3 Conectividade

Neste capítulo estudaremos conjuntos especiais de vértices e arestas cuja remoção desconecta o grafo, no sentido de que o número de componentes conexas aumenta após a remoção.

3.1 Cortes de vértices

Dado um grafo G, um conjunto de vértices $V' \subseteq V(G)$ é um *separador* ou *corte de vértices* de G se $w(G - V') > w(G)$.

Observe que um grafo completo não admite cortes de vértices.

3.1.1 Articulações e blocos

Um caso especial importante ocorre quando o corte de vértices é um conjunto unitário. Um vértice v é chamado de *articulação* ou *vértice de corte* quando $w(G - v) > w(G)$. A seguir, vamos estudar algumas propriedades relacionadas ao conceito de articulação.

Lema 3.1. *Um vértice v é uma articulação de um grafo se e somente se existem dois vértices distintos x, y tais que: (a) $v \notin \{x, y\}$; (b) x, y e v estão na mesma componente conexa; (c) todo caminho entre x e y contém v.*

Teorema 3.2. *Em uma árvore T não trivial, um vértice v é uma articulação se e somente se v não é folha.*

Corolário 3.3. *Todo grafo conexo G não trivial possui pelo menos dois vértices que não são articulações.*

Passemos agora ao estudo dos blocos. Um *bloco* de um grafo G é um subgrafo B de G tal que B é maximal conexo sem articulações.

Observação 3.1. Um bloco B sempre conterá uma ou mais articulações de G, mas por definição elas não serão articulações em B.

Note que dois blocos distintos em um grafo têm no máximo um vértice em comum; no caso de compartilharem um vértice, tal vértice será necessariamente uma articulação.

Note também que cada aresta de um grafo G está em um único bloco. Portanto, os blocos determinam uma partição de $E(G)$.

Um bloco B de um grafo G é chamado de *bloco folha* se B contém uma única articulação de G.

3.1.2 Conectividade de vértices

A *conectividade de vértices* $\kappa(G)$ de um grafo conexo G é a cardinalidade de um corte de vértices mínimo de G, desde que G não seja completo.

Definimos $\kappa(G) = n - 1$ se G é um grafo completo com n vértices, e $\kappa(G) = 0$ se G é desconexo. Observe que, se G é trivial, $\kappa(G) = 0$.

Dizemos que G é *p-conexo em vértices* para todo $p \leq \kappa(G)$. É claro que todo grafo conexo e não trivial é 1-conexo em vértices. Além disso, se G é conexo, é fácil ver que $\kappa(G) = 1$ se e somente se G contém pelo menos uma articulação. Alternativamente, podemos enunciar:

Proposição 3.4. *Um grafo G conexo com pelo menos três vértices é biconexo se e somente se G não possui articulações.*

3.1.3 Caminhos internamente disjuntos em vértices

Sejam u e v vértices distintos de um grafo G. Dois caminhos de u a v são chamados de *internamente disjuntos (em vértices)* se eles têm apenas os extremos u e v em comum.

Teorema 3.5. (Whitney, 1932) *Seja G um grafo com pelo menos três vértices. Então, G é biconexo se e somente se para quaisquer dois vértices de G existem dois caminhos internamente disjuntos entre eles.*

Corolário 3.6. *Um grafo G com pelo menos três vértices é biconexo se e somente se existe um ciclo que passa por cada par de vértices arbitrários de G.*

O seguinte teorema é uma generalização do Teorema 3.5. Sua demonstração será omitida.

Teorema 3.7. (Menger) *Um grafo com pelo menos $k+1$ vértices é k-conexo em vértices se e somente se para quaisquer dois vértices de G existem k caminhos internamente disjuntos entre eles.*

3.2 Cortes de arestas

Um *conjunto desconectante (de arestas)* é um conjunto $E' \subseteq E(G)$ tal que $w(G - E') > w(G)$.

Observe que toda ponte define um conjunto desconectante de arestas. É fácil ver que se e é uma ponte de um grafo G então $w(G - e) = w(G) + 1$.

Iremos estudar agora conjuntos desconectantes especiais, os *cortes de arestas*. Para isso, precisamos da seguinte definição: Se S e T são subconjuntos de vértices de um grafo, então $[S, T]$ é o conjunto de todas as arestas de G que têm um extremo em S e outro em T.

Seja G um grafo. Um *corte de arestas* de G é qualquer conjunto não vazio da forma $[S, \overline{S}]$, onde S é um subconjunto próprio e não vazio de vértices de G e $\overline{S} = V(G) \backslash S$.

É fácil ver que todo corte de arestas é um conjunto desconectante, mas nem todo conjunto desconectante é um corte de arestas. O teorema a seguir nos aponta conjuntos desconectantes especiais que são cortes de arestas.

Teorema 3.8. *Todo conjunto desconectante minimal em um grafo G é um corte de arestas.*

Demonstração. Assuma que G é conexo. Seja F um conjunto desconectante minimal de G, e seja $e \in F$. Defina $F_e = F \setminus \{e\}$. Pela minimalidade de F, $w(G - F_e) = w(G)$. Logo, e é uma ponte de $G - F_e$. Escreva $e = xy$. Sejam G_x e G_y as componentes conexas de $(G - F_e) - e$ contendo x e y, respectivamente. Como a aresta e foi tomada genericamente e $(G - F_e) - e = G - F$, segue que para *qualquer* aresta $e \in F$ as componentes conexas de $(G - F_e) - e$ são sempre as mesmas. Fazendo $S = V(G_x)$ e $\overline{S} = V(G_y)$, segue que toda aresta $e \in F$ tem um extremo em S e outro em $\overline{S}$. Logo, $F = [S, \overline{S}]$, isto é, F é um corte. A demonstração se adapta facilmente para o caso em que G é desconexo. $\square$

Note que toda ponte define um conjunto desconectante minimal de arestas, e portanto um corte.

3.2.1 Ligações (ou co-ciclos)

Um corte de arestas minimal é também chamado de *ligação* ("bond") ou *co-ciclo*. Observe que toda ponte de um grafo G é um co-ciclo. A proposição abaixo caracteriza co-ciclos em grafos conexos.

Proposição 3.9. *Se G é conexo e S é um subconjunto próprio e não vazio de $V(G)$, então $F = [S, \overline{S}]$ é co-ciclo se e somente se $G - F$ tem dois componentes conexos.*

Observação 3.2. Seja G um grafo qualquer. Denotemos por $\mathcal{D}(G)$ a família de todos os conjuntos desconectantes de G, $\mathcal{D}'(G)$ a família de todos os conjuntos desconectantes minimais de G, $\mathcal{C}(G)$ a família de todos os cortes de arestas de G, e $\mathcal{C}'(G)$ a família de todas os co-ciclos de G. Vale então que:

$$\mathcal{D}'(G) = \mathcal{C}'(G) \subseteq \mathcal{C}(G) \subseteq \mathcal{D}(G).$$

Para a sequência desta seção, necessitamos das definições a seguir.

Seja H um subgrafo de um grafo G. O *complemento de H em relação a G* é o grafo $G - E(H)$.

Seja T uma árvore geradora de um grafo conexo G. A *co-árvore* de T é o complemento de T em relação a G. Denotamos por $\overline{T}$ a co-árvore de uma árvore geradora T.

O teorema a seguir é o análogo do Teorema 2.12 aplicado a co-árvores e co-ciclos:

Teorema 3.10. *Seja T uma árvore geradora de um grafo conexo G. Então:*

(a) *$\overline{T}$ não contém co-ciclos de G;*

(b) *Se e é uma aresta de T então $\overline{T} + e$ contém um único co-ciclo de G.*

3.2.2 Conectividade de arestas

A *conectividade de arestas* $\kappa'(G)$ de um grafo conexo e não trivial G é a cardinalidade de um corte de arestas mínimo de G. Definimos $\kappa'(G) = 0$ se G é trivial ou desconexo.

Assim como para vértices, dizemos que um grafo G é *p-conexo em arestas* para todo $p \leq \kappa'(G)$. Obviamente, todo grafo conexo não trivial é 1-conexo em arestas.

Teorema 3.11. (Whitney, 1932) *Seja G um grafo qualquer. Então,*

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G).$$

Demonstração. Se G é desconexo ou trivial, $\kappa(G) = \kappa'(G) = 0$, e portanto o teorema é válido. Assuma então que G é conexo e não trivial.

Demonstremos inicialmente a desigualdade $\kappa'(G) \leq \delta(G)$. Observe que as arestas incidentes a um vértice v de grau mínimo definem um corte de arestas $F = [S, \overline{S}]$ onde $S = \{v\}$ e $|F| = \delta(G)$. Logo, $\kappa'(G) \leq |F| = \delta(G)$.

Passemos agora à demonstração da desigualdade $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$. Seja $F = [S, \overline{S}]$ um corte de arestas mínimo de G, isto é, $|F| = \kappa'(G)$. Como F é um corte mínimo, F é um co-ciclo de G, e pela Proposição 3.9 o grafo $G-F$ tem exatamente duas componentes conexas, a saber, $G[S]$ e $G[\overline{S}]$. Seja $S_1 = \{x \in S \mid x$ é extremo de alguma aresta de $F\}$. Analogamente, seja $S_2 = \{x \in \overline{S} \mid x$ é extremo de alguma aresta de $F\}$. A seguir, analisaremos alguns casos.

Se $S \setminus S_1$ contém algum vértice y_1, é fácil ver que no grafo $G - S_1$ o vértice y_1 encontra-se num componente conexa diferente de $G[\overline{S}]$ (observe que a remoção de S_1 acarreta a remoção de todas as arestas de F). Logo, S_1 é um corte de vértices. Como $|S_1| \leq |F|$, segue que $\kappa(G) \leq |S_1| \leq |F| = \kappa'(G)$.

No caso em que $\overline{S} \setminus S_2$ contém algum vértice y_2, a desigualdade $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ prova-se de maneira análoga.

Resta agora analisar o caso $S = S_1$ e $\overline{S} = S_2$. Se existem $y_1 \in S_1$ e $y_2 \in S_2$ não adjacentes, segue que o conjunto $R = (S_1 \setminus \{y_1\}) \cup N(y_1, S_2)$ é um corte de vértices, pois sua remoção acarreta a remoção de todas as arestas de F e deixa y_1 e y_2 em componentes conexas diferentes. Como $|R| \leq |F|$, segue que $\kappa(G) \leq |R| \leq |F| = \kappa'(G)$.

Finalmente, se todos os vértices de S_1 são adjacentes a todos os vértices de S_2, suponha $|S_1| = n_1$ e $|S_2| = n_2$, e considere $y_1 \in S_1$. Observe que as arestas incidentes a y_1 definem um corte de arestas F_1 cujo tamanho é $d(y_1) \leq n_1 - 1 + n_2$. Como neste caso $|F| = n_1 n_2$ e F é um corte mínimo, segue que $n_1 n_2 \leq n_1 - 1 + n_2$. Resolvendo esta desigualdade, segue que $n_1 = 1$ ou $n_2 = 1$. Assuma sem perda de generalidade $n_1 = 1$, e considere $y_2 \in S_2$. Novamente, as arestas incidentes a y_2 definem um corte de arestas, e segue então que $n_2 = |S_2| = n - 1 \leq d(y_2)$. Concluímos assim que, neste caso, G

é um grafo completo. Para concluir a demonstração, basta recordar que a desigualdade $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ vale trivialmente em um grafo completo. $\square$

3.2.3 Caminhos disjuntos em arestas

A caracterização de grafos k-conexos em vértices por meio de caminhos internamente disjuntos em vértices (Teorema 3.7) admite uma versão análoga para arestas:

Teorema 3.12. (Menger - versão arestas) *Um grafo G é k-conexo em arestas se e somente se para quaisquer dois vértices de G existem k caminhos disjuntos em arestas entre eles.*

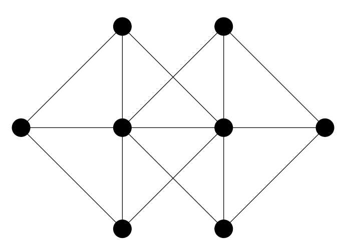
3.3 Exercícios

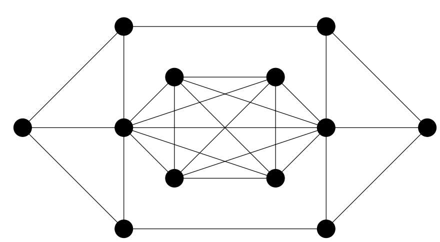
3.1. Prove: qualquer conjunto de 7 arestas no grafo $K_{3,3}$ é um conjunto desconectante, mas não um corte.

3.2. Prove ou refute: O grafo $K_{4,4}$ não possui corte com exatamente 10 arestas.

3.3. Mostre que se G é conexo e não trivial, qualquer árvore geradora T de G e qualquer conjunto desconectante não vazio $F \subseteq E(G)$ terão pelo menos uma aresta em comum.

3.4. Determine $\kappa(G)$ e $\kappa'(G)$ para os grafos abaixo. Para cada p, que grafos são p-conexos em vértices? Que grafos são p-conexos em arestas?





3.5. Prove que se G é 3-regular, então $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

3.6. Existe algum grafo G que é 3-regular, 3-conexo em arestas e não 3-conexo em vértices?

3.7. Prove que o grafo de Petersen é 3-conexo em vértices.

3.8. Prove ou refute: Se G é conexo e possui exatamente dois vértices que não são articulações, então G é um caminho.

3.9. Um cacto é um grafo conexo no qual todo bloco é uma aresta ou um ciclo. Prove que o número máximo de arestas num cacto com n vértices é $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$. Dica: $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.