Coloração de Grafos(r, ℓ)

Coloração de Grafos(r, ℓ)

Matheus S. D'Andrea Alves, **Uéverton dos Santos Souza**

Julho 2018

Universidade Federal Fluminense

Overral

O problema

Nossa abordagem

Primeiros resultados

A relação entre coloração e lista-coloração em Grafos(r, ℓ)

Final results

O problema

Grafo(r, ℓ)
Um grafo que pode ser particionado em r conjuntos independentes e ℓ cliques.

Coloração dos vértices de um grafo
Uma coloração de um grafo G é uma associação de uma cor entre k cores a cada vértice do grafo de forma que, dado dois vértices vizinhos em G eles não compartilhem uma cor, e k seja o menor número de cores possíveis a respeitar tal restrição.

A PERGUNTA:

Quando tal problema se torna NP-Completo?

Porque?

Nossa abordagem

A idéia

Construir uma dicotomia sobre a complexidade do problema, baseando-se nos valores de r e ℓ.

Analisar os resultados e investigar padrões na dificuldade do problema.

Primeiros passos

Começaremos dos seguintes fatos:

- Um grafo vazio(i.e. um Grafo$(0, 0)$) é 0-colorível.
-
-
-
-

Primeiros passos

Começaremos dos seguintes fatos:

- Um grafo vazio (i.e. um Grafo$(0, 0)$) é 0-colorível.
- Um grafo sem arestas (i.e. um Grafo$(1, 0)$) é 1-colorível.
-
-
-

Primeiros passos

Começaremos dos seguintes fatos:

- Um grafo vazio (i.e. um $\text{Grafo}(0, 0)$) é 0-colorível.
- Um grafo sem arestas (i.e. um $\text{Grafo}(1, 0)$) é 1-colorível.
- Um grafo bipartido (i.e. um $\text{Grafo}(2, 0)$) é 2-colorível.
-
-

Primeiros passos

Começaremos dos seguintes fatos:

- Um grafo vazio (i.e. um Grafo$(0, 0)$) é 0-colorível.
- Um grafo sem arestas (i.e. um Grafo$(1, 0)$) é 1-colorível.
- Um grafo bipartido (i.e. um Grafo$(2, 0)$) é 2-colorível.
- Um grafo completo (i.e. um Grafo$(0, 1)$) é $k - colorivel$ onde k é a quantidade de vértices de G.
-

Primeiros passos

Começaremos dos seguintes fatos:

- Um grafo vazio (i.e. um $\text{Grafo}(0,0)$) é 0-colorível.
- Um grafo sem arestas (i.e. um $\text{Grafo}(1,0)$) é 1-colorível.
- Um grafo bipartido (i.e. um $\text{Grafo}(2,0)$) é 2-colorível.
- Um grafo completo (i.e. um $\text{Grafo}(0,1)$) é $k-colorivel$ onde k é a quantidade de vértices do grafo.
- Um grafo split (i.e. um $\text{Grafo}(1,1)$) é $k-colorivel$ where k é a quantidade de vértices na clique máxima do grafo.

Teorema
Coloração de Grafos(0,2) é Polinomial.

Demonstração.
Um grafo co-bipartido, é um grafo separável em 2 cliques em que todo vértice faz parte de alguma das cliques. A partir da literatura sabemos que um grafo co-bipartido é perfeito, isso é, seu número cromático é igual ao de sua clique máxima. Já foi mostrado que encontrar a clique máxima em um co-bipartido é equivalente a se encontrar uma cobertura de vértices em seu complemento e portanto polinomial, ao encontrarmos a clique máxima sabemos que precisamos de seu número de vértices em cores para colorir tal grafo. □

Teorema
Coloração de Grafos$(3, 0)$ *é Polinomial.*

Demonstração.
Como sabemos que tal grafo é um Grafo(3,0) sabemos que o mesmo pode ser colorido com três cores. Saber se o mesmo pode ser colorido com duas ou uma cor é polinomial, portanto podemos afirmar que coloração em Grafos(3,0) é polinomial. $\square$

A mais

Teorema
Coloração de Grafos$(4,0)$ *é NP-Completo.*

Demonstração.
Sabemos que tal grafo é um Grafo(4,0), logo é possível o colorir com 4 cores. Precisamos descobrir se o mesmo pode ser colorido com menos cores; Note que 3-coloração de planar é NP-Completo, e que existem subconjuntos de Grafos$(4,0)$ que são planares, logo coloração de Grafos$(4,0)$ é NP-Completo. □

Primeiros resultados

Dicotomia parcial

$r \backslash l$	0	1	2	3	4	$\dots$	n
0	P	P	P	?	?	$\dots$	?
1	P	P	?	?	?	$\dots$	?
2	P	?	?	?	?	$\dots$	?
3	P	?	?	?	?	$\dots$	?
4	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	$\dots$	NPc
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	NPc
n	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	$\dots$	NPc

Tabela 1: Dicotomia parcial para coloração de Grafos(r, ℓ)

Como prosseguir?

A relação entre coloração e lista-coloração em Grafos(r, ℓ)

Teorema
Coloração é NP-Completo para Grafos$(r, \ell + 1)$ *quando lista coloração é NP-Completo para Grafo*(r, ℓ)

Proof.

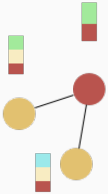
A prova consiste em mostrar que a solução do problema de lista coloração em um Grafo(r, ℓ) G, implica em uma solução para o problema de coloração em Grafos($r, \ell + 1$) H_G.

Para tanto, mostraremos que:

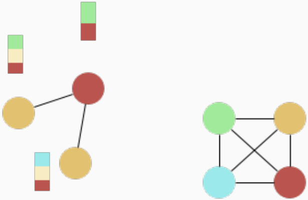
- Se um grafo G(r, ℓ) possui uma lista coloração própria então H_G é k-colorível para k do tamanho da paleta C (1).
- Se H_G é k-colorível então G possui uma lista coloração própria (2).

(1):

Seja G um Grafo(r, ℓ) tal que cada vértice $v \in V(G)$ tenha uma lista de cores;
Cada lista tem pelo menos uma cor do seguinte conjunto:
$C = \{c_1, c_2, c_3, ..., c_k\}$.

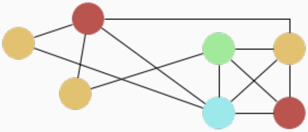


Seja G uma instância **sim** para o problema de lista coloração, construirémos uma clique K, onde cada vértice $u \in V(K)$ representa uma cor de C.



Note tque a clique K tem exatamente k vértices, portanto, podemos colorir K com apenas k cores, sem perda de generalidade assumiremos que $u_i \in K$ será colorido com a cor c_i.

Suponha $H_G = G \cup K$, e para cada vértice $u_i \in V(K)$ e todo vértice $v_j \in V(G)$ adicione uma aresta (u_i, v_j) em H_G se e somente se c_i não é uma cor pertencente a lista de v_j.



Usando tal coloração, a coloração de K não conflita para a coloração encontrada para G, temos assim uma coloração para H_G.

(2):

Sabemos que o grafo H_G é um grafo$(r, \ell + 1)$ e possui uma k-coloração. Onde K é a clique máxima de H_G. Seja k o número de vértices em K.

Perceba que a remoção de K de H_G (que se tronará G) não afeta sua coloração, perceba que para os restantes vértices $v \in V(G)$ construímos suas listas baseando-se em seus não vizinhos em K portanto a coloração adquirida em H_G ainda é válida em G por construção.

Dessa forma mostramos que, se H_G é k-colorível, G é lista-colorível. $\square$

Com o resultado obtido podemos afirmar que:

- Coloração em Grafos$(1, 2)$ é NP-Completo.
  Deriva da demonstração de NP-Completude para lista coloração em Split mostrado por Jensen et al. em *"Generalized coloring for tree-like graphs"*.
- Coloração em Grafos$(2, 1)$ é NP-Completo.
  Deriva da demonstração de NP-Completude para lista coloração em bipartidos mostrado por Fellows et al. em *"List Coloring and Precoloring Extension are W[1]-hard parameterized by treewidth"*.
- Coloração de Grafos$(0, 3)$ é NP-Completo.
  Deriva da demonstração de NP-Completude para lista coloração em Grafos$(0, 2)$ demonstrado por Jensen et al. em *"Complexity results for the optimum cost chromatic partition problem"*.

Peculiaridade do Grafo$(2,1)$

É trivial notar que essa classe de grafo possui um limite superior e um inferior para usa coloração ($K+1$ e K respectivamente), porém apesar das restrições é NP-Completo determinar qual delas é a correta.

Final results

On minimum coloring

These results allow us to finish our dichotomy.

$r \backslash l$	0	1	2	3	4	...	n
0	*P*	*P*	*P*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
1	*P*	*P*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
2	*P*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
3	*P*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
4	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	*NPc*
n	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*

Tabela 2: Dichotomy of the minimum vertex coloring problem on Graph(r,l)

Coloring of a Graph G may be seen as *Clique cover* of it's complement G', impling in:

$r \backslash l$	0	1	2	3	4	...	n
0	P	P	P	P	NPc	...	NPc
1	P	P	NPc	NPc	NPc	...	NPc
2	P	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc
3	Npc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc
4	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	NPc
n	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc

Tabela 3: Dichotomy of the clique cover problem on Graph(r,l)

Does the Minimum vertex coloring problem has a parametrized solution for Graph(r,l)?

Graph(2,1)

Parametrized by the size of the smallest independent set

We know the clique can be colored with k colors.

We know that we can transform a minimun coloring problem into a list coloring problem.

Fellows showed that the list coloring problem is w[1]-hard for bipartide graph when parametrized by the size of the smallest independent set.

Minimal vertex coloring is w[1]-hard when parametrized by the smallest independet set in a Graph(2,1).

Conclusion

We were sucessfull in building our foundation, answering our first question, and discovered a interesting relation between two coloring problems applied to the Graph(r,l) class.

Future works:

- Why the problem behave that way?
- Does the Minimum vertex coloring problem has a parametrized solution for Graph(r,l)?

THANK YOU!

Questions?