

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Matheus Souza D'Andrea Alves

COLORAÇÃO DE $GRAFOS(r, l)$

Niterói-RJ

2017

Matheus Souza D'Andrea Alves

COLORAÇÃO DE $GRAFOS(r, l)$

Trabalho submetido ao Curso de Bacharelado em Ciência da Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Dr. Uéverton dos Santos Souza

Niterói-RJ

2017

*"Ignorance more frequently begets confidence
than does knowledge:*

*It is those who know little, and not those who
know much,*

*who so positively assert that this or that pro-
blem*

will never be solved by science.

Charles Darwin (The Descent of Man - pg 3)

Agradecimientos

[PLACE HOLDER]

Resumo

Um problema clássico na literatura é o problema de coloração própria de um grafo, isto é, encontrar uma q -coloração para um grafo G tal que todo vértice $v \in V(G)$ não possua nenhum vizinho da mesma cor e q seja mínimo. Esse problema é conhecido ser NP-Difícil para grafos gerais. O trabalho a seguir tem como proposta desvendar e catalogar a complexidade clássica e parametrizada de tal problema para a classe de $\text{Grafos}(r,l)$, i.e. grafos particionáveis em r conjuntos independentes e l cliques; Identificando as características que tornam o problema difícil e a relação do problema de coloração com outros problemas, quando abordado pela perspectiva parametrizada.

Palavras-chave: *Complexidade parametrizada. $\text{Grafos}(r,l)$. Partição de grafos. Coloração de Grafos*

Abstract

A classical problem in the literature is the problem of proper coloring a graph, i.e. to find a q -coloring for a graph G such that every vertex $v \in V(G)$ does not have any neighbor of the same color and q is the smallest possible number, a problem known to be NP-Hard for a general graphs. The following work attempts to uncover and catalog the parametrized complexity of such problem for the class of graphs(r, l), i.e. partitionable graphs in r independent sets and l cliques; Identifying the characteristics that make the problem hard and the relation of the stated problem to other problems when approached by the parameterized perspective.

Keywords: *Parametrized Complexity. Graph(r, l). Graph Partitioning. Graph Coloring.*

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
1 Introdução	1
2 Preparação da pesquisa	2
3 Análise clássica para coloração em Grafos(r, l)	3
3.1 Conceitos básicos	3
3.1.1 Grafos(r, l)	3
3.1.2 Coloração mínima de Grafos	3
3.2 Exploração do problema de coloração mínima em Grafos(r, l)	3
4 Evolução do problema de coloração considerando o crescimento de r e l	10
5 Análise parametrizada para coloração em Grafos(r, l)	11
6 Análise parametrizada de problemas relacionados a coloração	12
7 Resultados	13
8 Conclusão	14

Lista de Figuras

3.1 Grafo G: Transformação de 3-SAT em co-bipartido	9
---	---

Lista de Tabelas

3.1	1ª Dicotomia parcial do problema de coloração em Grafos(r,l)	4
3.2	2ª Dicotomia parcial do problema de coloração em Grafos(r,l)	5
3.3	Dicotomia do problema de coloração em Grafos(r,l)	9

Capítulo 1

Introdução

Capítulo 2

Preparação da pesquisa

Capítulo 3

Análise clássica para coloração em Grafos(r, l)

3.1 Conceitos básicos

3.1.1 Grafos(r, l)

Definição 1. Um Grafo dito Grafo(r, l) ou abreviadamente $G(r, l)$ é qualquer grafo pertencente á classe dos grafos que podem ser particionados em r conjuntos independentes e l cliques.

3.1.2 Coloração mínima de Grafos

Definição 2. Entrada: um Grafo G e um inteiro k

Questão: Cada vértice pertencente à G pode ser colorido com uma entre k cores de tal forma que dado quaisquer dois vértices adjacentes eles tenham cores distintas e k seja o mínimo de cores possível?

3.2 Exploração do problema de coloração mínima em Grafos(r, l)

O problema de coloração aplicado a Grafos(r, l) é de fácil solução para algumas especificações, por exemplo um Grafo vazio, que é um Grafo($0, 0$) pode ser colorido com 0

cores, um Grafo disperso i.e um Grafo(1,0) é colorível com apenas uma cor, já que não existem arestas nesse grafo.

Já um Grafo completo, ou seja um Grafo(0,1), é colorível com K cores onde K é a quantidade de vértices nesse grafo completo, em um Grafo split que é um Grafo(1,1) essa regra se repete, já que cada vértice do conjunto independente pode ser colorível com alguma cor já presente na clique.

E por fim, Grafos bipartidos são coloridos com 2 cores uma cor para cada conjunto independente.

Sabemos então que coloração é de solução polinomial para grafos completos, dispersos, split e para grafos bipartidos. Assim, temos como ponto de partida para a exploração futura da complexidade de Grafos de cardinalidade superiores a seguinte tabela.

$r \backslash l$	0	1	2	3	4	...	n
0	P	P	?	?	?	...	?
1	P	P	?	?	?	...	?
2	P	?	?	?	?	...	?
3	?	?	?	?	?	...	?
4	?	?	?	?	?	...	?
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	?
n	?	?	?	?	?	...	?

Tabela 3.1: 1ª Dicotomia parcial do problema de coloração em Grafos(r,l)

Portanto agora nos é interessante abordar a complexidade para as classes na fronteira do que já conhecemos

- Grafo(0,2):

Teorema 1. *Coloração de Grafo(0,2) é Polinomial.*

Demonstração. Um Grafo(0,2) é um grafo separável em 2 cliques, e que todo vértice faz parte de alguma das cliques, logo conhecer a clique máxima é simples e tendo a clique máxima sabemos que o numero mínimo de cores que pode ser usado para colorir o grafo é a cardinalidade da clique máxima. \square

- Grafo(3,0):

Teorema 2. *Coloração de Grafo(3,0) é Polinomial.*

Demonstração. Tendo um Grafo G da classe $(3,0)$ como entrada para o problema de coloração sabemos então que o grafo pode ser colorido com 3 cores, resta saber se 3 é o o número mínimo de cores que pode ser usado, portanto devemos verificar se G é bipartido (colorível com duas cores) ou um grafo sem arestas (colorível com uma cor), como ambas verificações são polinomiais podemos afirmar que coloração de Grafo $(3,0)$ é resolvível de forma polinomial. \square

- Grafo $(4,0)$:

Teorema 3. *Coloração de Grafo $(4,0)$ é NP-Completo.*

Demonstração. Sabemos que todo grafo planar é 4-colorível, e que alguns Grafos $(4,0)$ são planares, portanto sabemos que para qualquer Grafo $G \in$ subconjunto de planares de Grafos $(4,0)$, sua quantidade máxima de cores é 4, nos resta saber se 4 também é sua quantidade mínima, porém 3-coloração de planar é NPc logo descobrir a coloração mínima de G é NPc e consequentemente coloração de Grafos $(4,0)$ é NPc \square

É importante notar aqui que, todo $Grafo(r, l)$ é simultaneamente um $Grafo(r, l+1)$ já que podemos formar uma nova clique trivial utilizando qualquer vértice, e um $Grafo(r+1, l)$ já que podemos formar um novo conjunto independente trivial a partir de qualquer vértice, portanto se o problema de coloração é NP-Completo para um $Grafo(r, l)$ então ele é NP-Completo para qualquer $Grafo(r+1, l)$ ou $Grafo(r, l+1)$.

Esses resultados nos levam à preencher a dicotomia da seguinte forma

$r \backslash l$	0	1	2	3	4	...	n
0	P	P	P	?	?	...	?
1	P	P	?	?	?	...	?
2	P	?	?	?	?	...	?
3	P	?	?	?	?	...	?
4	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	NPc
n	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc

Tabela 3.2: 2ª Dicotomia parcial do problema de coloração em Grafos (r,l)

Ainda nos falta mostrar a complexidade para alguns casos de fronteira, que necessitam de uma demonstração mais complexa.

Iremos demonstrar abaixo a complexidade para tais casos utilizando o seguinte teorema.

Teorema 4. *Coloração de Grafos(1, 2) é NP-Completo*

Demonstração. A prova do teorema baseia-se em mostrar que uma solução de lista coloração para grafos(r, l) implica em uma solução para o problema de coloração de um Grafo($r, l + 1$) H_G , portanto para provarmos é preciso mostrar que

- Se um grafo $G(r, l)$ possui uma lista coloração própria então H_G é k -colorível para $k = n^\circ$ de cores nas listas (1)
- Se H_G é k -colorível então G possui uma lista coloração própria (2)

(1):

Usaremos a seguinte construção:

Considere G um grafo(r, l) e que para cada vértice $v \in V(G)$ exista uma lista de cores S_v referente a esse vértice, cada lista contém pelo menos uma cor do conjunto $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_k\}$, sendo G uma instância sim para o problema de lista coloração, criemos uma clique K onde cada vértice $k \in V(K)$ representa uma cor presente em C . Seja $H_G = G \cup K$ para todo vértice $v \in G$ e todo vértice $u_i \in K$ adicione uma aresta (u_i, v) à H_G se e somente se v não possui a cor c_i em sua lista coloração em G

Podemos então generalizar da seguinte forma, dado um grafo(r, l) G onde cada vértice de G possui uma lista de possíveis cores então o grafo H_G obtido pela construção anterior possui uma k -coloração.

Note que a clique K possui exatamente k vértices, consequentemente para colorirmos K precisaremos de k cores, sem perda de generalidade assumimos que u_1 será colorido com c_1 , u_2 com c_2 e assim por diante.

Por construção uma aresta de u_i só existe para v_a em H_G se e somente se, v_a não possui c_i em sua lista de cores, portanto a coloração atribuída à K não conflita com a com a lista coloração de G , e portanto para todo vértice pertencente a G podemos lhe atribuir a mesma cor que lhe foi atribuída no problema de lista coloração, obtendo uma coloração própria mínima para H_G

(2):

Suponha que o grafo H_G possua uma K -coloração própria, onde k é o número de cores nas listas de G

Seja K a maior clique presente em H_G , por construção H_G é colorível com k cores onde k é a cardinalidade de K , observe que a remoção de K não afeta a coloração de $H_G - K$

Como H_G é k -colorível e a clique K possui k vértices todas as cores de tal k -coloração estão presentes em K . Sem perda de generalidade podemos assumir que as cores c_1, c_2, \dots, c_k estão atribuídas aos vértices u_1, u_2, \dots, u_k pertencentes à K

Por construção de H_G todo par (v, u_i) onde $v \in H_G - K$ e $u_i \in K$ é não adjacente se e somente se o vértice v não possui c_i em sua lista coloração no grafo G

Logo a k -coloração atribuídas aos vértices em $H_G - K$ formam uma coloração para G onde todo vértice em $V(G)$ possui uma cor de sua lista. Portanto G é uma instância sim de lista coloração □

Corolário 1. *Se lista coloração é NP-Completo para Grafos split então coloração é NP-Completo para Grafos(1,2).*

Demonstração. A NP-Compleitude de lista coloração em grafos split é demonstrado por Jensen et al. em "Generalized coloring for tree-like graphs" □

Corolário 2. *Se Lista coloração é NP-Completo em Grafos(2,0) então Coloração é NP-Completo em Grafos(2,1).*

Demonstração. A NP-Compleitude de lista coloração em grafos bipartido é demonstrado por Fellows et al. em "List Coloring and Precoloring Extension are $W[1]$ -hard parameterized by treewidth" □

Corolário 3. *Se lista coloração é NP-Completo para Grafos(0,2) então Coloração é NP-Completo em Grafos(0,3).*

Demonstração. Para essa demonstração nos basearemos em um resultado obtido por Jensen em "Complexity results for the optimum cost chromatic partition problem". a demonstração se baseia em realizar uma redução do problema 3-SAT restrito para lista coloração de co-bipartido i.e. Grafo(0,2). Suponha o problema 3-SAT com as seguintes restrições:

- cada cláusula c_i contém dois ou três literais.
- cada literal ou sua negação aparece no máximo em 3 cláusulas

Construiremos agora uma instância de lista coloração da seguinte forma:

Para cada variável j crie seis vértices: $a_j^{(1)}, a_j^{(2)}, a_j^{(3)}; b_j^{(1)}, b_j^{(2)}, b_j^{(3)}$. Atribuindo a cada uma lista de cores da seguinte forma:

$$a_j^{(k)} \leq \{x_j^{(k)}, \bar{x}_j^{(k)}\}; b_j^{(k)} \leq \{\bar{x}_j^{(k)}, x_j^{((k \pmod 3)+1)}\}$$

Definimos como A o conjunto de todos os $a_j^{(k)}$ e B o conjunto de todos os $b_j^{(k)}$ e construímos uma clique com os vértices de A e B. Observe que só existem duas maneiras de se colorir este grafo:

- (1) $f(a_j^{(k)}) = x_j^{(k)} \Rightarrow b_j^{(k)} = \bar{x}_j^{(k)}$
- (2) $f(a_j^{(k)}) = \bar{x}_j^{(k)} \Rightarrow b_j^{(k)} = x_j^{((k \pmod 3)+1)}$

Agora, para cada cláusula definimos um vértice c_i e sua lista de cores da seguinte forma: para cada literal j ou sua negação \bar{j} presente na cláusula adicionamos à lista de c_i o $x_j^{(k)}$ onde k é o índice de ocorrência do literal ou de sua negação.

Por exemplo, suponha o seguinte 3-SAT:

$$(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s)$$

suas cláusulas seriam traduzidas para

- c_1 com lista: $\{p^1, q^1, r^1\}$
- c_2 com lista: $\{\bar{p}^2, q^2, r^2\}$
- c_3 com lista: $\{\bar{p}^3, \bar{r}^3, s^1\}$

Seja C o conjunto contendo todos os c_i criamos uma clique com $C \cup A$. Nosso grafo tem portanto a seguinte configuração(considere x' como \bar{x}):

Suponha a cláusula p, se p é falso então $a_p^{(1)}, a_p^{(2)}, a_p^{(3)}$ será colorido com p^1, p^2, p^3 respectivamente

Dessa forma mostramos que o o grafo construído só tem solução para lista coloração se existe pelo menos um literal verdadeiro em todas as cláusulas \square

Portanto podemos agora completar nossa tabela com:

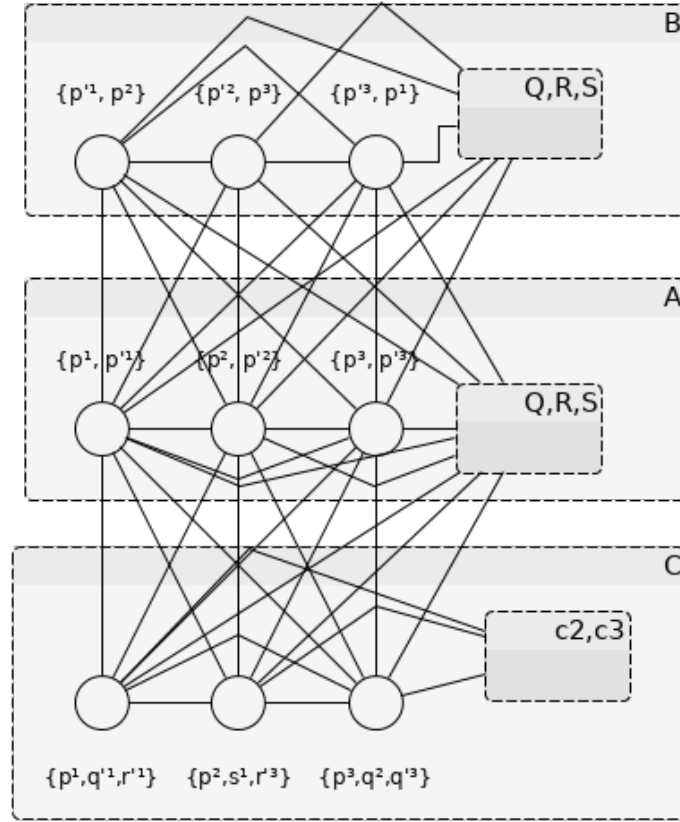


Figura 3.1: Grafo G: Transformação de 3-SAT em co-bipartido

$r \backslash l$	0	1	2	3	4	...	n
0	P	P	P	NPc	NPc	...	NPc
1	P	P	NPc	NPc	NPc	...	NPc
2	P	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc
3	P	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc
4	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	NPc
n	NPc	NPc	NPc	NPc	NPc	...	NPc

Tabela 3.3: Dicotomia do problema de coloração em Grafos(r,l)

Capítulo 4

**Evolução do problema de coloração
considerando o crescimento de r e l**

Capítulo 5

Análise parametrizada para coloração em Grafos(r,l)

Capítulo 6

Análise parametrizada de problemas relacionados a coloração

Capítulo 7

Resultados

Capítulo 8

Conclusão