichotomy on the Colourability problem in (r, ℓ)-graphs

Theorem
Colourability in $(4, 0)$-graphs is NP-Complete.

Proof.
As we know that the given graph is a $(3, 0)$-graph, we know that it is $3 - \textit{colorable}$. We need to find out if it can be colored with fewer colors; Note that 3-coloring of planar graphs is NP-Complete, planar graphs are a sub-class of $(4, 0)$-graphs, leading to the NP-Completeness of Colourability in $(4, 0)$-graphs. $\square$

Partial dichotomy

$r \backslash l$	0	1	2	3	4	$\dots$	n
0	*P*	*P*	*P*	?	?	$\dots$	?
1	*P*	*P*	?	?	?	$\dots$	?
2	*P*	?	?	?	?	$\dots$	?
3	*P*	?	?	?	?	$\dots$	?
4	*NPc*	?	?	?	?	$\dots$	?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	?
n	?	?	?	?	?	$\dots$	?

Table 3: Partial dichotomy on the Colourability problem in (r, ℓ)-graphs

Partial dichotomy

r \ l	0	1	2	3	4	$\ldots$	n
0	*P*	*P*	*P*	*?*	*?*	$\ldots$	*?*
1	*P*	*P*	*?*	*?*	*?*	$\ldots$	*?*
2	*P*	*?*	*?*	*?*	*?*	$\ldots$	*?*
3	*P*	*?*	*?*	*?*	*?*	$\ldots$	*?*
4	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	$\ldots$	*NPc*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	*NPc*
n	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	$\ldots$	*NPc*

Table 4: Partial dichotomy on the Colourability problem in (r, ℓ)-graphs

How to proceed?

The relationship between coloring and list-coloring in (r, ℓ)-graphs

The relationship between coloring and list-coloring in (r, ℓ)-graphs

Theorem
List-coloring in (r, ℓ)-graphs is equivalent to coloring in $(r, \ell + 1)$-graphs.

Proof.

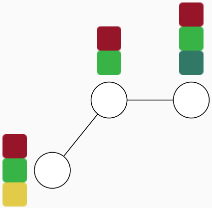
A prova consiste em mostrar que a solução do problema de lista coloração em um Grafo(r, ℓ) G, implica em uma solução para o problema de coloração em Grafos$(r, \ell + 1)$ H_G.

Para tanto, mostraremos que:

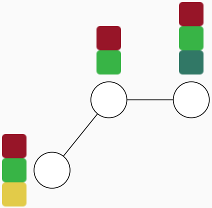
- Se um grafo G(r, ℓ) possui uma lista coloração própria então H_G é k-colorível para k do tamanho da paleta C (1).
- Se H_G é k-colorível então G possui uma lista coloração própria (2).

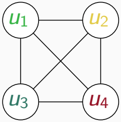
(1):

Seja G um Grafo(r, ℓ) tal que cada vértice $v \in V(G)$ tenha uma lista de cores;
Cada lista tem pelo menos uma cor do seguinte conjunto:
$C = \{c_1, c_2, c_3, ..., c_k\}$.



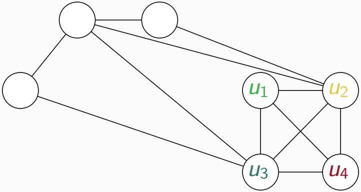
Seja G uma instância para o problema de lista coloração, construirémos uma clique K, onde cada vértice $u \in V(K)$ representa uma cor de C.





Note que a clique K tem exatamente k vértices, portanto, podemos colorir K com apenas k cores, sem perda de generalidade* assumiremos que $u_i \in K$ será colorido com a cor c_i.

Suponha $H_G = G \cup K$, e para cada vértice $u_i \in V(K)$ e todo vértice $v_j \in V(G)$ adicione uma aresta (u_i, v_j) em H_G se e somente se c_i não é uma cor pertencente a lista de v_j.



Ao colorir G, colorir u_i com c_i em K não conflita para a coloração encontrada para G, e nos leva à coloração para H_G.

(2):

Sabemos que o grafo H_G é um grafo$(r, \ell + 1)$ e possui uma k-coloração.

Perceba que a remoção de K de H_G (que se tronará G) não afeta sua coloração, perceba que para os restantes vértices $v \in V(G)$ construímos suas listas baseando-se em seus não vizinhos em K portanto a coloração adquirida em H_G ainda é válida em G por construção.

Dessa forma mostramos que, se H_G é k-colorível, G é lista-colorível. $\square$

Corolários

Com o resultado obtido podemos afirmar que:

- Coloração em Grafos$(1, 2)$ é NP-Completo.
  Deriva da demonstração de NP-Completude para lista coloração em Split mostrado por Jensen et al. em *"Generalized coloring for tree-like graphs"*.
- Coloração em Grafos$(2, 1)$ é NP-Completo.
  Deriva da demonstração de NP-Completude para lista coloração em bipartidos mostrado por Fellows et al. em *"List Coloring and 3-Precoloring Extension are W[1]-hard parameterized by treewidth"*.

Peculiaridade do Grafo$(2,1)$

É trivial notar que essa classe de grafo possui um limite superior e um inferior para sua coloração ($K+1$ e K respectivamente), porém apesar das restrições é NP-Completo determinar qual delas é a correta.

Dicotomia parcial

$r \backslash l$	0	1	2	3	4	...	n
0	*P*	*P*	*P*	*?*	*?*	...	*?*
1	*P*	*P*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
2	*P*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
3	*P*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
4	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	*NPc*
n	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*

Table 5: Dicotomia parcial para coloração de Grafos(r, ℓ)

Corolary
Coloração de Grafos$(0,3)$ *é NP-Completo.*

Proof.
Deriva da demonstração de NP-Completude para lista coloração em Grafos$(0,2)$ demonstrado por Jensen et al. em *"Complexity results for the optimum cost chromatic partition problem"*. $\square$

Os resultados encontrado preenchem a dicotomia.

r \ l	0	1	2	3	4	...	n
0	*P*	*P*	*P*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
1	*P*	*P*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
2	*P*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
3	*P*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
4	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	*NPc*
n	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*

Table 6: Dicotomia de complexidade para coloração em Grafos(r,ℓ)

O que investigar em Grafos(r, ℓ)?

A idéia

O Problema é NP-Completo.

Queremos encontrar um algoritmo FPT, que tem formato $\mathcal{O}(f(k)n^c)$.

Usar o tamanho das partições de um Grafo$(2,1)$ como parâmetros do problema.

Parametrização pelo tamanho dos conjuntos independentes

Parametrização

Parametrização de Grafo$(2, 1)$ pelo tamanho do menor independente

Sabemos que podemos transformar esse problema em lista coloração de bipartido.

Fellows mostrou que lista-coloração é W[1]-difícil para bipartidos quando parametrizado pelo tamanho do menor independente.[1]

Portanto coloração é W[1]-difícil quando parametrizado pelo tamanho do menor independente em um Grafo$(2, 1)$.

Parametrização de Grafo$(2, 1)$ pelo tamanho do maior independente.

Sabemos que podemos transformar esse problema em lista coloração de bipartido.

Em uma lista coloração de bipartido, se um vértice possui uma lista com mais cores do que o tamanho de sua vizinhança, ele sempre terá disponível uma cor para sua coloração, podemos portanto remover esse vértice do grafo sem alterar sua coloração.

Observe que isso implica que após a remoção de todos os vértices com esse padrão o tamanho das listas está agora limitado por uma função de k, portanto aplicar um algoritmo de força bruta nos dá um algoritmo FPT.

Parametrização pelo tamanho da clique

Queremos agora entender o comportamento e parametrização de coloração quando a clique é pequena.

Coloração de Grafo$(2, 1)$ quando a clique é restrita, é equivalente a lista coloração em bipartido com a paleta restrita.

Para isso iremos apresentar um problema que nos ajudará a entender o comportamento de lista coloração.

PreColoring extension

Entrada: Um grafo G onde alguns vértices já possuem uma coloração definida com cores escolhidas dentre k possíveis cores.

Pergunta: É possível estender a coloração já existente para todo o grafo sem que dois vértices adjacentes possuam a mesma cor?

Tal problema é mostrado ser NP-Completo para o caso restrito de 3-PreCloring extension.[3]

3-lista coloração em grafos bipartidos é NP-Completo.

Tendo um grafo G e uma paleta C pertencente a uma instância P de *3-PreColoring extension*.

Formamos um grafo G' usando todo vértice pré-colorido $v \in V(G)$ atribuindo ao mesmo uma lista com sua cor de G em G', aos demais vértices de G criamos um vértice com lista contendo todos as cores de C e mantendo sua vizinhança.

Uma coloração possível para G implica em uma coloração possível para G' , já que nos basta atribuir aos vértices em G' as mesmas cores atribuídas em G. De forma análoga, uma lista coloração possível em G' implica em uma coloração possível em G.

Parametrização pelo tamanho da clique.

Para demonstração da intratabilidade parametrizada, basta retornarmos à transformação do problema de coloração em Grafo$(2, 1)$ onde a clique é um triângulo em lista coloração de bipartido com paleta com três cores.

Estamos tentando parametrizar a resolução de lista coloração de bipartido pelo tamanho da paleta de cores, que mostramos ser inviável anteriormente.

Portanto esse problema é para-NP-Completo quando parametrizado pelo tamanho da clique.

Os resultados ainda são insatisfatórios.

O que mais observamos sobre esse comportamento?

Observações

Usando um Grafo$(2,1)$ onde a partição da clique também é a clique máxima e tem tamanho 3, nosso problema se torna o problema de 3-lista-coloração em bipartido.

3-coloração de bipartido é Polinomial.

2-coloração de bipartido é Polinomial

3-lista-coloração de bipartido é NP-Completo.

O que ocorre quando o número de vértices com listas de tamanho 1, 2 e 3 variam?

Sobre a vizinhança da clique

Observe que, se um nó não é vizinho de nenhum vértice na clique, após a redução esse vértice tem lista de tamanho três. Todo vértice vizinho a clique, após a transformação tem vértice com lista de tamanho $3 - x$ onde x é o número de seus vizinhos na clique.

Um vértice nunca terá uma lista de tamanho 0.

Parametrização pela vizinhança da clique

Theorem
Seis vértices com lista de tamanho um são suficientes para que lista coloração em bipartido seja NP-completo.

Demonstração.

Sabemos que em nosso problema temos dois conjuntos independentes, r_1 e r_2, também é verdade que exceto pelos citados seis vértices todos os outros tem listas de tamanho três, os vértices de r_1 podem estar ligados arbitrariamente aos de r_2. Observe o seguinte gadget.

Vértices com listas de tamanho um

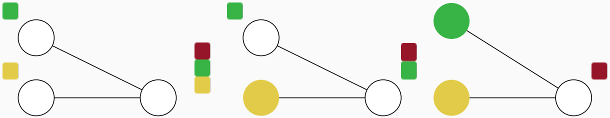


Figure 1: Gadget com vértices de lista um reproduzindo vértice de lista um em vértice de lista três

Com o gadget apresentado é possível conduzir à escolha de uma cor para um vértice com lista tamanho três dado que a única coloração possível para o gadget é a coloração aonde a cor desejada ocorre.

Vértices com listas de tamanho um

Utilizando esse gadget é possível transformar uma instância de 3-PreColoring Extension em bipartidos em uma de lista coloração em bipartido, basta para tanto pegarmos os vértices do Grafo G que estão pré-coloridos e criar um vértice equivalente em um grafo G' com listas tamanho três, os ligando aos vértices com listas tamanho um e mantendo a bipartição de forma a excitar a cor que este vértice possuia em G, os demais vértices são mapeados para vértices com listas tamanho três, mantendo sua vizinhança equivalente a em G.

Vértices com listas de tamanho um

Theorem
Três vértices com lista de tamanho um são suficientes para que lista coloração em bipartido seja NP-completo.

Proof.
Usando o gadget apresentado anteriormente, dois vértices v com lista um em um vértice u com lista três são capazes de reproduzir um vértice de lista um através da retirada da lista de u as únicas possíveis cores para v, sendo assim tendo três vértices de distintas listas tamanho um, é possível obter seis vértices de lista um (com três listas distintas de cada lado) permitindo dessa forma a redução da instância de 3-Precoloring para instância de lista coloração. □

Vértices com listas de tamanho dois

Como já visto o problema é de trivial solução quando todos os vértices tem listas de tamanho três, portanto precisamos ainda encontrar qual número de vértices de tamanho dois onde o problema se mantém NP-Completo.

Theorem
Seis vértices com listas tamanho 2 são necessários e suficientes para que lista-coloração em bipartido seja NP-Completo.

Demonstração.

Se um conjunto independente contém apenas dois vértices com listas tamanho dois, todos os vértices nesse conjunto compartilham uma cor em suas listas, podendo colorir tal conjunto com essa cor.

Todos os outros vértices ainda têm pelo menos uma cor disponível para sua coloração podendo ser colorido com ela.

Para completar nossa demonstração basta portanto, encontrar uma configuração onde o problema de lista coloração permanece NP-Completo.

Para tanto nos é interessante agora a vizinhança entre os vértices com lista dois, iremos isolar as instâncias em alguns casos.

Todo vértice tem vizinhança de tamanho dois e nenhuma vizinhança fechada possui uma cor em comum

As restrições impostas a esse caso nos levam a uma única possível estrutura Γ onde suas duas possíveis colorações são intercambiáveis.

Portanto se mostra verdade que podemos excitar uma cor qualquer em outro vértice de lista tamanho três se o ligarmos a dois dos três vértices presentes no independente oposto sem ferir a bipartição do grafo.

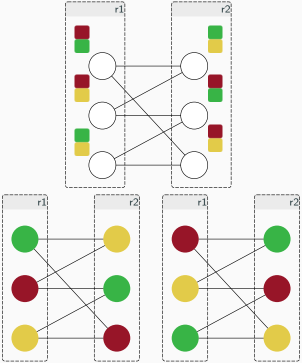


Figure 2: Estrutura Γ e suas possíveis colorações.

Assim sendo para reduzir um problema de 3-PreColoring extension em bipartido Π ao nosso problema Π' basta que para todo vértice pré-colorido $v_{c_j} \in V(\Pi) | c_j \in C$ cria-se um paralelo $u \in V(\Pi')$ com lista de tamanho três e liga-o aos vértices de Γ a fim de excitar sua cor da seguinte forma:

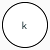
Escolha sem perda de generalidade um vértice $v \in r1$ pré-colorido com a cor c_j, observe que Γ possui dois conjuntos de ligações capazes de excitar c_j em u utilizando o gadget da Figura 1, escolha um desses conjuntos. Portanto $\forall v_{c_j} | j \neq i$ basta realizar a ligação com Γ respeitando o conjunto de ligações já escolhido. Os demais vértices de $V(\Pi)$ são construídos mantendo suas respectivas vizinhanças em Π' e com lista de tamanho três.

Uma resposta para Π' implica em uma resposta para Π, pois se Π' é lista colorível, então Π é colorível respeitando a pré-coloração, já que a coloração de Γ é indiferente para os vértices não vizinhos à ela e sempre respeita a coloração de sua vizinhança, para a demonstração da volta basta escolher as mesmas cores escolhidas em Π para seus respectivos em Π' que implicará em uma coloração para Γ inofensiva ao resultado. $\square$

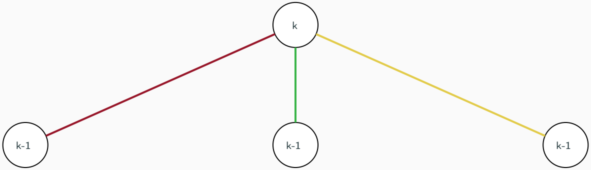
Theorem
Lista coloração em bipartidos com listas de tamanho um a três é FPT quando parametrizado pela quantidade de vértices com lista de tamanho três.

Proof.
Dado que temos k vértices com 3 escolhas cada é possível montar um algoritmo de busca em árvore de altura limitada de tamanho 3^k, e então executar o algoritmo linear conhecido da literatura, obtendo um algoritmo $\mathcal{O}(3^k n^c)$ □

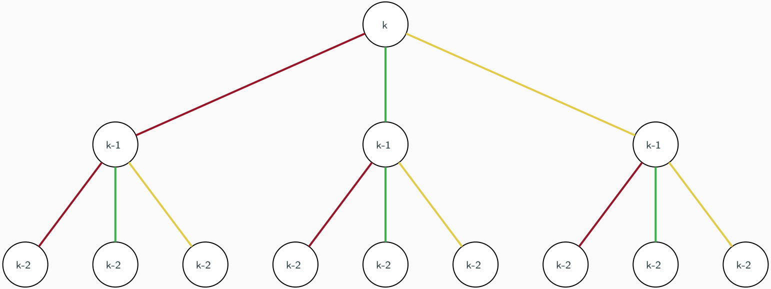
Árvore de altura limitada



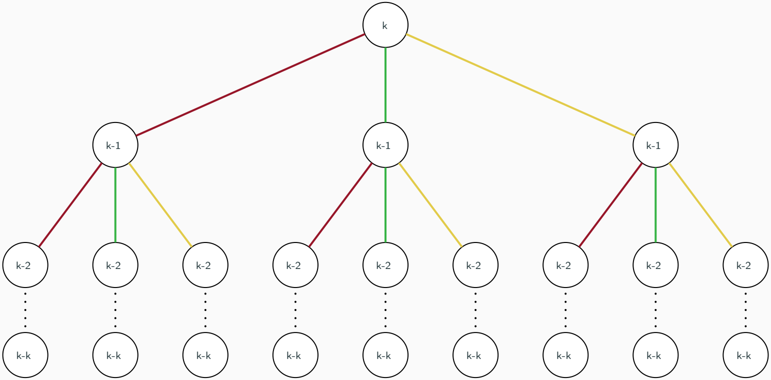
Árvore de altura limitada



Árvore de altura limitada



Árvore de altura limitada



Conclusão

Resultados clássicos

Conseguimos portanto a partir desse trabalho descrever a complexidade computacional do problema em questão.

r \ l	0	1	2	3	4	...	n
0	*P*	*P*	*P*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
1	*P*	*P*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
2	*P*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
3	*P*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
4	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	*NPc*
n	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*

Table 7: Dicotomia de complexidade para coloração em Grafos(r, ℓ)

Para tanto desenvolvemos uma estratégia inédita de redução de lista coloração à coloração, permitindo a identificação de características passíveis de parametrização.

Resultados colaterais

É conhecido que o problema de coloração em um grafo G pode ser visto como um problema de clique cover em seu complemento G'[2], dessa forma podemos estender a dicotomia P/NPc de coloração em (r, ℓ) para o problema de clique cover em grafos(r, ℓ) simplesmente trocando as linhas pelas colunas da tabela, dessa forma obtemos a seguinte dicotomia P/NPc:

r \ l	0	1	2	3	4	...	n
0	P	P	P	P	NPc	...	NPc
1	P	P	NPc	NPc	NPc	...	NPc
2	P	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc
3	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc
4	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	NPc
n	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc

Table 8: Dicotomia P/NPc do problema de clique cover em Grafos(r, ℓ)

Exploramos também o comportamento do problema em Grafos$(2,1)$ Obtendo dessa forma:

- 2 algoritmos FPT.
- Uma demonstração de $W[1]-$*dificuldade*
- Algumas de para-NP-completude

Mostrando colateralmente características inesperadas de dificuldade.

Trabalhos futuros

- Existe uma relação entre as parametrizações da coloração de Grafos$(2, 1)$ e clique cover de Grafos$(1, 2)$?
- Quais são as características que afetam parametrizações em Grafos(r, ℓ) diferentes de Grafos$(2, 1)$?
- Existe algum parâmetro que seja possível extrair um algoritmo FPT para qualquer r ou ℓ?

OBRIGADO!

Perguntas?

Michael Fellows, Fedor V. Fomin, Daniel Lokshtanov, Frances Rosamond, Saket Saurabh, Stefan Szeider, and Carsten Thomassen.
On the complexity of some colorful problems parameterized by treewidth.
2007.

Michael R. Garey and David S. Johnson.
***Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*.**
1979.

J. Kratochvil.
Precoloring extension with fixed color bound.
1994.