Programação Inteira

Matheus Souza D'Andrea Alves

2018.2

Sumário

Introdução

Infos gerais

Site

Salas:

- 2ª 306
- 4ª 202

Para a parte prática vamos implementar modelos e soluções usando o CPlex ## Programação linear

É um problema de otimização onde tanto a função objetivo quanto as restriçíes são lineares.

min/max c^tX

A__x eq 0

Modelagem

- Defina as variáveis do problema $\to$ como representar uma solução do problema
- Definir as restrições do problema $\to$ limites que definem o conjunto de pontos viáveis.
- A função objetivo $\to$ que vai ponderar cada solução

Fluxo máximo

Existe um grafo direcionado $G = (V, E)$ com um e apenas um vértice fonte e sumidouro, $\forall(i, j) \in E(G)$ tem uma capacidade $C_{i,j}$. Queremos maximizar a quantidade de produto que passa de $F \to S$

São minhas variáveis: $X_{i,j} \to \forall(i, j) \in E(G)$. Representando a quantidade de produto que sai de i e chega em j.

São minhas restrições: $X_{i,j} < C_{i,j}$;

É meu objetivo: $max\{\sum\limits_{j \in N^+(S)} X_{j,s}\}$

Para solução

Métodos:

- Simplex (exponencial, rápido)
- Ponto Interiores (polinomial, rápido)

Modelagem

Categorização em formulação matemática

As categorias quando modelamos problemas em matemática caem nas seguintes categorias.

- Linear ou não linear
- Convexo ou não-convexo
- Contínuo ou Discreto
- Estocástica ou Determinismo

Dentro dessa categorização a programação inteira busca resolver os problemas:

- Discretos
- Determinísticos
- Não convexos
- Lineares e não lineares

Isso faz com que seja possível resolver a maioria dos problemas combinatórios propostos em computação.

Composição de um problema

Um problema de programação matemática é composto de :

- Variáveis de decisão
- Restrições
- Função objetivo
- Parametro de entrada

Um problema de programação inteira tem formato:

$$\begin{cases} min/max\{f(x)\} \\ g_i(x) \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i \\ x \in X | X \text{é discreto} \end{cases}$$

Definição:

Solução viável: valores atribuidos as variáveis que respeitam as Restrições.
Solução ótima: é uma solução viável que maximiza/minimiza a função objetivo.

Forma padrão:

$$\begin{cases} maxC^Tx \\ A_x \leq b \\ x \in Z_+^p * R_+^{n-p} \end{cases}$$

A melhor formulação possível, é uma formulação que defina a involtória convexa dos pontos inteiros, i.e. as o poliedro minimal que contém toda solução inteira, se isso acontecer conseguimos resolver através de PL, e logo resolver de forma polinomial.

Porém, a involtória convexa não é conhecida, ou sua representação é exponencial.

Modelando com variáveis inteiras.

Impor que uma ação x só pode ser feira se outra ação y for realizada.

$x, y \in [0,1] | y \leq x$

Problema da Localização Facilitada:

- Conjunto de facilidades J
- Conjunto de Clientes I

Que facilidades precisam ser abertas para atender as demandas dos Clientes a um custo mínimo?

Seja $C_{i,j}$ o custo da facilidade j atender o cliente i. f_j o custo da abertura de uma facilidade.

Variáveis:

$$X_{j,i} = \begin{cases} 1, \text{ se } j \text{ atende } i \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$Y_j = \begin{cases} 1, \text{ se } j \text{ aberto} \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Restrições:

$$X_{j,i} \in \{0,1\}, \forall j \in J, \forall i \in I$$

$$Y_j \in \{0,1 \forall j \in J$$

$$\sum_{j \in J} X_{j,i}, \forall i \in I$$

$$|I| Y_j \geq \sum_{i \in I} X_{j,i}$$

Impor que uma variável X assumir apenas um dos valores de um conjunto finito $A = a_1, a_2, .., a_m$

$$Y_i = \begin{cases} 1, \text{se } X \text{ assume } a_i \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}.$$

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i = 1$$

$$X = \sum_{i=1}^{m} Y_i a_i$$

Otimização relaxamento limites

Branch and bound

Plano de corte

Branch and cut

Relaxação Lagrangiana

Geração de colunas em PI

Branch and Price

Teoria Poliédrica

Cortes

Faces

Facetas