Matheus Souza D'Andrea Alves

Análise de complexidade parametrizada em problemas de coloração para Grafos(r,l)

Niterói
Rio de Janeiro
Brasil
2017

Matheus Souza D'Andrea Alves

Análise de complexidade parametrizada em problemas de coloração para Grafos(r,l)

Trabalho de conclusão de curso submetido para obtenção do título de bacharel em Ciência da Computação concedido pelo Instituto de Computação da Universidade Federal Fluminense

Universidade Federal Fluminense – UFF

Instituto de Computação

Orientador: Uéverton dos Santos Souza

Coorientador: Raquel de Souza Fransisco Bravo

Niterói

Rio de Janeiro
Brasil

2017

Matheus Souza D'Andrea Alves
Análise de complexidade parametrizada em problemas de coloração para Grafos(r,l)/ Matheus Souza D'Andrea Alves. – Niterói
Rio de Janeiro
Brasil, 2017-
32 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Uéverton dos Santos Souza

Trabalho de conclusão de curso – Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Computação, 2017.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. 2. Palavra-chave3. I. Orientador. II. Universidade xxx. III. Faculdade de xxx. IV. Título

Matheus Souza D'Andrea Alves

Análise de complexidade parametrizada em problemas de coloração para Grafos(r,l)

Trabalho de conclusão de curso submetido para obtenção do título de bacharel em Ciência da Computação concedido pelo Instituto de Computação da Universidade Federal Fluminense

Trabalho aprovado. Niterói
Rio de Janeiro
Brasil, 24 de novembro de 2012:

Uéverton dos Santos Souza
Orientador

Professor
Convidado 1

Professor
Convidado 2

Niterói
Rio de Janeiro
Brasil
2017

Dedicatória

Agradecimentos

"Ignorance more frequently begets confidence than does knowledge:
It is those who know little, and not those who know much,
who so positively assert that this or that problem
will never be solved by science.
Charles Darwin (The Descent of Man - pg 3)

Resumo

O trabalho apresentado a seguir tem como proposta desvendar e catalogar a complexidade de problemas clássicos para a classe de Grafos(2,1), aprofundar em alguns deles quanto a complexidade parametrizada e extender as descobertas para Grafos(r,l).
Para tanto utilizaremos do conhecimento prévio de complexidade para Grafos *Split* e Grafos Bipartidos.

Palavras-chave: Complexidade parametrizada. Grafos(r,l). Partição de grafos.

Abstract

The work presented in this paper has the purpose of find and catalog the complexity of classical problems for the Graph(2,1) graph class, probe some of those about their parametrized complexity and extend the findings to the Graph(r,l) graph class
In way of doing so we will use de previous knowledge about thee complexity of problems for the Split and Bipartide graph classes

Keywords: latex. abntex. text editoration.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

P	Complexidade de tempo Polinomial determinístico
NPc	Complexidade de tempo Polinomial não determinístico completa

Sumário

Introdução

Parte I

Preparação da pesquisa

Parte II

Análise do problema de coloração para Grafos(r,l)

1 Evolução do problema de coloração considerando o crescimento de r e l

1.1 Definição

O problema de coloração em grafos pode ser definido como:

Definição 1. *Coloração em Grafos*
Entrada: um Grafo G e um inteiro k
Questão: Cada vértice pertencente à G pode ser colorido com uma entre k cores de tal forma que dado quaisquer dois vértices adjacentes eles tenham cores distintas e k seja o mínimo de cores possível?

1.2 Complexidade de coloração em Grafos(r,l)

O problema de coloração aplicado a Grafos(r,l) é de fácil solução para algumas especificações, por exemplo um Grafo vazio, que é um Grafo(0,0) pode ser colorido com 0 cores, um Grafo disperso i.e um Grafo(1,0) é colorível com apenas uma cor, já que não existem arestas nesse grafo.

Já um Grafo completo, ou seja um Grafo(0,1), é colorível com K cores onde K é a quantidade de vértices nesse grafo completo, em um Grafo split que é um Grafo(1,1) essa regra se repete, já que cada vértice do conjunto independete pode ser colorível com alguma cor já presente na clique.

E por fim, Grafos bipartidos são coloridos com 2 cores uma cor para cada conjunto independente.

Sabemos então que coloração é de solução polinomial para grafos completos, dispersos, split e para grafos bipartidos. Assim, temos como ponto de partida para a exploração futura da complexidade de Grafos de cardinalidade superiores a seguinte tabela.

$r \backslash l$	0	1	2	3	4	$\ldots$	n
0	P	P	?	?	?	$\ldots$	?
1	P	P	?	?	?	$\ldots$	?
2	P	?	?	?	?	$\ldots$	?
3	?	?	?	?	?	$\ldots$	?
4	?	?	?	?	?	$\ldots$	?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	?
n	?	?	?	?	?	$\ldots$	?

Tabela 1 – 1ª Dicotomia parcial do problema de coloração em Grafos(r,l)

Portanto agora nos é interessante abordar a complexidade para as classes na fronteira do que já conheçemos

- Grafo(0,2):

  Teorema 1. *Coloração de Grafo(0,2) é Polinomial.*

  Demonstração. Um Grafo(0,2) é um grafo separável em 2 cliques, e que todo vértice faz parte de alguma das cliques, logo conhecer a clique máxima é simples e tendo a clique máxima sabemos que o numero mínimo de cores que pode ser usado para colorir o grafo é a cardinalidade da clique máxima. □

- Grafo(3,0):

  Teorema 2. *Coloração de Grafo(3,0) é Polinomial.*

  Demonstração. Tendo um Grafo G da classe (3,0) como entrada para o problema de coloração sabemos então que o grafo pode ser colorido com 3 cores, resta saber se 3 é o o número mínimo de cores que pode ser usado, portanto devemos verificar se G é bipartido (colorível com duas cores) ou um grafo sem arestas (colorível com uma cor), como ambas verificações são polinomiais podemos afirmar que coloração de Grafo(3,0) é resolvível de forma polinomial. □

- Grafo(4,0):

  Teorema 3. *Coloração de Grafo(4,0) é NP-Completo.*

  Demonstração. Sabemos que todo grafo planar é 4-colorível, e que alguns Grafos(4,0) são planares, portanto sabemos que para qualquer Grafo G $\in$ subconjunto de planares de Grafos(4,0), sua quantidade máxima de cores é 4, nos resta saber se 4 também é sua quantidade mínima, porém 3-coloração de planar é NPc logo descobrir a coloração mínima de G é NPc e consequentemente coloração de Grafos(4,0) é NPc □

É importante notar aqui que, todo Grafo(r,l) é simultaneamente um Grafo(r+1,l) já que podemos formar uma nova clique trivial utilizando qualquer vértice, e um Grafo(r,l+1) já que podemos formar um novo conjunto independente trivial a partir de qualquer vértice, portanto se o problema de coloração é NP-Completo para um Grafo(r,l) então ele é NP-Completo para qualquer Grafo(r+1,l) ou Grafo(r,l+1).

Esses resultados nos levam à preencher a dicotomia da seguinte forma

$r \backslash l$	0	1	2	3	4	...	n
0	P	P	P	?	?	...	?
1	P	P	?	?	?	...	?
2	P	?	?	?	?	...	?
3	P	?	?	?	?	...	?
4	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	NPc
n	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc

Tabela 2 – 2ª Dicotomia parcial do problema de coloração em Grafos(r,l)

Ainda nos falta mostrar a complexidade para alguns casos de fronteira, que necessitam de uma demonstração mais complexa.

Iremos demonstrar abaixo a complexidade para tais casos.

- Grafo(1,2):

Teorema 4. *Se lista coloração de grafos split é NPc então coloração de Grafos(1,2) é NPc*

Demonstração. A prova do teorema baseia-se em mostrar que uma solução de lista coloração para grafos split implica em uma solução para o problema de coloração de um Grafo(1,2) H, portanto para provarmos é preciso mostrar que

- Se um grafo split G possui uma lista coloração própria então H é k-colorível para k=nº de cores nas listas (1)
- Se H é k-colorível então G possui uma lista coloração própria (2)

(1):

Usaremos a seguinte construção:

Considere G um grafo split e que para cada vértice $v \in V(G)$ exista uma lista de cores S_v referente a esse vértice, cada lista contém pelo menos uma cor do conjunto $C = \{c_1, c_2, c_3, ..., c_k\}$, sendo G uma instância sim para o problema de lista coloração, criemos uma clique K onde cada vértice $k \in V(K)$ representa uma cor presente em

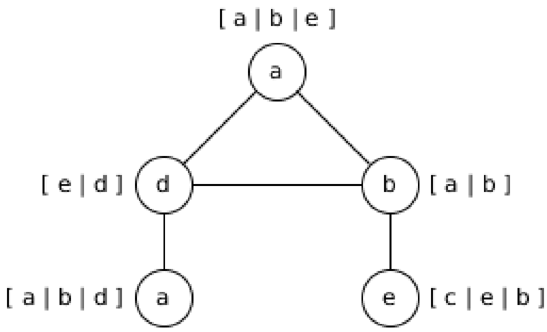

Figura 1 – Grafo G: Instância sim para o problema de lista coloração para split

C. Seja $H = G \cup K$ para todo vértice $v \in G$ e todo vértice $u_i \in K$ adicione uma aresta (u_i, v) à H se e somente se v não possui a cor c_i em sua lista coloração em G

Podemos então generalizar da seguinte forma, dado um grafo split G onde cada vértice de G possui uma lista de possíveis cores então o grafo H_G obtido pela construção anterior possui uma k-coloração.

Note que a clique K possui exatamente k vértices, consequentemente para colorirmos K precisaremos de k cores, sem perda de generalidade assumimos que u_1 será colorido com c_1, u_2 com c_2 e assim por diante.

Por construção uma aresta de u_i só existe para v_a em H se e somente se, v_a não possui c_i em sua lista de cores, portanto a coloração atribuída à K não conflita com a com a lista coloração de G, e portanto para todo vértice perntecente a G podemos lhe atribuir a mesma cor que lhe foi atribuída no problema de lista coloração, obtendo uma coloração própria para H

(2):

Suponha que o grafo H_G possua uma K-coloração própria, onde k é o número de cores nas listas de G

Seja K a maior clique presente em H_G, por construção H_G é colorível com k cores onde k é a cardinalidade de K, observe que a remoção de K não afeta a coloração de $H_G - K$

Como H_G é k-colorível e a clique K possui k vértices todas as cores de tal k-coloração estão presentes em K. Sem perda de generalidade podemos assumir que as cores $c_1, c_2, ..., c_k$ estão atribuídas aos vértices $u_1, u_2, ..., u_k$ pertencentes à K

Por construção de H_G todo par (v, u_i) onde $v \in H_G - K$ e $u_i \in K$ é não adjacente se e somente se o vértice v não possui c_i em sua lista coloração no grafo G

Logo a k-coloração atribuídas aos vértices em $H_G - K$ formam uma coloração para G onde todo vértice em $V(G)$ possui uma cor de sua lista. Portanto G é uma instância sim de lista coloração □

Corolário 1. *Seja G uma instância de lista coloração onde G é uma (r,l) partição e seja c o número de cores utilizadas em G, existe um grafo H_G (k,l+1) particionável tal que G é uma instância sim de lista coloração, se e somente se H_G é c-colorível*

Corolário 2. *Se Lista coloração é NPc em Grafos(r,l) então Coloração é NPc em Grafos(r,l+1)*

- Grafo(2,1)
- Grafo(0,3)

Teorema 5. *(?)Se lista coloração em Grafos(2,0) é NPc então coloração em Grafos(3,0) é NPc*

- Grafo(0,4)

Teorema 6. *Se clique cover em planar é NPc então Coloração de Grafo(0,4) é NPc*

Demonstração. Sabemos que o problema de coloração em qualquer grafo G é equivalente ao problema de clique cover no seu complemento $\overline{G}$, ou seja, para determinar a complexidade de coloração de Grafos(0,4) iremos determinar a complexidade de clique cover em Grafos(4,0), sabemos que um subconjunto de Grafos(4,0) são planares e que clique cover em planares é NPc, logo clique cover em Grafos(4,0) é NPc implicando que coloração em Grafos(0,4) seja NPc □

portanto podemos obter a seguinte tabela:

r \ l	0	1	2	3	4	...	n
0	*P*	*P*	*P*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
1	*P*	*P*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
2	*P*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
3	*P*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
4	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	*NPc*
n	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	*NPc*	...	*NPc*

Tabela 3 – Dicotomia do problema de coloração em Grafos(r,l)

Parte III

Resultados

2 Lectus lobortis condimentum

2.1 Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae

Etiam pede massa, dapibus vitae, rhoncus in, placerat posuere, odio. Vestibulum luctus commodo lacus. Morbi lacus dui, tempor sed, euismod eget, condimentum at, tortor. Phasellus aliquet odio ac lacus tempor faucibus. Praesent sed sem. Praesent iaculis. Cras rhoncus tellus sed justo ullamcorper sagittis. Donec quis orci. Sed ut tortor quis tellus euismod tincidunt. Suspendisse congue nisl eu elit. Aliquam tortor diam, tempus id, tristique eget, sodales vel, nulla. Praesent tellus mi, condimentum sed, viverra at, consectetuer quis, lectus. In auctor vehicula orci. Sed pede sapien, euismod in, suscipit in, pharetra placerat, metus. Vivamus commodo dui non odio. Donec et felis.

Etiam suscipit aliquam arcu. Aliquam sit amet est ac purus bibendum congue. Sed in eros. Morbi non orci. Pellentesque mattis lacinia elit. Fusce molestie velit in ligula. Nullam et orci vitae nibh vulputate auctor. Aliquam eget purus. Nulla auctor wisi sed ipsum. Morbi porttitor tellus ac enim. Fusce ornare. Proin ipsum enim, tincidunt in, ornare venenatis, molestie a, augue. Donec vel pede in lacus sagittis porta. Sed hendrerit ipsum quis nisl. Suspendisse quis massa ac nibh pretium cursus. Sed sodales. Nam eu neque quis pede dignissim ornare. Maecenas eu purus ac urna tincidunt congue.

3 Nam sed tellus sit amet lectus urna ullamcorper tristique interdum elementum

3.1 Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetuer

Maecenas non massa. Vestibulum pharetra nulla at lorem. Duis quis quam id lacus dapibus interdum. Nulla lorem. Donec ut ante quis dolor bibendum condimentum. Etiam egestas tortor vitae lacus. Praesent cursus. Mauris bibendum pede at elit. Morbi et felis a lectus interdum facilisis. Sed suscipit gravida turpis. Nulla at lectus. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Praesent nonummy luctus nibh. Proin turpis nunc, congue eu, egestas ut, fringilla at, tellus. In hac habitasse platea dictumst.

4 Conclusão

Sed consequat tellus et tortor. Ut tempor laoreet quam. Nullam id wisi a libero tristique semper. Nullam nisl massa, rutrum ut, egestas semper, mollis id, leo. Nulla ac massa eu risus blandit mattis. Mauris ut nunc. In hac habitasse platea dictumst. Aliquam eget tortor. Quisque dapibus pede in erat. Nunc enim. In dui nulla, commodo at, consectetuer nec, malesuada nec, elit. Aliquam ornare tellus eu urna. Sed nec metus. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas.

Phasellus id magna. Duis malesuada interdum arcu. Integer metus. Morbi pulvinar pellentesque mi. Suspendisse sed est eu magna molestie egestas. Quisque mi lorem, pulvinar eget, egestas quis, luctus at, ante. Proin auctor vehicula purus. Fusce ac nisl aliquam ante hendrerit pellentesque. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi wisi. Etiam arcu mauris, facilisis sed, eleifend non, nonummy ut, pede. Cras ut lacus tempor metus mollis placerat. Vivamus eu tortor vel metus interdum malesuada.

Sed eleifend, eros sit amet faucibus elementum, urna sapien consectetuer mauris, quis egestas leo justo non risus. Morbi non felis ac libero vulputate fringilla. Mauris libero eros, lacinia non, sodales quis, dapibus porttitor, pede. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi dapibus mauris condimentum nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Etiam sit amet erat. Nulla varius. Etiam tincidunt dui vitae turpis. Donec leo. Morbi vulputate convallis est. Integer aliquet. Pellentesque aliquet sodales urna.

Apêndices

APÊNDICE A – Quisque libero justo

Quisque facilisis auctor sapien. Pellentesque gravida hendrerit lectus. Mauris rutrum sodales sapien. Fusce hendrerit sem vel lorem. Integer pellentesque massa vel augue. Integer elit tortor, feugiat quis, sagittis et, ornare non, lacus. Vestibulum posuere pellentesque eros. Quisque venenatis ipsum dictum nulla. Aliquam quis quam non metus eleifend interdum. Nam eget sapien ac mauris malesuada adipiscing. Etiam eleifend neque sed quam. Nulla facilisi. Proin a ligula. Sed id dui eu nibh egestas tincidunt. Suspendisse arcu.

APÊNDICE B – Nullam elementum urna vel imperdiet sodales elit ipsum pharetra ligula ac pretium ante justo a nulla curabitur tristique arcu eu metus

Nunc velit. Nullam elit sapien, eleifend eu, commodo nec, semper sit amet, elit. Nulla lectus risus, condimentum ut, laoreet eget, viverra nec, odio. Proin lobortis. Curabitur dictum arcu vel wisi. Cras id nulla venenatis tortor congue ultrices. Pellentesque eget pede. Sed eleifend sagittis elit. Nam sed tellus sit amet lectus ullamcorper tristique. Mauris enim sem, tristique eu, accumsan at, scelerisque vulputate, neque. Quisque lacus. Donec et ipsum sit amet elit nonummy aliquet. Sed viverra nisl at sem. Nam diam. Mauris ut dolor. Curabitur ornare tortor cursus velit.

Morbi tincidunt posuere arcu. Cras venenatis est vitae dolor. Vivamus scelerisque semper mi. Donec ipsum arcu, consequat scelerisque, viverra id, dictum at, metus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut pede sem, tempus ut, porttitor bibendum, molestie eu, elit. Suspendisse potenti. Sed id lectus sit amet purus faucibus vehicula. Praesent sed sem non dui pharetra interdum. Nam viverra ultrices magna.

Aenean laoreet aliquam orci. Nunc interdum elementum urna. Quisque erat. Nullam tempor neque. Maecenas velit nibh, scelerisque a, consequat ut, viverra in, enim. Duis magna. Donec odio neque, tristique et, tincidunt eu, rhoncus ac, nunc. Mauris malesuada malesuada elit. Etiam lacus mauris, pretium vel, blandit in, ultricies id, libero. Phasellus bibendum erat ut diam. In congue imperdiet lectus.

Anexos

ANEXO A – Morbi ultrices rutrum lorem.

Sed mattis, erat sit amet gravida malesuada, elit augue egestas diam, tempus scelerisque nunc nisl vitae libero. Sed consequat feugiat massa. Nunc porta, eros in eleifend varius, erat leo rutrum dui, non convallis lectus orci ut nibh. Sed lorem massa, nonummy quis, egestas id, condimentum at, nisl. Maecenas at nibh. Aliquam et augue at nunc pellentesque ullamcorper. Duis nisl nibh, laoreet suscipit, convallis ut, rutrum id, enim. Phasellus odio. Nulla nulla elit, molestie non, scelerisque at, vestibulum eu, nulla. Ut odio nisl, facilisis id, mollis et, scelerisque nec, enim. Aenean sem leo, pellentesque sit amet, scelerisque sit amet, vehicula pellentesque, sapien.

ANEXO B – Cras non urna sed feugiat cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes nascetur ridiculus mus

Sed consequat tellus et tortor. Ut tempor laoreet quam. Nullam id wisi a libero tristique semper. Nullam nisl massa, rutrum ut, egestas semper, mollis id, leo. Nulla ac massa eu risus blandit mattis. Mauris ut nunc. In hac habitasse platea dictumst. Aliquam eget tortor. Quisque dapibus pede in erat. Nunc enim. In dui nulla, commodo at, consectetuer nec, malesuada nec, elit. Aliquam ornare tellus eu urna. Sed nec metus. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas.

ANEXO C – Fusce facilisis lacinia dui

Phasellus id magna. Duis malesuada interdum arcu. Integer metus. Morbi pulvinar pellentesque mi. Suspendisse sed est eu magna molestie egestas. Quisque mi lorem, pulvinar eget, egestas quis, luctus at, ante. Proin auctor vehicula purus. Fusce ac nisl aliquam ante hendrerit pellentesque. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi wisi. Etiam arcu mauris, facilisis sed, eleifend non, nonummy ut, pede. Cras ut lacus tempor metus mollis placerat. Vivamus eu tortor vel metus interdum malesuada.