Teoria dos Grafos

Matheus Souza D'Andrea Alves

2018.2

Sumário

Introdução

site do protti

Conceitos básicos

Um *grafo simples* G é denotado por um conjunto de vértices $V(G)$ e um conjunto de arestas $E(G)$.

Cada aresta é um par não ordenado $(u, v) \mid (\{u, v\} \subseteq V(G))$. Dois vértices u e v são vizinhos/adjacentes se existe uma aresta $(u, v) \in E(G)$.

A ordem de um grafo é o numero de vértices de G

$$n = |V(G)| \ \& \ m = |E(G)|$$

Um grafo é *trivial* se possuí apenas um vértice e *nulo* se não possuí vértice. Um *multigrafo* são grafos simples extendidos com:

- **Arestas paralelas**: Arestas que conectam os mesmos dois vértices.
- **Laços**: arestas em que ambos os extremos são o mesmo vértice.

Vizinhança

A vizinhança aberta de um vértice v é denominada $N(v)$; Tal conjunto possuí todo vértice que seja um extremo de arestas que tenham v como outro extremo.

A vizinhança fechada de um vértice é denominada $N[v]$ onde $N[v] = N(v) + v$.

Grau

O grau de um vértice, denominado $d(v)$ é igual ao número de vezes em que v aparece como algum terminal em qualquer $e \in E(G)$.

Um grafo é dito regular quando todos seus vértices tem o mesmo grau, e k-regular se todos os vértices tem $d(v) = k$.

O grau máximo de G é definido como:

$$\Delta(G) = max\{d(v) | v \in V(G)\}$$

Dado um grafo G, sua sequência de graus é a sequencia formada pelos graus de seus vértices ordenados de forma não decrescente.

Se um vértice possui grau zero, então ele não possui vizinhos e é chamado de vértice *isolado*. Em contrapartida se um vértice é vizinho de todos os outros vértices em um grafo ele é chamado de vértice *universal*.

Estruturas relacionadas

O complemento de G é chamado de *Gê barra* e denominado por $\overline{G}$.

Um grafo H é um subgrafo de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$, e o grafo "faça sentido", isso é seja possível criar um grafo com todos os vértices e arestas de tais subconjuntos.

Um subgrafo *gerador* de G é um subgrafo H de G onde $V(H) \subseteq V(G)$

H é um subgrafo induzido por um conjunto de vértices $X \subseteq G$ se toda aresta nesse conjunto existente em G, também existe em H, sua notação é: $H = G[X]$. Um subgrafo H é o subgrafo formado por um conjunto de arestas $E'[\in E(G)$ com seus respectivos extremos, sua notação é $H = G[E']$.

Seja $S \subset V(G)$:

$$G - S = G[V(G) \backslash S]$$

Isso é, O Grafo G sem os vértices em S é o subgrafo induzido pelo conjunto de todos os vértices de G tirando os vértices de S

Um passeio é uma sequencia de vértices v_1, v_1, v_1, v_1 ligadas sequencialmente por arestas.

Uma trilha é um passeio onde arestas não se repete; Um caminho é uma trilha onde nenhum vértice se repete. É chamado de comprimento do caminho o número de arestas no mesmo, um caminho é chamado fechado se ...

Um ciclo é um passeio onde nenhum vértice exceto o inicial se repete, e apenas repetindo o inicial no final do passeio, seu número de vértices é igual ao seu númeor de arestas.

Uma corda é uma aresta que liga dois vértices não consecutivos do ciclo

Propagação de propriedades.

Dado um grafo G uma propriedade é hereditária por subgrafos, e quando ela vale para G ela também vale para seus subgrafos.

Se uma propriedade é hereditária para subgrafos, ela é para subgrafos induzidos.

Operações

A união de dois grafos é a união de seus vértices e suas arestas, a operação de interseção é semelhante.

teorema do aperto de mão:

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v)$$

Dois grafos são isomorfos se existe uma bijeção f dos vértices de G para vértices de um G_{iso} tal que $\forall(u, v) \in E(G) \implies (f(u), f(v)) \in E(G_{iso})$

Características

Um grafo é dito completo, se quaisquer dois vértices de G são vizinhos. O número de arestar de um grafo completo é $n(n-1)/2$.

Um grafo é conexo se para todo par de vértices dado, existe um caminho entre os dois vértices. Uma componente conexa de G é um subgrafo conexo maximal de G. $\omega(G)$ é o númeor de componentes conexas de G.

A distância entre dois vértices é o comprimento do menor caminho entre eles.

A excentricidade de um vértice $v \in V(G)$ é definida como:

$$exc(v) = max\{dist(v, x)|x \in V(G)\}$$

O diâmetro de um grafo G é definido como:

$$diam(G) = max\{exc(x)|x \in V(G)\}$$

O centro $C \subseteq V(G)$ é o subconjunto de vértices com excentricidade mínima, em contrapartida a periferia de um grafo G é o subconjunto de vértices com excentricidade máxima.

Partições

Uma clique K em um grafo G é um conjunto de vértices $K \subseteq V(G)$ tal que $G[K]$ é completo. Por outro lado se o conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ induz um grafo sem arestas, então S é um conjunto independente.

Notação: K_n *grafo completo com* n *vértices*, S_n *conjunto independente com* n *vértices.*

Maximalidade e minimalidade

Um conjunto S é maximal em relação a uma propriedade P, se:

- S satisfaz P
- $\nexists S' \supset S$ tq S' satisfaz P.

Um conjunto S é minimal em relação a uma propriedade P se:

- S satisfaz P
- $\nexists S' \subset S$ tq S' satisfaz P.

Representações.

Representação gráfica. Matriz de adjacências

Primeiro módulo

Árvores

Conectividade

Segundo módulo

Grafos eurelianos e hamiltonianos

Emparelhamento

Coloração de Arestas

Terceiro módulo

Coloração de vértices

Planaridade

Grafos direcionados