生物统计学

第七章 单样本的假设检验

云南大学 生命科学学院

會澤百家 至公天下

1. 单样本平均数的检验
2. 单样本比率的检验
3. 单样本方差的检验

1 单样本平均数的检验

总体方差已知

总体方差未知

2 单样本比率的检验

3 单样本方差的检验

来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，其样本平均数作为随机变量服从正态分布 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$。

非正态总体时，只要方差已知且样本容量 $n > 30$，样本平均数也近似服从正态分布。

将样本平均数标准化后，得统计量

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma_{\overline{x}}} \tag{7.1}$$

服从标准正态分布。基于标准正态分布的检验方法称为z 检验。

双尾检验时，设定零假设 $H_0: \mu = \mu_0$，备择假设 $H_1: \mu \neq \mu_0$。

将 μ_0 代入上式计算检验统计量

$$z_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_{\overline{x}}} \tag{7.2}$$

双尾检验时，设定零假设 $H_0: \mu = \mu_0$，备择假设 $H_1: \mu \neq \mu_0$。

将 μ_0 代入上式计算检验统计量

$$z_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_{\overline{x}}} \tag{7.2}$$

通过标准正态分布的累积分布函数（**pnorm()**）计算相伴概率，即 P 值，或通过分位数函数（**qnorm()**）计算显著性水平 α 下的检验临界值。

例 (7.1)

2021 年某市卫健委完成了一项关于 40 岁以上居民胆固醇指标的统计：平均数 190 mg/dL，标准差 25 mg/dL。两年后，卫健委又随机抽选了 100 名 40 岁以上的居民，发现胆固醇指标的平均数 $\bar{x} = 193$ mg/dL。试问新的抽样调查结果是否能够表明 40 岁以上居民的胆固醇指标有变化?

解

1. 按照双尾检验问题的提法，设定零假设 $H_0: \mu = 190$，备择假设 $H_1: \mu \neq 190$。
2. 选取显著性水平 $\alpha = 0.05$。
3. 计算检验统计量和 P 值。
    - 检验统计量 $z_c = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{193 - 190}{25/\sqrt{100}} = 1.2$；
    - 双尾检验的 P 值：$P(z \geq z_c | H_0) + P(z \leq -z_c | H_0) \approx 0.230$。
4. 作出统计推断。

   随机抽样数据表明该市 *2023* 年 *40* 岁以上居民胆固醇指标与 *2021* 年的数据没有统计学意义上的显著差异。

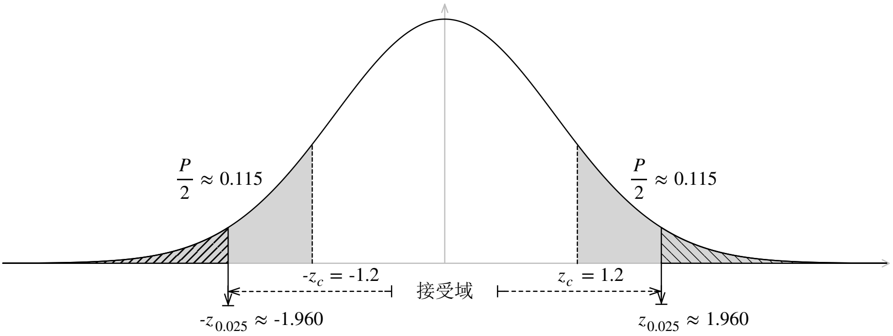

图 **7.1** 例题 7.1 的检验统计量与 P 值

例 (7.2)

假设一般儿童的胆固醇水平是 175 mg/dL，标准差为 18 mg/dL，现有父亲患有心脏病的 10 个儿童，其平均胆固醇水平是 186 mg/dL，问这组儿童的胆固醇水平是否高于一般人群中儿童的胆固醇水平?

解

1. 按照单尾检验的思路，设定零假设 $H_0: \mu = 175$，备择假设 $H_1: \mu > 175$。
2. 选取显著性水平 $\alpha = 0.05$。
3. 计算检验统计量和 P 值。
   - 检验统计量 $z_c = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{186 - 175}{18/\sqrt{10}} \approx 1.933$；
   - 单尾检验的 P 值：$P(z \geq z_c | H_0) \approx 0.027$。
4. 作出统计推断。

   父亲患有心脏病的儿童胆固醇样本与一般儿童的数据有统计学意义上的显著差异。

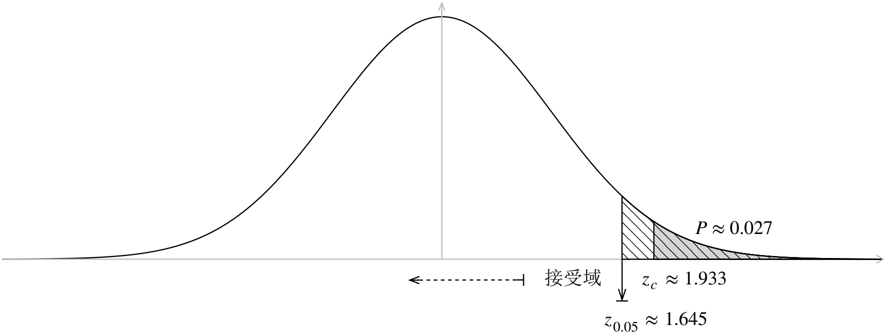

图 **7.2** 例题 7.2 的检验统计量与 P 值

1. 单样本平均数的检验
    - 总体方差已知
    - 总体方差未知
2. 单样本比率的检验
3. 单样本方差的检验

标准化统计量换作

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{s_{\overline{x}}} = \frac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \tag{7.3}$$

服从 t 分布。基于 t 分布的检验方法称为t 检验。

双尾检验时，设定零假设 $H_0 : \mu = \mu_0$，备择假设 $H_1 : \mu \neq \mu_0$。

将 μ_0 代入上式计算检验统计量

$$t_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s_{\overline{x}}} \tag{7.4}$$

双尾检验时，设定零假设 $H_0: \mu = \mu_0$，备择假设 $H_1: \mu \neq \mu_0$。

将 μ_0 代入上式计算检验统计量

$$t_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s_{\overline{x}}} \tag{7.4}$$

通过 t 分布的累积分布函数（**pt()**）计算相伴概率，

或通过分位数函数（**qt()**）计算显著性水平 α 下的检验临界值。

例 (7.4)

某观赏植物的苗高标准为 1.60 m，苗高达到或超过标准即可上市售卖。现在从一个苗圃中随机抽取 10 株，苗高分别为 1.69、1.77、1.64、1.59、1.63、1.59、1.58、1.68、1.69、1.69。试问该苗圃的观赏植物是否已经达到售卖标准?

解

1. 按照单尾检验的思路，设定零假设 $H_0: \mu < 1.6$，备择假设 $H_1: \mu \geq 1.6$。
2. 选取显著性水平 $\alpha = 0.01$。
3. 计算检验统计量和 P 值。
   - 计算样本平均数和样本方差得 $\overline{x} = 1.665$、$s \approx 0.060$。
   - 检验统计量 $t_c = \dfrac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{1.655 - 1.6}{0.06004628/\sqrt{10}} \approx 2.897$;
   - 计算单尾检验的 P 值：$P(t \geq t_c | H_0) \approx 0.009$。
4. 作出统计推断。

   该苗圃的观赏植物苗高与售卖标准之间有统计学意义上的显著差异，已经达到售卖标准。

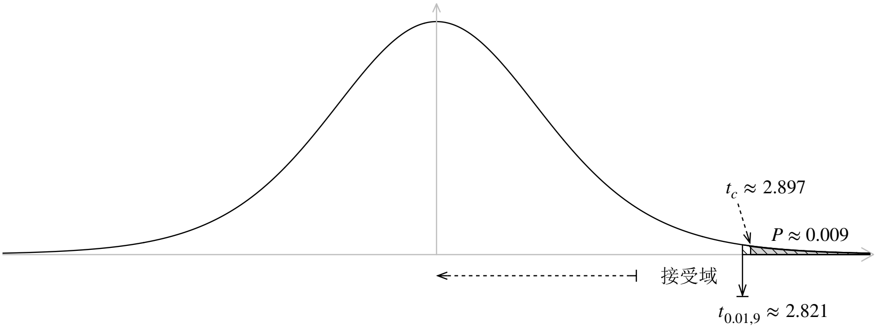

图 **7.4** 例题 7.4 的检验统计量与 P 值

1 单样本平均数的检验

2 单样本比率的检验

- 基于二项分布的精确方法
- 基于正态分布的近似方法

3 单样本方差的检验

1. 单样本平均数的检验

2. 单样本比率的检验
   - 基于二项分布的精确方法
   - 基于正态分布的近似方法

3. 单样本方差的检验

例 (7.5)

假设在某时期内某一个核工厂中，55～65 岁的男性死亡者 13 人中有 5 人死于癌症。据人口统计数据，死亡人数中 20% 的情况能归因于某种癌症。试问此结果是否有显著性?

解

1. 设定零假设 $H_0: p = 0.2$，备择假设 $H_1: p > 0.2$。
2. 选取显著性水平 $\alpha = 0.01$。
3. 计算相伴概率 P 值：$P(X \geq 5|H_0) = \sum_{k=5}^{13} \mathrm{C}_{13}^{k} 0.2^k (1-0.2)^{13-k} \approx 0.099$ (X 表示 55～65 岁男性死于癌症的人数)。
4. 作出统计推断。

   该核工厂中癌症死亡比率与男性一般癌症死亡率相比没有统计学意义上的显著差异。

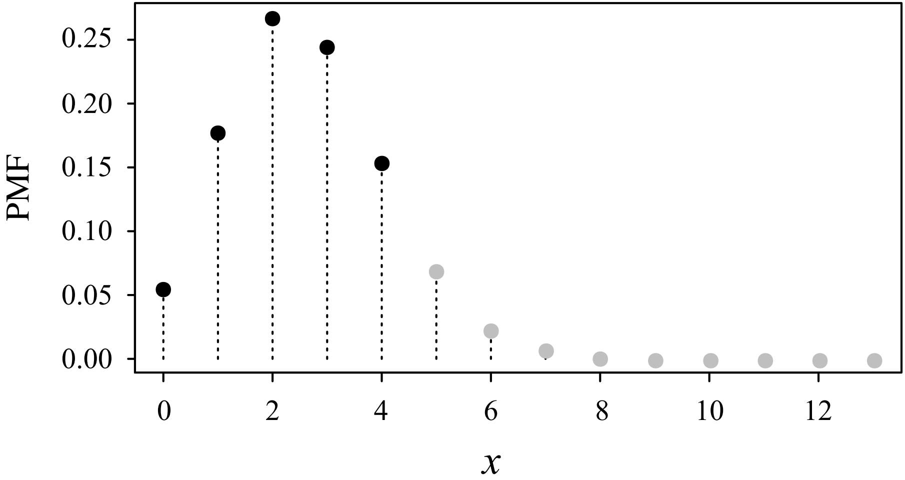

图 **7.7** 例题 7.5 的 P 值

1. 单样本平均数的检验
2. 单样本比率的检验
   - 基于二项分布的精确方法
   - 基于正态分布的近似方法
3. 单样本方差的检验

当 np 和 $n(1-p)$ 均大于 5 时，二项分布可用正态分布近似。

- 当 np 和 $n(1-p)$ 均大于 30 时，近似效果最佳，检验方法可直接使用 z 检验；
- 当 np 或 $n(1-p)$ 小于 30 时，近似效果需要连续性矫正因子矫正，同时检验统计量的抽样分布也需要根据样本量 n 的情况选择 $(n \geq 30)$ 标准正态分布 (z 检验) 或 $(n < 30)$ t 分布 (t 检验)。

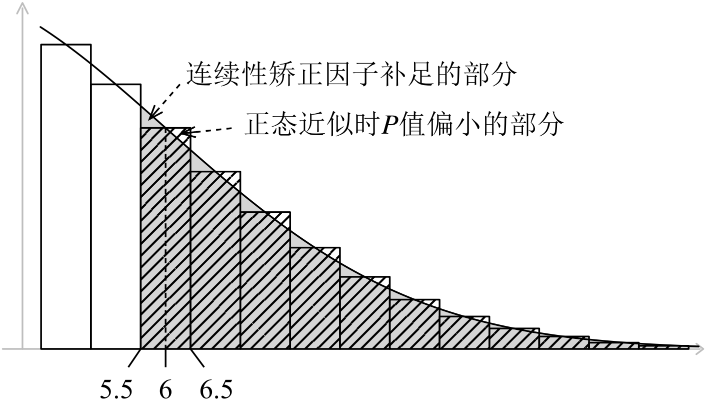

图 **7.9** 正态近似的连续性矫正

- 当 x 大于 np 时，矫正方法是减矫正因子 0.5，将检验统计量 z_c 调小，$P(z \geq z_c)$ 才会调大；
- x 小于 np 时，矫正方法是加矫正因子 0.5，将检验统计量 z_c 调大，$P(z \leq z_c)$ 才会调大。

用符号表示，即

$$z = \frac{(x - np) \mp 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}$$

其中 $\mp$ 表示在 x 大于 np 时取负号，在 x 小于 np 时取正号。

例 (7.8)

某养鸡场规定种蛋的孵化率达到 0.8 以上为合格。现对一批种蛋随机抽取 100 枚进行孵化试验，结果有 78 枚孵出。问这批种蛋是否合格?

解

1. 设定零假设 $H_0: p \leq 0.8$，备择假设 $H_1: p > 0.8$。
2. 选取显著性水平 $\alpha = 0.05$。
3. 计算检验统计量和 P 值。
   - 计算检验统计量：$z_c = \dfrac{(\hat{p} - p) \mp \dfrac{0.5}{n}}{\sqrt{p(1-p)/n}} = \dfrac{(0.78 - 0.8) \mp \dfrac{0.5}{100}}{\sqrt{0.8 \times 0.2/100}} = \dfrac{-0.02 + 0.005}{0.04} = -0.375$；
   - 计算单尾检验的 P 值：$P(z \geq z_c | H_0) \approx 0.646$。
4. 作出统计推断。

   该批种蛋孵化率不符合标准。

样本方差 s^2 经过标准化后得统计量 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$，服从自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布，即

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \tag{7.5}$$

基于 χ^2 分布的检验方法称为 χ^2 检验。

双尾 χ^2 检验时，设定零假设 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$，备择假设 $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$，

将 σ_0^2 代入上式得检验统计量

$$\chi_c^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \tag{7.6}$$

通过 χ^2 分布的累积分布函数计算相伴概率，

或通过分位数函数计算显著性水平 α 下的检验临界值。

例 (7.10)

已知某水稻田受到重金属污染，抽样测定其镉含量（单位：$\mu g/g$）分别为 3.6、4.2、4.7、4.5、4.2、4.0、3.8 和 3.7。试问该污染水稻田镉含量的方差与正常农田镉含量的方差 $0.065\ (\mu g/g)^2$ 是否相同?

解

1. 按照双尾检验问题的提法，设定零假设 $H_0 : \sigma^2 = 0.065$，备择假设 $H_1 : \sigma^2 \neq 0.065$。
2. 选取显著性水平 $\alpha = 0.05$。
3. 计算检验统计量和 P 值。
   - 检验统计量 $\chi_c^2 = \dfrac{(8-1) \times 0.150}{0.065} \approx 16.135$；
   - 双尾检验的 P 值 $P(\chi^2 \geq \chi_c^2 | H_0) \times 2 \approx 0.048$。
4. 作出统计推断。

   受污染农田的镉含量的方差与正常农田镉含量的方法有统计学意义上的显著差异。

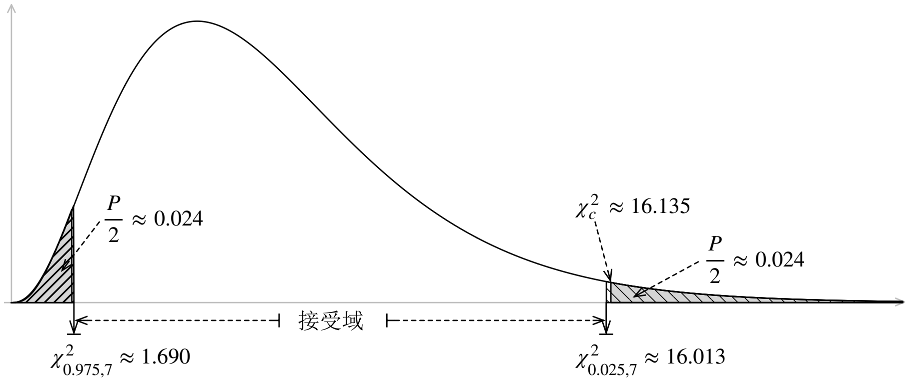

图 **7.10** 例题 7.10 的检验统计量与 P 值

本章小结

1. 单样本平均数的检验
   - 总体方差已知
   - 总体方差未知
2. 单样本比率的检验
   - 基于二项分布的精确方法
   - 基于正态分布的近似方法
3. 单样本方差的检验