2 Árvores

As árvores constituem uma das mais importantes famílias de grafos devido a suas inúmeras aplicações em Ciência da Computação e outras áreas em Ciências Exatas e Engenharias. Neste capítulo estudaremos os principais resultados sobre a estrutura das árvores.

2.1 Conceito de árvore

Dizemos que um grafo é *acíclico* se não possui ciclos. Uma *árvore* é um grafo acíclico e conexo.

Um grafo acíclico não necessariamente conexo também é chamado de *floresta*. Cada componente conexa de uma floresta é uma árvore.

O teorema a seguir é a primeira caracterização de árvores que estudaremos.

Teorema 2.1. *Um grafo T é uma árvore se e somente se existe um único caminho entre cada par de vértices de T.*

Demonstração. Suponha inicialmente que exista um único caminho entre cada par de vértices de T. Isto implica claramente que T é um grafo conexo. Além do mais, se T contivesse um ciclo, haveria pelo menos dois caminhos entre qualquer par de vértices distintos neste ciclo, contrariando a hipótese assumida. Logo, além de conexo, T é acíclico, isto é, T é uma árvore.

Suponha agora que T seja uma árvore. Como T é conexo, existe pelo menos um caminho entre cada par de vértices de T. Suponha por absurdo que existam dois caminhos diferentes P_1 e P_2 entre um certo par de vértices $u, v \in V(T)$. Seja w o vértice de T com as seguintes propriedades: (a) $w \in V(P_1) \cap V(P_2)$; (b) $P_1[u, w] = P_2[u, w]$; (c) $P_1[u, w]$ e $P_2[u, w]$ têm o maior comprimento possível. Seja agora $x \in V(P_1) \cap V(P_2)$ o vértice de T tal que $P_1[w, x]$ e $P_2[w, x]$ são caminhos internamente disjuntos em vértices (isto é, possuem apenas os extremos em comum). Observe que o subgrafo $P_1[w, x] \cup P_2[w, x]$ é claramente um ciclo, e isto contradiz a hipótese de T ser uma árvore. Portanto, existe necessariamente um único caminho entre cada par de vértices de T. $\square$

2.2 Folhas

Uma *folha* é um vértice de grau um. As folhas desempenham um papel importante nos teoremas a seguir.

Teorema 2.2. *Toda árvore não trivial tem pelo menos duas folhas.*

Demonstração. Seja T uma árvore não trivial e considere um caminho P em T de comprimento máximo. Sejam u e v os vértices inicial e final de P. É claro que u tem um vizinho x em P. Se u tiver outro vizinho $y \neq x$, temos dois casos: $y \in V(P)$ e $y \notin V(P)$. O primeiro caso é impossível, pois o grafo $P[u, y] + uy$ seria um ciclo. O segundo caso também é impossível, pois contradiz o fato de P ser um caminho de comprimento máximo. Logo x é o único vizinho de u em T, isto é, u é uma folha. O raciocício para mostrar que v também é uma folha é idêntico. $\square$

Teorema 2.3. *Se T é uma árvore então $m = n - 1$.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução em n. Para a base da indução, consideramos o caso $n = 1$. Nesta situação, T é um grafo trivial, e portanto vale $m = 0 = 1 - 1 = n - 1$. Para o passo da indução, seja T uma árvore com $n > 1$ vértices e m arestas, e suponha que qualquer árvore T' com $n' < n$ vértices tem exatamente $m' = n' - 1$ arestas. Pelo Teorema 2.2, T possui uma folha x. Observe que o grafo $T - x$ é claramente uma árvore com $n' = n - 1 < n$ vértices. Pela hipótese de indução, $T - x$ tem $n' - 1 = (n - 1) - 1 = n - 2$ arestas. Como T tem exatamente uma aresta a mais do que $T - x$, segue que T tem $m = (n - 2) + 1 = n - 1$ arestas. $\square$

2.3 Centro de uma árvore

Nesta seção veremos que o centro de uma árvore pode ser determinado algoritmicamente de modo bastante simples.

Lema 2.4. *Seja T uma árvore com pelo menos três vértices. Seja F o conjunto das folhas de T. Seja $T' = T - F$. Então, T e T' têm o mesmo centro.*

Demonstração. Sejam T e T' como no enunciado. Denote por $exc(u, G)$ a excentricidade do vértice u no grafo G. A demonstração se baseia nos seguintes fatos, de verificação simples:

(a) Nenhuma folha de T pertence ao seu centro;

(b) Se $v \in V(T')$ então $exc(v, T') = exc(v, T) - 1$.

Pelo item (a), os vértices do centro de T estão em T'. Pelo item (b), um vértice de excentridade mínima em T também é um vértice de excentricidade mínima em T', e vice-versa. Logo, o lema segue. □

Teorema 2.5. (Jordan 1869) *O centro de uma árvore ou é formado por apenas um vértice ou por dois vértices vizinhos.*

Demonstração. Seja T uma árvore. O lema anterior sugere um algoritmo para encontrar o centro de T:

Algoritmo 1: Algoritmo para encontrar o centro de uma árvore T

Entrada: Uma árvore T
Saída: O centro de T
$T' \leftarrow T$
enquanto $|V(T')| \geq 3$ **faça**
  $F \leftarrow$ conjunto das folhas de T'
  $T' \leftarrow T' - F$
retornar $V(T')$

Pelo Lema 2.4, as sucessivas árvores referenciadas pela variável T', geradas ao longo das iterações do comando **enquanto** no Algoritmo 1, possuem todas o mesmo centro. Ao final das iterações, é claro que T' possuirá um ou dois vértices. Isto completa a demonstração. □

2.4 Pontes

Uma *ponte* ou *aresta de corte* de um grafo G é uma aresta e tal que $w(G-e) > w(G)$. Uma caracterização alternativa de árvores pode ser formulada por meio de pontes, como veremos a seguir.

Teorema 2.6. *Uma aresta e é uma ponte de G se e somente se não existe ciclo contendo e em G.*

Demonstração. Suponha por absurdo que e é uma ponte de G e que exista um ciclo C contendo e. Se existe um caminho P entre dois vértices u

e v contendo a aresta e, então $P \cup (C - e)$ é um passeio entre u e v. Pelo Exercício 1.10, existe um caminho P' entre u e v que não contém a aresta e. Portanto, após a remoção de e, continua havendo caminho entre todo par de vértices pertencentes à componente conexa de G que continha e. Isto implica $w(G - e) = w(G)$, o que contradiz a hipótese de e ser uma ponte.

Suponha agora que não exista ciclo contendo e em G. Escreva $e = xy$. Se existisse algum caminho P entre x e y no grafo $G - e$, $P + e$ seria um ciclo em G contendo e, uma contradição. Logo, x e y pertencem a componentes conexas distintas no grafo $G - e$, o que implica $w(G - e) > w(G)$; em outras palavras, e é uma ponte. □

Teorema 2.7. *Um grafo conexo T é uma árvore se e somente se toda aresta de T é uma ponte.*

Demonstração. Suponha que T é uma árvore. Como T é um grafo acíclico, é claro que nenhuma aresta de T pode pertencer a um ciclo. Logo, pelo Teorema 2.6, toda aresta de T é uma ponte.

Reciprocamente, se toda aresta de um grafo T é uma ponte, pelo Teorema 2.6 nenhuma delas pertence a um ciclo. Logo o grafo T é acíclico. Como por hipótese T é conexo, segue que T é uma árvore. □

2.5 Árvores geradoras

Uma *árvore geradora* de um grafo G é um subgrafo gerador conexo e acíclico de G.

Proposição 2.8. *Todo grafo conexo possui uma árvore geradora.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo. O seguinte algoritmo constrói uma árvore geradora de G.

Algoritmo 2: Algoritmo para determinar uma árvore geradora

Entrada: Um grafo conexo G
Saída: Uma árvore geradora T de G
$T \leftarrow G$
enquanto existe aresta e tal que $T - e$ é conexo **faça** $T \leftarrow T - e$
retornar T

Observe que o grafo T retornado pelo Algoritmo 2 satisfaz $V(T) = V(G)$, isto é, T é um subgrafo gerador de G. Além do mais, as sucessivas remoções de arestas no comando **enquanto** preservam a conexidade de T; logo, ao final das iterações, T será um subgrafo conexo. Finalmente, quando o teste do comando **enquanto** falhar, todas as arestas remanescentes em T serão pontes; pelo Teorema 2.7, o grafo T retornado é uma árvore. Isto conclui a demonstração. □

Teorema 2.9. *Se G é conexo, então $m \geq n - 1$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.8, G possui uma árvore geradora T. Obviamente, $|V(T)| = n$ e $|E(T)| = n - 1$. Como $|E(G)| = m$ e $E(T) \subseteq E(G)$, segue o resultado. □

Concluímos pelos Teoremas 2.3 e 2.9 que as árvores são os grafos conexos que atingem o limite mínimo $n - 1$ para o número de arestas, no sentido de que todo grafo com menos do que $n-1$ arestas é necessariamente desconexo.

Pode-se mostrar (Exercício 2.8) que toda floresta é um subgrafo gerador de uma árvore. Este resultado, juntamente com o Teorema 2.3, permite enunciar:

Teorema 2.10. *Se G é acíclico, então $m \leq n - 1$.*

Pelos Teoremas 2.3 e 2.10, as árvores são os grafos acíclicos que atingem o limite máximo $n - 1$ para o número de arestas, no sentido de que todo grafo com mais do que $n - 1$ arestas contém pelo menos um ciclo.

Corolário 2.11. *Seja G um grafo qualquer com n vértices e m arestas. Então:*

(a) *Se $m < n - 1$ então G é desconexo;*

(b) *Se $m = n - 1$ e G é conexo ou acíclico então G é uma árvore;*

(c) *Se $m > n - 1$ então G contém pelo menos um ciclo.*

Encerramos esta seção com este importante teorema:

Teorema 2.12. *Seja T uma árvore geradora de um grafo conexo G, e seja $e \in E(G) \backslash E(T)$. Então, $T + e$ contém um único ciclo.*

Demonstração. Escreva $e = xy$. Pelo Teorema 2.1, em T existe um único caminho P entre x e y. Logo, o subgrafo $P + e$ é um ciclo em $T + e$. Se C é um outro ciclo em $T + e$, é claro que C contém a aresta e. Assim, $C - e$ é um caminho entre x e y em T, donde concluímos que $C - e$ é o próprio caminho P, isto é, os ciclos C e $P + e$ são na verdade o mesmo ciclo. □

2.6 Exercícios

2.1. Mostre que se G é uma árvore com $\Delta(G) \geq k$, então G contém pelo menos k folhas.

2.2. Desenhe todas as árvores não isomorfas com 7 vértices.

2.3. Prove que um grafo é uma floresta se e somente se o seu número de arestas é igual ao seu número de vértices menos o seu número de componentes conexas.

2.4. Prove ou refute: Se G é acíclico então G possui no mínimo $2(w(G) - i(G))$ vértices de grau um, onde $w(G)$ é o número de componentes conexas de G e $i(G)$ é o número de vértices isolados de G.

2.5. Seja G um grafo conexo e e uma aresta de G. Mostre que e está em toda árvore geradora de G se e somente se e é uma ponte de G.

2.6. Mostre que se G tem exatamente uma árvore geradora T então $G = T$.

2.7. Mostre que qualquer grafo $G = (V, E)$ contém pelo menos $m - n + w$ ciclos distintos, onde $|V| = n$, $|E| = m$ e w é o número de componentes conexas de G.

2.8. Mostre que toda floresta é um subgrafo gerador de uma árvore.

2.9. A cintura de um grafo G é o comprimento de seu menor ciclo. Se G for acíclico, sua cintura é infinita. Mostre que um grafo k-regular de cintura 4 possui pelo menos $2k$ vértices.