

# Programação Inteira

Matheus Souza D'Andrea Alves

2018.2

## Sumário

<b>Introdução</b>	<b>3</b>
Infos gerais . . . . .	3
Fluxo máximo . . . . .	3
Para solução . . . . .	3
<b>Modelagem</b>	<b>4</b>
Categorização em formulação matemática . . . . .	4
Composição de um problema . . . . .	4
Definições . . . . .	5
Modelando com variáveis inteiras. . . . .	5
Impor que uma ação $x$ só pode ser feita se outra ação $y$ for realizada. . . . .	5
Impor que uma variável $X$ assumir apenas um dos valores de um conjunto finito $A = a_1, a_2, \dots, a_m$ . . . . .	6
Modelar funções lineares por partes . . . . .	6
Modelando restrições disjuntas . . . . .	7
Exemplo do emparelhamento perfeito . . . . .	8
Exemplo da coloração de vértices . . . . .	9
Fortalecer modelo enfraquecendo variáveis . . . . .	9
Outra modelagem para coloração . . . . .	11
Caxeiro viajante . . . . .	11
Problemas em árvores . . . . .	12
<b>Otimização relaxamento limites</b>	<b>17</b>
<b><i>Branch and bound</i></b>	<b>17</b>
<b>Plano de corte</b>	<b>17</b>
<b><i>Branch and cut</i></b>	<b>17</b>
<b>Relaxação Lagrangiana</b>	<b>17</b>
<b>Geração de colunas em PI</b>	<b>17</b>

<i>Branch and Price</i>	17
<b>Teoria Poliédrica</b>	<b>17</b>
Cortes . . . . .	17
Faces . . . . .	17
Facetas . . . . .	17

# Introdução

## Infos gerais

Site

Salas:

- 2ª 306
- 4ª 202

Para a parte prática vamos implementar modelos e soluções usando o CPLEX ##  
Programação linear

É um problema de otimização onde tanto a função objetivo quanto as restrições são lineares.

$\min/\max c^t X$

$Ax = b$

Modelagem

- Defina as variáveis do problema  $\rightarrow$  como representar uma solução do problema
- Definir as restrições do problema  $\rightarrow$  limites que definem o conjunto de pontos viáveis.
- A função objetivo  $\rightarrow$  que vai ponderar cada solução

## Fluxo máximo

Existe um grafo direcionado  $G = (V, E)$  com um e apenas um vértice fonte e sumidouro,  $\forall (i, j) \in E(G)$  tem uma capacidade  $C_{i,j}$ . Queremos maximizar a quantidade de produto que passa de  $F \rightarrow S$

**São minhas variáveis:**  $X_{i,j} \rightarrow \forall (i, j) \in E(G)$ . Representando a quantidade de produto que sai de  $i$  e chega em  $j$ .

**São minhas restrições:**  $X_{i,j} \leq C_{i,j}$ ;

**É meu objetivo:**  $\max \left\{ \sum_{j \in N^+(S)} X_{j,s} \right\}$

## Para solução

Métodos:

- Simplex (exponencial, rápido)
- Ponto Interiores (polinomial, rápido)

# Modelagem

## Categorização em formulação matemática

As categorias quando modelamos problemas em matemática caem nas seguintes categorias.

- Linear ou não linear
- Convexo ou não-convexo
- Contínuo ou Discreto
- Estocástica ou Determinismo

Dentro dessa categorização a programação inteira busca resolver os problemas:

- Discretos
- Determinísticos
- Não convexos
- Lineares e não lineares

Isso faz com que seja possível resolver a maioria dos problemas combinatórios propostos em computação.

## Composição de um problema

Um problema de programação matemática é composto de :

- Variáveis de decisão
- Restrições
- Função objetivo
- Parametro de entrada

Um problema de programação inteira tem formato:

$$\begin{cases} \min/\max\{f(x)\} \\ g_i(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_i \\ x \in X | X \text{ é discreto} \end{cases}$$

Definição:

**Solução viável:** valores atribuidos as variáveis que respeitam as Restrições.

**Solução ótima:** é uma solução viável que maximiza/minimiza a função objetivo.

Forma padrão:

$$\begin{cases} \max C^T x \\ A_x \leq b \\ x \in Z_+^p * R_+^{n-p} \end{cases}$$

A melhor formulação possível, é uma formulação que defina a involtória convexa dos pontos inteiros, i.e. as o poliedro minimal que contém toda solução inteira, se isso acontecer conseguimos resolver através de PL, e logo resolver de forma polinomial.

Porém, a involtória convexa não é conhecida, ou sua representação é exponencial.

## Definições

Considere duas formulações  $A$  e  $B$  para o mesmo PPI. Denominamos  $P_A$  e  $P_B$  seus poliedros equivalentes.

A formulação  $A$  é dita *tão forte quanto* a formulação  $B$  se  $P_A \subseteq P_B$ . Se a inclusão é estrita, isto é,  $P_A \subset P_B$  então dizemos que  $A$  é uma formulação mais forte.

Se  $F$  é o conjunto de todas as viáveis soluções desse PPI, então temos que  $Convo(F) \subseteq A$ . Formulação ideal é aquela tal que  $Convo(F) = P_A$

## Modelando com variáveis inteiras.

**Impor que uma ação x só pode ser feita se outra ação y for realizada.**

$$x, y \in [0, 1] | y \leq x$$

### Problema da Localização Facilitada:

- Conjunto de facilidades  $J$
- Conjunto de Clientes  $I$

Que facilidades precisam ser abertas para atender as demandas dos Clientes a um custo mínimo?

Seja  $C_{i,j}$  o custo da facilidade  $j$  atender o cliente  $i$ .  $f_j$  o custo da abertura de uma facilidade.

**Variáveis:**

$$X_{j,i} = \begin{cases} 1, & \text{se } j \text{ atende } i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j \text{ aberto} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Restrições:**

$$X_{j,i} \in \{0, 1\}, \forall j \in J, \forall i \in I$$

$$Y_j \in \{0, 1\} \forall j \in J$$

$$\sum_{j \in J} X_{j,i}, \forall i \in I$$

$$|I|Y_j \geq \sum_{i \in I} X_{j,i}$$

**Impor que uma variável  $X$  assumir apenas um dos valores de um conjunto finito  $A = a_1, a_2, \dots, a_m$**

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se } X \text{ assume } a_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^m Y_i = 1$$

$$X = \sum_{i=1}^m Y_i a_i$$

**Modelar funções lineares por partes**

- Para cada intervalo que a solução  $x$  esteja temos uma função linear diferente
- A função  $f$  é conhecida apenas nos pontos  $a_i$
- O valor de  $f$  é dado pela combinação linear de dois pontos consecutivos

$$\lambda f(a_i) + (1 - \lambda)f(a_{i+1})$$

**Variáveis:**

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se solução está no intervalo } [a_i, a_{i+1}] \\ 0, & \text{caso contrário, } \forall i = \{1\} \dots k \end{cases}$$

$\lambda_i \rightarrow$  combinação linear,  $\forall i = \{1, \dots, k\}$

**Restrições:**

$$\min \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

$$\min \sum_{i=1}^k Y_i = 1$$

$$\lambda_i \leq Y_i + Y_{i-1} \mid \forall i = 2, \dots, k$$

$$\lambda_i \leq Y_i$$

$$\lambda_i \geq 0, \text{ for all } i = 1, \dots, k$$

$$Y_i \in \{0, 1\}, \text{ for all } i = 1, \dots, k$$

**Objetivo:**

$$\min \sum_{i=1}^k \lambda_i f(a_i)$$

**Modelando restrições disjuntas**

Suponha duas restrições:

- $a^T X \geq b^*$
- $c^T X \geq d^{**}$

Queremos que pelo menos uma delas sejam satisfeitas.

**Variáveis:**

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se satisfaz } *. \\ 0, & \text{se satisfaz } **. \end{cases}$$

**Restrições:**

$$a^t X \geq bY$$

$$c^t X \geq d(1 - Y)$$

Suponha que tenho agora  $k$  restrições:  $a_i^t \geq b_i, \forall i \in [1..k]$ , quero ativar  $p$  restrições.

minhas restrições extras são:

$$Y_i \in [0, 1], \forall i = 1..k$$

$$\sum_{i=1}^k Y_i = p$$

### **Exemplo do emparelhamento perfeito**

Temos um grupo de  $n$  pessoas que precisam formar pares. Seja  $c_j$  o custo de parear pessoa  $i$  com  $j$ .

Queremos minimizar o custo dos emparelhamentos.

**Variáveis:**

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se satisfaz } i \text{ parear com } j. \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Restrições:**

$$\sum_{j \in E} x_{i,j} = 1$$

**Objetivo:**

$$\min \sum_{j \in E} x_{i,j} c_{i,j}$$



### Exemplo da coloração de vértices

Seja um Grafo  $G$ , definimos a coloração de  $G$  como a atribuição de uma entre  $k$  para cada vértice de forma que dada qqr aresta suas extremidades não compartilham cores.

#### Variáveis:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se vértice } i \text{ é colorido com } j. \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$w_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j \text{ for usado na coloração.} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

#### Restrições:

$$\sum_{j=1}^{|V(G)|} X_{i,j} = 1$$

$$X_{i,j} + x_{k,j} \leq w_j, \forall i, k \in V(G)$$

#### Objetivo:

$$\min \sum_{j=1}^{|V(G)|} w_j$$

### Fortalecer modelo enfraquecendo variáveis

Exemplo: Lot Sizing

Seja  $d_t \rightarrow$  demanda do tempo  $t$ ;  $f_t \rightarrow$  custo de produzir no tempo  $t$ ;  $p_t \rightarrow$  custo de produção por unidade;  $h_t \rightarrow$  custo de armazenamento em  $t$ .

Modelagem padrão:

#### Variáveis:

$X_t \rightarrow$  Qtd produzida em  $t$

$S_t \rightarrow$  Qtd em estoque em  $t$

$$Y_t = \begin{cases} 1, & \text{se algo foi produzido em } t. \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Restrições:**

$$S_m = 0$$

$$X_t \leq Y_t M$$

$$S_{t-1} + X_t = d_t + S_t$$

removendo  $M$  temos

$$X_t \leq Y_t \sum_{t=1}^m d_t$$

**Objetivo:**

$$\min \sum_{t=1}^m (h_t S_t + f_t Y_t + p_t X_t)$$

Modelagem com fortalecimento

**Variáveis:**

$W_{i,t} \rightarrow$  Qtd produzida em  $i$  para suprir a demanda em  $t$

$S_t \rightarrow$  Qtd em estoque em  $t$

$$Y_t = \begin{cases} 1, & \text{se algo foi produzido em } t. \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Restrições:**

$$S_m = 0$$

$$S_1 = 0$$

$$W_{i,t} \leq Y_t d_t$$

$$S_{t-1} + \sum_{i=t}^n W_{t,i} = d_t + S_t$$

**Objetivo:**

$$\min \sum_{t=1}^m (h_t S_t + f_t Y_t + p_t \sum_{i=t}^n W_{t,i})$$

### Outra modelagem para coloração

Sabemos que coloração é equivalente a encontrar uma partição de  $G$  em  $k$  conjuntos idenpendentes maximais.

Dessa forma podemos escolher um vértice como *representante* de seu conjunto independente, nos levando as seguintes variáveis.

**Variáveis:**

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \text{ e o vértice } j \text{ pertencem ao mesmo conjunto. Onde } i \leq j. \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Restrições:**

$$\sum_{N(v) \neq u \leq v} X_{u,v} = 1$$

$$X_{k,i} + X_{k,j} \leq X_{k,k}, \forall i, j \in E, \forall k \in V, k \notin N[i] \sup N[j]$$

$$X_{i,j} \leq X_{i,i}$$

### Caxeiro viajante

**Variáveis**

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se viajo de } i \text{ para } j. \text{ Onde } i \leq j. \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Restrições:**

$$\sum_{j \in N(i)} X_{i,j}$$

$$\sum_{j \in N(i)} X_{j,i}$$

$$\sum_{j \in V/S} \sum_{i \in S} X_{j,i} \geq 1$$

$$\sum_{j \in S} \sum_{i \in S} X_{j,i} \leq |S| - 1$$

---

Seja:

- $J$  um conjunto de  $n$  tarefas
- $M$  um conjunto de  $m$  máquinas
- Cada tarefa  $j \in J$  temos a ordem de processamento  $(\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_m^j)$  para a execução de  $j$ .
- Para cada  $j \in J$  e  $i \in M$  temos o tempo de processamento  $p_{i,j}$
- Uma tarefa é executada em cada máquina exatamente uma vez.

Seja minha entrada a definição da ordem das máquinas em que os jobs devem ser executados e o tempo em que cada  $\lambda_i^j$  leva para executar.

**Variáveis**

$$X_{j,t,i} = \begin{cases} 1, & \text{se a tarefa } j, \text{ começa no tempo } t, \text{ na máquina } i. \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

---

### Problemas em árvores

Problema de minimizar o número de *branch*-vértices em uma árvore geradora.

Dado um grafo  $G = (V, E)$  encontrar uma árvore geradora que minimize o número de *b*-vértices.

Um vértice  $v$  é um *b*-vértice se na árvore se  $d(v) \geq 3$

**Variáveis:**

$$X_e = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } e \in E(G) \text{ pertence a árvore.} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Y_v = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } v \in V(G) \text{ é um } b\text{-vértice.} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Restrições:**

mínimo

$$\sum_{e \in E(G)} X_e = n - 1$$

subciclo

$$\sum_{e \in E(S)} X_e = |S| - 1 \quad \forall S \subset V$$

$b$ -vértices

$$\sum_{e \in \delta(i)} X_e \leq Y_i \mathcal{M} + 2 \quad \forall i \in V$$

**Objetivo:**

$$\min \left\{ \sum_{v \in V} Y_v \right\}$$


---

Problema da  $k$ -tree mínima, encontrar uma árvore com  $k$  arestas de custo mínimo

$$\omega_i \quad \forall i \in E(G) \rightarrow \text{custo}$$

**Variáveis:**

$$X_e = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } e \in E(G) \text{ pertence a árvore.} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Y_v = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } v \in V(G) \text{ é um } b\text{-vértice.} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Restrições:**

$$\sum_{e \in E(G)} X_e = k$$

$$\sum_{e \in \delta(i)} X_e \leq Y_i \mathcal{M}$$

$$\Updownarrow$$

$$X_i \leq Y_i \quad , \forall i \in \delta(i)$$

$$\sum_{e \in E(S)} X_e \leq |S| - 1 \quad , \forall S \subset V(G) \quad \text{and} \quad |S| \leq k + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{e \in E(S)} X_e \leq \sum_{i \in S \setminus \{j\}} Y_i, \quad \forall S \subset V(G) \quad \text{and} \quad \forall j \in S$$

### Objetivo

$$\sum_{e \in E} \omega_e X_e$$


---

### Ring-star Problem

Dado um grafo misto  $G = (V, E \cup A)$

$$E = (u, v) \quad \forall u, v \in V(G) \quad \text{and} \quad u < v$$

$$A = \{u, v\} \quad u, v \in V(G)$$

$v_1$  é denominado depósito

$c_{i,j}$  é o custo da aresta  $(i, j) \in E$

$d_{i,j}$  é o custo da aresta  $(i, j) \in A$

o ciclo é formado por arestas  $e \in E$  e o ciclo(*Ring*) deve conter o depósito.

todo vértice que não faz parte do ciclo é conectado ao ciclo por um arco  $a \in A$  de menor custo de conexão ao ciclo.

o custo do *Ring* é dado pela soma dos  $c_{i,j}$  para  $i$  e  $j$  dentro do ciclo e  $d_{i,j}$  para  $i$  não pertencente.

### Variáveis:

$$X_e = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } e \in E \text{ esta no ciclo.} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Y_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \text{ que não está no ciclo} \\ & \text{for ligado ao vértice } j \text{ pertencente ao ciclo.} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Se  $i \in V$  pertence ao ciclo,  $Y_{i,i} = 1$

### Restrições:

$$\sum_{e \in \delta(i)} = 2Y_{i,i} \quad \forall i \in V$$

$$Y_{1,1} = 1$$

$$Y_{i,i} + \sum_{j \in N_a(i)} Y_{i,j} = 1$$

$$\sum_{i \in S, j \notin S} X_{i,j} \geq 2Y_{k,k} \quad \forall S \subset V \setminus \{v_i\} \quad \forall k \in S$$


---

Coloração Equilibrada

A diferença na quantidade de vértices coloridos com cada cor não pode ser maior que 1

**Variáveis:**

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \text{ é colorido com } j. \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{se a cor } j \text{ é usada} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Restrições:**

$$\sum_{j=1}^n X_{i,j} = 1 \quad , \forall i \in V$$

$$X_{i,j} + X_{k,j} \leq 1 \quad , \forall i \in V, \forall k \in N(i), \forall j = 1 \dots n$$


---

Problema de alocação de Frequencia

Atribuição de frequências às antenas de forma a minimizar interferência.

cada  $(u, v) \in E(G)$  tem uma distância segura  $d_{\{u,v\}}$

Existe um conjunto de frequências  $F$

**Variáveis:**

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se a antena } i \text{ é atribuída frequência } j. \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Restrições:**

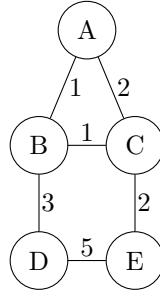


Figura 1:

$$\sum_{j \in F} X_{i,j} \leq \Delta(i) \quad , \forall i \in V$$

$$X_{i,j} - X_{p,k} \leq 1 \quad \begin{cases} \forall i \in V, \forall p \in N(i) \\ \forall j \in F, \forall k \in F \end{cases}$$

**Objetivo:**

$$\max \sum_{i \in V} \sum_{j \in F} X_{i,j}$$

Máximo subgrafo balanceado

Dado um grafo  $G = (V, E^+ \cup E^-)$ , encontrar um grafo que pode ser particionado em no máximo  $k$  componentes equilibradas um grafo

```

“{.dot scale="0.4", caption="K_5"} graph G { node[shape=circle] edge[len=9];
A - B [label="+"]; A - C [label="+"];
{ rank=same B - C [label="-"]; { rank=same D - E [label="-"]};
C - E [label="+"]; D - B [label="-"]; } “

```



Otimização relaxamento limites

*Branch and bound*

Plano de corte

*Branch and cut*

Relaxação Lagrangiana

Geração de colunas em PI

*Branch and Price*

Teoria Poliédrica

Cortes

Faces

Facetas