Teoria dos Grafos

Matheus Souza D'Andrea Alves

2018.2

Sumário

Introdução

site do protti

Conceitos básicos

Um *grafo simples* G é denotado por um conjunto de vértices $V(G)$ e um conjunto de arestas $E(G)$.

Cada aresta é um par não ordenado $(u, v) \mid (\{u, v\} \subseteq V(G))$. Dois vértices u e v são vizinhos/adjacentes se existe uma aresta $(u, v) \in E(G)$.

A ordem de um grafo é o numero de vértices de G

$n = |V(G)|$ & $m = |E(G)|$

Um grafo é *trivial* se possuí apenas um vértice e *nulo* se não possuí vértice. Um *multigrafo* são grafos simples extendidos com:

- **Arestas paralelas**: Arestas que conectam os mesmos dois vértices.
- **Laços**: arestas em que ambos os extremos são o mesmo vértice.

Vizinhança

A vizinhança aberta de um vértice v é denominada $N(v)$; Tal conjunto possuí todo vértice que seja um extremo de arestas que tenham v como outro extremo.

A vizinhança fechada de um vértice é denominada $N[v]$ onde $N[v] = N(v) + v$.

Grau

O grau de um vértice, denominado $d(v)$ é igual ao número de vezes em que v aparece como algum terminal em qualquer $e \in E(G)$.

Um grafo é dito regular quando todos seus vértices tem o mesmo grau, e k-regular se todos os vértices tem $d(v) = k$.

O grau máximo de G é definido como:

$\Delta(G) = max\{d(v)|v \in V(G)\}$

Dado um grafo G, sua sequência de graus é a sequencia formada pelos graus de seus vértices ordenados de forma não decrescente.

Se um vértice possui grau zero, então ele não possui vizinhos e é chamado de vértice *isolado*. Em contrapartida se um vértice é vizinho de todos os outros vértices em um grafo ele é chamado de vértice *universal*.

Estruturas relacionadas

O complemento de G é chamado de *Gê barra* e denominado por $\overline{G}$.

Um grafo H é um subgrafo de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$, e o grafo "faça sentido", isso é seja possível criar um grafo com todos os vértices e arestas de tais subconjuntos.

Um subgrafo *gerador* de G é um subgrafo H de G onde $V(H) \subseteq V(G)$

H é um subgrafo induzido por um conjunto de vértices $X \subseteq G$ se toda aresta nesse conjunto existente em G, também existe em H, sua notação é: $H = G[X]$. Um subgrafo H é o subgrafo formado por um conjunto de arestas $E'[\in E(G)$ com seus respectivos extremos, sua notação é $H = G[E']$.

Seja $S \subset V(G)$:

$$G - S = G[V(G) \backslash S]$$

Isso é, O Grafo G sem os vértices em S é o subgrafo induzido pelo conjunto de todos os vértices de G tirando os vértices de S

Um passeio é uma sequencia de vértices v_1, v_1, v_1, v_1 ligadas sequencialmente por arestas.

Uma trilha é um passeio onde arestas não se repete; Um caminho é uma trilha onde nenhum vértice se repete. É chamado de comprimento do caminho o número de arestas no mesmo, um caminho é chamado fechado se ...

Um ciclo é um passeio onde nenhum vértice exceto o inicial se repete, e apenas repetindo o inicial no final do passeio, seu número de vértices é igual ao seu númeor de arestas.

Uma corda é uma aresta que liga dois vértices não consecutivos do ciclo

Propagação de propriedades.

Dado um grafo G uma propriedade é hereditária por subgrafos, e quando ela vale para G ela também vale para seus subgrafos.

Se uma propriedade é hereditária para subgrafos, ela é para subgrafos induzidos.

Operações

A união de dois grafos é a união de seus vértices e suas arestas, a operação de interseção é semelhante.

teorema do aperto de mão:

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v)$$

Dois grafos são isomorfos se existe uma bijeção f dos vértices de G para vértices de um G_{iso} tal que $\forall(u, v) \in E(G) \implies (f(u), f(v)) \in E(G_{iso})$

Características

Um grafo é dito completo, se quaisquer dois vértices de G são vizinhos. O número de arestar de um grafo completo é $n(n-1)/2$.

Um grafo é conexo se para todo par de vértices dado, existe um caminho entre os dois vértices. Uma componente conexa de G é um subgrafo conexo maximal de G. $\omega(G)$ é o númeor de componentes conexas de G.

A distância entre dois vértices é o comprimento do menor caminho entre eles.

A excentricidade de um vértice $v \in V(G)$ é definida como:

$$exc(v) = max\{dist(v, x)|x \in V(G)\}$$

O diâmetro de um grafo G é definido como:

$$diam(G) = max\{exc(x)|x \in V(G)\}$$

O centro $C \subseteq V(G)$ é o subconjunto de vértices com excentricidade mínima, em contrapartida a periferia de um grafo G é o subconjunto de vértices com excentricidade máxima.

Partições

Uma clique K em um grafo G é um conjunto de vértices $K \subseteq V(G)$ tal que $G[K]$ é completo. Por outro lado se o conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ induz um grafo sem arestas, então S é um conjunto independente.

Notação: K_n *grafo completo com* n *vértices*, S_n *conjunto independente com* n *vértices.*

Um grafo é bipartido quando é possível particionar seu conjunto de vértices em dois conjuntos S_1 e S_2 tal que $S_1 \cup S_2 = V(G)$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ onde ambos S_1 e S_2 são conjuntos independentes.

Teorema 1: Um grafo G é bipartido, se e somente se, G não contém ciclos ímpares.

Demonstração.
Suponha por absurdo que G seja bipartido e contenha um ciclo ímpar $C = v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}, v_1$ seja $S_1 \cup S_2$ seja uma bipartição de $V(G$, suponha portanto sem perda de generalidade que $v_1 \in S_1$, dessa forma, $v_2 \in S_2, v_3 \in S_1, \ldots, v_{2k} \in S_2, v_{2k+1} \in S_1$. Porém dessa existe a aresta () $\square$

Maximalidade e minimalidade

Um conjunto S é maximal em relação a uma propriedade P, se:

- S satisfaz P
- $\nexists S' \supset S$ tq S' satisfaz P.

Um conjunto S é minimal em relação a uma propriedade P se:

- S satisfaz P
- $\nexists S' \subset S$ tq S' satisfaz P.

Representações.

Representação gráfica.

fig

Matriz de adjacências

Primeiro módulo

Árvores

Conceito

Dizemos que um grafo é uma árvore se não possui ciclos e é conexo, uma floresta é um grafo cuja cada componente conexa é uma árvore.

O centro de uma árvore são um ou dois vértices:

Algoritmo

```
def center(t Tree)
  m = t
  while m.vertices.size >= 3 do
    leafs = m.leafs
    m = m[m.vertices - leafs]
  end
  return m
end
```

Conectividade

Articulações são vértices cuja a remoção aumenta o número de componentes conexas do grafo.

Teorema: v é articulação $\iff \exists x, y$ tal que todo caminho entre x e y contém v

Demonstração: Como v é articulação, após sua remoção a componente conexa que continha v não mais existe. São criadas duas componentes conexas C_1 e C_2. Tome $x \in V(C_1)$ e $y \in V(C_2)$ seja P um caminho de x a y em G. Em $G - v$, o caminho P não existe. Logo, $v \in V(P)$.

Em $G - v$ não pode haver nenhum caminho entre x e y, pois de acordo com a premissa, a remoção de v remove todos os possíveis caminhos entre os mesmos, isso significa que a remoção de v aumentou o número de componentes conexas, logo v é uma articulação.

Teorema 2: Em uma árvore T não trivial, v é articulação se e somente se v não é folha.

Demonstração.

Suponha por absurdo que v é uma folha, como visto anteriormente existe então dois vértices x e y cujo o caminho entre eles passa por v, tal afirmação é contraditória pois v é uma folha e tem $d(v) = 1$, sendo impossível fazer parte de um caminho não sendo extremidade.

Seja u um vértice não folha, portanto existe um caminho entre dois vértices x e y que contém v, suponha por absurdo que a remoção de tal vértice não aumente o número de componentes conexas, tal afirmação é absurda, pois isso implicaria em um caminho entre x e y que não contém v, o que implica em um ciclo e T é uma árvore. $\square$

Corolario 1: Todo grafo G conexo não trivial possui pelo menos 2 vértices que não são articulações

Demonstração.

Seja T a árvore geradora de G e x e y folhas de T. Usando o teorema anterior, x e y não são articulações em T.
Portanto, como $T - x$ é árvore geradora de $G - x$, sem perda de generalidade x e y não são articulações em G. □

Teorema 3: Seja G um grafo com pelo menos 3 vértices. G é biconexo se e somente se para cada par de vértices em $V(G)$ existem dois caminhos disjuntos entre eles.

Demonstração.
Seja $\kappa(G)$ o menor número de vértices tal que sua remoção desconecta G $\omega(G - \kappa(G)) > \omega(G)$.

G é p-conexo quando $p \leq \kappa(G)$.

Portanto observe que se G é biconexo e existe um par de vértices u e v tal que só existe um caminho em G, por definição algum vértice de tal caminho é articulação e sua remoção desconecta G e portanto $\kappa(G) = 1 \implies 2 \leq 1$ que é absurdo. Assumindo portanto que para todo par de vértices em G existem dois caminhos, é impossível tornar o grafo desconexo removendo apenas um vértice, logo $\kappa(G) \geq 2$ e G é biconexo. □

Teorema 4: Seja G um grafo com $k + 1$ vértices. G é k-conexo se e somente se para quaisquer dois vértices de G existem k caminhos internamente disjuntos entre eles.

Demonstração.

□

Segundo módulo

Grafos eurelianos e hamiltonianos

Grafos eurelianos

Definição 1: Passeio Eureliano

Um passeio ou trilha é dito eureliano(a) se é uma trilha fechada onde cada aresta aparece apenas uma vez.

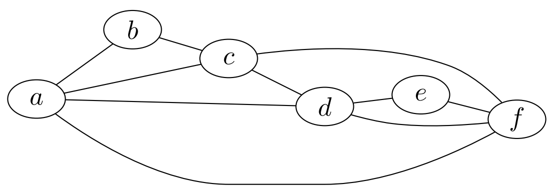

Figura 1: Grafo eureliano

Teorema 5: Um multigrafo G conexo é eureliano se e somente se todo vértice possui grau par.

Demonstração.

$\square$

Grafos hamiltonianos

Emparelhamento

Coloração de Arestas

Terceiro módulo

Coloração de vértices

Planaridade

Grafos direcionados

abstract Function as base break case catch class checked continue default delegate do else enum event explicit extern false for foreach finally fixed goto if implicit in interface internal is lock namespace new not null operator out override params private protected public readonly ref return sealed sizeof stackalloc static struct switch this throw true try typeof unchecked unsafe using virtual while #if #else #elif #endif #define #undef #warning #error #line bool byte char const self decimal double float int long object uint ushort ulong sbyte short Set string void