Programação Inteira

Matheus Souza D'Andrea Alves

2018.2

Sumário

Introdução

Infos gerais

Site

Salas:

- 2ª 306
- 4ª 202

Para a parte prática vamos implementar modelos e soluções usando o CPlex ## Programação linear

É um problema de otimização onde tanto a função objetivo quanto as restriçíes são lineares.

min/max cˆtX

A__x eq 0

Modelagem

- Defina as variáveis do problema → como representar uma solução do problema
- Definir as restrições do problema → limites que definem o conjunto de pontos viáveis.
- A função objetivo → que vai ponderar cada solução

Fluxo máximo

Existe um grafo direcionado $G = (V, E)$ com um e apenas um vértice fonte e sumidouro, $\forall(i, j) \in E(G)$ tem uma capacidade $C_{i,j}$. Queremos maximizar a quantidade de produto que passa de $F \rightarrow S$

São minhas variáveis: $X_{i,j} \rightarrow \forall(i, j) \in E(G)$. Representando a quantidade de produto que sai de i e chega em j.

São minhas restrições: $X_{i,j} < C_{i,j}$;

É meu objetivo: $max\{\sum_{j \in N^+(S)} X_{j,s}\}$

Para solução

Métodos:

- Simplex (exponencial, rápido)
- Ponto Interiores (polinomial, rápido)

Modelagem

Categorização em formulação matemática

As categorias quando modelamos problemas em matemática caem nas seguintes categorias.

- Linear ou não linear
- Convexo ou não-convexo
- Contínuo ou Discreto
- Estocástica ou Determinismo

Dentro dessa categorização a programação inteira busca resolver os problemas:

- Discretos
- Determinísticos
- Não convexos
- Lineares e não lineares

Isso faz com que seja possível resolver a maioria dos problemas combinatórios propostos em computação.

Composição de um problema

Um problema de programação matemática é composto de :

- Variáveis de decisão
- Restrições
- Função objetivo
- Parametro de entrada

Um problema de programação inteira tem formato:

$$\begin{cases} min/max\{f(x)\} \\ g_i(x) \left\{ \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \right\} b_i \\ x \in X | X \text{é discreto} \end{cases}$$

Definição:

Solução viável: valores atribuidos as variáveis que respeitam as Restrições. **Solução ótima**: é uma solução viável que maximiza/minimiza a função objetivo.

Forma padrão:

$$\begin{cases} maxC^T x \\ A_x \leq b \\ x \in Z_+^p * R_+^{n-p} \end{cases}$$

A melhor formulação possível, é uma formulação que defina a involtória convexa dos pontos inteiros, i.e. as o poliedro minimal que contém toda solução inteira, se isso acontecer conseguimos resolver através de PL, e logo resolver de forma polinomial.

Porém, a involtória convexa não é conhecida, ou sua representação é exponencial.

Definições

Considere duas formulações A e B para o mesmo PPI. Denominamos P_A e P_B seus poliedros equivalentes.

A formulação A é dita *tão forte quanto* a formulação B se $P_A \subseteq P_B$. Se a inclusão é estrita, isto é, $P_A \subset P_B$ então dizemos que A é uma formulação mais forte.

Se F é o conjunto de todas as viáveis soluções desse PPI, então temos que $Convo(F) \subseteq A$. Formulação ideal é aquela tal que $Convo(F) = P_A$

Modelando com variáveis inteiras.

Impor que uma ação x só pode ser feira se outra ação y for realizada.

$x, y \in [0, 1] | y \leq x$

Problema da Localização Facilitada:

- Conjunto de facilidades J
- Conjunto de Clientes I

Que facilidades precisam ser abertas para atender as demandas dos Clientes a um custo mínimo?

Seja $C_{i,j}$ o custo da facilidade j atender o cliente i. f_j o custo da abertura de uma facilidade.

Variáveis:

$$X_{j,i} = \begin{cases} 1, \text{ se } j \text{ atende } i \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$
Y_j = \begin{cases} 1, \text{ se } j \text{ aberto} \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}
$$

Restrições:

$$
X_{j,i} \in \{0,1\}, \forall j \in J, \forall i \in I
$$

$$
Y_j \in \{0, 1 \, \forall j \in J
$$

$$
\sum_{j \in J} X_{j,i}, \forall i \in I
$$

$$
|I| Y_j \geq \sum_{i \in I} X_{j,i}
$$

Impor que uma variável X assumir apenas um dos valores de um conjunto finito $A = a_1, a_2, .., a_m$

$$
Y_i = \begin{cases} 1, \text{se } X \text{ assume } a_i \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases} .
$$

$$
\sum_{i=1}^{m} Y_i = 1
$$

$$
X = \sum_{i=1}^{m} Y_i a_i
$$

Modelar funções lineares por partes

- Para cada intervalo que a slução x esteja temos uma função linear diferente
- A função f é conhecida apenas nos pontos a_i
- O valor de f é dado pela combinação linear de dois pontos consecutivos

  $\lambda f(a_i) + (1 - \lambda) f(a_{i+1})$

Variáveis:

$$
Y_i = \begin{cases} 1, \text{se solução está no intervalo } [a_i, a_{i+1}] \\ 0, \text{caso contrário, } \forall i = \{\} \ldots k \end{cases} .
$$

$$\lambda_i \to \text{combinação linear}, \forall i = \{\} \dots k$$

Restrições:

$$min \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

$$min \sum_{i=1}^{k} Y_i = 1$$

$$\lambda_i \leq Y_i + Y_{i-1} | \forall i = 2, \dots, k$$

$$\lambda_i \leq Y_i$$

$$\lambda_i \geq 0, foralli = 1, \dots, k$$

$$Y_i \in \{0, 1\}, foralli = 1, \dots, k$$

Objetivo:

$$min \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(a_i)$$

Modelando restrições dijuntas

Suponha duas restrições:

- $a^T X \geq b*$
- $c^T X \geq d**$

Queremos que pelo menos uma delas sejam satisfeitas.

Variáveis:

$$Y = \begin{cases} 1, \text{se satisfaz } *. \\ 0, \text{se satisfaz } ** \end{cases}$$

Restrições:

$$a^t X \geq bY$$

$$c^t X \geq d(1 - Y)$$

Suponha que tenho agora k restrições: $a_i^t \geq b_i$, $\forall i \in [1..k]$, quero ativar p restrições.

minhas restrições extras são:

$$Y_i \in [0, 1], \forall i = 1..k$$

$$\sum_{i=1}^{k} Y_i = p$$

Exemplo do emparelhamento perfeito

Temos um grupo de n pessoas que precisam formar pares. Seja c_j o custo de parear pessoa i com j.

Queremos minimizar o custo dos emparelhamentos.

Variáveis:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{se satisfaz } i \text{ parear com } j. \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

$$\sum_{j \in E} x_{i,j} = 1$$

Objetivo:

$$min \sum_{j \in E} x_{i,j} c_{i,j}$$

Exemplo da coloração de vértices

Seja um Grafo G, definimos a coloração de G como a atribuição de uma entre k para cada vértice de forma que dada qqr aresta suas extremidades não compartilham cores.

Variáveis:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{se vértice } i \text{ é colorido com } j. \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$w_j = \begin{cases} 1, \text{se } j \text{ for usado na coloração.} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

$$\sum_{j=1}^{|V(G)|} X_{i,j} = 1$$

$$X_{i,j} + x_{k,j} \leq w_j, \forall i, k \in V(G)$$

Objetivo:

$$min \sum_{j=1}^{|V(G)|} w_j$$

Fortalecer modelo enfraquecendo variáveis

Exemplo: Lot Sizing

Seja $d_t \rightarrow$ demanda do tempo t; $f_t \rightarrow$ custo de produzir no tempo t; $p_t \rightarrow$ custo de produção por unidade; $h_t \rightarrow$ custo de armazenamento em t.

Modelagem padrão:

Variáveis:

$$X_t \rightarrow \text{Qtd produzida em } t$$

$$S_t \rightarrow \text{Qtd em estoque em } t$$

$$Y_t = \begin{cases} 1, \text{se algo foi produzido em } t. \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

$$S_m = 0$$
$$X_t \leq Y_t M$$
$$S_{t-1} + X_t = d_t + S_t$$

removendo M temos

$$X_t \leq Y_t \sum_{t=1}^{m} d_t$$

Objetivo:

$$min \sum_{t=1}^{m} (h_t S_t + f_t Y_t + p_t X_t)$$

Modelagem com fortalecimento

Variáveis:

$$W_{i,t} \rightarrow \text{Qtd produzida em } i \text{ para suprir a demanda em } t$$
$$S_t \rightarrow \text{Qtd em estoque em } t$$
$$Y_t = \begin{cases} 1, \text{se algo foi produzido em } t. \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

$$S_m = 0$$
$$S_1 = 0$$
$$W_{i,t} \leq Y_i d_t$$
$$S_{t-1} + \sum_{i=t}^{n} W_{t,i} = d_t + S_t$$

Objetivo:

$$min \sum_{t=1}^{m} (h_t S_t + f_t Y_t + p_t \sum_{i=t}^{n} W_{t,i})$$

Outra modelagem para coloração

Sabemos que coloração é equivalente a encontrar uma partição de G em k conjuntos idenpendentes maximais.

Dessa forma podemos escolher um vértice como *representante* de seu conjunto independente, nos levando as seguintes variáveis.

Variáveis:

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{se o vértice } i \text{ e o vértice } j \text{ pertencem ao mesmo conjunto. Onde } i \leq j. \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

$$\sum_{N(v) \neq u \leq v} X_{u,v} = 1$$

$$X_{k,i} + X_{k,j} \leq X_{k,k}, \, \forall ij \in E, \forall k \in V, k \notin N[i] \sup N[j]$$

$$X_{i,j} \leq X_{i,i}$$

Caxeiro viajante

Variáveis

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{se viajo de } i \text{ para } j. \text{ Onde } i \leq j. \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

$$\sum_{j \in N(i)} X_{i,j}$$

$$\sum_{j \in N(i)} X_{j,i}$$

$$\sum_{j \in V/S} \sum_{i \in S} X_{j,i} \geq 1$$

$$\sum_{j \in S} \sum_{i \in S} X_{j,i} \leq |S| - 1$$

Seja:

- J um conjunto de n tarefas
- M um conjunto de m máquinas
- Cada tarefa $j \in J$ temos a ordem de processamento $(\lambda_1^j, \lambda_2^j, ..., \lambda_m^j)$ para a execução de j.
- Para cada $j \in J$ e $i \in M$ temos o tempo de processamento $p_{i,j}$
- Uma tarefa é executada em cada máquina exatamente uma vez.

Seja minha entrada a definição da ordem das máquinas em que os jobs devem ser executados e o tempo em que cada λ_i^j leva para executar.

Variáveis

$$X_{j,t,i} = \begin{cases} 1, \text{se a tarefa } j \text{, começa no tempo } t \text{, na máquina } i. \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Problemas em árvores

Problema de minimizar o número de *branch*-vértices em uma árvore geradora.

> Dado um grafo $G = (V, E)$ encontrar uma árvore geradora que minimize o número de *b*-vértices.
>
> > Um vértice v é um *b*-vértice se na árvore se $d(v) \geq 3$

Variáveis:

$$X_e = \begin{cases} 1, \text{se a aresta } e \in E(G) \text{ pertence a árvore.} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Y_v = \begin{cases} 1, \text{se o vértice } v \in V(G) \text{ é um } b\text{-vértice.} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

mínimo

$$\sum_{e \in E(G)} X_e = n - 1$$

subciclo

$$\sum_{e \in E(S)} X_e = |S| - 1 \qquad \forall S \subset V$$

b-vértices

$$\sum_{e \in \delta(i)} X_e \leq Y_i \mathcal{M} + 2 \qquad \forall i \subset V$$

Objetivo:

$$min\{\sum_{v \in V} Y_v\}$$

Problema da k-tree mínima, encontrar uma árvore com k arestas de custo mínimo

$\omega_i \quad \forall i \in E(G) \to$ custo

Variáveis:

$$X_e = \begin{cases} 1, \text{se a aresta } e \in E(G) \text{ pertence a árvore.} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Y_v = \begin{cases} 1, \text{se o vértice } v \in V(G) \text{ é um } b\text{-vértice.} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

$$\sum_{e \in E(G)} X_e = k$$

$$\sum_{e \in \delta(i)} X_e \leq Y_i \mathcal{M}$$

$$\Updownarrow$$

$$X_i \leq Y_i \qquad , \forall i \in \delta(i)$$

$$\sum_{e \in E(S)} X_e \leq |S| - 1 \qquad , \forall S \subset V(G) \quad \text{and} \quad |S| \leq k + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{e \in E(S)} X_e \leq \sum_{i \in S\{j\}} Y_i \qquad ,\forall S \subset V(G) \quad \text{and} \quad \forall j \in S$$

Objetivo

$$\sum_{e \in E} \omega_e X_e$$

Ring-star Problem

Dado um grafo misto $G = (V, E \cup A)$

$E = (u, v) \quad \forall u, v \in V(G) \quad \text{and} \quad u < v$

$A = \{u, v\} \quad u, v \in V(G)$

v_1 é denominado depósito

$c_{i,j}$ é o custo da aresta $(i, j) \in E$

$d_{i,j}$ é o custo da aresta $(i, j) \in A$

o ciclo é formado por arestas $e \in E$ e o ciclo(*Ring*) deve conter o depósito.

todo vértice que não faz parte do ciclo é conectado ao ciclo por um arco $a \in A$ de menor custo de conexão ao ciclo.

o custo do *Ring* é dado pela soma dos $c_{i,j}$ para i e j dentro do ciclo e $d_{i,j}$ para i ñ pertencente.

Variáveis:

$$X_e = \begin{cases} 1, \text{se a aresta } e \in E \text{ esta no ciclo.} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Y_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{se o vértice } i \text{ que não está no ciclo} \\ \quad \text{for ligado ao vértice } j \text{ pertencente ao ciclo.} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Se $i \in V$ pertence ao cilo, $Y_{i,i} = 1$

Restrições:

$$\sum_{e \in \delta(i)} = 2Y_{i,i} \quad \forall i \in V$$

$$Y_{1,1} = 1$$

$$Y_{i,i} + \sum_{j \in N_a(i)} Y_{i,j} = 1$$

$$\sum_{i \in S\ j \notin S} X_{i,j} \geq 2Y_{k,k} \quad \forall S \subset V\{v_i\} \quad \forall k \in S$$

Coloração Equilibrada

A diferença na quantidade de vértices coloridos com cada cor não pode ser maior que 1

Variáveis:

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{se a vértice } i \text{é colorido com } j. \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Y_j = \begin{cases} 1, \text{se a cor } j \text{ é usada} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{i,j} = 1 \quad , \forall i \in V$$

$$X_{i,j} + X_{k,j} \leq 1 \quad , \forall i \in V\ , \forall k \in N(i)\ , \forall j = 1 ... n$$

Problema de alocação de Frequencia

Atribuição de frequencias à antenas de forma a minimizar interferência.

cada $(u, v) \in E(G)$ tem uma distância segura $d_{u,v} $

Existe um conjunto de frequencias F

Variáveis:

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{se a antena } i \text{ é atribuida frequencia } j. \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

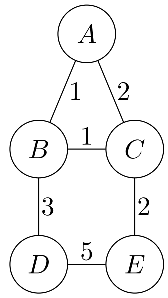

Figura 1:

$$\sum_{j \in F} X_{i,j} \leq \Delta(i) \quad ,\forall i \in V$$

$$X_{i,j} - X_{p,k} \leq 1 \quad \begin{cases} \forall i \in V \ ,\forall p \in N(i) \\ \forall j \in F \ ,\forall k \in F \end{cases}$$

Objetivo:

$$max \sum_{i \in V} \sum_{j \in F} X_i j$$

Máximo subgrafo balanceado

Dado um grafo $G = (V, E^+ \cup E^-)$, encontrar um grafo que pode ser particionado em no máximo k componentes equilibradas um grafo

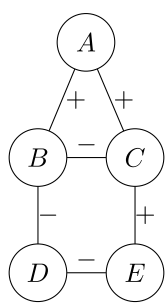

Figura 2:

Branch and bound

Definimos como branch and bound a estratégia de ramificar o problema em problemas mais limitados e resolver o todo por composição dos menores. Observe que tal estratégia leva a uma árvore.

Chamamos de nós ativos aqueles que não foram nem podados nem ramificados.

Os limitantes são classificados em:

- Limitantes inferiores (primais): heuristicas, etc...
- Limitantes superiores (duais): relaxação linear.

Na árvore de soluções existem três formas de percorrer em busca da melhor solução.

- Profundidade
  - foco em encontrar uma solução viável.
- Largura
  - foco na diversidade da busca.
- Limitantes
  - foco na qualidade do resultado.

Branching em um nó.

Uma variável é escolhida para ter seu valor limitado

Um nó podado não sofre mais *branch*, nosso objetivo é podar todos os nós da árvore.

Podamos das seguintes formas.

- Por otimalidade
  O nó 2 pode ser podado pois sabemos que a solução ótima de 2 é $\overline{Z} = underline Z = 20$
- Por limitante
  Melhor solução corrente: $\underline{Z} = 21$, podemos podar o nó 2 pois temos que $\underline{Z}^2 < 21$
- Por inviabilidade
  Suponha o seguinte PPI: $8x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 12$. observe que $x_1 = x_2 = 1 \implies 13 \leq 12$ logo podemos podar o nó 2 por inviabilidade.

Exemplo:

max $z = 4x_1 - x_2$

sujeito à

$7x_1 - 2x_2 \leq 14$

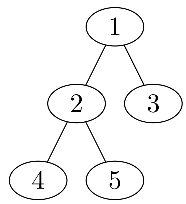

Figura 3:

$2x_1 - 2_x 2 \leq 3$
$x_2 \leq x_3$
$x_1, x_2 \in Z$

solução(1)
$x_1^* = 20/7, \quad x_2 = 3$
$\overline{z} = 59/7$
$\underline{z} = -\infty$

Ramificações de x_i:

x_i

$x_i \leq \lfloor x_i \rfloor \qquad x_i \geq \lceil x_i^* \rceil$
$x_1 \leq 2 \qquad x_1 \geq 3$
Podar nó direito.

solução(2)
$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 1/2$
$\overline{z}^2 = 15/2$
$\underline{z} = -\infty$

Plano de corte

Teorema 1: Toda desigualdade sólida para $\mathcal{X}$, pode ser obtida pela aplicação dos procedimentos $C - G$ um número finito de vezes

Demonstração.
Como usar $C - G$ para cortar $\mathcal{X}*$ (ótimo fracionário) deCONV($\mathcal{X}$)
Seja B a base ótima da relaxação, temos que:

$$MaxZ = \overline{Z} - \sum_{j \in I_N} (Z_j - C_j) X_j$$

Sujeito a:

$$X_{B_i} = \overline{X_{B_i}} - \sum_{j \in I_N} Y_{i,j} X_j \quad \forall i = 1..m$$

Seja X_{B_u} uma variável fracionária, temos que:

$$X_{B_u} = \overline{X_{B_u}} - \sum_{j \in I_N} Y_{u,j} X_j$$

$$X_{B_u} + \sum_{j \in I_N} Y_{u,j} X_j = \overline{X_{B_u}}$$

$$X_{B_u} + \lfloor \sum_{j \in I_N} Y_{u,j} \rfloor X_j \leq \overline{X_{B_u}}$$

$$X_{B_u} + \lfloor \sum_{j \in I_N} Y_{u,j} \rfloor X_j \leq \lfloor \overline{X_{B_u}} \rfloor$$

□

Branch and cut

Relaxação Lagrangiana

Geração de colunas em PI

Branch and Price

Teoria Poliédrica

Cortes

Faces

Facetas