Teoria dos Grafos

Matheus Souza D'Andrea Alves

2018.2

Sumário

Introdução **2**
Conceitos básicos . . . 2
Vizinhança . . . 2
Grau . . . 2
Estruturas relacionadas . . . 3
Propagação de propriedades. . . . 3
Operações . . . 3
Características . . . 4
Partições . . . 4
Maximalidade e minimalidade . . . 5
Representações. . . . 5

Primeiro módulo **5**
Árvores . . . 5
Conceito . . . 5
Conectividade . . . 6

Segundo módulo **8**
Grafos eurelianos e hamiltonianos . . . 8
Emparelhamento . . . 8
Coloração de Arestas . . . 8

Terceiro módulo **8**
Coloração de vértices . . . 8
Planaridade . . . 8
Grafos direcionados . . . 8

Introdução

site do protti

Conceitos básicos

Um *grafo simples* G é denotado por um conjunto de vértices $V(G)$ e um conjunto de arestas $E(G)$.

Cada aresta é um par não ordenado $(u, v) \mid (\{u, v\} \subseteq V(G))$. Dois vértices u e v são vizinhos/adjacentes se existe uma aresta $(u, v) \in E(G)$.

A ordem de um grafo é o numero de vértices de G

$$n = |V(G)| \ \& \ m = |E(G)|$$

Um grafo é *trivial* se possuí apenas um vértice e *nulo* se não possuí vértice. Um *multigrafo* são grafos simples extendidos com:

- **Arestas paralelas**: Arestas que conectam os mesmos dois vértices.
- **Laços**: arestas em que ambos os extremos são o mesmo vértice.

Vizinhança

A vizinhança aberta de um vértice v é denominada $N(v)$; Tal conjunto possuí todo vértice que seja um extremo de arestas que tenham v como outro extremo.

A vizinhança fechada de um vértice é denominada $N[v]$ onde $N[v] = N(v) + v$.

Grau

O grau de um vértice, denominado $d(v)$ é igual ao número de vezes em que v aparece como algum terminal em qualquer $e \in E(G)$.

Um grafo é dito regular quando todos seus vértices tem o mesmo grau, e k-regular se todos os vértices tem $d(v) = k$.

O grau máximo de G é definido como:

$$\Delta(G) = max\{d(v) | v \in V(G)\}$$

Dado um grafo G, sua sequência de graus é a sequencia formada pelos graus de seus vértices ordenados de forma não decrescente.

Se um vértice possui grau zero, então ele não possui vizinhos e é chamado de vértice *isolado*. Em contrapartida se um vértice é vizinho de todos os outros vértices em um grafo ele é chamado de vértice *universal*.

Estruturas relacionadas

O complemento de G é chamado de *Gê barra* e denominado por $\overline{G}$.

Um grafo H é um subgrafo de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$, e o grafo "faça sentido", isso é seja possível criar um grafo com todos os vértices e arestas de tais subconjuntos.

Um subgrafo *gerador* de G é um subgrafo H de G onde $V(H) \subseteq V(G)$

H é um subgrafo induzido por um conjunto de vértices $X \subseteq G$ se toda aresta nesse conjunto existente em G, também existe em H, sua notação é: $H = G[X]$. Um subgrafo H é o subgrafo formado por um conjunto de arestas $E'[\in E(G)$ com seus respectivos extremos, sua notação é $H = G[E']$.

Seja $S \subset V(G)$:

$$G - S = G[V(G) \backslash S]$$

Isso é, O Grafo G sem os vértices em S é o subgrafo induzido pelo conjunto de todos os vértices de G tirando os vértices de S

Um passeio é uma sequencia de vértices v_1, v_1, v_1, v_1 ligadas sequencialmente por arestas.

Uma trilha é um passeio onde arestas não se repete; Um caminho é uma trilha onde nenhum vértice se repete. É chamado de comprimento do caminho o número de arestas no mesmo, um caminho é chamado fechado se ...

Um ciclo é um passeio onde nenhum vértice exceto o inicial se repete, e apenas repetindo o inicial no final do passeio, seu número de vértices é igual ao seu númeor de arestas.

Uma corda é uma aresta que liga dois vértices não consecutivos do ciclo

Propagação de propriedades.

Dado um grafo G uma propriedade é hereditária por subgrafos, e quando ela vale para G ela também vale para seus subgrafos.

Se uma propriedade é hereditária para subgrafos, ela é para subgrafos induzidos.

Operações

A união de dois grafos é a união de seus vértices e suas arestas, a operação de interseção é semelhante.

teorema do aperto de mão:

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v)$$

Dois grafos são isomorfos se existe uma bijeção f dos vértices de G para vértices de um G_{iso} tal que $\forall(u,v) \in E(G) \implies (f(u), f(v)) \in E(G_{iso})$

Características

Um grafo é dito completo, se quaisquer dois vértices de G são vizinhos. O número de arestar de um grafo completo é $n(n-1)/2$.

Um grafo é conexo se para todo par de vértices dado, existe um caminho entre os dois vértices. Uma componente conexa de G é um subgrafo conexo maximal de G. $\omega(G)$ é o númeor de componentes conexas de G.

A distância entre dois vértices é o comprimento do menor caminho entre eles.

A excentricidade de um vértice $v \in V(G)$ é definida como:

$$exc(v) = max\{dist(v,x)|x \in V(G)\}$$

O diâmetro de um grafo G é definido como:

$$diam(G) = max\{exc(x)|x \in V(G)\}$$

O centro $C \subseteq V(G)$ é o subconjunto de vértices com excentricidade mínima, em contrapartida a periferia de um grafo G é o subconjunto de vértices com excentricidade máxima.

Partições

Uma clique K em um grafo G é um conjunto de vértices $K \subseteq V(G)$ tal que $G[K]$ é completo. Por outro lado se o conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ induz um grafo sem arestas, então S é um conjunto independente.

Notação: K_n *grafo completo com* n *vértices*, S_n *conjunto independente com* n *vértices.*

Um grafo é bipartido quando é possível particionar seu conjunto de vértices em dois conjuntos S_1 e S_2 tal que $S_1 \cup S_2 = V(G)$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ onde ambos S_1 e S_2 são conjuntos independentes.

Teorema 1: Um grafo G é bipartido, se e somente se, G não contém ciclos ímpares.

Demonstração.
Suponha por absurdo que G seja bipartido e contenha um ciclo ímpar $C = v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}, v_1$ seja $S_1 \cup S_2$ seja uma bipartição de $V(G$, suponha portanto sem perda de generalidade que $v_1 \in S_1$, dessa forma, $v_2 \in S_2, v_3 \in S_1, \ldots, v_{2k} \in S_2, v_{2k+1} \in S_1$. Porém dessa existe a aresta () $\square$

Maximalidade e minimalidade

Um conjunto S é maximal em relação a uma propriedade P, se:

- S satisfaz P
- $\nexists S' \supset S$ tq S' satisfaz P.

Um conjunto S é minimal em relação a uma propriedade P se:

- S satisfaz P
- $\nexists S' \subset S$ tq S' satisfaz P.

Representações.

Representação gráfica.

fig

Matriz de adjacências

Primeiro módulo

Árvores

Conceito

Dizemos que um grafo é uma árvore se não possui ciclos e é conexo, uma floresta é um grafo cuja cada componente conexa é uma árvore.

O centro de uma árvore são um ou dois vértices:

Algoritmo

```
def center(t Tree)
  m = t
  while m.vertices.size >= 3 do
    leafs = m.leafs
    m = m[m.vertices - leafs]
  end
  return m
end
```

Conectividade

Articulações são vértices cuja a remoção aumenta o número de componentes conexas do grafo.

Teorema: v é articulação $\iff \exists x, y$ tal que todo caminho entre x e y contém v

Demonstração: Como v é articulação, após sua remoção a componente conexa que continha v não mais existe. São criadas duas componentes conexas C_1 e C_2. Tome $x \in V(C_1)$ e $y \in V(C_2)$ seja P um caminho de x a y em G. Em $G - v$, o caminho P não existe. Logo, $v \in V(P)$.

Em $G - v$ não pode haver nenhum caminho entre x e y, pois de acordo com a premissa, a remoção de v remove todos os possíveis caminhos entre os mesmos, isso significa que a remoção de v aumentou o número de componentes conexas, logo v é uma articulação.

Teorema 2: Em uma árvore T não trivial, v é articulação se e somente se v não é folha.

Demonstração.

Suponha por absurdo que v é uma folha, como visto anteriormente existe então dois vértices x e y cujo o caminho entre eles passa por v, tal afirmação é contraditória pois v é uma folha e tem $d(v) = 1$, sendo impossível fazer parte de um caminho não sendo extremidade.

Seja u um vértice não folha, portanto existe um caminho entre dois vértices x e y que contém v, suponha por absurdo que a remoção de tal vértice não aumente o número de componentes conexas, tal afirmação é absurda, pois isso implicaria em um caminho entre x e y que não contém v, o que implica em um ciclo e T é uma árvore. $\square$

Corolario 1: Todo grafo G conexo não trivial possui pelo menos 2 vértices que não são articulações

Demonstração.

Seja T a árvore geradora de G e x e y folhas de T. Usando o teorema anterior, x e y não são articulações em T.
Portanto, como $T - x$ é árvore geradora de $G - x$, sem perda de generalidade x e y não são articulações em G. $\square$

Teorema 3: Seja G um grafo com pelo menos 3 vértices. G é biconexo se e somente se para cada par de vértices em $V(G)$ existem dois caminhos disjuntos entre eles.

Demonstração.
Seja $\kappa(G)$ o menor número de vértices tal que sua remoção desconecta G $\omega(G - \kappa(G)) > \omega(G)$.

G é p-conexo quando $p \leq \kappa(G)$.

Portanto observe que se G é biconexo e existe um par de vértices u e v tal que só existe um caminho em G, por definição algum vértice de tal caminho é articulação e sua remoção desconecta G e portanto $\kappa(G) = 1 \implies 2 \leq 1$ que é absurdo. Assumindo portanto que para todo par de vértices em G existem dois caminhos, é impossível tornar o grafo desconexo removendo apenas um vértice, logo $\kappa(G) \geq 2$ e G é biconexo.
$\square$

Teorema 4: Seja G um grafo com $k + 1$ vértices. G é k-conexo se e somente se para quaisquer dois vértices de G existem k caminhos internamente disjuntos entre eles.

Demonstração.

$\square$

Segundo módulo

Grafos eurelianos e hamiltonianos

Emparelhamento

Coloração de Arestas

Terceiro módulo

Coloração de vértices

Planaridade

Grafos direcionados