

Matheus Souza D'Andrea Alves

**Análise de complexidade parametrizada em  
problemas de coloração para Grafos( $k,l$ )**

Niterói  
Rio de Janeiro  
Brasil  
2017

Matheus Souza D'Andrea Alves

# **Análise de complexidade parametrizada em problemas de coloração para Grafos( $k,l$ )**

Trabalho de conclusão de curso submetido para obtenção do título de bacharel em Ciência da Computação concedido pelo Instituto de Computação da Universidade Federal Fluminense

Universidade Federal Fluminense – UFF

Instituto de Computação

Orientador: Uéverton dos Santos Souza

Coorientador: Raquel de Souza Fransisco Bravo

Niterói

Rio de Janeiro

Brasil

2017

Matheus Souza D'Andrea Alves

Análise de complexidade parametrizada em problemas de coloração para Gra-  
fos $(k,l)$ / Matheus Souza D'Andrea Alves. – Niterói

Rio de Janeiro

Brasil, 2017-

29 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Uéverton dos Santos Souza

Trabalho de conclusão de curso – Universidade Federal Fluminense – UFF  
Instituto de Computação, 2017.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. 2. Palavra-chave3. I. Orientador. II. Univer-  
sidade xxx. III. Faculdade de xxx. IV. Título

Matheus Souza D'Andrea Alves

## **Análise de complexidade parametrizada em problemas de coloração para Grafos(k,l)**

Trabalho de conclusão de curso submetido para obtenção do título de bacharel em Ciência da Computação concedido pelo Instituto de Computação da Universidade Federal Fluminense

Trabalho aprovado. Niterói  
Rio de Janeiro  
Brasil, 24 de novembro de 2012:

---

**Uéverton dos Santos Souza**  
Orientador

---

**Professor**  
Convidado 1

---

**Professor**  
Convidado 2

Niterói  
Rio de Janeiro  
Brasil  
2017

## *Dedicatória*

# Agradecimentos

*"Ignorance more frequently begets confidence than does knowledge:  
It is those who know little, and not those who know much,  
who so positively assert that this or that problem  
will never be solved by science.  
Charles Darwin (The Descent of Man - pg 3)*

# Resumo

O trabalho apresentado a seguir tem como proposta desvendar e catalogar a complexidade de problemas clássicos para a classe de Grafos(2,1), aprofundar em alguns deles quanto a complexidade parametrizada e estender as descobertas para Grafos(k,l).

Para tanto utilizaremos do conhecimento prévio de complexidade para Grafos *Split* e Grafos Bipartidos.

**Palavras-chave:** Complexidade parametrizada. Grafos(k,l). Partição de grafos.



# Abstract

The work presented in this paper has the purpose of find and catalog the complexity of classical problems for the Graph(2,1) graph class, probe some of those about their parametrized complexity and extend the findings to the Graph(k,1) graph class  
In way of doing so we will use de previous knowledge about thee complexity of problems for the Split and Bipartide graph classes

**Keywords:** latex. abntex. text editoration.

## Lista de ilustrações

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Complexidade do problema de coloração em Grafos( $k, l$ ) . . . . .	18
--	----

# Lista de abreviaturas e siglas

$P$	Complexidade de tempo Polinomial determinístico
$NP_c$	Complexidade de tempo Polinomial não determinístico completa

# Sumário

	Introdução . . . . .	14
I	PREPARAÇÃO DA PESQUISA	15
II	ANÁLISE DE PROBLEMAS CLÁSSICOS PARA GRAFOS(2,1)	16
1	COLORAÇÃO EM GRAFOS(2,1) . . . . .	17
1.1	Definição . . . . .	17
1.2	Complexidade de coloração em Grafos(2,1) . . . . .	17
1.3	Complexidade de coloração extendida à Grafos(k,l) . . . . .	17
III	RESULTADOS	19
2	LECTUS LOBORTIS CONDIMENTUM . . . . .	20
2.1	Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae . . . . .	20
3	NAM SED TELLUS SIT AMET LECTUS URNA ULLAMCORPER TRISTIQUE INTERDUM ELEMENTUM . . . . .	21
3.1	Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consetetuer . . . . .	21
4	CONCLUSÃO . . . . .	22
	APÊNDICES	23
	APÊNDICE A – QUISQUE LIBERO JUSTO . . . . .	24
	APÊNDICE B – NULLAM ELEMENTUM URNA VEL IMPERDIET SODALES ELIT IPSUM PHARETRA LIGULA AC PRETIUM ANTE JUSTO A NULLA CURABI- TUR TRISTIQUE ARCU EU METUS . . . . .	25

ANEXOS	26
ANEXO A – MORBI ULTRICES RUTRUM LOREM. . . . .	27
ANEXO B – CRAS NON URNA SED FEUGIAT CUM SOCIIS NA- TOQUE PENATIBUS ET MAGNIS DIS PARTURI- ENT MONTES NASCETUR RIDICULUS MUS . . .	28
ANEXO C – FUSCE FACILISIS LACINIA DUI . . . . .	29

# Introdução

# Parte I

## Preparação da pesquisa



## Parte II

Análise de problemas clássicos para  
Grafos(2,1)

# 1 Coloração em Grafos(2,1)

## 1.1 Definição

O problema de coloração em grafos pode ser definido como:

**Definição 1.** *Coloração em Grafos*

*Entrada: um Grafo  $G$  e um inteiro  $k$*

*Saída: Verdadeiro se e somente se cada vértice pertencente à  $G$  pode ser colorido com uma entre  $k$  cores de tal forma que dado quaisquer dois vértices adjacentes eles tenham cores distintas*

## 1.2 Complexidade de coloração em Grafos(2,1)

## 1.3 Complexidade de coloração extendida à Grafos( $k,l$ )

Sabemos que coloração é de solução conhecidamente polinomial para clique, independente, grafos split e para grafos bipartidos.

Iremos demonstrar abaixo a complexidade para casos de ordem superiores.

- Grafo(1,2)

- Grafo(2,1)

- Grafo(3,0):

Tendo um Grafo  $G$  da classe (3,0) como entrada para o problema de coloração sabemos já que o grafo pode ser colorido com 3 cores, resta saber se 3 é o o numero mínimo de cores que pode ser usado, portanto devemos verificar se  $G$  é bipartido (colorível com 2 cores) ou um grafo sem arestas (colorível com 1 cor), como ambas verificações são polinomiais podemos afirmar que coloração de Grafo(3,0) é resolvível de forma polinomial.

- Grafo(4,0):

**Teorema 1.** *Se 3-coloração de planar é NPc então coloração de Grafo(4,0) é NPc*

*Demonstração.* Sabemos que todo grafo planar é 4-colorível, e que alguns grafos(4,0) são planares, portanto sabemos que para qualquer Grafo  $G \in$  subconjunto de planares de grafos(4,0), sua quantidade máxima de cores é 4, nos resta saber se 4 também é sua

quantidade mínima, porém 3-coloração de planar é NPc logo descobrir a coloração mínima de  $G$  é NPc e consequentemente coloração de Grafos(4,0) é NPc  $\square$

- Grafo(0,3)

**Teorema 2.** (?) *Se lista coloração em Grafos(2,0) é NPc então coloração em Grafos(3,0) é NPc*

- Grafo(0,4)

**Teorema 3.** *Se clique cover em planar é NPc então Coloração de Grafo(0,4) é NPc*

*Demonstração.* Sabemos que o problema de coloração em qualquer grafo  $G$  é equivalente ao problema de clique cover no seu complemento  $\overline{G}$ , ou seja, para determinar a complexidade de coloração de Grafos(0,4) iremos determinar a complexidade de clique cover em Grafos(4,0), sabemos que um subconjunto de Grafos(4,0) são planares e que clique cover em planares é NPc, logo clique cover em Grafos(4,0) é NPc implicando que coloração em Grafos(0,4) seja NPc  $\square$

portanto podemos obter a seguinte tabela:

$k \backslash l$	0	1	2	3	4	n
0	$P$	$P$	$P$	?	$NPc$	$NPc$
1	$P$	$P$	$NPc$	$NPc$	$NPc$	$NPc$
2	$P$	$NPc$	$NPc$	$NPc$	$NPc$	$NPc$
3	$P$	$NPc$	$NPc$	$NPc$	$NPc$	$NPc$
4	$NPc$	$NPc$	$NPc$	$NPc$	$NPc$	$NPc$
n	$NPc$	$NPc$	$NPc$	$NPc$	$NPc$	$NPc$

Tabela 1 – Complexidade do problema de coloração em Grafos(k, l)

## Parte III

### Resultados

## 2 Lectus lobortis condimentum

### 2.1 Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae

Etiam pede massa, dapibus vitae, rhoncus in, placerat posuere, odio. Vestibulum luctus commodo lacus. Morbi lacus dui, tempor sed, euismod eget, condimentum at, tortor. Phasellus aliquet odio ac lacus tempor faucibus. Praesent sed sem. Praesent iaculis. Cras rhoncus tellus sed justo ullamcorper sagittis. Donec quis orci. Sed ut tortor quis tellus euismod tincidunt. Suspendisse congue nisl eu elit. Aliquam tortor diam, tempus id, tristique eget, sodales vel, nulla. Praesent tellus mi, condimentum sed, viverra at, consectetur quis, lectus. In auctor vehicula orci. Sed pede sapien, euismod in, suscipit in, pharetra placerat, metus. Vivamus commodo dui non odio. Donec et felis.

Etiam suscipit aliquam arcu. Aliquam sit amet est ac purus bibendum congue. Sed in eros. Morbi non orci. Pellentesque mattis lacinia elit. Fusce molestie velit in ligula. Nullam et orci vitae nibh vulputate auctor. Aliquam eget purus. Nulla auctor wisi sed ipsum. Morbi porttitor tellus ac enim. Fusce ornare. Proin ipsum enim, tincidunt in, ornare venenatis, molestie a, augue. Donec vel pede in lacus sagittis porta. Sed hendrerit ipsum quis nisl. Suspendisse quis massa ac nibh pretium cursus. Sed sodales. Nam eu neque quis pede dignissim ornare. Maecenas eu purus ac urna tincidunt congue.

### 3 Nam sed tellus sit amet lectus urna ullamcorper tristique interdum elementum

#### 3.1 Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetuer

Maecenas non massa. Vestibulum pharetra nulla at lorem. Duis quis quam id lacus dapibus interdum. Nulla lorem. Donec ut ante quis dolor bibendum condimentum. Etiam egestas tortor vitae lacus. Praesent cursus. Mauris bibendum pede at elit. Morbi et felis a lectus interdum facilisis. Sed suscipit gravida turpis. Nulla at lectus. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Praesent nonummy luctus nibh. Proin turpis nunc, congue eu, egestas ut, fringilla at, tellus. In hac habitasse platea dictumst.

## 4 Conclusão

Sed consequat tellus et tortor. Ut tempor laoreet quam. Nullam id wisi a libero tristique semper. Nullam nisl massa, rutrum ut, egestas semper, mollis id, leo. Nulla ac massa eu risus blandit mattis. Mauris ut nunc. In hac habitasse platea dictumst. Aliquam eget tortor. Quisque dapibus pede in erat. Nunc enim. In dui nulla, commodo at, consectetur nec, malesuada nec, elit. Aliquam ornare tellus eu urna. Sed nec metus. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas.

Phasellus id magna. Duis malesuada interdum arcu. Integer metus. Morbi pulvinar pellentesque mi. Suspendisse sed est eu magna molestie egestas. Quisque mi lorem, pulvinar eget, egestas quis, luctus at, ante. Proin auctor vehicula purus. Fusce ac nisl aliquam ante hendrerit pellentesque. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi wisi. Etiam arcu mauris, facilisis sed, eleifend non, nonummy ut, pede. Cras ut lacus tempor metus mollis placerat. Vivamus eu tortor vel metus interdum malesuada.

Sed eleifend, eros sit amet faucibus elementum, urna sapien consectetur mauris, quis egestas leo justo non risus. Morbi non felis ac libero vulputate fringilla. Mauris libero eros, lacinia non, sodales quis, dapibus porttitor, pede. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi dapibus mauris condimentum nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Etiam sit amet erat. Nulla varius. Etiam tincidunt dui vitae turpis. Donec leo. Morbi vulputate convallis est. Integer aliquet. Pellentesque aliquet sodales urna.

## Apêndices



## APÊNDICE A – Quisque libero justo

Quisque facilisis auctor sapien. Pellentesque gravida hendrerit lectus. Mauris rutrum sodales sapien. Fusce hendrerit sem vel lorem. Integer pellentesque massa vel augue. Integer elit tortor, feugiat quis, sagittis et, ornare non, lacus. Vestibulum posuere pellentesque eros. Quisque venenatis ipsum dictum nulla. Aliquam quis quam non metus eleifend interdum. Nam eget sapien ac mauris malesuada adipiscing. Etiam eleifend neque sed quam. Nulla facilisi. Proin a ligula. Sed id dui eu nibh egestas tincidunt. Suspendisse arcu.

## APÊNDICE B – Nullam elementum urna vel imperdiet sodales elit ipsum pharetra ligula ac pretium ante justo a nulla curabitur tristique arcu eu metus

Nunc velit. Nullam elit sapien, eleifend eu, commodo nec, semper sit amet, elit. Nulla lectus risus, condimentum ut, laoreet eget, viverra nec, odio. Proin lobortis. Curabitur dictum arcu vel wisi. Cras id nulla venenatis tortor congue ultrices. Pellentesque eget pede. Sed eleifend sagittis elit. Nam sed tellus sit amet lectus ullamcorper tristique. Mauris enim sem, tristique eu, accumsan at, scelerisque vulputate, neque. Quisque lacus. Donec et ipsum sit amet elit nonummy aliquet. Sed viverra nisl at sem. Nam diam. Mauris ut dolor. Curabitur ornare tortor cursus velit.

Morbi tincidunt posuere arcu. Cras venenatis est vitae dolor. Vivamus scelerisque semper mi. Donec ipsum arcu, consequat scelerisque, viverra id, dictum at, metus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut pede sem, tempus ut, porttitor bibendum, molestie eu, elit. Suspendisse potenti. Sed id lectus sit amet purus faucibus vehicula. Praesent sed sem non dui pharetra interdum. Nam viverra ultrices magna.

Aenean laoreet aliquam orci. Nunc interdum elementum urna. Quisque erat. Nullam tempor neque. Maecenas velit nibh, scelerisque a, consequat ut, viverra in, enim. Duis magna. Donec odio neque, tristique et, tincidunt eu, rhoncus ac, nunc. Mauris malesuada malesuada elit. Etiam lacus mauris, pretium vel, blandit in, ultricies id, libero. Phasellus bibendum erat ut diam. In congue imperdiet lectus.

## Anexos

## ANEXO A – Morbi ultrices rutrum lorem.

Sed mattis, erat sit amet gravida malesuada, elit augue egestas diam, tempus scelerisque nunc nisl vitae libero. Sed consequat feugiat massa. Nunc porta, eros in eleifend varius, erat leo rutrum dui, non convallis lectus orci ut nibh. Sed lorem massa, nonummy quis, egestas id, condimentum at, nisl. Maecenas at nibh. Aliquam et augue at nunc pellentesque ullamcorper. Duis nisl nibh, laoreet suscipit, convallis ut, rutrum id, enim. Phasellus odio. Nulla nulla elit, molestie non, scelerisque at, vestibulum eu, nulla. Ut odio nisl, facilisis id, mollis et, scelerisque nec, enim. Aenean sem leo, pellentesque sit amet, scelerisque sit amet, vehicula pellentesque, sapien.

## ANEXO B – Cras non urna sed feugiat cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes nascetur ridiculus mus

Sed consequat tellus et tortor. Ut tempor laoreet quam. Nullam id wisi a libero tristique semper. Nullam nisl massa, rutrum ut, egestas semper, mollis id, leo. Nulla ac massa eu risus blandit mattis. Mauris ut nunc. In hac habitasse platea dictumst. Aliquam eget tortor. Quisque dapibus pede in erat. Nunc enim. In dui nulla, commodo at, consectetur nec, malesuada nec, elit. Aliquam ornare tellus eu urna. Sed nec metus. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas.

## ANEXO C – Fusce facilisis lacinia dui

Phasellus id magna. Duis malesuada interdum arcu. Integer metus. Morbi pulvinar pellentesque mi. Suspendisse sed est eu magna molestie egestas. Quisque mi lorem, pulvinar eget, egestas quis, luctus at, ante. Proin auctor vehicula purus. Fusce ac nisl aliquam ante hendrerit pellentesque. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi wisi. Etiam arcu mauris, facilisis sed, eleifend non, nonummy ut, pede. Cras ut lacus tempor metus mollis placerat. Vivamus eu tortor vel metus interdum malesuada.